СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗАДАЧАХ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ,

Завдання для самостійної роботи

1. Моделювання випадкових подій, групи несумісних подій

1.1. Звичайну монету підкидають N разів. Змоделювати результат підкидання. Скільки разів випав герб? Моделювання повторити К разів. Скільки всього разів випав герб? Поясніть результати.

1.2. Стандартний кубик підкидають N разів. Змоделювати результат підкидання. Скільки разів випала кожна цифра (1,2,3,4,5,6)? Моделювання повторити K=11 разів. Скільки всього разів випала кожна цифра? Поясніть результати.

2. Моделювання дискретної випадкової величини

2.1. Розподіл дискретної випадкової величини заданий у вигляді таблиці

x_i	x_1=1	x_2=2	x_3=3	x_4=4	x_5=5	x_6=6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Змоделювати реалізацію випадкової величини довжиною 100. Оцініть середнє значення, порівняйте його з теоретичним.

2.2. Випадкова величина описує суму цифр, що отримується в результаті підкидання двох кубиків. Знайдіть розподіл цієї випадкової величини та підтвердіть його результатом обчислювального експерименту (змоделюйте реалізацію, наприклад довжини 1000, оцініть експериментальні частоти). Перевірте гіпотезу про закон розподілу.

2.3. Експеримент складається з підкидання 4 справедливих монет. Нехай змінна X позначає кількість аверсів монети (орел, решка), то X - випадкова величина з можливими дискретними значеннями 0,1,2,3,4 з відповідними ймовірностями:

$$P\{X=0\}=P\{T,T,T,T\}=\frac{1}{16}$$

$$P\{X=1\}=P\{T,T,T,H\},P\{T,T,H,T\},P\{T,H,T,T\},P\{H,T,T,T\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=2\}=P\{T,T,H,H\},P\{T,H,H,T\},P\{H,T,H,T\},P\{H,T,T,H\},P\{T,H,T,H\},P\{H,H,T,T\}=\frac{3}{8}$$

$$P\{X=3\}=P\{T,H,H,H\},P\{H,T,H,H\},P\{H,H,T,H\},P\{H,H,H,T\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=4\}=P\{H,H,H,H\}=\frac{1}{16}.$$

Тобто,

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Змоделюйте реалізацію довжини 1000, оцініть експериментальні частоти. Перевірте гіпотезу про закон розподілу.

2.4. Проводиться n незалежних дослідів, в результаті кожного з яких може з'явитися чи не з'явитися подія A. Нехай імовірність появи події A в кожному з дослідів дорівнює p. Випадкова величина X - число появ події A при n незалежних дослідах. Область зміни X складається з усіх цілих чисел від 0 до n включно. Закон розподілу величини X визначається формулою Бернуллі

$$P_n(m)=P\{X=m\}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}.$$

Змоделюйте реалізацію довжини 1000, оцініть експериментальні частоти. Перевірте гіпотезу про закон розподілу.

2.5. Розподіл Пуассона. Нехай випадкова величина X може приймати довільні цілі невід'ємні значення. Щільність розподілу

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\dots,n,\dots$$

де λ- деяка додатна константа. Кажуть, що випадкова величина X розподілена за законом Пуассона.

Змоделюйте реалізацію довжини 1000, оцініть експериментальні частоти. Перевірте гіпотезу про закон розподілу.

2.6. Г**еометричний розподіл** визначається як будь-який з двох розподілів ймовірностей:

- дискретна випадкова величина X має геометричний розподіл з параметром p, якщо вона збігається з кількістю випробувань до першого успіху в нескінченній послідовності випробувань Бернуллі з імовірністю успіху в одному випробуванні

$P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1}p,$ де k = 1, 2, 3, ...

- величина Y=X−1 , що дорівнює кількості неуспіхів до першого успіху.

$P\{Y = k\} = (1 - p)^{k}p,$ де k = 0, 1, 2, 3, ...

