TEMA 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES, MATRICES Y DETERMINANTES.

OBJETIVOS:

Generales:

1. Ampliar el conocimiento acerca de la resolución de sistemas de ecuaciones con los procedimientos propios del tema,
2. Captar la utilidad del manejo de las matrices para realizar cálculo y sus aplicaciones y
3. Distinguir perfectamente los conceptos de matriz y determinante y conocer las aplicaciones de éstos.

Específicos:

- Conocer el concepto de sistema de m ecuaciones y n incógnitas y saber resolver dichos sistemas empleando el método de Gauss-Jordan.
- Conocer el Teorema de Rouché-Frobenius y mediante su aplicación saber resolver sistemas de ecuaciones.
- Saber discutir, y en su caso resolver, sistemas de ecuaciones con parámetros.
- Conocer el concepto de matriz, así como los principales tipos de matrices existentes. Matrices elementales.
- Saber operar con matrices y propiedades que verifican estas operaciones.
- Saber obtener la inversa de una matriz dada mediante el método de las transformaciones elementales.

- Utilizar el lenguaje matricial y operaciones con matrices como instrumento para representar e interpretar datos, relaciones y ecuaciones (expresión matricial de un sistema de ecuaciones).
- Interpretar la expresión de un determinante y saber resolverlos con soltura.
- Interpretar y demostrar algunas de las propiedades principales de los determinantes.
- Manejar con soltura el concepto de rango de una matriz y conocer sus aplicaciones. Saber calcular el rango de cualquier matriz.
- Conocer la Regla de Cramer y mediante su aplicación saber resolver sistemas de ecuaciones.

BIBLIOGRAFIA ESPECÍFICA

MERINO L., SANTOS E. Álgebra Lineal con métodos elementales. 1997

ANTON H. Introducción al Álgebra Lineal. Ed Limusa. 1990

BURGOS J. Álgebra Lineal. Ed McGraw-Hill. 1993

GROSSMAN S. Álgebra Lineal con aplicaciones. Ed McGraw-Hill.1992

I. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

I.1 ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, una **ecuación lineal** con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ y reciben el nombre de **coeficientes**; $b \in \mathbb{K}$ y se llama **término independiente** y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son símbolos que llamaremos **incógnitas.**

Una **solución** de una ecuación es una asignación de valores de forma que se verifique la igualdad.

Un conjunto de m ecuaciones lineales con las mismas incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se llama **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.**

Llamaremos **solución** del sistema a cada asignación de valores de las incógnitas, $x_1=k_1, \ldots, x_n=k_n$ que haga verificarse todas las igualdades simultáneamente. Se dice que $(k_1, \ldots, k_n)$ es solución del sistema. Llamaremos **solución general** del sistema al conjunto de todas las soluciones del sistema. Dos sistemas se dice que son **equivalentes** si tienen la misma solución general.

Según el número de soluciones los sistemas podemos clasificarlos por:

a) **Sistemas compatibles**, si tienen alguna solución:
   - a.1) **Determinados**, solo una solución.
   - a.2) **Indeterminados**, más de una solución.

b) **Sistemas incompatibles**, sin solución.

Al proceso de estudiar a que tipo pertenece un sistema dada lo llamaremos **discutir** el sistema.

Un sistema se dice **homogéneo** si, $b_i = 0, \forall i$. Todo sistema homogéneo es compatible pues admite la solución $(0,\dots,0)$.

I.2 MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.

El método consiste en conseguir a partir del sistema dado otro equivalente pero más simple y así sucesivamente hasta llegar a un sistema equivalente al primero pero tan simple que sus soluciones sean conocidas.

Proposición

Si en un sistema de ecuaciones se intercambian dos ecuaciones, se multiplica una ecuación por un elemento no nulo del cuerpo o se suma a una ecuación otra multiplicada por un elemento del cuerpo, se obtiene un sistema equivalente.

Algoritmo (Pasar un sistema, a otro escalonado reducido)

Paso 1: Se toma como primera ecuación una en la que el coeficiente de x_1 sea no nulo.

