

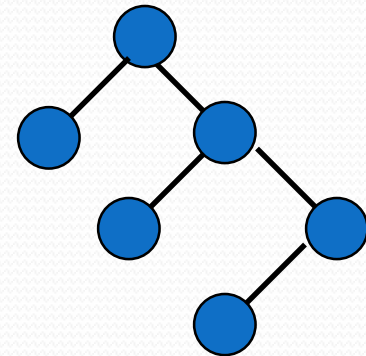
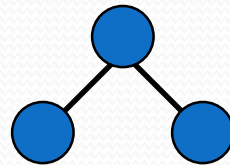
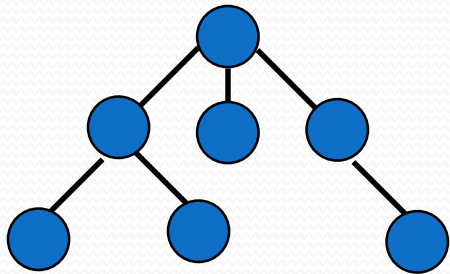
ÁRBOLES y Árboles Binarios

ESTRUCTURAS DE DATOS

pamelalandero@gmail.com

¿Qué es un Árbol?

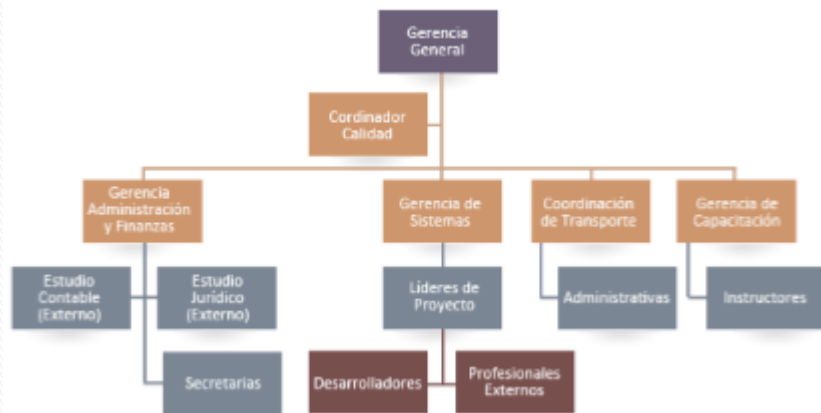
- Es una estructura de datos jerárquica y acíclica
- La relación entre los elementos es de uno a muchos.
- Es una estructura de datos no es lineal



¿Qué es un Árbol?

► Ejemplos:

- Índices.
- Clasificación.
- Árboles genealógicos.
- Organigramas.



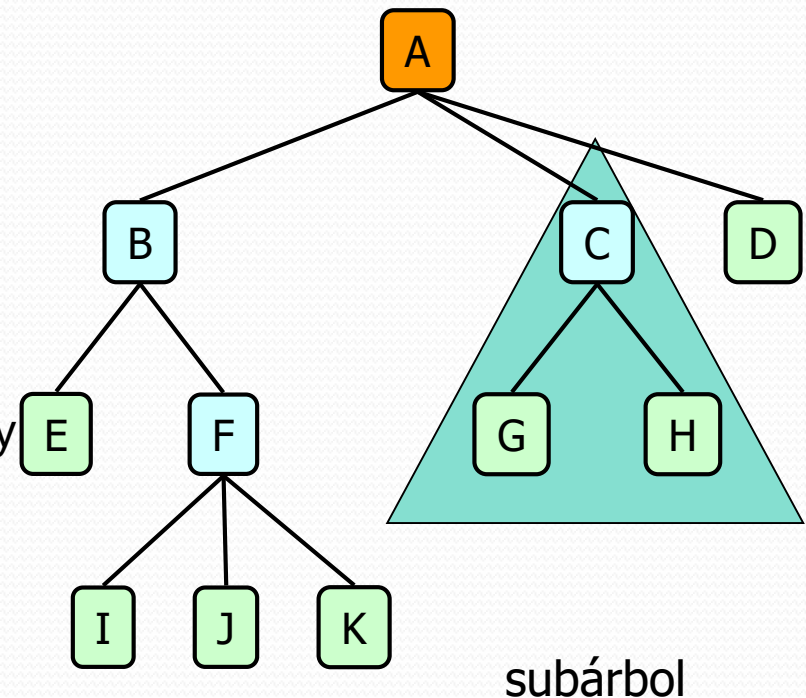
► Aplicaciones:

- Analizar circuitos eléctricos.
- Representar la estructura de fórmulas matemáticas.
- Organizar la información.
- Representar la estructura sintáctica de un programa en los compiladores.