Змоделюйте реалізацію величин X та Y, довжини 1000, оцініть експериментальні частоти. Перевірте гіпотезу про закон розподілу

3. Моделювання неперервних випадкових величин

3.1. Генератор рівномірнорозподілених випадкових величин. Змоделюйте випадкову величину X, що є рівномірно розподіленою на відрізку *[0, 1]*. Для моделювання скористайтесь вбудованим генератором випадкових величин (у Python - вбудована функція **random.random()).** Оцініть середнє значення і дисперсію та порівняйте з теоретичними значеннями. Перевірте гіпотезу про закон розподілу.

3.2. Рівномірний розподіл. Змоделюйте випадкову величину X, що є рівномірно розподіленою на відрізку *[a, b]*. Для моделювання скористайтесь методом оберненої функції та вбудованою функцією **random.uniform().** Оцініть середнє значення і дисперсію та порівняйте з теоретичними значеннями. Перевірте гіпотезу про закон розподілу.

3.3. Змоделюйте випадкову величину X, що має розподіл Парето. Для моделювання скористайтесь методом оберненої функції та вбудованою функцією **random.paretovariate().** Оцініть середнє значення і дисперсію та порівняйте з теоретичними значеннями. Перевірте гіпотезу про закон розподілу.

3.4. Змоделюйте випадкову величину X, що має нормальний розподіл. Для моделювання скористайтесь одним із спеціальних методів та вбудованою функцією **random.gauss().** Оцініть середнє значення і дисперсію та порівняйте з теоретичними значеннями. Перевірте гіпотезу про закон розподілу.

3.5. Змоделюйте випадкову величину X, що має Гамма - розподіл. Для моделювання скористайтесь вбудованою функцією **random.gammavariate().** Оцініть середнє значення і дисперсію та порівняйте з теоретичними значеннями. Перевірте гіпотезу про закон розподілу.

3.6. Гамма – розподіл – це двохпараметричний розподіл, якщо покласти значення обох параметрів рівними одиниці (Г(1,1)), то отримаємо експоненціальний розподіл. Змоделюйте випадкову величину Г(1,1). Перевірте гіпотезу про експоненціальний закон розподілу.

3.7. Якщо η_1, η_2- незалежні випадкові величини з $N(0, \sigma^2)$, то випадкова величина $\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$ має розподіл Релея. Змоделюйте випадкову величину $\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$. Перевірте гіпотезу про закон розподілу Релея.

3.8. Якщо η_1, η_2- незалежні випадкові величини з $N(0,1)$, то випадкова величина $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ має стандартний розподіл Коші. Змоделюйте випадкову величину $\frac{\eta_1}{\eta_2}$. Перевірте гіпотезу про закон розподілу Коші.

4. Обчислення інтегралів методом статистичного моделювання.

4.1. Обчислити інтеграл методом Монте-Карло

1) $$\int_0^1 \frac{x^p dx}{1+x}$$

2) $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2}$$

3) $$\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2}$$

4) $$\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$$, для заданих *m* та *n*.

5) $$\int_0^1 x^m\left(1-x^2\right)^p dx$$, для заданих *m* та *p*.

6) $$\int_0^1 x^m(1-x^n)^p dx$$, для заданих *m, n* та *p*.

7) $$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^{m+n}}$$, для заданих *m* та *n*.

8) $$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)\left(b^2+x^2\right)}$$, для заданих *a* та *b*.

9) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx$$

10) $$\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}dx$$

4.2. Обчислити значення функції

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

для $x_i = 0.(i*m)$, $i = 1,2,3,4,5$, m – номер студента у списку групи.

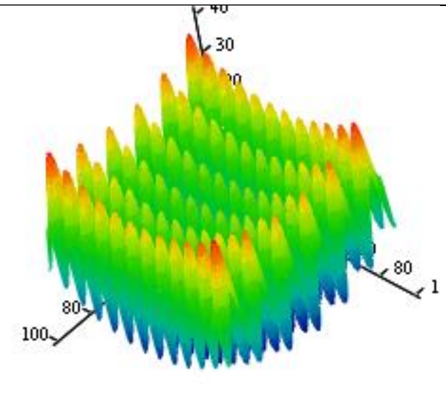
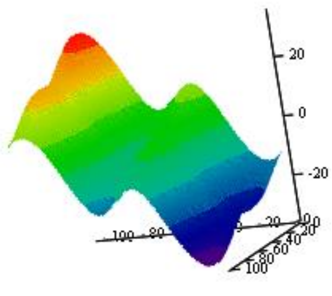
4.3. Обчислити інтеграл $\int_0^\infty x^{n-1} \, exp(-x) \, dx$ для $n = \frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2,

