1 Interpolació

Definició 1 (Interpolació)**.** Diem que una funció f interpola una altra funció g en els punts $x_0, \ldots, x_n$ del domini de f i de g si $f(x_i) = g(x_i), 0 \leq i \leq n$.

Teorema 1.1 (Existència i unicitat del polinomi interpolador)**.** *Siguin* $(x_0, f(x_0))$, $\ldots, (x_n, f(x_n))$ *parells de nombres reals arbitraris amb* $x_i \neq x_j$ *si* $i \neq j$. *Llavors, existeix un únic polinomi* p *de grau menor o igual a* n *tal que* $p(x_i) = f(x_i), 0 \leq i \leq n$.

Demostració. Per inducció sobre n.

El cas $n = 0$ és trivial: prenem el polinomi constant $p(x) = f(x_0)$.

Per $n = 1$ tenim:

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Suposem ara que existeix un polinomi p_{n-1} que interpola f en els punts $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Llavors, imposem que:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x)}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})}(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

Comprovem que p_n interpoli tots els punts $x_0, \ldots, x_n$. Per a $x_i, 0 \leq i < n$, es té que l'últim sumand es cancel·la i tan sols queda $p_{n-1}(x_i)$, que per hipòtesi d'inducció interpola f.

En canvi, per a x_n tenim:

$$p_n(x_n) = p_{n-1}(x_n) + \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})}(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}) =$$

$$= p_{n-1}(x_n) + f(x_n) - p_{n-1}(x_n) = f(x_n)$$

Per demostrar la unicitat, suposem que existeixen dos polinomis interpoladors diferents p i q amb aquestes propietats. Sigui $r(x) = p(x) - q(x)$. Cada $x_i, 0 \leq i \leq n$ és una arrel de r, però r és de grau menor o igual a n i té $n + 1$ arrels; pel teorema fonamental de l'àlgebra, $r = 0$ i per tant $p = q$. □

Notació. Siguin $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, llavors $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ és l'interval tancat més petit que conté $x_0, \ldots, x_n$.

Teorema 1.2 (Error en la interpolació)**.** *Sigui f amb $n+1$ derivades contínues en $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$. Si p és un polinomi de gran menor o igual a n que interpola a f en $x_0, \ldots, x_n$, aleshores:*

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

Per a algun $\xi(x) \in \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$.

Demostració. Fixem $x \in \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$. □