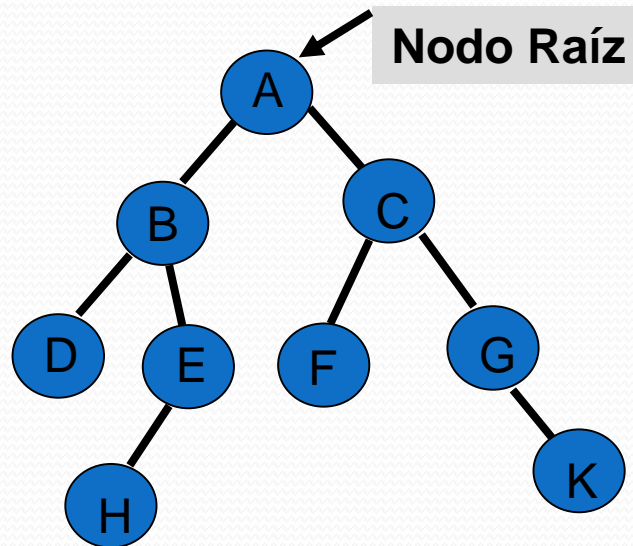
¿Qué es un Árbol?

- **Raíz:** único nodo sin padre
- **Nodo interno:** tiene al menos un hijo
- **Nodo hoja (externo):** no tiene hijos
- **Descendiente directo:** hijo
- **Descendientes:** hijo, nieto...
- **Subárbol:** árbol formado por un nodo y sus descendientes



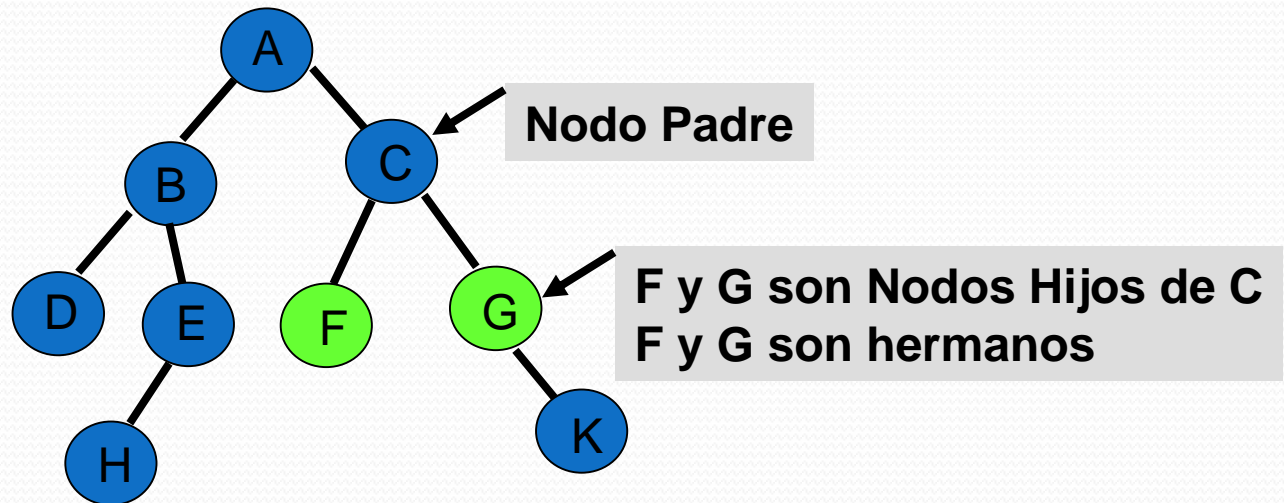
Terminología

- Nodo: Cada elemento en un árbol.
- Nodo Raíz: Primer elemento agregado al árbol.