Paso 2: Se divide esta primera ecuación por el coeficiente de x_1.

Paso 3: Se elimina la incógnita x_1 de las restantes ecuaciones, restándoles la primera multiplicada por el número conveniente.

Paso 4: Se deja fija la primera ecuación y se repite el proceso (pasos 1, 2 y 3) para las demás ecuaciones y la incógnita x_2.

Así sucesivamente para las siguientes incógnitas y previa eliminación de las ecuaciones $0 = 0$ que se verifican para cualquier asignación de valores de las incógnitas obtenemos un **sistema escalonado** de la forma:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_r + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

Llamaremos **incógnitas principales** a aquellas que aparecen como primera incógnita en alguna de las ecuaciones y **libres o secundarias** a las demás.

Cada incógnita principal de una ecuación puede ser eliminada de las restantes y obtener un **sistema escalonado reducido**.

Discusión de un sistema escalonado reducido.

Caso 1: Si aparece una ecuación b = 0 con b $\neq$ 0 el sistema será incompatible.

Caso 2: Si todas las incógnitas son principales, el sistema escalonado reducido es de la forma:

$$\begin{cases} x_1 & & & = b_1 \\ & x_2 & & = b_2 \\ & & \dots\dots & \\ & & x_r & = b_r \end{cases}$$

y por tanto es compatible determinado con $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2, \dots, x_n = b_n$.

Caso 3: Si existen incógnitas libres, entonces las incógnitas principales pueden despejarse en función de las libres y existe una solución para cada elección de las incógnitas libres. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado. La solución se obtiene asignado a cada incógnita libre un parámetro.

II. MATRICES.

II.1 MATRICES: DEFINICIONES Y NOTACIONES.

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, una **matriz** de orden m $\times$ n con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una caja de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j}$$

que consta de nm elementos de $\mathbb{K}$ distribuidos en m filas y n columnas de forma que denotamos por a_{ij} al elemento situado en la fila i, columna j.

Dos matrices son **iguales** si tiene igual orden e igual elementos en cada una de sus posiciones.

A una matriz con una sola fila la llamaremos **matriz fila** y a la matriz con una sola columna **matriz columna.**

Una matriz es **cuadrada** si tiene igual número de filas que de columnas, es decir, si es de orden $n \times n$ para algún n.

Notaremos por $\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ al conjunto de las matrices de orden $m \times n$ y $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ si m=n.

Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ constituyen la **diagonal principal.** Se dice que A es una **matriz diagonal** si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A es **triangular superior** si todos los elementos por debajo de su diagonal son cero ($a_{ij} = 0, \forall i>j$) y **triangular inferior** si todos los elementos por encima de su diagonal son cero ($a_{ij} = 0, \forall i<j$).

Llamaremos **matriz identidad** de orden n a la matriz cuadrada I_n que tiene 1 en la diagonal principal y 0 en el resto:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{i,j}$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker y vale 1 si i=j y 0 en otro caso.

Para una matriz A, llamaremos **submatriz** de A a cada matriz obtenida de A suprimiendo algunas de sus filas y columnas.

Por último, se llama **traza** de una matriz cuadrada A a $\mathbf{tr(A)} = \mathbf{a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}}$.

II.2 OPERACIONES CON MATRICES.

Dadas dos matrices $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, definimos su **suma,** como la matriz de orden $m \times n$ cuyos coeficientes son suma de los correspondientes de A y B:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{11} + b_{11} \end{pmatrix}$$

Propiedades

$(\mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), +)$ es un grupo abeliano. Esto es la suma de matrices verifica las propiedades asociativa, conmutativa, existencia de elemento neutro y elemento simétrico.

