Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas

Algebra. Grado en Ingeniería Informática.
Relación de problemas 2. El grupo simétrico.

1.-Demostrar que si G es un grupo, el elemento neutro y el elemento simétrico son únicos.

2.-Sea $(G, *)$ un grupo. Demostrar que se verifica:
i) $a * b = e \Rightarrow a = b'$ y $a' = b$
ii) $a * b = a * c \Rightarrow b = c$ y $b * a = c * a \Rightarrow b = c$
iii) $a * b = b \Rightarrow a = e$ y $b * a = b \Rightarrow a = e$
iv) $(a * b)' = b' * a'$
v) $(a')' = a$

3.-Demostrar que un grupo G es abeliano sii para todo $a, b \in G$ se verifica que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

4.-Sea R el conjunto de los números reales. Consideramos el conjunto

$$P = \{f : R \to R \ / \ f(x) = ax + b \text{ con } a, b \in R, \ a \neq 0\}$$

Demostrar que P con la composición es un grupo.

5.-En el conjunto $R - \{1\}$ se considera la operación definida por:

$$x * y = x + y - xy$$

Demostrar que $(R - \{1\}, *)$ es un grupo conmutativo.

6.-En RxR^* se define la siguiente operación:

$$(x1, y1) * (x2, y2) = (y1x2 + x1, y1y2)$$

Demostrar que es un grupo no conmutativo.

7.Sea $G = R^2 - \{0\}$ y consideremos la siguiente operación interna:

$$(x1, x2) * (y1, y2) = (x1y1 - x2y2, x2y1 + x1y2)$$

Demostrar que $(G, *)$ es un grupo conmutativo.

8.-Sean $G_1, ..., G_n$ grupos. Demostrar que $G_1 \times ...... \times G_n$ tiene estructura de grupo para la operación:

$$(a_1, ..., a_n)(b_1, ..., b_n) = (a_1b_1, ..., a_nb_n)$$

9.-Si G_1 y G_2 son dos grupos y H_1 y H_2 son subgrupos de G_1 y G_2,respectivamente, comprobar que $H_1\times$ H_2 es subgrupo de $G_1\times$ G_2.Razonar

A1) $A_3 \times Z_2$ es un grupo de orden 6 y tiene subgruposde orden 3, de orden 2 y de orden 1.

A2) ¿Es $A_3 \times Z_2$ conmutativo? Razonar la respuesta.

10.-Demostrar que la intersección de subgrupos es un subgrupo y que la unión de subgrupos no es, en general, un subgrupo.

11.-Sea $(G, *)$ un grupo y consideremos

$$H = \{x \in G : x * a = a * x \ \forall a \in G\}$$

1. Demostrar que H es un subgrupo en G.
2. Calcular H para $G = Z_3$, $G = A_2$ y $G = S_2$.

12.-Dado el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$, consideremos su grupo simétrico S_3, cuyos elementos son:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Formar la tabla del grupo.

ii) Calcular un subgrupo de orden 2 y otro de orden 3.

13.-Dadas las permutaciones de S_5

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

i) El número de inversiones de cada permutación.

ii) La descomposición en ciclos y transposiciones de cada permutación.

iii) La signatura de cada permutación.

14.- Definir una operación en $A_3 \times Z_2 \times 3Z$ que lo dote de estructura de grupo.

1. ¿Es conmutativo? Razonar la respuesta.
2. Calcular, si es posible, un subgrupo conmutativo de $A_3 \times Z_2 \times 3Z$ con dos elementos.

15.-Sea $(G, *)$ un grupo:

A. Demostrar que $H = \{I, \theta\}$ con θ una transposición de S_3, es subgrupo de S_3. ¿Es H conmutativo?

B. Razonar si H es subgrupo de A_3.

C. Calcular $H \cap A_3$.

16.-Sea $(G, *)$ un grupo abeliano, sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G

$$H_1 * H_2 = \{h_1 * h_2 : h_1 \in H_1 \text{ y } \ h_2 \in H_2\}$$

¿Es $H_1 * H_2$ un subgrupo de G?