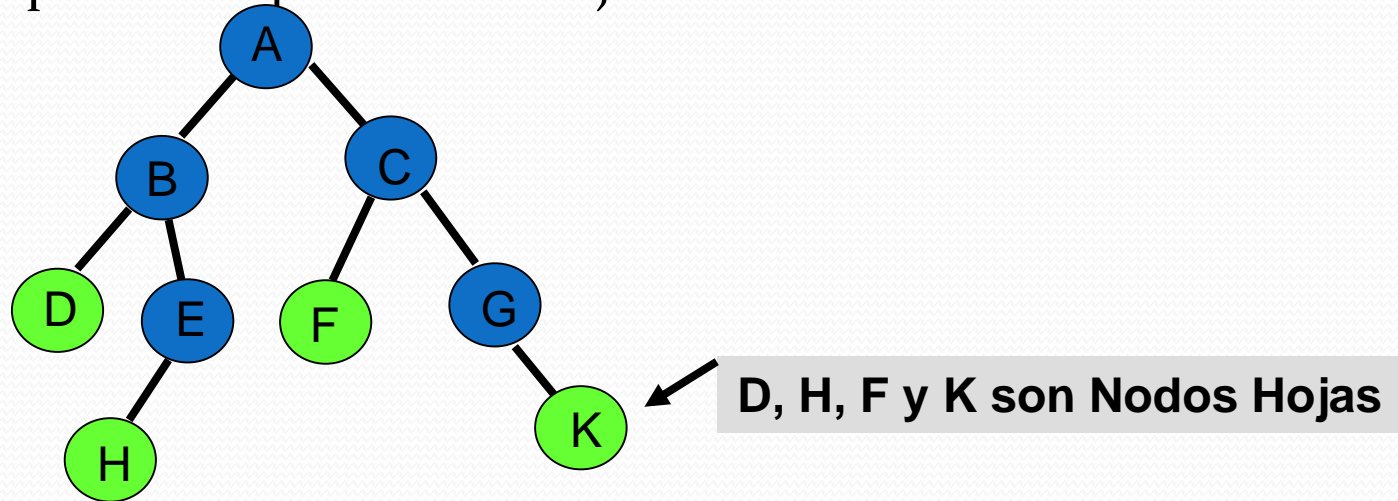
Características de un Árbol

- Nodo Padre: Se le llama así al nodo predecesor de un elemento.
- Nodo Hijo: Es el nodo sucesor de un elemento.
- Hermanos: Nodos que tienen el mismo nodo padre.



Características de un Árbol

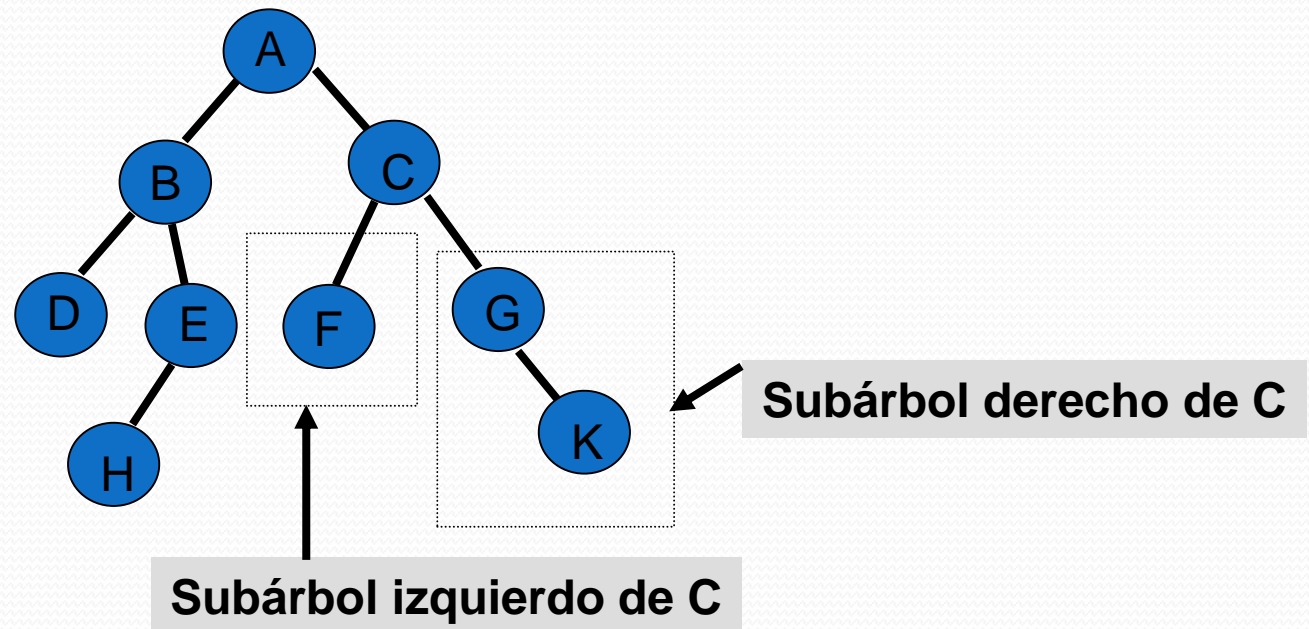
- Nodo Hoja: Aquel nodo que no tiene hijos.



