• Ahora tenemos que definir el grafo. Para que la aplicación sea biyectiva, cada elemento de A debe ir a un único elemento de B; por el ejemplo:

f(A[[1]])=B[[1]], f(A[[2]])=B[[2]],…

Podemos hacer un bucle que recorra todos los elementos de *A* y asigne f(A[[i]])=B[[i]], de la forma:

For[i=1, i <= Length[A], i++, f[A[[i]]] = B[[i]]]

Sustituimos dominio, codominio y grafo en el programa 7.5. modificando:

In[]:=
```
A = {{1,{}},{1,{a}},{1,{b}},{1,{a,b}},{1,{c}}, {1,{a,c}}, {1, {b,c}},
     {1,{a,b,c}},{2,{}},{2,{a}},{2,{b}},{2,{a,b}},{2,{c}},{2,{a,c}},
     {2,{b,c}},{2,{a,b,c}},{3,{}},{3,{a}},{3,{b}},{3,{a,b}},{3,{c}},
     {3,{a,c}},{3,{b,c}},{3,{a,b,c}}};
B = {{{},a},{{1},a},{{2},a},{{1,2},a},{{3},a}, {{1,3},a},{{2,3},a},
     {{1,2,3},a},{{},b},{{1},b},{{2},b},{{1,2},b},{{3},b},
     {{1,3},b}, {2,3},b},{{1,2,3},b},{{},c},{{1},c}, {{2},c},
     {{1,2},c}, {{3},c},{{1,3},c},{{2,3},c}, {{1,2,3},c}};
For[i = 1, i <= Length[A], i++, f[A[[i]]] = B[[i]]]

       ⋮            ⋮
```

Out[]=
```
El conjunto imagen es: {{},a},{{},b},{{},c},
{{1},a},{{1},b},{{1},c},{{2},a},{{2},b},{{2},c},
{{1,2},a},{{1,2},b},{{1,2},c},{{3},a},{{3},b},
{{3},c},{{1,3},a},{{1,3},b},{{1,3},c},{{2,3},a},
{{2,3},b},{{2,3},c},{{1,2,3},a},{{1,2,3},b},
{{1,2,3},c}}
Es sobreyectiva
Es inyectiva
Es biyectiva
```

■

6. EJERCICIOS

Ejercicio 7.1. Sea $X = A \cup B \cup Z$, donde A es el conjunto formado por las letras distintas de tu primer apellido, B es el conjunto formado por los números distintos de tu DNI y Z es el conjunto formado por los números naturales impares menores que 10 junto con las vocales. Comprobar las siguientes propiedades:

a) Conmutativa: $A \cup Z = Z \cup A$, $A \cap Z = Z \cap A$.
b) Asociativa: $A \cup (B \cup Z) = (A \cup B) \cup Z$, $A \cap (B \cap Z) = (A \cap B) \cap Z$
c) Idempotencia: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
d) Elemento universal y elemento ínfimo: $X = X$, $A \cup A \cap \varnothing = \varnothing$.

e) Elemento neutro: $A \cup \varnothing = A,\ \ A \cap X = A.$
f) Leyes de absorción: $A \cup (A \cap Z) = A,\ A \cap (A \cup Z) = A.$
g) Distributivas: $A \cup (B \cap Z) = (A \cup B) \cap (A \cup Z),$
$A \cap (B \cup Z) = (A \cap B) \cup (A \cap Z).$
h) Propiedades del complementario: $\overline{X} = \varnothing,\ \overline{\varnothing} = X,\ \overline{\overline{A}} = A,$
$A \cup \overline{A} = X,\ A \cap \overline{A} = \varnothing.$
i) Leyes de De Morgan: $\overline{A \cup Z} = \overline{A} \cap \overline{Z},\ \overline{A \cap Z} = \overline{A} \cup \overline{Z}.$

■

Ejercicio 7.2. Definir una función que calcule la diferencia lógica entre dos conjuntos finitos cualesquiera A y B.

