MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2015/16, primer semestre.

Examen parcial del 11 de novembre de 2015

1.-[8 punts] Es vol calcular la quantitat $R = \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2$.

(a) Demostreu que les 4 expressions següents són equivalents:

$$\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2 \;, \quad 8 - 2\sqrt{3}\sqrt{5}\;, \quad \frac{4}{\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2}\;, \quad \frac{2}{4 + \sqrt{3}\sqrt{5}}\;.$$

(b) Suposem que $\sqrt{5}$ i $\sqrt{3}$ es coneixen només aproximadament, amb errors absoluts pròxims a 0 i de magnitud semblant. Quina de les 4 expressions de l'apartat anterior és millor numèricament per a calcular R?

2.-[8 punts]

(a) Siguin $a, b, c > 0$. Suposem que, en el càlcul de $y = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, cada operació elemental (3 arrels quadrades, una suma i un quocient) es fa amb un error relatiu fitat per $\epsilon (<< 1)$. Trobeu una fita de l'error relatiu en el resultat y de la forma $k\epsilon + O(\epsilon^2)$, amb k constant independent de a, b, c.

(b) Calculeu $\frac{\sqrt{59}}{\sqrt{47}+\sqrt{97}}$ treballant en base 10 i usant 5 dígits significatius (o sigui, el resultat de cada operació elemental s'arrodoneix a 5 dígits significatius).

3.-[10 punts] Sigui A una matriu $n \times n$ tridiagonal i simètrica. Anomenem a_i ($\forall i = 1, 2, \ldots, n$) els elements de la diagonal principal, i b_i ($\forall i = 1, 2, \ldots, n-1$) els elements que estan situats immediatament per sobre o per sota de la diagonal principal.

(a) Suposem que A és definida positiva i que, per tant, té factorització de Cholesky $A = U^t U$, amb U triangular superior i elements de la diagonal positius. Trobeu fórmules que permetin calcular recurrentment els elements essencials de U (els que no podem assegurar que siguin 0), i compteu el nombre d'operacions que cal fer (arrels quadrades, quocients, productes i restes, per separat).

(b) En el cas particular $a_i = 2$ ($\forall i = 1, 2, \ldots, n$) i $b_i = \sqrt{1.1}$ ($\forall i = 1, 2, \ldots, n-1$), fins a quin valor de la dimensió n és A definida positiva?

Indicació: Sigui d_n el determinant de la matriu A en el cas de dimensió n. Deduïu una recurrència per a trobar d_n en funció de d_{n-1} i d_{n-2} i useu-la.

4.-[6 punts] Es consideren matrius A, 2×2, de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, amb $a, b \in R$.

Vegeu que, encara que s'imposi que A és definida positiva i que tingui determinant 1, el nombre de condició $K_\infty(A)$ pot ser arbitràriament gran (de fet, pròxim a $4|b|^2$, quan $|b|$ és molt gran).

<u>Entregueu problemes diferents en fulls diferents</u>