TEMA I: FUNDAMENTOS DE LÓGICA

Álgebra II
García Muñoz, M.A.

OBJETIVOS GENERALES

1. **Hacer que el alumno asimile la enorme utilidad de precisar el lenguaje matemático**
2. **Conocer el concepto de razonamiento válido y de los distintos tipos de demostraciones.**

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Manejar el concepto de enunciado simple y compuesto.
- ✓ Traducir enunciados a expresiones lógicas.
- ✓ Conocer los principales conectores lógicos y manejar sus correspondientes tablas de verdad.
- ✓ Construir con soltura tablas de verdad de formas enunciativas compuestas.
- ✓ Averiguar si una forma enunciativa es una tautología o una contradicción.
- ✓ Averiguar si dos proposiciones son lógicamente equivalentes o una de ellas implica lógicamente a la otra.
- ✓ Manejar las principales reglas de manipulación y sustitución para probar que dos formas enunciativas son equivalentes.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ **Construir las formas normales de cualquier forma enunciativa (Sesión 4 de prácticas).**
- ✓ **Conocer los distintos conjuntos adecuados de conectivas.**
- ✓ **Saber determinar una forma equivalente a una dada en la que sólo aparezcan conectivas de un determinado conjunto adecuado de conectivas.**
- ✓ **Averiguar si una argumentación es válida.**
- ✓ **Conocer los distintos tipos de demostración.**

BIBLIOGRAFÍA

- **“Matemática discreta para la computación”. M.A. García-Muñoz. Servicio de Publicaciones Univ. Jaén. 2010.**
- **“Lógica para matemáticos”. A. G. Hamilton. Paraninfo, 1981. (Capítulo 1 e inicio del capítulo 3).**
- “Matemática discreta y combinatoria”. R. P. Grimaldi. Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.
- “Matemáticas especiales para computación”. J.L. García Valle. McGraw-Hill, 1991.
- “Introducción a la lógica simbólica”. V. Rodríguez Lozano. Akal, 1985.
- “Lógica matemática”. J. Aranda, J. L. Fernández y F. Morilla. Sanz y Torres, 1993.

DESARROLLO TEÓRICO

1. INTRODUCCIÓN

El hombre en todo momento pretende tener elementos que le ayuden a comprender lo que se le dice, averiguar si la información que se le trasmite es correcta y, sobre todo, averiguar si el cómo se le transmite una información sigue alguna regla que le sirva para deducir si la información que se le comunica es correcta.

Lógica es una palabra que tiene como raíz el vocablo griego "*logos*" cuyo significado es "palabra", "idea" o "razón". Podemos, por tanto, definir Lógica como la ciencia que estudia las formas de razonamiento válidas. Según el diccionario de la lengua española de la Real Academia Española "lógica" es la disciplina que expone las leyes, modos y formas del conocimiento científico.

La Lógica estudia la forma del razonamiento, es decir, determina, a partir de ciertas reglas y técnicas, si un argumento es válido. Esta disciplina se aplica pródigamente en matemáticas para demostrar teoremas y deducir resultados, en física y en ciencias naturales para sacar conclusiones de experimentos, en computación para verificar si son o no correctos los programas, de hecho, un programa informático no es más que una secuencia de pasos lógicos, establecidos por el hombre para resolver un problema determinado, y en general en la vida diaria, pues cualquier tarea que realizamos tiene un procedimiento lógico.

La Lógica se divide en dos ramas, la llamada Lógica Material y la Lógica Formal. La primera trata de averiguar la veracidad de los términos y proposiciones de un argumento, es decir, se ocupa del contenido de las argumentaciones. Sin embargo, la Lógica Formal está interesada en la forma o estructura de los razonamientos, esto es, trata de encontrar el método correcto para derivar una verdad a partir de otra. Dentro de esta última, aparece la **Lógica Matemática**, cuyo fundador fue Giuseppe Peano (1858-1932), aunque hoy en día se considera que el matemático alemán Gottlob Frege es el padre de esta rama de la Lógica, que proporciona un instrumento para investigar los fundamentos de la matemática mediante un lenguaje simbólico artificial y haciendo abstracción de los contenidos.

