MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2016/17. Semestre de tardor

PRÀCTICA 11

Exercici 1 [Arrels dels polinomis de Legendre pel mètode de la secant]

Els polinomis de Legendre, $(P_i)_{i\geq 0}$, es poden definir mitjançant la recurrència:

$$\begin{cases} P_0(x) &= 1 \ , \\ P_1(x) &= x \ , \\ P_i(x) &= \frac{2i-1}{i} x P_{i-1}(x) - \frac{i-1}{i} P_{i-2}(x) \ , \ \forall i \geq 2 \ . \end{cases}$$

Se sap:

- Per a cada $i \geq 0$, $P_i(x)$ és un polinomi de grau estricte i.
- Per a cada $i \geq 1$, $P_i(x)$ té i arrels reals, diferents, i situades a l'interval $(-1, +1)$.
- Per a cada $i \geq 1$, les arrels de $P_{i+1}(x)$ **separen** les de P_i. O sigui, entre cada dues arrels consecutives de $P_{i+1}(x)$ hi ha una arrel de $P_i(x)$.

Es poden usar les propietats anteriors per a trobar les arrels de $P_i(x)$, $\forall i = 1, 2, \ldots, imax,$, de manera recurrent respecte i:

- L'única arrel de $P_1(x)$ és coneguda: $z_{1,0} = 0$.
- Si, per a un grau $i \geq 1$, ja són conegudes les arrels de $P_i(x)$:

  $$z_{i,0} < z_{i,1} < z_{i,2} < \ldots < z_{i,i-2} < z_{i,i-1} \ ,$$

  llavors podem trobar les arrels de $P_{i+1}(x)$, una a una, aplicant el **mètode de la secant** a cadascun dels intervals on sabem que n'hi ha una:

  $$(-1, z_{i,0}), \ (z_{i,0}, z_{i,1}), \ (z_{i,1}, z_{i,2}), \ \ldots, (z_{i,i-2}, z_{i,i-1}), \ (z_{i,i-1}, +1) \ .$$

Per tant:

- Programeu una funció de capçalera

  ```
  double legendre(int i, double x)
  ```

  que retorni el valor $P_i(x)$, calculat usant la recurrència.
- Programeu una funció de capçalera

  ```
  int secant(int i, double *x0, double *x1, double prec, int nmax)
  ```

on s'usi el **mètode de la secant** per a trobar l'arrel de $P_i(x)$ que hi ha a l'inteval (x_0, x_1).

El mètode de la secant per a una equació $f(x) = 0$ és

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \ , \ n \geq 1 \ .$$

S'iterarà el mètode fins que passi alguna de les coses següents:

- el valor $|P_i(x_{n+1})|$ és inferior a una precisió desitjada: `prec`;
- la diferència entre els dos últims iterats ccalculats, $|x_{n+1} - x_n|$, és inferior a la precisió desitjada `prec`;
- $n + 1$ arriba a un nombre màxim d'iteracions permeses: `nmax`.

En els primers dos casos, es considerarà que s'ha convergit i la funció retornarà el valor 0. En el tercer cas, es considerarà que no s'ha convergit i la funció retornarà el valor 1.

Nota. Evidentment, aquesta funció haurà de cridar la funció anterior per a poder fer les avaluacions de $f(x) \equiv P_i(x)$.

- Feu un programa `main` on es llegeixin *imax*, *nmax*, *prec* (per exemple, 15, 15 i 10^{-14}, respectivament), i es calculin i s'escriguin les arrels que es van trobant. Si voleu, podeu guardar tots els zeros que aneu trobant en una *matriu triangular*.

Observació.

Cada vegada que es crida la funció `secant` per a trobar una nova arrel $z_{i+1,j}$ de $P_{i+1}(x)$, cal usar valors inicials adequats x_0 i x_1.

Per la tercera propietat dels polinomis de Legendre, uns possibles candidats són les arrels $z_{i,j-1}$ i $z_{i,j}$ (o ± 1 quan calgui) del polinomi de grau inferior $P_i(x)$.

Però, així que augmenta el grau, això va, a vegades, malament (no hi ha convergència a l'arrel buscada). Així que cal prendre valors inicials més pròxims a l'arrel buscada. Per exemple $z_{i,j-1} + \frac{1}{3}(z_{i,j} - z_{i,j-1})$ i $z_{i,j-1} + \frac{2}{3}(z_{i,j} - z_{i,j-1})$.