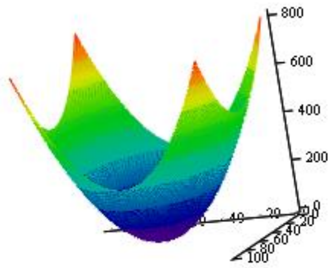
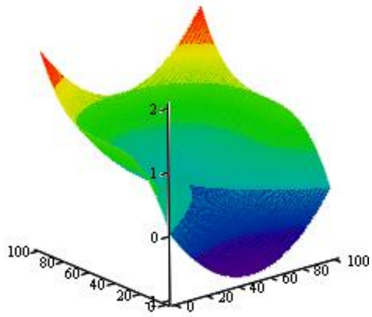
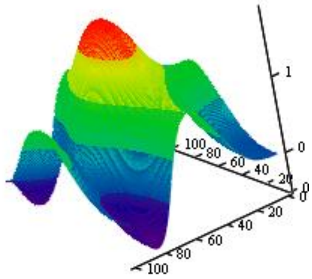
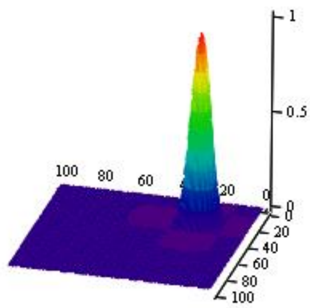
для $n = (m+5)/2$, m – номер студента у списку групи.

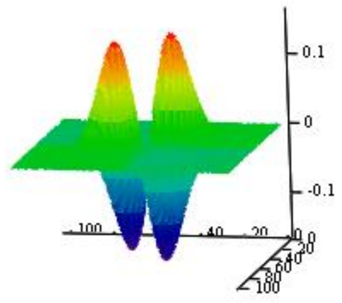
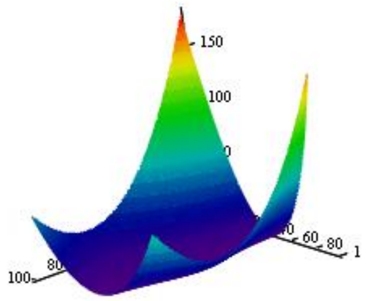
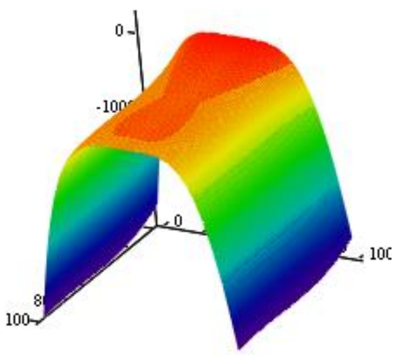
5. Знаходження глобального максимуму (мінімуму) функції.

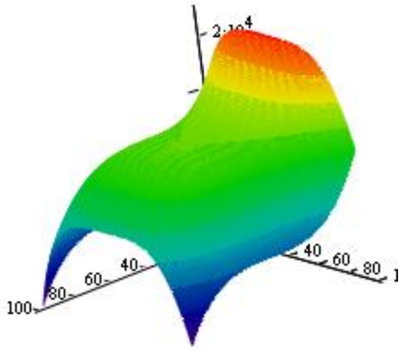
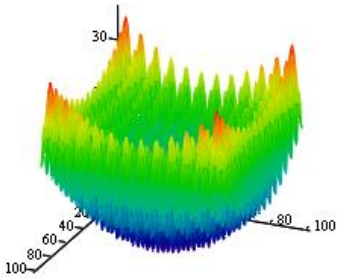
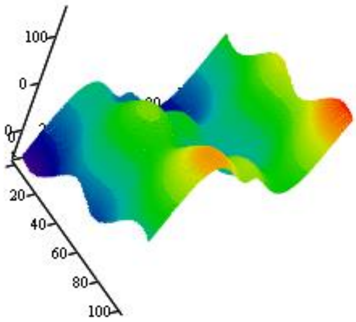
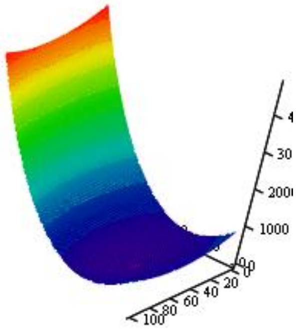
5.1. Знайти екстремум (мінімум, максимум) функції методом випадкового пошуку.

