Universidad de Jaén

Grado en Ingeniería Informática
ÁLGEBRA

TEMA 5. Aplicaciones lineales. Diagonalización

Carmen Ordóñez Cañada

Bibliografía básica:

Anton, H. (1990). *Introducción al Álgebra Lineal*. (2ª ed.) México: Limusa.

Burgos, J. (1995). *Álgebra Lineal*. Madrid, España: McGraw-Hill.

Grossman, S. (1992). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. (4ª ed, 3ª ed. en español). México: McGraw-Hill.

Merino, L., Santos E. (2007). *Álgebra Lineal con métodos elementales*. (2ª ed.) Madrid, España: Thomson.

ÍNDICE:

APLICACIONES LINEALES:

ÍNDICE:

DIAGONALIZACIÓN:

1. Aplicaciones lineales

Definición. Sean V y V' espacios vectoriales sobre K, llamaremos *aplicación lineal (o morfismo de espacios vectoriales*) de V en V' a toda aplicación

$$f: V \to V'$$

verificando:

i. $f(v+w) = f(v) + f(w) \quad \forall v, w \in V.$

ii. $f(av) = af(v) \quad \forall a \in K, \forall v \in V.$

Teorema (Caracterización). Sean V y V' espacios vectoriales sobre K.
Una aplicación $f: V \to V'$ es lineal sii

$$f(av+bw)= af(v) + bf(w) \quad \forall\, v, w \in V, \forall\, a, b \in K.$$

Proposición. Sean V y V' espacios vectoriales sobre K, f: V $\rightarrow$ V' aplicación lineal. Entonces, se verifica:

1. $f(0_V)=0_{V'}$
2. $f(-v) = -f(v) \quad \forall\, v \in V$
3. $f(a_1v_1+\ldots+a_nv_n)=a_1f(v_1)+\ldots+a_nf(v_n) \quad \forall\, a_1,\ldots,a_n \in K,\ \forall\, v_1,\ldots,v_n \in V$

2. Núcleo e Imagen

Definición. Sean V y V' espacios vectoriales sobre K, f: V $\rightarrow$ V' aplicación lineal. Llamaremos *núcleo e imagen de f*, respectivamente:

$$\mathrm{Ker}(f)=\{x\in V : f(x)=0_{V'}\}$$
$$\mathrm{Im}(f)=\{f(x) : x\in V\}$$

Proposición. Sean V y V' espacios vectoriales sobre K, f: V $\rightarrow$ V' aplicación lineal. Entonces:

1. Ker(f) es un subespacio vectorial de V.
2. Im(f) es un subespacio vectorial de V´.

Proposición. Dada una aplicación lineal f:V $\rightarrow$ V' , si $\{u_1, \ldots, u_n\}$es sistema de generadores de V, entonces $\{f(u_{1)}, \ldots, f(u_n)\}$es sistema de generadores de Im(f).

Definiciones. Sean V y V' espacios vectoriales sobre K, f: $V \to V'$ aplicación lineal. Diremos que f es *inyectiva* $\Leftrightarrow$ $(\forall x_1, x_2, \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
O equivalentemente: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in V$,
Diremos que f es *sobreyectiva* $\Leftrightarrow \forall y \in V', \exists\, x \in V$ tal que $f(x)=y$
Diremos que f es *biyectiva* $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva

Recordemos que las aplicaciones lineales son llamadas también homomorfismos de espacios vectoriales:

Las aplicaciones lineales inyectivas reciben el nombre de *monomorfismos*.
Las aplicaciones lineales sobreyectivas reciben el nombre de *epimorfismos*.
Las aplicaciones lineales biyectivas reciben el nombre de *isomorfismos*.

Dos espacios vectoriales V y V' se dicen *isomorfos*, $V \cong V'$, si y sólo si existe un isomorfismo entre ellos.

