



## RELACIÓN DE PROBLEMAS Nº 4 NÚMEROS NATURALES Y NÚMEROS ENTEROS

1. Demostrar las siguientes afirmaciones:
  - a) Si  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $n$  es impar, entonces  $8 \mid (n^2 - 1)$ .
  - b) Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $d = (a, b)$  si y sólo si  $d \mid a$ ,  $d \mid b$  y  $\text{m.c.d.}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$ .
  - c) Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ , si  $a$  y  $b$  son primos relativos, entonces  $\text{m.c.d.}(a + b, a - b) = 1$  ó  $2$ .
  - d) Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , si  $d \mid a \cdot b$  y  $(d, a) = 1$ , entonces  $d \mid b$ .
  - e)  $p$  es un número primo si y sólo si  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ , si  $p \mid a \cdot b$  entonces  $p \mid a$  ó  $p \mid b$
2. Demostrar que si un número entero es a la vez un cuadrado y un cubo, entonces se puede escribir como  $7k$  o  $7k + 1$ .
3. Hallar el m.c.d y el m.c.m. de 12384 y 4720, calculando posteriormente la identidad de Bezout.
4. Resolver en  $\mathbb{Z}$  las ecuaciones siguiente, calculando todas sus soluciones:
  - a)  $11x + 7y = 3$
  - b)  $348x + 280y = -21$
  - c)  $231x - 1820y = 28$
5. Hallar  $a^{-1}$  en  $\mathbb{Z}_{1009}$  para  $a = 17$ ,  $a = 100$  y  $a = 777$ .
6. Razonar que  $\bar{-3} + \bar{7}^{-1}$  es una unidad en  $\mathbb{Z}_{23}$ . Calcular su inverso.
7. Dados  $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$ , con  $m > 1$ , demostrar que si  $a \equiv b \pmod{m}$  y  $d \mid m$ , entonces  $a \equiv b \pmod{d}$ .
8. Demostrar que si  $a, b, c, d$  y  $m \in \mathbb{Z}$ , con  $m > 1$ . Si  $a \equiv b \pmod{m}$  y  $c \equiv d \pmod{m}$ , entonces  $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$  y  $(a \cdot c) \equiv (b \cdot d) \pmod{m}$ .
9. Resolver los siguientes sistemas de congruencias:

$x \equiv 1 \pmod{2}$	$x \equiv -2 \pmod{4}$	$x \equiv 1 \pmod{3}$	$x \equiv 3 \pmod{3}$
a) $x \equiv -3 \pmod{11}$	b) $x \equiv -480 \pmod{5}$	c) $x \equiv -2 \pmod{4}$	d) $x \equiv 2 \pmod{4}$
$x \equiv 2 \pmod{15}$	$x \equiv 635 \pmod{63}$	$7x \equiv 1 \pmod{5}$	$x \equiv 4 \pmod{5}$
		$x \equiv 23 \pmod{7}$	$x \equiv -6 \pmod{7}$
10. Un estudiante quiere celebrar que ha terminado la carrera de informática y va a organizar una fiesta. Su presupuesto es de 36€ y quiere comprar litros de cerveza, latas de refrescos de cola y bolsas grandes de patatas fritas, sabemos que le dan 3 latas de refresco de cola por 1€, el litro de cerveza vale 2€ y la bolsa de patatas fritas

cuestan 3€. Teniendo en cuenta que compró 36 cosas y que al menos compro una unidad de cada, ¿cuántos refrescos de cola compró?

11. Si  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son los ángulos de un triángulo expresados en grados. Suponiendo que  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son números enteros, calcular todos los triángulos cuyos ángulos verifiquen la ecuación  $2x + 5y = 3z$ .
12. Calcular todos los números enteros que divididos por los números 23, 31 y 55 siempre se obtenga el resto 11.
13. Pepito acaba de terminar sus estudios. Como aun no tiene trabajo y su padre está muy mayor decide hacerse cargo de la granja que está a su cuidado y así darle un descanso. Pepito nunca se ha dedicado a esto, solo sabe que tiene gallinas y cerdos y según le dijo su padre cada gallina pone una media de 7 huevos a la semana. El domingo pasado tocó matanza, después de la matanza el número de jamones más el número de paletillas menos el número de huevos que han puesto las gallinas durante la semana fue 17. Sabiendo que necesitó 8 cartones de huevos y que en la granja no cogen más de 50 cerdos, ¿cuántos kilos de sal necesita comprar Pepito si cada jamón usa el doble de sal que una paletilla?  
Nota: Para salar una paletilla son necesarios 3 kg de sal y en cada cartón cogen 24 huevos.
14. Pasados unos meses, hemos vuelto a encontrarnos con Pepito y nos ha contado que ha invertido el dinero de la venta de los jamones comprando un rebaño de ovejas. Desde entonces todos los días lleva a la huerta de su tío Pinto a un grupo de 25 ovejas distintas, de manera que todas las ovejas excepto 3, a las que le falta una pata, salen a pastar un día antes de que una de ellas repita. Por la noche todas las ovejas duermen en grupos de 9 en establos que Pepito construyó. Como le faltó dinero para construir todos los establos, las últimas 17 ovejas tienen que dormir en la cuadra de la mula Jacinta.
  - a) Si en la ultima revisión de las patas de las ovejas, el veterinario nos cobro entre 1000 y 1500 euros, ¿Cuántos días tienen que pasar para que la oveja Petra (la mas vieja del rebaño) salga dos días a la huerta del tío Pinto, sabiendo que los honorarios del veterinario son de un euro por pata revisada?
  - b) Si cada oveja consume 3 sacos de pienso al año, ¿Cuántos sacos tiene que pedir para los próximos 6 meses?
15. El pirata Barba Negra y su tripulación en uno de sus viajes encontraron un cofre lleno de monedas de oro en una isla desierta. Barba Negra dio a cada hombre de su tripulación 4 monedas de oro y se quedó con las 57 restantes. En el viaje de vuelta algunos murieron debido a unas fiebres y el pirata requiso para sí las monedas de los muertos. Esto molestó mucho a parte de la tripulación, tanto que el pirata quiso enmendar la situación dándoles a cada uno una moneda más, de esta forma él seguía conservando 47 monedas. Pese a esto, una parte de la tripulación se sublevó y tras una ardua batalla entre los partidarios de Barba Negra y los sublevados, estos últimos dieron muerte a Barba Negra y sus partidarios y lograron quedarse con el mando del navío. Los pocos marineros que quedaron, después de darse cuenta de que en el fragor de la lucha se habían extraviado 14 monedas decidieron repartir las monedas restantes, tocando cada uno a 23 monedas de oro y acordaron usar las 5 monedas que sobraban para comprar ron. Si el tesoro tenía menos de 200 monedas, ¿Cuántas