- Grado de un nodo: es el número de hijos del nodo.
- Profundidad de un nodo: es el largo del único camino desde el nodo a la raíz del árbol
- Altura de un nodo: es el mayor camino desde el nodo hasta una hoja del árbol.

Características de un Árbol

- Subárbol: Todos los nodos descendientes por la izquierda o derecha de un nodo. Dicho de otra forma, es un árbol cuya raíz es un nodo, distinto de la raíz, del árbol principal



Características de un Árbol

Camino Si n_1, n_2, \dots, n_k es una sucesión de nodos de un árbol, tal que n_i es padre de n_{i+1} para $1 \leq i < k$, entonces la sucesión describe un camino.

Anchura También llamado **amplitud**, corresponde a la población de un nivel.

Grado Es el mayor de los grados entre todos los nodos.

Completo Se dice que un árbol es completo cuando todos sus nodos, excepto los del último nivel, tienen el mismo grado.

Longitud del camino Es el número de pasos entre el nodo origen y el nodo destino.

Peso Es el número de nodos contenidos en el árbol.

Balanceado La diferencia entre la altura de la rama izquierda y la rama derecha es -1, 0 ó 1.

Características de un Árbol

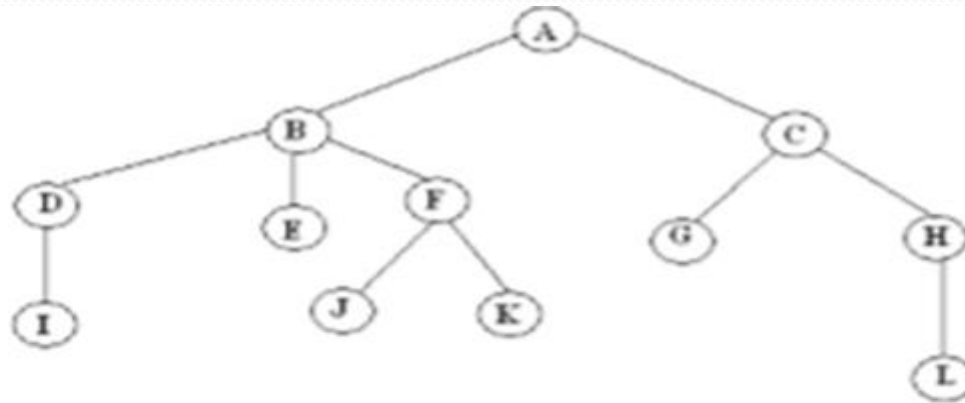


Figura 2 :Árbol General

A raíz del árbol

B es el hijo de A. C es hijo de A.

B es padre de D. D es padre de I.

B y C son hermanos. D, E, F son hermanos.

I, E, J, K, G, L son hojas.

B, D, F, C y H son nodos interiores.