3. Aplicaciones lineales inyectivas y sobreyectivas. Isomorfismos.

Proposición (Caracterización). Sean V y V' espacios vectoriales sobre K, $f: V \to V'$ aplicación lineal. Entonces:

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow$ $Ker(f) = 0_V$
2. f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $Im(f) = V'$

Proposición. Dada una aplicación lineal $f: V \to V'$, se verifica:

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow$ Para cada conjunto linealmente independiente $\{u_1, \ldots, u_r\}$, el conjunto $\{f(u_1), \ldots, f(u_r)\}$es linealmente independiente.
2. f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ Para cada sistema de generadores de V $\{u_1, \ldots, u_s\}$, el conjunto $\{f(u_1), \ldots, f(u_s)\}$es sistema de generadores de V'.

Observación. Para conocer una aplicación lineal f: V $\rightarrow$ V' basta con conocer las imágenes de los vectores de una base.

Expresión matricial de una aplicación lineal

Sean V y V' espacios vectoriales sobre K, de dimensiones n y m, respectivamente. Dada una aplicación lineal f: V $\rightarrow$ V', la ecuación matricial de f respecto de las bases B y B' es la expresión:

$$Y=AX$$

que, dadas las coordenadas de un vector x respecto de la base B, permite calcular las coordenadas de su imagen y=f(x) respecto de B'. A es la matriz asociada a f respecto de las bases B y B', esto es: la matriz de orden m×n cuyas columnas son las coordenadas respecto de B' de las imágenes por f de los vectores de B. Si f es un endomorfismo (V=V'), entonces tomaremos B'=B.

Así, para calcular la expresión matricial de una aplicación lineal:

DATOS:

- La aplicación lineal, $f : V \to V'$

$$\dim V=n, \quad \dim V'=m$$

- Las bases de V y V': $B= \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B' =\{v'_1, \ldots, v'_m\}$

CALCULO A, la matriz asociada a f respecto de las bases B y B'

$$A = M_{B,B'}(f)$$

Paso 1: (Respecto de B)

Calculamos las imágenes de los vectores de la base B de V: $f(v_1),\ldots, f(v_n)$.

Paso 2: (Respecto de B')

Calculamos las coordenadas de lo obtenido en el paso anterior respecto de B'.

Paso 3: Construimos A, por columnas.

5. Matriz asociada y núcleo e imagen

Consideremos la aplicación lineal $f : V \rightarrow V'$

$$\dim V=n, \quad \dim V'=m$$

Y las bases de V y V': $B= \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B' =\{v'_1, \ldots, v'_m\}$

Consideremos la matriz asociada a f respecto de las bases B y B': $A = M_{B,B'}(f)$

- Para calcular Ker(f):

$$x \in Ker(f) \text{ sii } AX=0$$

(obtener las implícitas con las linealmente independientes)

$$\dim Ker(f)= n - r \text{ siendo } r=rang(A)$$

- Para calcular Im(f), a partir del sistema de generadores, obtenido de las columnas de la matriz A.

$$\dim Im(f)= r \text{ siendo } r=rang(A)$$

Teorema (Fórmula de dimensiones). Sean V y V' espacios vectoriales sobre *K*, f: V $\rightarrow$ V' aplicación lineal. Entonces:

$$\dim V = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$$

Corolario (Clasificación de una aplicación lineal). Sea f: V $\rightarrow$ V' una aplicación lineal, dim V= n y dim V'= m, y sea A la matriz asociada a f respecto de ciertas bases B y B'. Entonces:

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow$ rg(A) = dim V= n
2. f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ rg(A) = dim V'= m
3. f es biyectiva $\Leftrightarrow$ A es cuadrada y regular

Teorema. Dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo *K*, son isomorfos, si, y solamente si, tienen la misma dimensión:

$$V \cong V' \Leftrightarrow \dim V = \dim V'$$

Teorema. Sea f: V $\rightarrow$ V' una aplicación lineal, dim V= n y dim V'= m, y consideremos B y $\bar{B}$ bases de V y B' y $\bar{B}'$ bases de V'.

Si A es la matriz asociada a f respecto de B y B', y C es la matriz asociada a f respecto de $\bar{B}$ y $\bar{B}'$, entonces se obtiene que C y A son matrices equivalentes; esto es,

$$C = Q^{-1}AP$$

donde P es la matriz del cambio de base en V de $\bar{B}$ a B y Q es la matriz del cambio de base en V' de $\bar{B}'$ a B'.

