ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE IV (1961)

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)

Uwaga o liczbach złożonych m, dzielących $a^m - a$

Jak wiadomo, najmniejszą liczbą złożoną m, dzielącą $2^m - 2$, jest liczba $m = 341 = 11 \cdot 31$. Liczba ta jest dosyć duża, nie widać racji, dlaczego jest właśnie taka, toteż starożytni Chińczycy przypuszczali, że takiej liczby nie ma, czyli że dla żadnej liczby złożonej m liczba $2^m - 2$ nie jest podzielna przez m.

Godnym uwagi jest, że dla każdej liczby naturalnej $a > 2$ łatwo jest znaleźć liczbę złożoną m, dzielącą $a^m - a$.

W samej rzeczy, jeżeli a jest liczbą złożoną, to możemy przyjąć $m = a$, gdyż oczywiście $a | a^a - a$. Jeżeli zaś a jest liczbą pierwszą > 2, to możemy przyjąć $m = 2a$, gdyż wtedy liczba a jest nieparzysta i liczba $a^{2a} - a$ jest parzysta, a jako podzielna przez liczbę nieparzystą a oraz przez liczbę 2, jest podzielna przez $2a$.

Mamy więc na przykład $6 | 3^6 - 3$, $4 | 4^4 - 4$, $10 | 5^{10} - 5$, $6 | 6^6 - 6$.

Ale mamy też $4 | 5^4 - 5$. Ogólnie, jeżeli a jest liczbą nieparzystą > 3, to liczba $a - 1$ (jako parzysta > 2) jest złożona i mamy oczywiście $a - 1 | a^{a-1} - 1$.

Jeżeli więc dla liczby naturalnej a oznaczymy przez m_a najmniejszą liczbę złożoną, taką iż $m_a | a^{m_a} - 1$, to będzie $m_2 = 341$, zaś $m_a \leqslant a$ dla $a > 2$. Mamy stąd na przykład $m_{50} \leqslant 50$, ale łatwo dowieść, że $m_{50} = 10$. Trudniej nieco byłoby dowieść, że dla każdej liczby naturalnej a mamy $m_a \leqslant 561$, gdyż dla każdej liczby całkowitej a mamy $3 \cdot 11 \cdot 7 = 561 | a^{561} - a$.

Zauważmy, że A. Schinzel dowiódł, iż dla każdej liczby naturalnej a istnieje nieskończenie wiele liczb złożonych m, takich że $m | a^m - a$ (zob. [1]). Dowód na to podał też H. J. A. Duparc ([2]). A. Schinzel postawił zagadnienie wyznaczenia wszystkich wartości, jakie mogą przyjmować liczby m_a dla naturalnych a. Dowiódł on, że są one różne od 4 i od 6 tylko dla tych liczb a, które przy dzieleniu przez 12 dają resztę 2 lub 11. Mamy na przykład $m_{11} = 10$, $m_{14} = 14$, $m_{23} = 22$, $m_{26} = 10$, $m_{35} = 10$, $m_{38} = 38$.

Zauważymy tu jeszcze, że A. Rotkiewicz dowiódł, iż jeżeli a i b są liczbami naturalnymi, takimi że $a - b$ jest liczbą parzystą $\geqslant 4$, to istnieje nieskończenie wiele liczb parzystych n, dla których $n|a^{n-1}-b^{n-1}$. Dowiódł on też, że istnieje nieskończenie wiele liczb parzystych n, dla których $n|3^{n-1}-1$. Najmniejszą z nich jest liczba $n = 286$ (zob. [3]).

Prace cytowane

[1] A. Schinzel, *Sur les nombres composés n qui divisent a^n-a*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo VII (1958), str. 37-41.

[2] H. J. A. Duparc, *On almost primes*, Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1955 – 012, 4 p. (1955).

[3] A. Rotkiewicz, *Sur les nombres pairs n pour lesquels les nombres a^nb-ab^n, respectivement $a^{n-1}-b^{n-1}$ sont divisibles par n*, Rendiconti Palermo VIII (1959), str. 341-342.