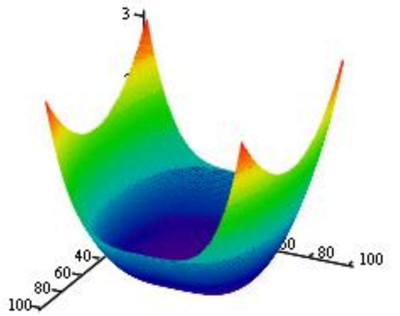
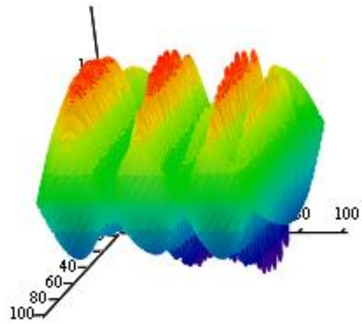
Таблиця варіантів.

№п/п	Функції	
1.	$f(x_1, x_2) = 10 + (x_1^2 - 10\,cos(2\pi x_1)) + +(x_2^2 - 7\,cos(4\pi x_2))$, $x_i \in [-3,3]$	
2.	$f(x_1, x_2) = -x_1\,sin\left(\sqrt{\lvert x_1 \rvert}\right) + x_2\,cos\left(\sqrt{\lvert x_2 \rvert}\right)$, $\vec{x} \in [-30,30] \times [-10,10]$	

3.	$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 3x_2^2 - cos\left(\frac{x_1}{2}\right) cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{3}}\right) + 1,$ $x_i \in [-10,10]$	
4.	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3,$ $x_i \in [-1,1]$	
5.	$f(x_1, x_2) = sin(x_1)\, sin\left(\frac{x_1^2}{\pi}\right) + sin(x_2)\, sin\left(\frac{2x_2^2}{\pi}\right),$ $x_i \in [0, \pi]$	
6.	$f(x_1, x_2) = cos(x_1)\, cos(x_2)\, exp\big(-(x_1^2 + x_2^2)\big), \quad x_i \in [-\pi, 3\pi]$	

<table>
<tr><td>7.</td><td>$f(x_1, x_2) =$
$sin(x_1)\, sin(x_2)\, exp\big(-(x_1^2 + x_2^2)\big),$
$x_i \in [-\pi, \pi]$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>$f(x_1, x_2) = (4 - 2x_1 + x_1^2)x_2^2 +$
$x_1 x_2,$
$x_i \in [-3,3]$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>$f(x_1, x_2) = x_1^2(4 - x_1) -$
$x_2^2(4x_2^2 - 4),$
$x_i \in [-4,4]$</td><td>
</td></tr>
</table>

10.	$f(x_1, x_2) = x_1^2(4 - x_1) - x_2^2(4x_2^2 - 4) + x_1x_2,$ $\vec{x} \in [-30,30] \times [-10,10]$	
11.	$f(x_1, x_2) = 11 + (x_1^2 + 4\,cos(5\pi x_1)) + (x_2^2 - 5\,cos(4\pi x_2)),$ $x_i \in [-3,3]$	
12.	$f(x_1, x_2) = -3x_1\,sin\left(\sqrt{\lvert x_1 \rvert}\right) + 4x_2\,cos\left(\sqrt{\lvert x_2 \rvert}\right),$ $x_i \in [-30,30]$	
13.	$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 3x_2^2 - 7\,cos\left(\frac{x_1}{4}\right) + 3\,cos\left(\frac{x_2}{\sqrt{5}}\right) + 1,$ $\vec{x} \in [-10,30] \times [-10,10]$	