Nivel del nodo A es __ Nivel del nodo E es __

La altura del árbol es __

El grado de nodo A es __

El grado de nodo B es __

El grado de nodo C es __

El grado de nodo D es __

El grado de nodo E es __

Grado del árbol es __

Características de un Árbol

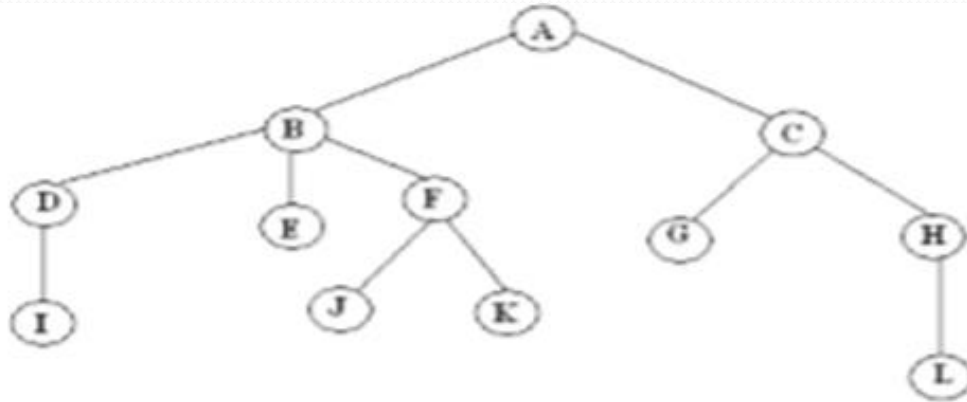


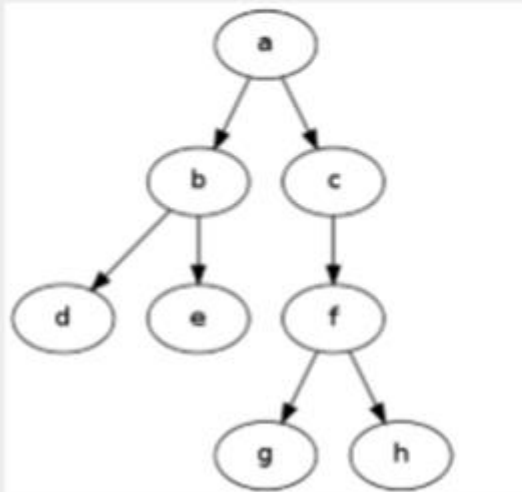
Figura 2 :Árbol General

A raíz del árbol
B es el hijo de A. C es hijo de A.
B es padre de D. D es padre de I.
B y C son hermanos. D, E, F son hermanos.
I, E, J, K, G, L son hojas.
B, D, F, C y H son nodos interiores.
Nivel del nodo A es 1. Nivel del nodo E es 3.
La altura del árbol es 3.

El grado de nodo A es 2
El grado de nodo B es 3
El grado de nodo C es 2
El grado de nodo D es 1
El grado de nodo E es 0
Grado del árbol es 3

Características de un Árbol

Ejemplo árbol

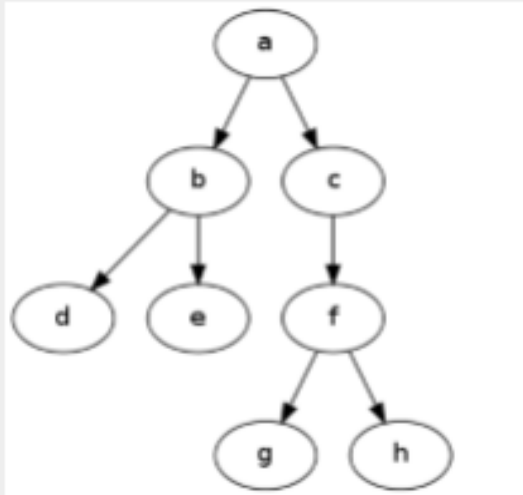


Obtener:

- 1 Longitud del camino $\langle a, b, e \rangle$.
- 2 Longitud del camino $\langle a \rangle$.
- 3 Indique el camino de $\langle c \rangle a \langle h \rangle$.
- 4 Profundidad de $\langle a \rangle$.
- 5 Profundidad de $\langle h \rangle$.
- 6 Altura del árbol.
- 7 Altura de $\langle f \rangle$.
- 8 Grado de $\langle b \rangle$.
- 9 Grado del árbol.
- 10 Peso del árbol.

Características de un Árbol

Ejemplo árbol



Obtener:

- 1 Longitud del camino $\langle a, b, e \rangle$. 2
- 2 Longitud del camino $\langle a \rangle$. 0
- 3 Indique el camino de $\langle c \rangle a \langle h \rangle$. c, f, h
- 4 Profundidad de $\langle a \rangle$. 0
- 5 Profundidad de $\langle h \rangle$. 3
- 6 Altura del árbol. 3
- 7 Altura de $\langle f \rangle$. 1
- 8 Grado de $\langle b \rangle$. 2
- 9 Grado del árbol. 2
- 10 Peso del árbol. 8