monedas tenía el cofre? ¿Cuántos hombres formaban la tripulación? ¿Cuántos murieron?

16. Si  $x$  es un número entero que satisfacen simultáneamente:

- i) El resto de dividir  $x$  entre 23 es 3
- ii) 16 divide a  $x$

Se pide:

- (a) Utilizar la resolución de una ecuación diofántica para calcular todos los valores  $x \in \mathbb{Z}$  como los anteriores.
- (b) Usar el teorema chino del resto para calcular todos los valores  $x \in \mathbb{Z}$  como los anteriores
- (c) ¿Cómo interpretas los resultados obtenidos en los apartados (a) y (b)?

17. Hace tiempo Pepito tuvo una granja con ovejas, gallinas, cerdos y la mula Jacinta, pero el negocio fracasó, así que vendió la granja con todos los animalitos y se propuso montar una tienda de ordenadores que parecía un negocio con más futuro. Dispone de un presupuesto de 20000€ para comprar ordenadores y sabemos que los discos duros valen 100€, las regrabadoras de DVD de doble capa 40 € y los módulos de memoria de 1Gb le cuestan otros 100€. Cada ordenador de los que quiere montar y vender Pepito lleva una regrabadora y un único disco duro, por lo que compró el mismo número de regrabadoras que de discos duros. En memorias, discos duros y regrabadoras gastó todo su presupuesto excepto 7500€ que gastó en otros componentes. Sabiendo que compró menos de 80 módulos de memoria y menos de 40 discos duros, y que puso la misma cantidad de memoria a cada ordenador, ¿cuántos módulos de memoria le sobraron si puso más de uno en cada ordenador? ¿Cuántos ordenadores montó?

18. Calcular los lados  $x$  e  $y$  de un rectángulo de área menor que 400 centímetros cuadrados y perímetro mayor de 70 centímetros, sabiendo que  $x$  e  $y$  expresados en centímetros son números enteros y satisfacen la ecuación:

$$6x - 15y = -18$$

19. Después de que el Curto Inglés abriera un nuevo centro comercial enfrente de la tienda de informática de Pepito, este decidió vender su negocio. Con el dinero que obtuvo invirtió en bolsa comprando acciones de dos importantes empresas del IBEX-35, INDESA y ACCIONO. Estas últimas semanas la inestabilidad de la bolsa tiene preocupado a nuestro amigo, ha decidido comprar un local comercial y para la entrada necesita 13000 €. Sólo dispone de 4500 € en efectivo, así que decide hacer una compra-venta de acciones y así disponer del dinero justo para la compra del local. Sabiendo que las acciones de INDESA se cotizan a 32 € y las de ACCIONO se cotizan a 178 €, ¿es posible obtener el dinero sólo vendiendo acciones? Si quiere que el número de acciones vendidas sea mínimo, ¿cuántas de cada tipo tiene que vender? ¿Cuántas acciones compra y/o vender si tras su transacción bursátil, Pepito tiene una acción más que al principio?

20. Pepito acabó de gestor de una empresa afectada por la crisis, tenía que decidir cuántos trabajadores necesitaba y despedir al resto. Tras automatizar la empresa,

sobraban operarios, sabía que los operarios necesarios para hacer funcionar cada máquina son 37 y que tras recolocar a todos los operarios en todas las máquinas, sobraban 375. Además se reorganizó el departamento administrativo y comercial, creándose secciones de 7 administrativos, tras recolocarlos en todas las secciones creadas, sobraron 15 administrativos. Sabemos que el número de operarios en la empresa actualmente es dos veces el número de administrativos más 1. Sabemos que el número de operarios antes de la reestructuración está comprendido entre 1050 y 1500. Calcular cuánto la cantidad en euros que suponen las nóminas mensuales de los trabajadores a la empresa después del reajuste sabiendo que la nómina de un operario es de 1500€ y la de un administrativo 1300€.

21. Calcular  $x$  e  $y$  tal que  $(xy)_{18} = (yx)_{17} + 1$ .

22. Escribir los siguientes números en base 10.

a)  $(1010001)_2$

b)  $(ade)_{16}$

c)  $(10203)_4$

d)  $(g124de)_{18}$

23. Escribir los siguientes números, dados en base 10, en base 2, en base 4, en base 8 y en base 16:

a) 137

b) 6243

c) 12345

24. Calcular, si existen, los números  $x$  e  $y$  tales que  $(3x)_y = (62)_x + 3$ . ¿Es la solución única?

25. Dada la siguiente expresión con números escritos en base  $x$  e  $y$

$$(A2)_x - (10)_y = 5(51)_y - (56)_x.$$

Calcular, si existen, tales números  $x$  e  $y$ .