Universidad de Jaén

Grado en Ingeniería Informática
ÁLGEBRA

TEMA 4. Espacios vectoriales y espacios vectoriales euclídeos

Carmen Ordóñez Cañada

uja.es

Bibliografía básica:

Anton, H. (1990). *Introducción al Álgebra Lineal*. (2ª ed.) México: Limusa.

Burgos, J. (1995). *Álgebra Lineal*. Madrid, España: McGraw-Hill.

Grossman, S. (1992). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. (4ª ed, 3ª ed. en español). México: McGraw-Hill.

Merino, L., Santos E. (2007). *Álgebra Lineal con métodos elementales*. (2ª ed.) Madrid, España: Thomson.

Grado en Ingeniería Informática
TEMA 4. ESPACIOS VECTORIALES Y E.V. EUCLÍDEOS

ÍNDICE:

1. Espacios vectoriales. Bases.
2. Subespacios vectoriales.
3. Espacios vectoriales euclídeos.

Carmen Ordóñez Cañada

Definición. Sea K un cuerpo (conmutativo), V un conjunto no vacío, diremos que V es un *espacio vectorial sobre K*, si:

i. (V, +) es un grupo abeliano
ii. En V hay definida una operación externa de K en V, a izquierda, (llamada producto por escalares); esto es, una aplicación de $K \times V \to V$, que además verifica las siguientes propiedades:
   1. $a(u+v) = au+av \quad \forall a \in K, \forall v \in V$
   2. $(a+b)v = av+bv \quad \forall a, b \in K, \forall v \in V$
   3. $a(bv) = (ab)v \quad \forall a, b \in K, \forall v \in V$
   4. $1_K v = v \quad \forall v \in V$

A los elementos de V se le llaman vectores y se notarán u, v, w, …y a los elementos de K, escalares y se notan a, b, c, … o con letras griegas

Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre K.
Entonces para cualesquiera $a,b\in K$, u, $v\in V$ se verifican:

1. $0v = 0$
2. $a0 = 0$
3. Si $av = 0$ entonces $a = 0$ o $v = 0$
4. $-(av) = (-a)v = a(-v)$
5. $a(u - v) = au - av$
6. $(a - b)v = av - bv$
7. Si $av = bv$ y $v\neq 0$ entonces $a = b$
8. Si $au = av$ y $a\neq 0$ entonces $u = v$

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre *K*.

Se dice que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es *linealmente dependiente* sii existen $a_1, \ldots, a_n \in K$, no todos nulos, tales que $0 = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$

Se dice que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es *linealmente independiente* sii para cada

$$0 = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \Rightarrow a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$$

Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre *K*, entonces:

1. Si $0 \in \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente.
2. $\{v_1\}$ es linealmente independiente sii $v_1 \neq 0$.
3. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente entonces $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+r}\}$ es linealmente dependiente.
4. Si $\{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+r}\}$ es linealmente independiente entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.

Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre *K*, entonces un conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente si y sólo si, uno de los vectores es combinación lineal de los restantes.

SISTEMA DE GENERADORES EN UN ESPACIO VECTORIAL

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre *K*. Un conjunto de vectores S se dice que es *sistema de generadores* de V si todo vector V es combinación lineal finita de S.

Proposición. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es sistema de generadores del espacio vectorial, V, y u_i es combinación de los restantes vectores, entonces el conjunto $\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\}$ es también sistema de generadores de V.

Lema. Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$es linealmente independiente y $\{u_1, \ldots, u_s\}$ es sistema de generadores de V, entonces $m \leq s$.

BASES DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre *K*. Llamaremos *base* de V a todo subconjunto B$\subseteq$V, verificando:

1. B es sistema de generadores de V
2. B es linealmente independiente.

Teorema (Teorema de la base). Si un espacio vectorial, V, tiene una base formada por un número finito de vectores, entonces todas las bases de V son finitas y tienen igual número de vectores.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre *K*.
Llamaremos *dimensión de* V, dim (V), al número de vectores de cualquier base.
Si V={0}, diremos que dim({0}) = 0

OBTENCIÓN DE BASES

Teorema. En un espacio vectorial, no nulo, de cada sistema de generadores finito se puede extraer una base.

Teorema (Teorema de ampliación de la base). Sea V un espacio vectorial sobre *K*, de dimensión n y sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ conjunto linealmente independiente. Entonces existen vectores $v_{r+1}, \ldots, v_n$ tales que $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es base de V.

Corolario. Sea V un espacio vectorial de dimensión n, entonces dado un conjunto de exactamente n vectores, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, son equivalentes:

1. S es linealmente independiente.
2. S es sistema de generadores de V.
3. S es base de V

COORDENADAS DE UN VECTOR RESPECTO DE UNA BASE

Teorema. Sea V un espacio vectorial sobre *K*. Si $B=\{v_1, \ldots, v_n\}$es una base de V, entonces todo vector, x de V, se escribe de forma única como combinación lineal de los vectores de B.