Reseña histórica

A Aristóteles (s. IV a.c.) se debe el primer sistema de lógica de predicados con el que trato de identificar las formas del razonamiento humano, para así crear criterios para discernir en las discusiones filosóficas. Esta línea, que se conoce como **lógica clásica**, fue seguida por otros pensadores entre ellos Santo Tomas de Aquino (s. XIII) que la usó como vehículo de discusiones teológicas.

La siguiente etapa comienza en el s. XVII donde la **Lógica matemática** o **Lógica simbólica** comienza a perfilarse con Leibniz quien expresó su deseo de extender la aplicación de la lógica a las matemáticas. Su ambición era encontrar un procedimiento de comprobación de teoremas, sin embargo no pudo cumplir su propósito.

Durante los siguientes 150 años ningún matemático le dio importancia a los estudios de Leibniz pero a finales del siglo XIX, la lógica matemática se constituyo como ciencia con los trabajos de **Boole** y **Fregge**. El primero desarrollo un modelo algebraico de la lógica proposicional y Fregge formalizó la lógica de predicados, desarrollando un lenguaje formal e introduciendo el concepto de cuantificadores. En esta misma época tenemos que mencionar a **Augustus de Morgan**, quien formuló una herramienta fundamental del cálculo lógico como es la ley de dualidad de la conjunción y la disyunción (leyes de Morgan). El comienzo del siglo XX supuso un auge de la lógica, Russell con la ayuda de Whitehead se propuso mostrar que la aritmética era una extensión de la lógica, para contestar al desafío que Hilbert hizo sobre la axiomatización de las matemáticas. Sin embargo, fue el matemático Gödel en 1936 quien contestó negativamente a este desafío.

La tercera época de la lógica comienza con la aparición de los ordenadores. Los ordenadores estaban resolviendo problemas en muchos campos y era natural que se pretendiera utilizarlos para demostrar automáticamente los teoremas. Esta nueva época a producido mucho resultados en el campo de las aplicaciones prácticas como la elaboración de estrategias de programación que aprovecharon los conocimientos de la lógica. También se elaboraron lenguajes de programación especialmente adecuados a la programación lógica, como por ejemplo el Prolog.

Hoy en día, la lógica proposicional, que es la que estudiaremos, principalmente, en este capítulo, tiene una importancia singular dada su aplicación en los llamados "circuitos lógicos" de uso electrónica e informática.

2. FORMAS ENUNCIATIVAS Y CONECTIVAS. TABLAS DE VERDAD

La Lógica, o al menos la Lógica Matemática, examina las reglas de deducción con precisión matemática. Esta precisión necesita que el lenguaje que usemos no de lugar a confusiones, lo que conseguimos utilizando un lenguaje simbólico donde cada símbolo tenga un significado preciso.

Dada una frase en castellano, en primer lugar, podemos observar si se trata de una frase **simple** (un sujeto + un predicado) o de una frase **compuesta** (formada a partir de frases simples por medio de algún término de enlace (conectiva)).

En segundo lugar, vamos a suponer que todas las frases simples pueden ser verdaderas o falsas. Ahora bien, en castellano hay frases que no son ni verdaderas, ni falsas (exclamaciones, ordenes, preguntas), por tanto, tenemos que usar otro término, hablaremos de **enunciados** o **proposiciones** (sentencias que pueden ser verdaderas o falsas). Así, distinguimos entre **enunciados simples** (**atómicos**) o **enunciados compuestos** (**moleculares**).