Dada una matriz $A=(a_{ij}) \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y dado un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, se define su **producto** como la matriz de orden $m \times n$ cuyos coeficientes son el producto de α por los correspondientes de A:

$$\alpha A = (\alpha\ a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{2n} \\ & & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades

El producto de un escalar por una matriz verifica las siguientes propiedades:

i) **Distributiva respecto de la suma de escalares:**
$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

ii) **Distributiva respecto de la suma de matrices:**
$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall A, B \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

iii) **Pseudoasociativa:**
$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A);\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

iv) **Ley de identidad:** $1A=A,\ \forall A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Dadas $A=(a_{ik}) \in \mathbf{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$ y $B=(b_{ij}) \in \mathbf{M}_{p \times n}(\mathbb{K})$, se define su **producto** como la matriz

$$AB = (c_{ij}) \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

donde $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$.

Notar que para multiplicar A y B es necesario que el numero de columnas de A sea igual que el numero de filas de B y en tal caso la matriz AB tiene tantas filas como A y tantas columnas como B.

Propiedades

El producto de matrices verifica las siguientes propiedades:

1. $A(BC)=(AB)C$, siempre que tenga sentido.
2. Dada $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $I_mA = A$ y $AI_n = A$.
3. $A(B + C) = AB + AC$, si tiene sentido.
4. $(A + B)C = AC + BC$, si tiene sentido.
5. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$, si tiene sentido.

En el conjunto $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ de las matrices cuadradas de orden n, el producto de matrices es una operación interna y se tiene:

Teorema

$(\mathbf{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ es un anillo, no conmutativo.

Dada una matriz $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, llamaremos **matriz traspuesta** de A, A^t es la matriz cuyas filas son las columnas de A.

Propiedades

La trasposición de matrices verifica las siguientes propiedades:

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$; $\forall A, B \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
2. $(AB)^t = B^tA^t$; $\forall A, B \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$; $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ y $\forall A \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Una matriz cuadrada A se dice **simétrica** si $A^t = A$. Se dice que A es **antisimétrica** si $A^t = -A$.

II.3 FORMA NORMAL DE HERMITE.

Sea $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriz. Llamaremos **pivote** de una fila (o columna) de A al primer elemento no nulo de dicha fila (o columna), si lo hay. La matriz A se dice que es **escalonada por filas** si verifica:

1. Si A tiene filas compuestas enteramente por ceros (filas nulas), estas están agrupadas en la parte inferior de la matriz.
2. El pivote de cada fila no nula es 1.
3. El pivote de cada fila no nula está a la derecha del de la fila anterior.
4. Los elementos que aparecen en la misma columna que el pivote de una fila y debajo de él, son todos cero.

A es **escalonada reducida por filas** si además de ser escalonada verifica:

4'. Los elementos que aparecen en la misma columna que el pivote de una fila son todos cero.

De igual forma se puede definir **la matriz escalonada** y **escalonada reducida por columnas**.

Vamos a dar una forma de transformar cada matriz en una escalonada reducida. Para ello llamaremos **transformaciones elementales de filas** a cada una de las transformaciones siguientes:

Tipo I: Intercambiar la posición de dos filas.

Tipo II: Multiplicar una fila por un escalar del cuerpo no nulo.

Tipo III: Sumar a una fila otra multiplicada por un escalar.

Diremos que dos matrices A y B son **equivalentes por filas**, $A \sim_f B$, si se puede pasar de una a otra aplicando transformaciones elementales de filas.

Lema 1

"Ser equivalentes por filas" es una relación de equivalencia en $\mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Lema 2

Sean A y B dos matrices escalonadas reducidas por filas. Si A y B son equivalentes por filas, entonces A=B.

Teorema

Cada matriz es equivalente por filas a una única matriz escalonada reducida por filas. A esta la llamaremos **forma normal de Hermite por filas**.

De forma análoga se podrá definir la **forma normal de Hermite por columnas.**

Dada una matriz $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, llamaremos **rango** de A, **rg(A)**, al número de filas no nulas de su forma normal de Hermite por filas.

Proposición

Si $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{mín}\{m, n\}$.

II.4 Matrices y sistemas de ecuaciones.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

llamaremos **matriz de coeficientes** del sistema a la matriz de orden m × n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y llamaremos **matriz ampliada** del sistema a la matriz de orden m × (n+1):

$$(A\,|\,B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Proposición

Dado un sistema de ecuaciones lineales con matriz ampliada (A|B), si H es la forma normal de Hermite por filas de (A|B), entonces el sistema cuya matriz ampliada es H es un sistema escalonado reducido equivalente al de partida.

