MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2016/17. Semestre de tardor

PRÀCTICA 8

Referència. J. Stoer & R. Bulirsch: Introduction to Numerical Analysis. Springer-Verlag.

Exercici 1 [Interpolació d'una taula de valors mitjançant un spline cúbic natural]

Siguin $n > 1$ un natural, $\Delta \equiv \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ una partició de $[a, b] \subset R$ en n subintervals i $Y \equiv \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ un conjunt de $n + 1$ valors reals.

La funció **spline cúbic interpolador natural associada a Δ i Y** és $S : [a, b] \to R$ tal que

- $S \in C^2([a, b])$; i $\forall j = 0 \div n - 1$, $S_j \equiv S|_{[x_j,x_{j+1}]} \in P_3$ (spline cúbic).
- $\forall j = 0 \div n - 1$, $S(x_j) = y_j$ (interpolador).
- $S''(a) = S''(b) = 0$ (natural).

Es pot veure que existeix una única funció S verificant aquestes condicions. Resumim a continuació un **mètode de càlcul** de les $n - 1$ funcions S_j $(j = 0 \div n - 1)$.

(1) Notació: $M_j = S''(x_j)$ $(j = 0 \div n)$ s'anomenen *moments*; i $h_{j+1} = x_{j+1} - x_j$ $(j = 0 \div n-1)$ són les *longituds dels subintervals*.

(2) El spline buscat es pot expressar en funció dels moments M_j's i de les dades x_j's i y_j's. Concretament, per a cada $j = 0 \div n - 1$, és

$$S_j(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_{j+1}} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_{j+1}} + A_j(x - x_j) + B_j \ , \quad \forall x \in [x_j, x_{j+1}] \ ,$$

on

$$B_j = y_j - M_j \frac{h_{j+1}^2}{6} \ , \quad A_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j) \ .$$

(3) Els moments $M_0 = M_n = 0$ són coneguts, i per a trobar els altres, M_j $(j = 1 \div n - 1)$, cal resoldre el sistema lineal tridiagonal de $n - 1$ equacions i incògnites

$$\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \ , \ j = 1 \div n - 1 \ .$$

Feu un programa que implementi l'algorisme anterior; o sigui,

- Llegeixi les dades n, Δ i Y, i ompli un vector amb les longituds h_j dels subintervals, usant (1).

- Ompli els 4 vectors que defineixen el sistema lineal de (3): les 3 diagonals de la matriu i el terme independent.
- Resolgui el sistema tridiagonal per a trobar els moments M_j's.
- Calculi els vectors de les B_j's i les A_j's, usant les fórmules de (2).

Això resol el problema de trobar els polinomis S_j's.

Atenció: Per a facilitar la implementació, es recomana usar exactament els mateixos índexs de les fórmules donades aquí. O sigui, per a alguns vectors s'usa la component 0 però per a altres no. Igualment amb la component n. Adapteu el codi que ja tingueu fet per a resoldre sistemes tridiagonals a aquesta situació.

A continuació, **el programa ha d'avaluar el spline** trobat en $m+1$ punts equidistants (amb m bastant més gran que n, per exemple $m = 10n$). Useu les fórmules dels S_j's donades a (2).

Apliqueu-ho a un conjunt concret de dades: n, Δ i Y. Pinteu la gràfica del spline cúbic interpolador natural i compareu-la amb la del polinomi interpolador.

Exemple. $n = 5$ i

x_i	0	0.5	1	2	3	5
y_i	1	0.8	0.5	0.2	0.1	0.03846

Exercici 2 [Interpolació d'una funció per un spline cúbic natural]

Feu una variació del programa anterior per tal que interpoli una funció $f(x)$ en un interval $[a, b]$ (en lloc d'una taula de valors).

Donat n, es consideraran les $n+1$ abscisses de Δ que sigui **equidistants** a $[a, b]$: $x_j = a+jh$ $(j = 0 \div n)$, on $h = (b-a)/n$.

Apliqueu-ho als exemples:

- $f(x) = |x|$ a l'interval $[-1, +1]$.
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a l'interval $[-5, +5]$.

Compareu les gràfiques que obteniu amb les de la interpolació polinomial.