■

Ejercicio 7.3. Demostrar las siguientes propiedades y comprobarlas con Mathematica para los mismos conjuntos del ejercicio anterior.

a) $\overline{A - Z} = \overline{A} \cup Z.$
b) $(A - Z) - B = (A - Z) - (Z - B).$
c) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$

■

Ejercicio 7.4. Se consideran los siguientes conjuntos de alumnos:

A = Conjunto de alumnos con pareja.
B = Conjunto de alumnos con DNI par.
C = Conjunto de alumnos que en el apartado sexo de su DNI ponga V-M.

Determinar usando teoría de conjuntos y el Mathematica qué grupo de alumnos de la clase es más grande:

a) Alumnos sin pareja o que no tenga en su DNI: número impar de sexo V-M.
b) Alumnos sin pareja o con DNI impar o de sexo M-F.

■

Ejercicio 7.5. Calcular una partición, si es posible, del conjunto B del ejercicio 7.4. con al menos 5 conjuntos. ¿Cuál es el número máximo de conjuntos que puede tener una partición del conjunto B?

■

Ejercicio 7.6. Sean A, B los conjuntos del ejercicio 7.4. y $Z = \{10, 11, 12\}$. Definimos $X = A \cup B \cup Z$. Comprobar si el complementario de Z, el complementario de $A \cup B$ y el conjunto $(A \cup B) \cap Z$ forman una partición de X.

■

Ejercicio 7.7. Dado el conjunto $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y los subconjuntos de X, $A = \{a, c, d, g\}$, $B = \{a, d, f\}$, $F = \{b, c, e, g\}$ y G = {letras distintas de tu primer apellido} $\cap X$, se pide:

a) Calcular $A \cap B$, $B \cap F$, $F \cup B$ y $G \cup A$. ¿Cómo son B y F respecto de X?
b) Calcular $\overline{G}$, $A - B$ y $(A - F) - G$.
c) Comprobar que $\mathrm{card}(A \cup B) + \mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$.

Comprobar con Mathematica los apartados anteriores.

■

Ejercicio 7.13. Se considera la correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ definida por $G = \{(x, y): 2x + y = 16\}$.

a) Calcular todos los elementos de G.
b) Restringir el dominio y considerar como codominio el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : n < 30\}$, de forma que G determine un grafo de una aplicación.
c) ¿Es la aplicación definida en el apartado anterior inyectiva? En caso contrario, reducir dominio y/o codominio para que lo sea.
d) ¿Es sobreyectiva? Reducir dominio y/o codominio para que lo sea.

Comprobar con Mathematica los apartados b), c) y d).

■

Ejercicio 7.14. Sea A el conjunto formado por todas las letras distintas que aparecen en tu primer apellido y B el conjunto formado por todos los dígitos distintos de tu DNI, calcular si es posible:

a) $A \times B$ y $A \times A \times B$.
b) Una aplicación entre A y $\mathcal{P}(B)$ que sea inyectiva y otra entre $\mathcal{P}(B)$ y A que sea sobreyectiva.
c) Una aplicación no inyectiva de $A \times B$ en $\mathcal{P}(A \times B)$.
d) Una aplicación no sobreyectiva de $\mathcal{P}(A \times B)$ en $A \times B$.

■

Ejercicio 7.15. Dada una aplicación cualquiera entre dos conjuntos finitos $f: A \to B$, la aplicación $g: A \to Im(f)$ definida por $g(a) = f(a)$ es sobreyectiva. Comprobarlo para $A = \{n \in \mathbb{Z} : n < 100\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} : n < 10000\}$ y $f: A \to B$ definida por $f(n) = n^2$.

■

Ejercicio 7.16. ***La letra del DNI.*** La letra del DNI español no es más que un código de control que comprueba si el DNI es correcto, éste puede determinarse fácilmente calculando el resto de dividir el DNI entre 23 y asignarle a cada resto una letra según la siguiente tabla:

CÓDIGOS PARA LAS LETRAS DEL D.N.I. O DEL N.I.F.												
RESTO	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
LETRA	T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B
RESTO	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
LETRA	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E	

Tabla 7.3. Códigos para las letras del DNI.

a. Definir una aplicación biyectiva entre el conjunto de posibles restos tras dividir por 23 y el conjunto de letras que aparece en la tabla.
b. Definir una aplicación que a cada número entero positivo le asigne el resto de dividirlo por 23.