MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2016/17. Semestre de tardor

PRÀCTICA 3

L'objectiu és explorar de quina manera depenen les arrels d'un polinomi d'un dels seus coeficients. Concretament, es calcularà la **propagació de l'error relatiu** d'una dada cap a diversos resultats.

Pel que fa a eines del llenguatge C, caldrà usar vectors i funcions.

Exercici 1 [Pertorbació d'un polinomi]

Primera part

Feu un programa `main` tal que:

- Llegeixi un valor enter $n > 0$ i, seguidament, n valors reals: $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Els valors z_k es guardaran en un vector z.

  Nota. No doneu cap $z_i = 0$, ja que, per a calcular la variació relativa del resultat, caldrà dividir per z_i.

- Calculi i escrigui els coeficients c_i del polinomi

$$p(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - z_k) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n \ .$$

  Els coeficients c_i es guardaran en un vector c. El seu càlcul es fa recurrentment:

  - Inicialment $p(x) = 1$ o, equivalentment, $c = (1, 0, 0, \ldots, 0)$.
  - Per a cada $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, s'actualitza $p(x)$ multiplicant-lo per $(x - z_k)$. Realment, heu d'actualitzar les components del vector c:
    - Després de multiplicar per $(x - z_0)$ ha de ser $c = (-z_0, 1, 0, \ldots, 0)$.
    - Després de multiplicar per $(x - z_1)$ ha de ser $c = (z_0 z_1, -z_0 - z_1, 1, 0, \ldots, 0)$.
    - etc.

    Deduïu les fórmules d'actualització dels coeficients c_i i programeu-les.

Segona part (continuació del programa anterior)

Llegiu un valor $\epsilon \approx 0$ (per exemple $1.e-6$) i modifiqueu lleugerament el polinomi $p(x)$ així: el coeficient c_{n-1} es multiplica per $(1+\epsilon)$. O sigui, es fa una *pertorbació* del coeficient del monomi x^{n-1}, d'error relatiu $|\epsilon|$.

Heu de programar la cerca de les noves arrels de $p(x)$ (siguin y_k), les quals seran pròximes a les arrels inicials z_k, i després calcular la variació relativa que han tingut $\delta_k \equiv (y_k - z_k)/z_k$. El **factor de propagació de l'error relatiu** de l'arrel k-èsima és, doncs, δ_k/ϵ.

Per a trobar les noves arrels heu de fer:

- $\forall k = 0, 1, \ldots, n-1$, crideu una funció que apliqui el *mètode de Newton-Raphson* a l'equació $p(x) = 0$, a partir de l'aproximació inicial $x_0 = z_k$. El prototipus seria

  ```
  int newton(int n, double *c, double *x);
  ```

  La funció retorna un valor `int`, el qual indica si hi ha hagut, o no, convergència (segons els criteris del punt que ve a continuació). Si n'hi ha hagut, l'arrel és a `x`.

- A la funció, heu d'implementar la fórmula de Newton-Raphson

  $$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{p'(x_i)} \; , \; \forall i \geq 0 \; .$$

  Fixeu una *precisió* desitjada ($1.e-10$ per exemple), i un *nombre màxim d'iteracions* permeses (8, per exemple). Es pararan les iteracions,

  - o bé quan la distància entre els dos últims iterats sigui menor que la precisió: llavors es considerarà l'últim iterat com la solució buscada;
  - o bé quan s'esgotin les iteracions permeses sense aconseguir la precisió desitjada: llavors es considerarà que no s'ha pogut trobar l'arrel.

- L'avaluació del polinomi $p(x)$ i de la seva derivada $p'(x)$ en un valor $x = r$ s'ha de programar mitjançant una funció de prototipus

  ```
  void horner(int n, double *c, double z, double p[2]);
  ```

  en la qual s'implementa l'**algorisme de Horner** (amb derivada primera):

  - Inicialització:

    $$\left\{ \begin{array}{lcl} p & = & c_n \\ p' & = & 0 \end{array} \right.$$

  - Recurrència:

    $$\forall j = n-1, n-2, \ldots, 1, 0 \; \left\{ \begin{array}{lcl} p & \leftarrow & c_j + r * p \\ p' & \leftarrow & p + r * p' \end{array} \right.$$

Exercici 2 (voluntari)

Feu una explotació sistemàtica del programa de l'exercici 1 per tal d'obtenir gràfiques de les funcions $z_k = z_k(\epsilon)$ en un entorn de $\epsilon = 0$ (*continuació de les arrels*).

Nota. Depenent de quan gran és n, de la posició relativa dels zeros inicials z_k i del pas de variació de ϵ, hi ha problemes en la convergència de Newton-Raphson.

Un exemple amb pocs problemes és: $n = 6$, $x_k = k + 1 \; \forall k = 0 \div 5$, i ϵ variant amb pas $1.e-6$ fins al valor $1.e-3$.