Denotamos los enunciados simples por letras mayúsculas A, B, C, D,... . Para construir enunciados compuestos introducimos símbolos para las **conectivas** o nexos de unión:

CONECTIVAS	**SIMBOLOS**
Negación de A	$\sim A$
A y B	$A \wedge B$
A o B	$A \vee B$
si A, entonces B	$A \rightarrow B$
A si, y sólo si B	$A \leftrightarrow B$

Llamaremos **esqueleto lógico** de un enunciado compuesto al resultado de simbolizar dicho enunciado. Nótese que un "esqueleto lógico" puede ser común a varios enunciados diferentes. Esto nos permite analizar las deducciones, pues una deducción tiene que ver con las formas del enunciado, y no con su significado. Por tanto, estudiamos formas enunciativas y no enunciados particulares.

Denotaremos con letras minúsculas p, q, r,... a las **variables de enunciado** que designan enunciados simples arbitrarios. Estas variables nos permitirán describir las propiedades que poseen los enunciados y las conectivas. Como todo enunciado es verdadero o falso, una variable de enunciado tomará uno u otro de entre estos dos **valores de verdad**: V (verdadero) o F (falso).

Para definir con precisión el significado de los símbolos que representan las distintas conectivas, debemos conocer con precisión el significado de dichas conectivas. Consideremos una a una todas las conectivas:

Negación

Sea A un enunciado, denotaremos por ~A a su negación. Si A toma el valor verdadero (falso resp.) entonces ~A tomará el valor falso (verdadero resp.) siendo irrelevante el significado de A. Esto se puede describir mediante la tabla de verdad:

p	**~p**
V	F
F	V

Esta conectiva ~ da lugar a una función f $^{\sim}$ del conjunto {V, F} en si mismo definida por f $^{\sim}$(V) = F, f $^{\sim}$(F) = V.

Conjunción

Sean A y B dos enunciados, denotamos por A $\wedge$ B a la conjunción de ambos. Su tabla de verdad depende de los valores de verdad que toman A y B.

p	**q**	**p $\wedge$ q**
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**V**	F
F	**F**	F

La conectiva $\wedge$ nos define una función de verdad f ^ de dos argumentos:

$f^{\wedge} : \{V, F\} \times \{V, F\} \longrightarrow \{V, F\}$

$f^{\wedge}(V, V) = V, \quad f^{\wedge}(V, F) = F,$

$f^{\wedge}(F, V) = F, \quad f^{\wedge}(F, F) = F.$

Disyunción

Sean A y B dos enunciados. En castellano tenemos dos usos distintos para la disyunción "o", elegimos "A o B o ambos" para nuestra disyunción que denotamos por $A \vee B$. Su tabla de verdad será:

De nuevo tenemos una función de verdad con dos argumentos:

$f^{\vee} : \{V, F\} \times \{V, F\} \longrightarrow \{V, F\}$

$f^{\vee}(V, V) = V, \quad f^{\vee}(V, F) = V,$

$f^{\vee}(F, V) = V, \quad f^{\vee}(F, F) = F.$

p	**q**	**p $\vee$ q**
V	**V**	V
V	**F**	V
F	**V**	V
F	**F**	F

Nótese que el otro uso de la disyunción "A o B pero no ambas" se puede simbolizar mediante $(A \vee B) \wedge (\sim (A \wedge B))$.

Condicional

Sean A y B dos enunciados, Denotaremos por $A \to B$ para representar el enunciado "A implica B" o "si A entonces B". Ahora el castellano no nos ayudará a construir una tabla de verdad.

p	**q**	**p → q**
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

De nuevo, $\to$ define la función de verdad $f_{\to}$:

$$f^{\to} : \{V, F\} \times \{V, F\} \longrightarrow \{V, F\}$$

$$f^{\to}(V, V) = V, \quad f^{\to}(V, F) = F,$$

$$f^{\to}(F, V) = V, \quad f^{\to}(F, F) = V.$$

Lo extraño de esta tabla es la asignación del valor V cuando p toma el valor F. Nótese que en matemáticas este tipo de enunciados no nos dicen nada a partir de la falsedad de A.