Operaciones de un Árbol

- $\text{Padre}(n, A)$: Devuelve el padre del nodo n en el árbol A . Si no tiene padre (si es raíz) debe devolver **NULL**.
- $\text{Hijo_izq}(n, A)$: Devuelve el hijo más a la izquierda del nodo n en el árbol A , y devuelve un **NULL** si n es una hoja.
- $\text{Hermano_Der}(n, A)$: Devuelve el hermano a la derecha del nodo n en el árbol A .
- $\text{Etiqueta}(n, A)$: Devuelve la etiqueta del nodo n en el árbol A .
- $\text{Crea_i}(v, A_1, A_2, \dots, A_k)$: crea un nuevo nodo r con etiqueta v y le asigna k hijos que son las raíces de los árboles A_1, A_2, \dots, A_k en ese orden desde la izquierda. Se devuelve el árbol con raíz r .
- $\text{Raiz}(A)$: Devuelve el nodo raíz del árbol A , o **NULL** si A es el árbol nulo.
- $\text{Anula}(A)$: convierte a A en el árbol nulo.

Tipos de árboles

Binario El grado máximo de cada nodo no puede ser superior a 2.

Balanceados A medida que se insertan datos los nodos cambian sus posición para lograr un árbol completo.

Binario Ordenado El hijo izquierdo es menor que la raíz, y el hijo derecho es mayor que la raíz. A su vez, los subárboles izquierdo y derecho son árboles binarios ordenados.

Tipos de Árboles

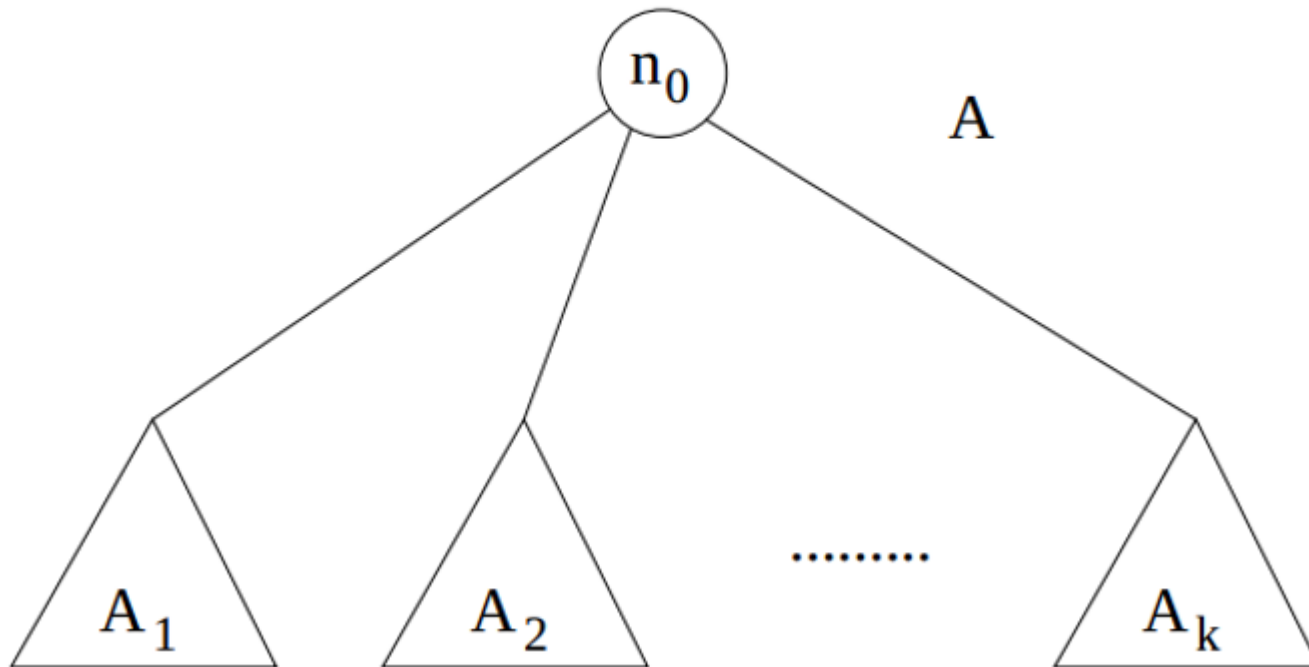
AVL Adelson, Velskii y Landis. Para todo nodo, se tiene que la altura de sus subárboles difiere a lo más en 1.