Si $x = x_1v_1+ \ldots+x_nv_n$ es la única como combinación lineal en función de los vectores de B, notamos $x\equiv(x_1, \ldots, x_n)_B$ y se llaman las *coordenadas* de x respecto de la base B.

Proposición (Coordenadas y operaciones algebraicas). Sea V un espacio vectorial sobre *K* de dimensión n, B una base de V y, x e y vectores en V que tienen coordenadas $x\equiv(x_1, \ldots, x_n)_B$ e $y\equiv(y_1, \ldots, y_n)_B$, entonces:

1. $x+y \equiv (x_1+ y_1 ,\ldots, x_n+ y_n)_B$
2. $\alpha x \equiv (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)_B$ para cada $\alpha \in K$.

Proposición (Coordenadas y dependencia lineal). Sea V un espacio vectorial sobre K, B una base de V.

Un conjunto de r vectores, $\{u_1, \ldots, u_n\}$, en V es linealmente independiente si, y sólo si, la matriz cuyas columnas son las coordenadas de estos vectores respecto de la base B, tiene rango r.

CAMBIO DE BASE

Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre *K*, B y B’ bases de V. La ecuación matricial del cambio de base de B’ a B es la expresión:

$$X = PX'$$

que permite calcular las coordenadas de un vector de V respecto a B, conociendo las coordenadas del mismo respecto de B’. P es la matriz de cambio de B’ a B, esto es: la matriz regular cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B’ respecto de B. El cambio de base en sentido contrario, de B a B’, viene dado por:

$$X' = P^{-1} X$$

Proposición. Toda matriz regular es una matriz de cambio de base.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre K, U un subconjunto no vacío de V. Decimos que U es subespacio vectorial de V, y lo notaremos por $U \leq V$ si se verifican las siguientes condiciones:

1. U es cerrado para la suma: $\forall u, w \in U \Rightarrow u+w \in U$
2. U es cerrado para el producto por escalares: $\forall \alpha \in K, \forall\, u \in U \Rightarrow \alpha u \in U$

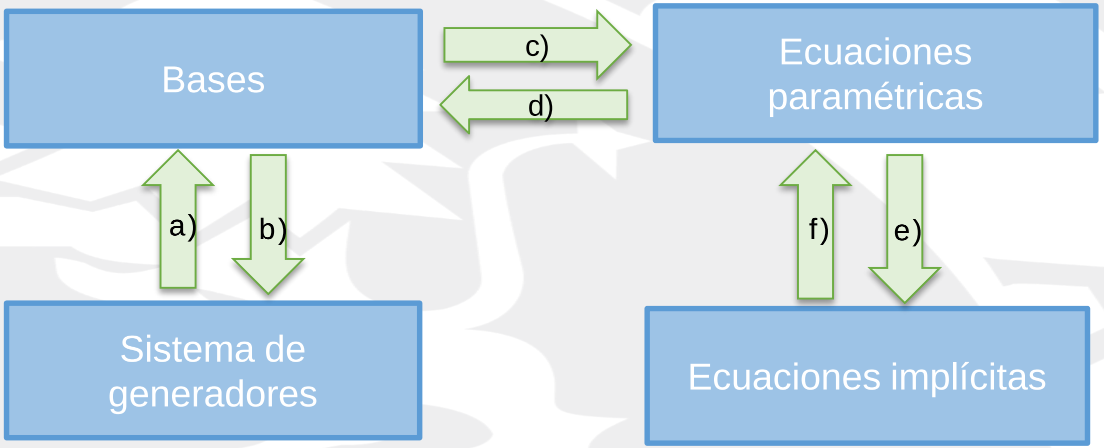
Proposición (Caracterización de subespacio).

Sea V un espacio vectorial sobre K, y $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$. Entonces:

U es subespacio vectorial de V $\Leftrightarrow (\forall\, \alpha, \beta \in K, \forall u, w \in U \Rightarrow \alpha\, u+\beta\, w \in U)$

FORMAS DE DETERMINAR UN SUBESPACIO:

1. Sistema de generadores
2. Bases
3. Ecuaciones paramétricas
4. Ecuaciones implícitas



Definición. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un *producto escalar* en V es una aplicación:

$$<,>: V\times V \rightarrow \mathbb{R}$$

verificando:

1. $< u, v > = < v, u > \quad \forall u, v \in V$
2. $< u+w, v > = < u, v > + < w, v> \quad \forall u, v, w \in V$
3. $< au, v > = a< u, v > \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$
4. $< u, u > \geq 0 \quad y \quad < u, u > =0 \Leftrightarrow u=0$

Un *espacio vectorial euclídeo* es un par (V, <,>)

Observación. Sea V un espacio vectorial euclídeo. Entonces:

1. $< 0, v > = < v, 0 > = 0 \quad \forall v \in V$
2. $< \sum_{i=1}^{r} a_i u_i , \sum_{j=1}^{s} b_j v_j > = \sum_{i,j} a_i b_j < u_i, v_j >$

MATRIZ DE GRAM. EXPRESIÓN MATRICIAL.