Bicondicional

Sean A y B dos enunciados. Denotamos el enunciado “A si y sólo si B” o “A equivale a B” por $A \leftrightarrow B$.

La conectiva $\leftrightarrow$ nos define una función de verdad $f^{\leftrightarrow}$ de dos argumentos:

$f^{\leftrightarrow} : \{V, F\} \times \{V, F\} \longrightarrow \{V, F\}$

$f^{\leftrightarrow}(V, V) = V, \quad f^{\leftrightarrow}(V, F) = F,$

$f^{\leftrightarrow}(F, V) = F, \quad f^{\leftrightarrow}(F, F) = V.$

p	**q**	**p ↔ q**
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

En lo que sigue veremos que el valor de verdad de una forma enunciativa compuesta depende de los valores de verdad de los enunciados simples o de las variables de enunciado que la formen.

Una **forma enunciativa** es una expresión en la que intervienen variables de enunciado y conectivas, que se construye utilizando las siguientes reglas:

(i) Cualquier variable de enunciado es una forma enunciativa.

(ii) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son formas enunciativas, entonces $(\sim\mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ y $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ son formas enunciativas.

La **tabla de verdad** de cualquier forma enunciativa es la tabla que indica, para cada asignación de valores de verdad de las variables involucradas, el valor que toma dicha forma y se obtiene usando las tablas de verdad de las conectivas.

Esta tabla de verdad es una representación gráfica de una **función de verdad**, cuyo número de argumentos es igual al número de variables de enunciado distintas que intervienen en la forma enunciativa.

La tabla de verdad asociada a una forma enunciativa se construye a partir del procedimiento usado para construir dicha forma.

A una forma enunciativa en la que aparezcan n (n > 0) variables de enunciado diferentes le corresponde una función de verdad con n argumentos y la tabla de verdad tendrá 2^n filas, una para cada una de las posibles combinaciones de valores de verdad.

Además podemos asegura que existe 2^{2^n} funciones de verdad distintas de n argumentos. Como podremos construir infinitas formas enunciativas con n argumentos, es lógico que formas enunciativas distintas correspondan a una misma función de verdad.

3. TAUTOLOGÍA Y CONTRADICCIÓN. EQUIVALENCIA E IMPLICACIÓN LÓGICA

Una forma enunciativa es una **tautología** si, con independencia del valor de verdad de las variables de enunciado simples que aparecen en ella, siempre toma el valor de verdad V.

De forma análoga, diremos que es una **contradicción** si, con independencia del valor de verdad de las variables de enunciado simples que intervienen en ella, siempre toma el valor de verdad F.

Claramente, toda tautología con n variables de enunciado tiene asociada una misma función de verdad de n argumentos, la que siempre toma el valor V. Igual ocurre para las contradicciones.

Proposición 1.1. Si $\mathcal{A}$ es una tautología entonces $(\sim\mathcal{A})$ es una contradicción.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ formas enunciativas. Diremos que $\mathcal{A}$ **implica lógicamente a** $\mathcal{B}$ (lo notaremos $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) si la forma enunciativa $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ es una tautología, y que $\mathcal{A}$ **es lógicamente equivalente a** $\mathcal{B}$ (lo notaremos $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$) si la forma enunciativa $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ es una tautología.

Otras formas habituales de decir $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ son: "$\mathcal{B}$ es consecuencia lógica de $\mathcal{A}$", "$\mathcal{A}$ es condición suficiente de $\mathcal{B}$" o "$\mathcal{B}$ es condición necesaria de $\mathcal{A}$".

Nótese que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son lógicamente equivalentes, entonces ambas tienen la misma tabla de verdad.

4. REGLAS DE MANIPULACIÓN Y SUSTITUCIÓN

Proposición 1.2. Si $\mathcal{A}$ y $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ son tautologías entonces $\mathcal{B}$ es una tautología. (Demostración ejercicio 1.12.)

