Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
Grado en Ingeniería Informática

Algebra.
Relación de problemas 5.
Aplicaciones lineales.

1. Estudiar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

   a) $f : R^3 \to R^3, f(u) = u + u_0$, con u_0 un vector fijo de R^3.

   b) $g : R^3 \to R^3, g(x) = u_{0,}$ con u_0 un vector fijo de R^3.

   c) $h : R^3 \to R^3, h(x_1, x_{2,}x_3) = (x_1^2, 0, x_2 + x_3)$.

   d) $F : R_3[x] \to R_3[x], F(p(x)) = xp'(x)$, donde $p'(x)$ es la derivada de $p(x)$.

2. Sea C el cuerpo de los números complejos considerado como $R-$espacio vectorial de dimensión dos y sea $B = \{e_1 = 1, e_2 = i\}$ la base canónica. Consideremos la aplicación $f : C \longrightarrow C$ definida por $f(a + bi) = (a - b) + (b - a)i$. Se pide:

   a) Demostrar que f es un endomorfismo (no automorfismo).

   b) Obtener las ecuaciones de f respecto de la base canónica.

3. Sea $f : R^3 \longrightarrow M_2(R)$ la aplicación lineal definida por:

   $f(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcular la expresión matricial de f respecto de las bases canónicas.

   b) Hallar las bases de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

4. Se considera el espacio vectorial de las funciones reales definidas sobre R y sea

   $U = L(e^{3x}, x\ e^{3x}, x^2e^{3x})$

   a) Calcular base de U.

   b) Sea $\Phi : U \to U$ dada por $\Phi(f) = f'(x)$.

   b.i) Razonar que Φ es una aplicación lineal.

b.ii) Calcular la expresión matricial respecto de la base de U.

b.iii) Calcular el núcleo y la imagen de Φ.¿Es Φ un isomorfismo de espacios vectoriales?

b.iv) Dado el vector $f(x) = 2\, e^{3x} + 4x\, e^{3x} - x^2 e^{3x}$ determinar su imagen utilizando b.ii) y comprobar el resultado utilizando derivación.

5. En R^3 se consideran los subespacios $U = L(1,1,1)$ y $W \equiv x + y + z = 0$. Determinar un endomorfismo f de R^3 de forma que Ker(f)=U e Im(f)=W.

6. Sea $V = R^3$ un espacio vectorial sobre R y f un endomorfismo en V verificando:

   $f(e_1) = e_1 + 2e_2$

   $f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$

   $f(e_3) = 2e_2 + e_3$

   donde $B = \{e_1 = (0,1,0), e_2 = (-1,0,0), e_3 = (0,0,1)\}$ es base de V. Se pide:

   i) Calcular las matrices asociadas a f. respecto de la base B y también en la base canónica.

   ii) Estudiar si f es un automorfismo.

7. Sean V y V' espacios vectoriales de la misma dimensión y f una aplicación lineal entre ellos, demostrar que f es inyectiva sii f es biyectiva.

8. Sea la aplicación lineal $f : R^3 \to R^4$ la aplicación lineal dada por $f(x,y,z) = (2x, x+y, 3x+y-z, y+5z)$. Se pide:

   i) Calcular la matriz asociada a f.respecto de las bases canónicas de.R^3 y R^4.

   ii) Demostrar que

   $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

   y

   $B' = \{(1,2,3,0), (2,4,6,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$

   son bases de R^3 y R^4respectivamente y calcular la matriz asociada a f respecto de estas bases.

iii) Calcular de forma explícita la relación existente entre las matrices de los apartados i) y ii).

9. Sea V el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en R. Consideremos

   $U = \{ \begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} \ / \ a, b, c \in R \ \}$

   Se pide:

   A) Demostrar que U es subespacio vectorial de V.

   B) Probar que $B = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \}$ es base de U .

   C) Calcular un subespacio suplementario de U .

   D) Hallar la matriz del endomorfismo $f \colon U \to U$ definido por

   $f \begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b+c \\ -2b+c & 0 \end{pmatrix}$ en la base B.

   E) Calcular base, ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo y la imagen. ¿Es un automorfismo?.

10. Sea $V = Z_2^3$ y $V' = M_2(Z_2)$ espacios vectoriales. Sea $f : V \to V'$ la aplicación lineal definida por

$f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

i) Probar que

$B = \{1,1,0),(1,1,1),(0,1,0)\}$ y

$B' = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$

son bases de V y V', respectivamente.

ii) Calcular la expresión matricial de f respecto de las bases B y B'.

iii) Calcular bases de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

iv) Calcular las ecuaciones implícitas de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

v) ¿Puede ser f un isomorfismo?

vi) Calcular un subespacio suplementario de $Im(f)$.

11. Consideremos C el espacio vectorial sobre R de los números complejos y en él la base $B = \{1, i\}$. Sea $f : C \to C$ la aplicación lineal dada por

$f(1 + 2i) = i$

$f(3) = -i$

i) Demostrar que $B' = \{1 + 2i, 3\}$ es base de C.

ii) Calcular la expresión matricial de f respecto de la base B.

iii) Calcular la expresión matricial de f respecto de la base B'.

iv) ¿Qué relación existe entre las matrices obtenidas en los apartados ii) y iii)?Comprobarlo explícitamente.

v) Razonar si f es un isomofismo.