Heap El montículo binario es un AB completo, donde la raíz es el menor de los elementos y sus hijos son mayores que él, ó la raíz es el mayor de los elementos y sus hijos son menores que él.

2-3 Los nodos son de grado 2 o 3. Los nodos deben tener 2 hijos si tiene 1 elemento o 3 hijos si tiene 2 elementos. Las hojas tienen la misma longitud respecto de la raíz.

Recorridos de los Árboles

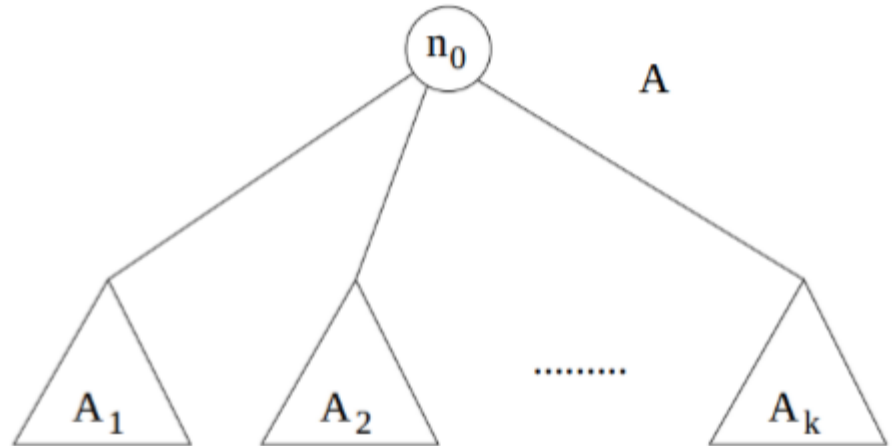
Sea n_0 el nodo raíz de un árbol A , y sean A_1, A_2, \dots, A_k los k subárboles que cuelgan de n_0 .



Recorridos de los Árboles

Pre-Orden

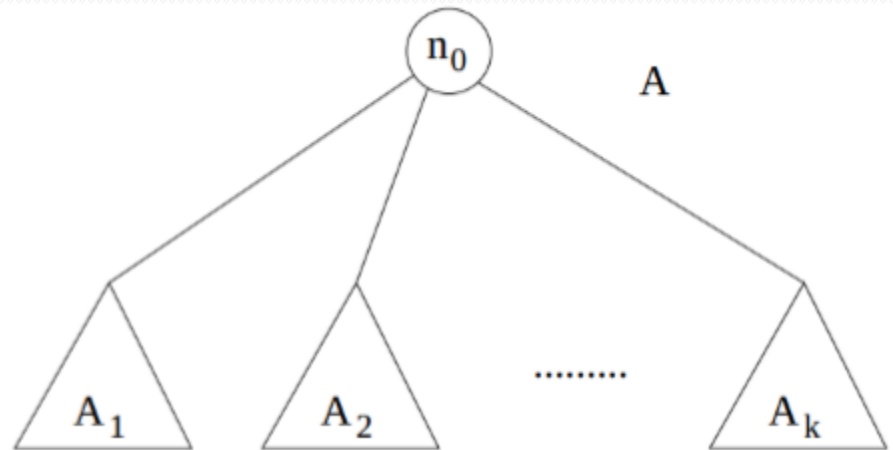
El recorrido en **preorden** de A está formado por la raíz n_0 , seguida de los nodos de A_1 en orden previo, los nodos de A_2 en orden previo, y así sucesivamente hasta los nodos de A_k en orden previo.



Recorridos de los Árboles

In-Orden

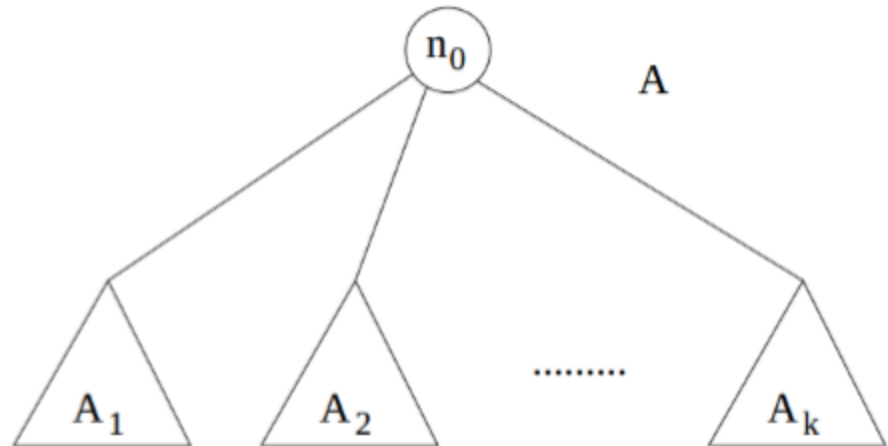
El recorrido en **inorden** de A está formado por los nodos de A_1 en orden simétrico, seguidos de n_0 , y de los nodos de A_2, \dots, A_k todos ellos en orden simétrico.



