MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2016/17. Semestre de tardor

PRÀCTICA 2

Exercici 1 [Pèrdua de dígits significatius]

Quan es calculen sumes

$$S = \sum_{i=0}^{N} x_i$$

on hi ha termes x_i positius i negatius, i tals que el resultat final S és molt més petit que alguns x_i, és molt fàcil perdre xifres significatives en el resultat.

Comproveu-ho calculant e^x, amb $x < 0$, mitjançant la sèrie de Taylor

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i \ .$$

- Donat $x < 0$, es van acumulant termes de la sèrie, mentre tinguin valor absolut superior a una precisió donada (per ex., 10^{-15}). Suposant que la funció incorporada exp dóna el valor exacte, calculeu els errors absolut i relatiu comesos. Observeu com es va deteriorant el resultat quan x es va fent més negatiu (feu, per ex. $x = -1, -2, \ldots, -25$).
- Penseu una manera alternativa de calcular la suma que sigui numèricament millor (Idea: Useu $-x$ enlloc de x).

Exercici 2 [Estabilitat/Inestabilitat numèrica]

Sigui

$$y_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx \ , \quad \forall n \geq 0 \ .$$

És fàcil comprovar que

$$\frac{1}{n+1} \leq y_n \leq \frac{e}{n+1} \ , \quad \forall n \geq 0 \ .$$

Es vol calcular y_N per a $N = 25$ (per exemple).

- Feu-ho usant la *recurrència endavant*:

  $$\begin{aligned} y_0 &= e - 1 \ , \\ y_n &= e - n \, y_{n-1} \ , \quad \forall n = 1, 2, \ldots, N \ . \end{aligned}$$

  És correcte el resultat?

- Useu ara la *recurrència endarrera*:

$$\begin{aligned} y_{2N} &= \tfrac{e+1}{2(N+1)} \ , \\ y_n &= \tfrac{1}{n+1}(e - y_{n+1}) \ , \quad \forall n = 2N-1, 2N-2, \ldots, N \ . \end{aligned}$$

  És millor el resultat?

Sabeu explicar què passa?

Notes.

- Comproveu que la successió (y_n) verifica les recurrències donades.
- Per què es dóna el valor inicial y_{2N}?
- Canvieu el valor inicial y_{2N} per altres de pitjors, i mireu si els resultats trobats són correctes.