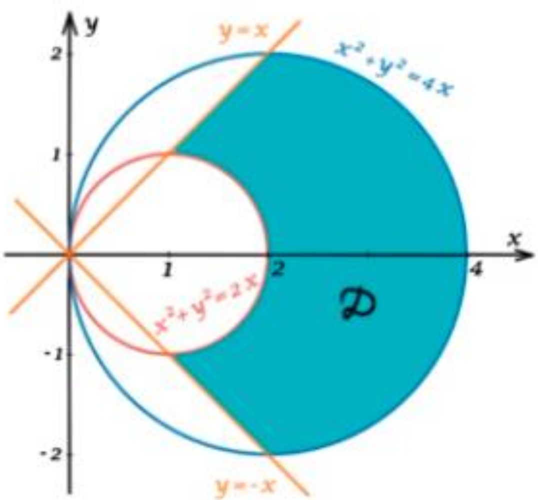
14.	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^4$, $x_i \in [-1,1]$	
15.	$f(x_1, x_2) = sin\left(\frac{x_1}{3}\right) sin\left(\frac{x_2^2}{\pi}\right) +$ $sin(x_2)\, sin\left(\frac{2x_1^2}{\pi}\right)$, $x_i \in [0,3\pi]$	

6. Обчислення площ та обємів геометричних фігур.

6.1. Обчислити площу

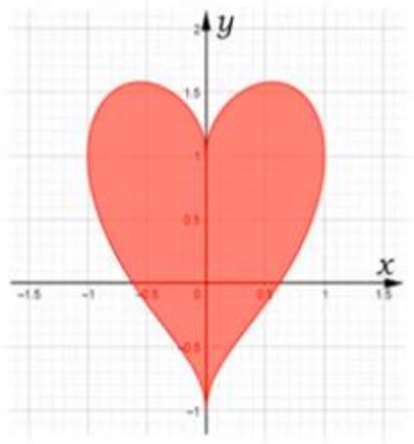
1. Фігура, що обмежена лініями

$$\begin{cases} -x \le y \le x \\ 2x \le x^2 + y^2 \le 4x \end{cases}$$



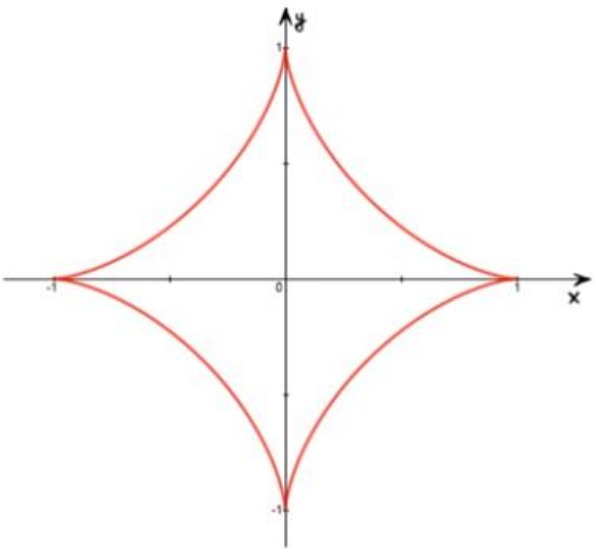
2. Сердечко

$$x^2 + \left(y - \sqrt{|x|}\right)^2 = 1$$

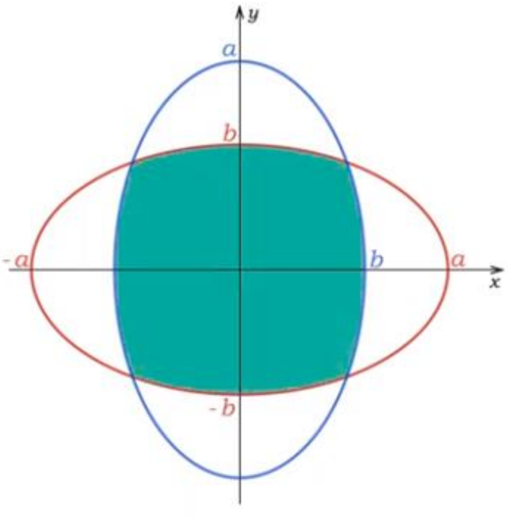


3. Астроїда $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$.