Teorema (Rouché-Frobenius)

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas con matriz de coeficientes A y matriz ampliada (A|B) se verifica:

1. El sistema es compatible si, y solo si, rg(A) = rg(A|B).
2. El sistema es compatible determinado si, y solo si, rg(A) = rg(A|B) = n.

II.5 Matrices elementales.

Llamaremos **matrices elementales** de orden n a las matrices resultantes de aplicar una (y sólo una) transformación elemental por filas a la matriz identidad de orden n. Existirán tres tipos de matrices elementales:

Tipo I: Denotaremos por E_{ij} a la matriz que se obtiene de la identidad cambiando la fila i por la fila j, esto es:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Tipo II: Denotaremos por $E_i(k)$ a la matriz que se obtiene de la identidad multiplicando por $k \neq 0$ los elementos de la fila i:

$$E_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Tipo III: Denotaremos por $E_{ij}(k)$ a la matriz que se obtiene de la identidad sumando a la fila i la fila j multiplicada por k, esto es:

$$E_{ij}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición

Sea $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y sean E y F matrices elementales de ordenes m y n, resp. Entonces:

(1) EA es la matriz que se obtiene de A aplicando a sus filas la misma transformación elemental con la que se obtiene E a partir de I_m.

(2) AF es la matriz que se obtiene de A aplicando a sus columnas la misma transformación elemental con la que se obtiene F a partir de I_n.

Corolario

Sea $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, H la forma normal de Hermite por filas de A y C la forma normal de Hermite por columnas de A. Entonces:

1. $H = E_k E_{k-1} \ldots E_1 A$ para algunas matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ de orden m.
2. $C = AF_1F_2 \ldots F_s$, para algunas matrices elementales $F_1, F_2, \ldots, F_s$ de orden n.

II.6 Matrices inversas.

Dadas $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ se dice que B es la **matriz inversa** de A si $AB = BA = I_n$. Diremos que la matriz A es **invertible** si existe una matriz inversa de A.

Lema

Una matriz invertible $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ tiene una única inversa que denotaremos por A^{-1}.

Proposición

Dadas $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ se verifica:

1. Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Si A es invertible, entonces A^t es invetible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
3. Cada matriz elemental es invertible y su inversa es otra matriz elemental.

Teorema

Para una matriz $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, equivalen:

(a) A es invertible.

(b) A es regular a la derecha (o izquierda), esto es, $BA=0 \Rightarrow B=0$ (o, $AB=0 \Rightarrow B=0$).

(c) $rg(A) = n$.

(d) La forma de Hermite por filas (o columnas) de A es la identidad.

(e) A es un producto de matrices elementales.

A las matrices invertibles las llamaremos **matrices regulares**. En otro caso diremos que es **singular.**

Corolario

Sea $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y sea H la forma de Hermite por filas de A. Entonces existe una matriz regular $Q \in \mathrm{M}_m(\mathbb{K})$ de forma que $H = QA$.

La matriz $Q = E_k E_{k-1} \ldots E_1 I$, es decir, Q se obtendrá aplicando a la matriz identidad las mismas transformaciones que se les aplican a A para obtener H. En la práctica tomaremos la matriz (A/I) resultante de pegar las matriz A y la matriz identidad y aplicando transformaciones elementales por filas a (A/I), obtendremos a la izquierda la forma de Hermite por filas H y a la derecha Q.

II.7 Matrices equivalentes.

Lema

Dadas dos matrices A, B $\in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) A y B son equivalentes por filas (resp. columnas).

(b) A y B tienen igual forma de Hermite por filas (resp. columnas).

(c) $\exists$ Q $\in \mathbf{M}_m(\mathbb{K})$ tal que B = QA (resp. $\exists$ P $\in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ tal que B = AP).

Se dice que dos matrices A y B son **equivalentes** y se denota por **A ~ B**, si B se puede obtener de A por transformaciones elementales de filas y de columnas.