Definición. Sea (V,<,>) un espacio vectorial euclídeo. Llamaremos *matriz de Gram* (o métrica) respecto de una base B={$v_1, \ldots, v_n$} de V, a

$$G=(g_{ij}) \text{ siendo } g_{ij}=< v_i, v_j> \ \forall i,j$$

Proposición (Expresión matricial del producto escalar)

$$<x,y>= X^t\, G\, Y$$

MATRIZ DE GRAM Y CAMBIO DE BASE

Proposición. Las matrices de Gram (G_1 y G_2) de un espacio vectorial euclídeo, respecto de distintas bases, son congruentes; esto es, existe una matriz P regular, tal que

$$G_2 = P^t\, G_1\, P$$

P es la matriz de cambio de base

NORMA DE UN VECTOR

Definición. Sea (V,<,>) un espacio vectorial euclídeo. Se define la *norma* (o módulo) de un vector $v \in V$,

$$\|v\| = \sqrt{<v,v>}$$

Observar que $\|v\| = \sqrt{<v,v>} = \sqrt{X^t\, G\, X}$

Proposición. Sea (V,<,>) un espacio vectorial euclídeo, $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $\|v\| \geq 0$
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3. $\|\alpha v\| = |\alpha|\, \|v\|$

Teorema (Desigualdad de Schwartz). Sea $(V,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Para cada x, y $\in V$ se verifica:

$$|<x,y>| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Teorema (Desigualdad triangular o de Minkowski). Sea $(V,<,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Para cada x, y $\in V$ se verifica:

$$\|x + y\| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Definición. Para cada x, y vectores de un espacio vectorial euclídeo, llamaremos *ángulo* entre dos vectores x e y, al único número real α, $0 \leq \alpha \leq \pi$, que verifica

$$\cos \alpha = \frac{<x,y>}{||x||\,||y||}$$

BASES ORTOGONALES Y ORTONORMALES

Definición. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita. Una base B=$\{v_1, \dots, v_n\}$ de V, se dice *ortogonal* si los vectores que la forman son ortogonales dos a dos; es decir, si $< v_i, v_j >=0 \;\; \forall i \neq j$.

Se dice que B es *ortonormal* si y sólo si es ortogonal y todos los vectores de la base son unitarios ($\| v_i \|=1 \;\; \forall\, v_i \in B$).

Proposición. Sea (V,<,>) un espacio vectorial euclídeo y B=$\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Sea G la matriz de Gram respecto de la base B. Entonces:

1. B es ortogonal ⇔ G es diagonal.
2. B es ortonormal ⇔ G es la identidad.

Proposición. La matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales es una *matriz ortogonal*; esto es, $P^t = P^{-1}$.

CONSTRUCCIÓN DE BASES ORTONORMALES. MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT

Lema. En un espacio vectorial euclídeo, un conjunto de vectores ortogonales dos a dos son linealmente independientes.

Proposición. Sea V un espacio vectorial euclídeo. Si B=$\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortogonal de V, entonces

$$B' = \left\{ \frac{v_1}{||v_1||}, \dots, \frac{v_n}{||v_n||} \right\}$$

es una base ortonormal de V.

Teorema de Gram-Schmidt. Sea (V,<,>) un espacio vectorial euclídeo y B=$\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Entonces existe una base ortogonal $\{u_1, \dots, u_n\}$ de V, de forma que el subespacio generado por $\{v_1, \dots, v_k\}$ es el mismo que el generado por $\{u_1, \dots, u_k\}$ para cada k.

Demostración. (**Método de Gram-Schmidt)**

$u_1 = v_1$

$$u_2 = v_2 - \frac{<v_2, u_1>}{||u_1||^2} u_1$$

$$u_n = v_n - \frac{<v_n, u_1>}{||u_1||^2} u_1 - \frac{<v_n, u_2>}{||u_2||^2} u_2 \ldots - \frac{<v_n, u_{n-1}>}{||u_{n-1}||^2} u_{n-1}$$

CONSTRUCCIÓN DE BASES ORTONORMALES:

1. Construimos una base ortogonal por el Método de Gram-Schmidt.
2. Construimos una base ortonormal multiplicando cada uno de los vectores del paso 1, por el inverso de su norma.

Universidad de Jaén

Grado en Ingeniería Informática
ÁLGEBRA

TEMA 4. Espacios vectoriales y espacios vectoriales euclídeos

Carmen Ordóñez Cañada