$$\boldsymbol{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1}$$

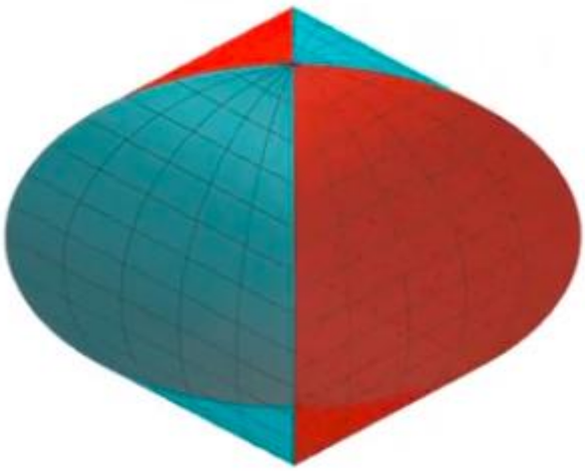


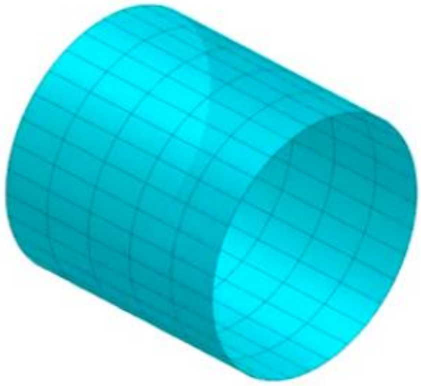
4. Перетин еліпсів

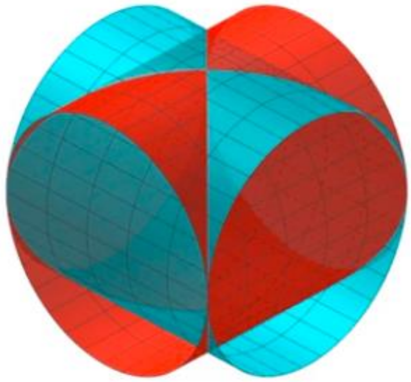


6.2. Обчислити обєм

1. Перетин двох циліндрів

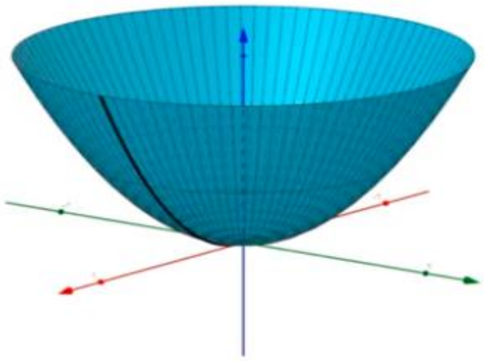






2. Еліптичний параболоїд

$z = x^2 + y^2$



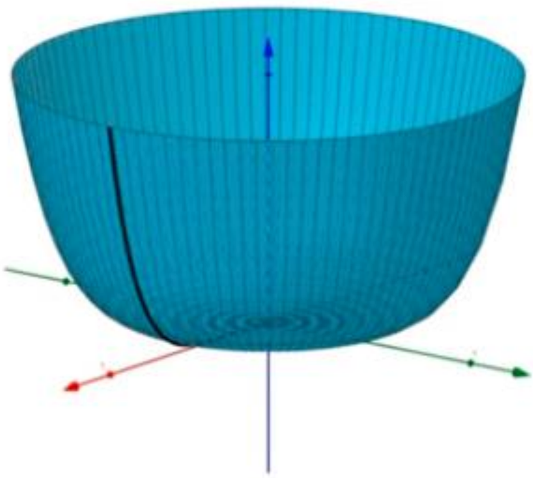
3. Модифікація параболоїда

$z = \left(x^2 + y^2\right)^a \quad a > 0$

$x^2 + y^2 = z^{\frac{1}{a}}$

$a \to \infty$

$x^2 + y^2 = 1$

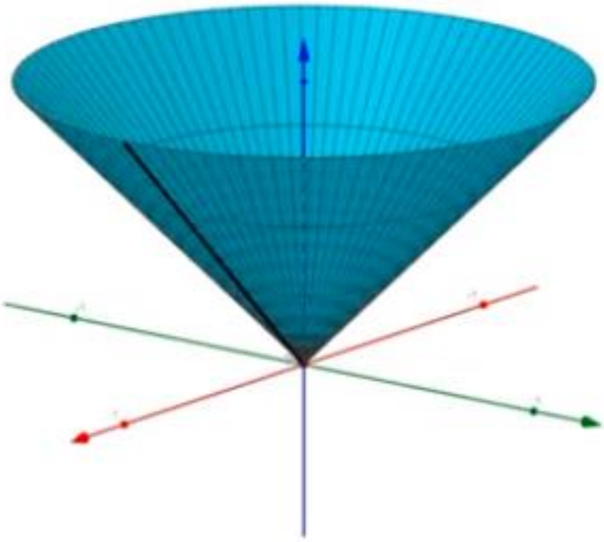


4. Модифікація параболоїда (конус)

$$z = \left(x^2 + y^2\right)^a \quad a > 0$$

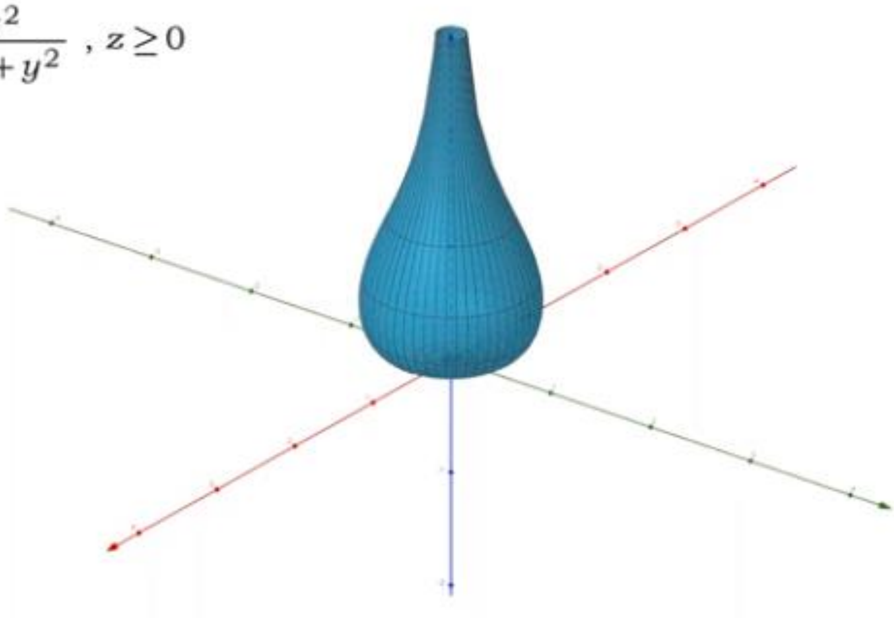
$$a = \frac{1}{2}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



5. Фігура для знаходження обсєму

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 = \frac{z^2}{x^2 + y^2}\ , z \geq 0$$



7. Результати оформити у вигляді звіту.

Рекомендована література:

1. Козаченко Ю.В., Пашко А.О. Моделювання випадкових процесів. - Київ. Видавничий центр 'Київський університет',1999. - 223с.

2. Козаченко Ю.В., Пашко А.О., Розора І.В. Моделювання випадкових процесів та полів. Монографія. - Київ. ВПЦ Задруга, 2007. - 230с.

3. Handbook of Simulation. Principles, Methodology, Advances, Applications, and Practice, J. Banks (editor), Wiley, NY. 1998.

4. G.S. Fishman. Monte Carlo. Concepts, algorithms and applications, Springer-Verlag, New York-Berlin-Amsterdam. 1999.

5. R.Y.Rubinstein, D.P. Kroese. Simulation and the Monte Carlo Method, 2nd ed. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience. 2008.