En el caso particular de un endomorfismo, y tomando las mismas bases $B = \bar{B}$ y $\bar{B} = \bar{B}'$, se obtiene que C y A son semejantes; es decir,

$$C = P^{-1}AP.$$

Proposición.

1. Dos matrices son equivalentes si, y solo si, son matrices asociadas a la misma aplicación lineal respecto de distintas bases.

2. Dos matrices son semejantes si, y solo si, son matrices asociadas al mismo endomorfismo respecto de distintas bases.

Definiciones. Dados V y V' dos espacios vectoriales sobre K, denotaremos por

$$\mathrm{Hom}_{K}(V, V')$$

al conjunto de todas las aplicaciones lineales de V en V'. En este conjunto se podemos definir operaciones *suma* y *producto por escalares* de la forma:

- Dadas $f, g \in \mathrm{Hom}_{K}(V, V')$ y $\lambda \in K$,

$$f + g : V \rightarrow V' \; ; (f + g)(v) = f(v) + g(v)$$
$$\lambda f : V \rightarrow V' \; ; (\lambda f)(v) = \lambda f(v)$$

y son aplicaciones lineales.

- Dadas las aplicaciones lineales $f : V \rightarrow V'$ y $g : V' \rightarrow V''$, su *composición* $gf : V \rightarrow V''$ definida por $(gf)(v)=g(f(v))$ es también lineal.

7. Matriz asociada y operaciones con aplicaciones lineales

Proposición. Sean V, V' y V'' dos espacios vectoriales sobre *K* de dimensiones finitas, B, B' y B'' bases de V, V' y V'' respectivamente. Consideremos las aplicaciones lineales f, g : V $\to$ V' y h : V' $\to$ V'', entonces se tiene:

1. $M_{B,B'}(f+g) = M_{B,B'}(f) + M_{B,B'}(g)$
2. $M_{B,B'}(\lambda f) = \lambda M_{B,B'}(f)$ para todo $\lambda \in K$
3. $M_{B,B''}(hf) = M_{B',B''}(h)\, M_{B,B'}(f)$

Teorema. Dados V y V' dos espacios vectoriales sobre *K*, de dimensiones n y m respectivamente, y dadas bases B de V y B' de V', la aplicación:

$$\mathrm{Hom}_K(V, V') \to M_{m\times n}(K)$$

que lleva cada aplicación lineal en su matriz asociada respecto de B y B', es un isomorfismo de *K*-espacios vectoriales. Así, dim (Hom $_K$ (V, V'))= mn.

Definición. Sea V espacio vectorial sobre K y f: V $\rightarrow$ V endomorfismo en V.

- Se dice que el escalar $\lambda \in K$ es un *valor propio* (o *autovalor*) de f si existe un vector no nulo v $\in$ V de forma que $f(v) = \lambda v$.

- Para un escalar $\lambda \in K$, llamaremos *vector propio* (o *autovector*) asociado a λ, a cada vector v de V tal que $f(v)= \lambda v$.

- Denotamos por V_λ al conjunto de todos los autovectores asociados a λ; esto es:

$$V_\lambda=\{v \in V: f(v)= \lambda v\}$$

Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión n, f un endomorfismo de V y sea A la matriz asociada a f respecto de una base de V. Dado $\lambda \in K$, se verifica:

1. $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda I)$.
2. V_λ es un subespacio vectorial de V.
3. $\dim(V_\lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I)$.
4. λ es autovalor de f $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

Definición. El subespacio V_λ recibe el nombre de *subespacio propio* de λ.

9. Polinomio característico

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión n, f un endomorfismo de V y sea A la matriz asociada a f respecto de una base de V. Llamaremos *polinomio característico* de f, al determinante

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Observaciones. El polinomio característico es un polinomio de grado n, con coeficientes en K. Los valores propios serán precisamente las raíces del polinomio característico. En particular, se tiene que el número máximo de valores propios de f es exactamente n.

Proposición. El polinomio característico no depende de la matriz asociada a f .