Proposición 1.3. (Principio de sustitución) Sea $\mathcal{A}$ una forma enunciativa en la que aparecen las variables de enunciado p_1, $p_2, \ldots, p_n$, y sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ formas enunciativas cualesquiera. Si $\mathcal{A}$ es una tautología entonces la forma enunciativa obtenida a partir de $\mathcal{A}$ reemplazando cada intervención de p_i por $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq n)$, es también una tautología. (Demostración ejercicio 1.14.)

Corolario 1.4 (Leyes de De Morgan) Dadas $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ formas enunciativas cualesquiera,

i. $(\sim(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2)) \Leftrightarrow ((\sim\mathcal{A}_1) \vee (\sim\mathcal{A}_2))$

ii. $(\sim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)) \Leftrightarrow ((\sim\mathcal{A}_1) \wedge (\sim\mathcal{A}_2))$

Corolario 1.5. (Leyes asociativa y conmutativa) Dadas $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_3$ formas enunciativas cualesquiera,

i) $(\mathcal{A}_1 \wedge (\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_3)) \Leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2) \wedge \mathcal{A}_3)$,

ii) $(\mathcal{A}_1 \vee (\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_3)) \Leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \vee \mathcal{A}_3)$,

iii) $(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2) \Leftrightarrow (\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_1)$,

iv) $(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \Leftrightarrow (\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_1)$.

Corolario 1.6. (Leyes Distributivas) Dadas $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_3$ formas enunciativas cualesquiera,

i) $(\mathcal{A}_1 \wedge (\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_3)) \Leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2) \vee (\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_3))$,

ii) $(\mathcal{A}_1 \vee (\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_3)) \Leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \wedge (\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_3))$,

iii) $((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2) \vee \mathcal{A}_3) \Leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_3) \wedge (\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_3))$,

iv) $((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \wedge \mathcal{A}_3) \Leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_3) \vee (\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_3))$.

Corolario 1.7. (Leyes de Idempotencia y del Complemento)
Dada $\mathcal{A}$ una forma enunciativa cualquiera,

i) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$.

ii) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$.

iii) $(\sim(\sim\mathcal{A})) \Leftrightarrow \mathcal{A}$.

iv) $(\mathcal{A} \wedge (\sim\mathcal{A})) \Leftrightarrow \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es una contradicción.

v) $(\mathcal{A} \vee (\sim\mathcal{A})) \Leftrightarrow \mathcal{V}$, donde $\mathcal{V}$ es una tautología.

Corolario 1.8. (Elemento neutro) Dada $\mathcal{A}$ una forma enunciativa cualquiera, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{F}$ una tautología y una contradicción con el mismo número de variables que $\mathcal{A}$, entonces:

i) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F}$,

ii) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$,

iii) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{V}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$,

iv) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{V}) \Leftrightarrow \mathcal{V}$.

Proposición 1.9. (Ley de sustitución) Sea $\mathcal{B}$ la forma enunciativa resultante de sustituir en la forma enunciativa $\mathcal{A}$ una o más intervenciones de la forma enunciativa $\mathcal{B}_1$ por $\mathcal{A}_1$. Si $\mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \mathcal{B}_1$ entonces $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$. (Demostración ejercicio 1.19.)

5. FORMAS NORMALES

Llamaremos **forma enunciativa restringida** a una forma enunciativa en la que sólo aparecen las conectivas ~, $\wedge$ y $\vee$.

Proposición 1.10. Toda función de verdad es la función de verdad determinada por una forma enunciativa restringida. (Demostración ejercicio 1.23.)

Corolario 1.11. Toda forma enunciativa, que no es una contradicción, es lógicamente equivalente a una forma enunciativa restringida de la forma:

$$\left(\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij}\right)\right)$$

donde cada Q_{ij} es una variable de enunciado o la negación de una variable de enunciado. Esta forma se llama **forma normal disyuntiva**.

