Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
Grado en Ingeniería Informática

Algebra
Relación de problemas 6.
Diagonalización.

1.-Estudiar si los siguientes endomorfismos son diagonalizables por semejanza:

a) $f : R^2 \longrightarrow R^2$ dado por

$$\begin{array}{rcl} f(e_{1)} & = & e_1 - e_2 \\ f(e_{2)} & = & 2e_1 - e_2 \end{array}$$

respecto de la base $B = \{e_1, e_2\}$.

b) $g : R^2 \longrightarrow R^2$ dado por

$$\begin{array}{rcl} g(e_{1)} & = & e_1 + e_2 \\ g(e_{2)} & = & e_2 \end{array}$$

respecto de la base $B = \{e_1, e_2\}$.

2.- Estudiar si las matrices siguientes son diagonalizables por semejanza:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.-Sea $f : C^2 \longrightarrow C^2$ el endomorfismo, que respecto de una base $B = \{u_1, u_2\}$, tiene asociada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

i) Obtener las ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacios propios.

ii) Comprobar explícitamente que A es semejante a una matriz diagonal

4.-Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K , de dimension 4 y f el endomorfismo en V definido por

$$f(x, y, z, t) = (ax + ay, ay, az + t, -z - at)$$

donde $a \in K$ y (x, y, z, t) son las coordenadas de un vector cualquiera de V, respecto de una base $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

Estudiar si f es diagonalizable por semejanza para $K = R$ y $K = C$ y, en los casos en que sea posible, calcular una matriz P, regular, tal que $D = P^{-1}AP$ donde D es una matriz diagonal y A la matriz asociada al endomorfismo f respecto de la base B.

5.-Sea R^3 espacio vectorial sobre R y f el endomorfismo definido por

$$\begin{gathered} f(1, 0, 0) = (0, 1/a, 1/a^2) \\ f(0, 1, 0) = (a, 0, 1/a) \\ f(0, 0, 1) = (a^2, a, 0) \end{gathered}$$

donde $a \in R^*$.

a) Calcular la expresión matricial de f respecto de la base canónica de R^3.

b) Estudiar para qué valores de a, f es diagonalizable por semejanza y, en los casos en que sea posible, calcular una matriz P, regular tal que $D = P^{-1}AP$ donde D es una matriz diagonal y A la matriz asociada al enmorfismo f respecto de la base canónica.

c) Calcular A^{10} y A^{-7}.

6.- Se considera el espacio vectorial de las funciones reales definidas sobre R y sea

$$U = L(e^{3x}, x\ e^{3x}, x^2 e^{3x})$$

a) Calcular base de U.

b) Sea $\Phi : U \rightarrow U$ la aplicación lineal dada por $\Phi(f) = f'(x)$. Estudiar si Φ es diagonalizable por semejanza.

7.- Estudiar si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(K)$$

es diagonalizable para $K = R$ y $K = C$. Calcular A^{-10}.

8.-Probar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

no son semejantes, si bien tienen los mismos valores propios.

9.- Estudiar para qué valores de a y $b \in R$, la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ es diagonalizable por semejanza y, en los casos en que sea posible, comprobar explícitamente la semejanza entre la matriz anterior y la matriz diagonal.

10.-Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Diagonalizar la matriz A y determinar una matriz de paso a la matriz diagonal.

b) Diagonalizar A^2 y A^{-1}.

11.-Estudiar para qué valores a,b la matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

es diagonalizable por semejanza y, en los casos en que sea posible, comprobar explícitamente la semejanza entre la matriz anterior y la matriz diagonal.

12.- Sea V un espacio vectorial sobre R y f un endomorfismo en V verificando:

$$f(e_1) = e_1$$
$$f(e_2) = e_2$$
$$f(e_3) = e_3$$
$$f(e_4) = e_4 + e_5$$
$$f(e_5) = e_4 + e_5$$

donde $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ es base de V.Se pide:

i) Calcular el polinomio característico de f.

ii) Atendiendo a sus valores propios, estudiar si es invertible.

iii) Calcular los subespacios propios y estudiar si es diagonalizable.

iv) En caso de ser diagonalizable, dar la matriz de paso a forma diagonal.

13.-Sea V un espacio vectorial sobre C y f un endomorfismo en V verificando:

$f(e_1) = e_1 - 2e_2$
$f(e_2) = e_1 - e_2$
$f(e_3) = e_1 - e_3 + 2e_4$
$f(e_4) = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$

donde $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es base de V. Estudiar si f es diagonalizable por semejanza.

14.-Sea f un endomorfismo en R^3 tal que el vector (2,1,0) $\in$ Kerf, el vector (1,2,0) es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$, y el vector (0,0,3) es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = -2$.

i) Comprobar que B=$\{$(2,1,0),(1,2,0),(0,0,3)$\}$ es una base de R^3 y hallar la matriz de f respecto de B.

ii) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica de R^3.

iii) Hallar la dimensión, una base, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implícitas de Kerf e Imf. Clasificar el endomorfismo f.

iv) ¿Es el subespacio $V_1 \oplus V_{-2}$ un subespacio suplementario de Kerf?

v) ¿Es f diagonalizable por semejanza? En caso afirmativo hallar una matriz de paso P y la matriz diagonal D.