Notar que dos matrices equivalentes por filas son equivalentes, pero el recíproco no es cierto.

Proposición

Dos matrices A, B $\in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ son equivalentes $\Leftrightarrow \exists$ Q $\in \mathbf{M}_m(\mathbb{K})$, $\exists$ P $\in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, tales que B = QAP.

Proposición

Dada A $\in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A) = r \Leftrightarrow A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Teorema

Dos matrices son equivalentes si, y solo si, tienen igual rango.

III. DETERMINANTES.

III.1 DETERMINANTES: DEFINICIONES Y PROPIEDADES.

El **determinante** de una matriz cuadrada A se define inductivamente mediante:

Si $A = (a_{11})$, se define $\det(A)=a_{11}$.

Supuesto conocido el valor del determinante de cada matriz de orden n-1, para una matriz $A=(a_{ij})_{i,j}$ de orden n se llama **ij-ésimo menor adjunto** de A a $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ donde A_{ij} es la matriz que se obtiene de A eliminando la fila i-ésima y la columna j-ésima y se define el **determinante de A** por

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\,\alpha_{11} + \ldots + a_{n1}\,\alpha_{n1}$$

La formula anterior se conoce con el nombre de **desarrollo de Laplace** del determinante de A por su primera columna.

Propiedades

1. Si tres matrices cuadradas A, A', A'' son idénticas salvo en que la i-ésima fila (resp. columna) de A es suma de las filas (resp. columnas) correspondientes de A' y A'', entonces $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$.
2. Si una matriz A tiene dos filas o columnas iguales entonces su determinante es cero.
3. Si se intercambian dos filas o columnas consecutivas de una matriz A entonces su determinante cambia de signo.
4. Si se multiplican los elementos de una fila o columna de la matriz A por un escalar k, entonces su determinante queda multiplicado por k. En particular si A tiene una fila de ceros entonces $\det(A) = 0$.
5. Si una fila o columna de una matriz cuadrada A se le suma otra multiplicada por un escalar k entonces su determinante no varia.
6. Una matriz cuadrada A es regular, si y solo si, $\det(A) \neq 0$.
7. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
8. $\det(A) = \det(A^t)$.
9. El determinante de una matriz puede obtenerse desarrollando por cualquiera de sus filas o columnas.

III.2 DETERMINANTES: APLICACIONES.

En primer lugar veamos como pueden servir los determinantes al calculo de la matriz inversa.

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ llamaremos **matriz adjunta** de A a la matriz $\mathrm{Adj}(A) = (\alpha_{ij})_{i,j}$, esto es la matriz que en cada posición tiene el correspondiente menor adjunto de A.

Proposición

Dada $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ se tiene $A\,\mathrm{Adj}(A)^t = \det(A) I_n$.

Como consecuencia se tiene $A^{-1} = \dfrac{\mathrm{Adj}(A)^t}{\det(A)}$.

Veamos ahora como los determinantes nos proporcionan un nuevo método para calcular el rango de una matriz.

Teorema

Sea $A \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, entonces el rango de A coincide con el mayor orden de una submatriz cuadrada regular de A.

Este teorema nos proporciona el método para calcular el rango de A. Tomamos $k = \min\{m, n\}$, luego $\mathrm{rg}(A) \leq k$, tomadas todas las submatrices cuadradas de A de orden k, si alguna es regular $\mathrm{rg}(A) = k$, en otro caso $\mathrm{rg}(A) \leq k-1$ y se repite el proceso con k-1 y así sucesivamente.

Otra aplicación de los determinantes es la resolución de sistemas de ecuaciones aplicando la regla de Cramer.

Dado un sistema de ecuaciones $A.X = B$ donde $A = (a_{ij})_{i,j}$ es la matriz de coeficientes, X y B son las matrices columna de incógnitas y de términos independientes, respectivamente:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

diremos que es un **sistema de Cramer** si A es cuadrada y regular.

Teorema (Regla de Cramer)

Dado un sistema de Cramer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

la solución (única) del sistema viene dada por:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}; \ldots; \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$