10. Multiplicidad algebraica y geométrica

Definiciones. Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión n, f un endomorfismo en V y A la matriz asociada a f respecto de una base de V. Sean $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_r$ sus valores propios distintos. Para cada i, :

- Llamaremos *multiplicidad algebraica* del valor propio λ_i , a la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio característico; es decir, el mayor exponente α_i para el cual el factor $(\lambda_i - \lambda)^{\alpha_i}$ aparece en la descomposición de $p(\lambda)$.
- Llamaremos *multiplicidad geométrica* de λ_i a la dimensión, d_i, del subespacio propio $V_{\lambda i}$, esto es, $d_i = \dim(V_{\lambda i}) = n - rg(A - \lambda_i I)$.

Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión n, f un endomorfismo en V con matriz asociada A, y sean $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ sus valores propios distintos. Entonces para cada $i = 1,\ldots,r$, se tiene:

$$1 \leq d_i \leq \alpha_i.$$

11. Endomorfismos y matrices diagonalizables por semejanza

Definiciones. Se dice que una matriz cuadrada A es *diagonalizable* si existe una matriz diagonal, D, semejante a A.

Diremos que el endomorfismo f:V $\longrightarrow$ V es *diagonalizable* si existe una base de V con respecto a la cual la matriz asociada a f es diagonal.

Proposición (Caracterización). Un endomorfismo f: V $\longrightarrow$ V es diagonalizable sii existe una base de V formada por vectores propios de f.

Lema

1. Vectores propios no nulos asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.
2. Los subespacios propios asociados a valores propios distintos son subespacios independientes.

Teorema de caracterización. Sea $f: V \to V$ un endomorfismo y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sus distintos valores propios. Entonces, f es diagonalizable por semejanza si, y solo si, se verifica las siguientes condiciones:

1. $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$
2. $d_i = \alpha_i$, para cada $i = 1, \ldots, r$.

Corolario. Sea A una matriz cuadrada de orden n, si A tiene n valores propios distintos en K, entonces es diagonalizable.
(Todas las raíces del polinomio característico de f están en K).

El problema de la diagonalización de matrices se resume en:

Paso 1: Se calcula el polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Paso 2: Descomponemos $p(\lambda)$ se calculan sus raíces. Tenemos calculados así los valores propios, $\lambda_{i,}$ y sus multiplicidades algebraicas, α_i.

Paso 3: Se calculan las multiplicidades geométricas, $d_i = n - rg(A - \lambda_i I)$.

Paso 4: Se aplica el criterio de diagonalización: *A es diagonalizable si, y solo si, se verifican las siguientes condiciones:*

11. Endomorfismos y matrices diagonalizables por semejanza

1. $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n$ *(todas las raíces del polinomio característico están en K).*
2. $d_i = \alpha_i$ *, para cada* $i = 1,\ldots,r$.

Si no se verifica alguna de las dos condiciones del teorema, la matriz no es diagonalizable, el problema concluye.

En caso contrario, la matriz es diagonalizable y su forma diagonal, *D*, es la matriz cuya diagonal está formada por los autovalores, repetidos cada uno según su multiplicidad.

Paso 5: Obtenemos bases de los subespacios propios: $V_{\lambda i} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i I)$.

Paso 6: Uniendo estas bases se obtiene una base de V (de vectores propios) para la cual la matriz asociada es D. Así pues la matriz de cambio de base, P, es aquella cuyas columnas son las coordenadas de estos vectores propios, es la matriz de P, regular que verifica $D = P^{-1}AP$.

12.Aplicaciones.

- ***Cálculo de la inversa de una matriz regular, diagonalizable por semejanza.***

  Sea A una matriz regular, diagonalizable por semejanza. Entonces existe P regular y D diagonal tales que $D=P^{-1}AP$. Así

$$A^{-1}=P\,D^{-1}\,P^{-1}$$

- ***Cálculo de potencias de una matriz, diagonalizable por semejanza.***

  Sea A una matriz diagonalizable por semejanza. Entonces existe P regular y D diagonal tales que $D=P^{-1}AP$. Así

$$A^{n}=P\,D^{n}\,P^{-1}$$

Universidad de Jaén

Grado en Ingeniería Informática
ÁLGEBRA

TEMA 5. Aplicaciones lineales. Diagonalización

Carmen Ordóñez Cañada

uja.es