Corolario 1.12. Toda forma enunciativa, que no es una tautología, es lógicamente equivalente a una forma enunciativa restringida de la forma:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n} \mathrm{Q}_{ij}\right)\right)$$

donde cada Q_{ij} es una variable de enunciado o la negación de una variable de enunciado. Esta forma se llama **forma normal conjuntiva**. (Demostración ejercicio 1.25.)

6. CONJUNTOS ADECUADOS DE CONECTIVAS

Un **conjunto adecuado de conectivas** es un conjunto tal que toda función de verdad puede representarse por medio de una forma enunciativa en la que sólo aparezcan conectivas de dicho conjunto.

Proposición 1.13. Los pares $\{\sim, \wedge\}$, $\{\sim, \vee\}$ y $\{\sim, \rightarrow\}$ son conjuntos adecuados de conectivas. (Demostración ejercicios 1.29. y 1.30.)

Notemos que los anteriores son los únicos conjuntos adecuados de conectivas con dos elementos.

¿Existen conjuntos adecuados de conectivas unitarios, es decir, con una sola conectiva?

Las 5 conectivas $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, que hemos estudiado no constituyen por si solas un conjunto adecuado.

Sin embargo, las anteriores no son las únicas conectivas, de hecho, cada tabla de verdad con dos entradas define una nueva conectiva pero con significado intuitivo no muy claro. En 1913 Sheffer introduce dos nuevos conectivos:

NOR

Se denota por $\downarrow$ y no es más que la negación de la disyunción, es decir,

$$(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\sim(p \vee q))$$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	**F**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

NAND

Se denota por $\uparrow$, o bien, $|$ y es la negación de la conjunción, es decir,

$$(p \uparrow q) \Leftrightarrow (\sim(p \wedge q))$$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \uparrow q$
V	V	**F**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**V**

El interés de estas conectivas lo expresamos en la siguiente proposición y tiene consecuencias en el diseño y estudio de computadoras.

Proposición 1.14. Los conjuntos unitarios $\{\downarrow\}$ y $\{\uparrow\}$ son conjuntos adecuados de conectivas. (Demostración ejercicios 1.33. y 1.34.)

7. ARGUMENTACIÓN Y VALIDEZ

Consideramos ahora argumentaciones cuyas premisas y conclusión son enunciados simples o compuestos. Lo importante de una argumentación es su forma, por tanto, consideramos **formas argumentativas**, es decir, una sucesión finita de formas enunciativas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n, \therefore \mathcal{B}$, de las cuales a la última $\mathcal{B}$ se le llama **conclusión** o **tesis** y a las restantes $\mathcal{A}_i$ **premisas** o **hipótesis**.

Sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n, \mathcal{B}$ formas enunciativas. La forma argumentativa $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n, \therefore \mathcal{B}$, de "$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ se deduce $\mathcal{B}$", es **válida** si para cada asignación de valores de verdad de las variables que intervienen y que hace que todas las premisas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ tomen valor V, también hace que la conclusión $\mathcal{B}$ tome valor V. En otro caso se dice que la forma argumentativa es **inválida**.

La validez o invalidez de una argumentación se puede obtener haciendo las tablas de verdad de las premisas y la conclusión.
Sin embargo, no es el método más adecuado cuando tenemos muchas variables, en ese caso usaremos el **método de refutación** que consiste en intentar probar la invalidez de la forma argumentativa buscando aquellos valores de las variables que hace que cada una de las premisas tome el valor V y la conclusión el valor F. Si esto es imposible es que la forma argumentativa es válida, en otro caso habremos encontrado unos valores de verdad que hacen que será invalida.

Proposición 1.15. La forma argumentativa $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2,\dots, \mathcal{A}_n, \therefore\ \mathcal{B}$, es válida si y sólo si $(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n) \Rightarrow \mathcal{B}$, es decir, si $(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n) \to \mathcal{B}$ es una tautología. (Demostración ejercicios 1.36)

8. TIPOS DE DEMOSTRACIÓN

Dadas p y q variables de enunciado, la conectiva $\rightarrow$ da lugar al enunciado $(p \rightarrow q)$ que ya hemos estudiado. A partir del anterior se deducen 3 nuevas implicaciones:

- $((\sim p) \rightarrow (\sim q))$, forma enunciativa **contraria** de $(p \rightarrow q)$.
- $(q \rightarrow p)$, forma enunciativa **recíproca** del enunciado $(p \rightarrow q)$.
- $((\sim q) \rightarrow (\sim p))$, forma enunciativa **contrarrecíproca** de $(p \rightarrow q)$.

Nótese que $(p \rightarrow q)$ es lógicamente equivalente a su contrarrecíproco y que la forma contraria es lógicamente equivalente a su recíproca, es decir,

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \rightarrow (\sim p)),$$

$$((\sim p) \rightarrow (\sim q)) \Leftrightarrow (q \rightarrow p).$$

Veamos ahora algunos ejemplos de demostraciones tipo para enunciados de la forma $(p \rightarrow q)$ que aparecerán a lo largo del curso:

DEMOSTRACIÓN DIRECTA: se utiliza la validez de la siguiente argumentación

$$(p \rightarrow r), (r \rightarrow q), \therefore (p \rightarrow q)$$

Así si construimos una cadena finita de enunciados verdaderos de la forma $(p \rightarrow p_1), (p_1 \rightarrow p_2), \ldots, (p_n \rightarrow q)$ tendremos demostrado que $(p \rightarrow q)$ es verdadero.

Teorema: "Si n es un entero impar entonces n^2 es un entero impar"

DEMOSTRACIÓN POR CONTRAPOSITIVO O INDIRECTA: consiste en utilizar la equivalencia

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \rightarrow (\sim p)).$$

Teorema: "Si 3n + 2 es impar, entonces n es impar"

DEMOSTRACIÓN POR REDUCCIÓN AL ABSURDO: consiste en deducir una contradicción de la negación del resultado que se quiere demostrar, lo que se basa en la equivalencia

$$p \Leftrightarrow ((\sim p) \rightarrow (q \wedge (\sim q))).$$

O lo que es igual, suponer que la hipótesis es verdadera, la conclusión es falsa y llegar a una contradicción.

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge (\sim q)) \rightarrow (\sim p)).$$

- Teorema: "La raíz cuadrada de 2 es un número irracional"

DEMOSTRACIÓN POR CASOS: cuando se tiene una implicación del tipo $(p \rightarrow (r_1 \wedge r_2 \wedge \ldots \wedge r_n))$ para demostrar $(p \rightarrow q)$ basta con probar $(r_1 \rightarrow q), (r_2 \rightarrow q), \ldots, (r_n \rightarrow q)$.

Teorema: “Si x es un número real con $|x| < 1$, entonces $0 \leq x^2 < 1$.”

DEMOSTRACIÓN DE DOBLES IMPLICACIONES: demostrar un enunciado $(p \leftrightarrow q)$ será equivalente a demostrar $(p \rightarrow q)$ y $(q \rightarrow p)$ usando la equivalencia

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)).$$

Teorema: “Un número entero n es par si y sólo si su cuadrado n^2 es par”

DEMOSTRACIÓN DE EQUIVALENCIAS MÚLTIPLES: demostrar que n proposiciones son equivalentes

$$(p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n)$$

es igual a demostrar

$$((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n) \wedge (p_n \rightarrow p_1))$$

usando la equivalencia

$$(p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n) \Leftrightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n) \wedge (p_n \rightarrow p_1))$$

Teorema: "Los siguientes enunciados equivalen:

a) n es par,

b) n^2 es par

c) n^4 es par"