Recorridos de los Árboles

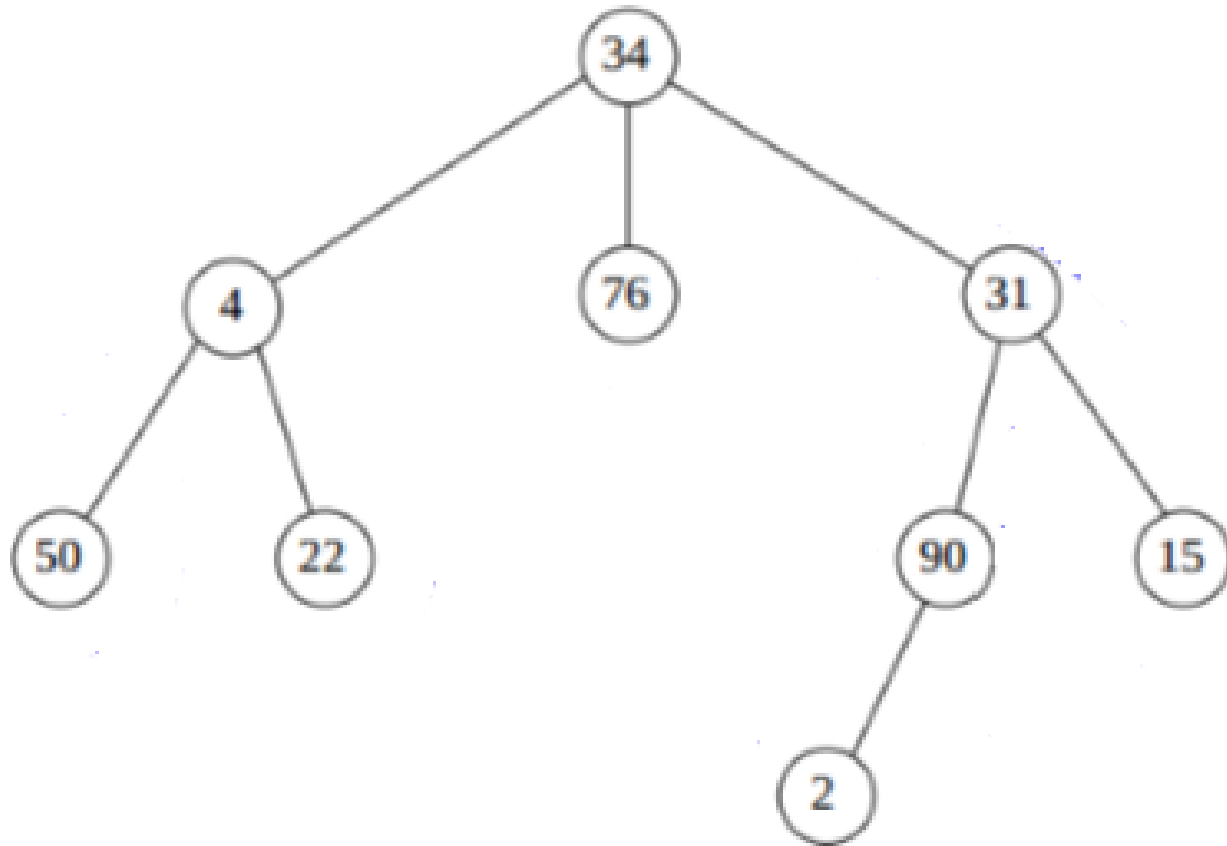
Post-Orden

El recorrido en **postorden** de A está formado por los nodos de A_1 en orden posterior, los nodos de A_2 en orden posterior, y así sucesivamente hasta los nodos de A_k en orden posterior, para finalizar con n_0 .



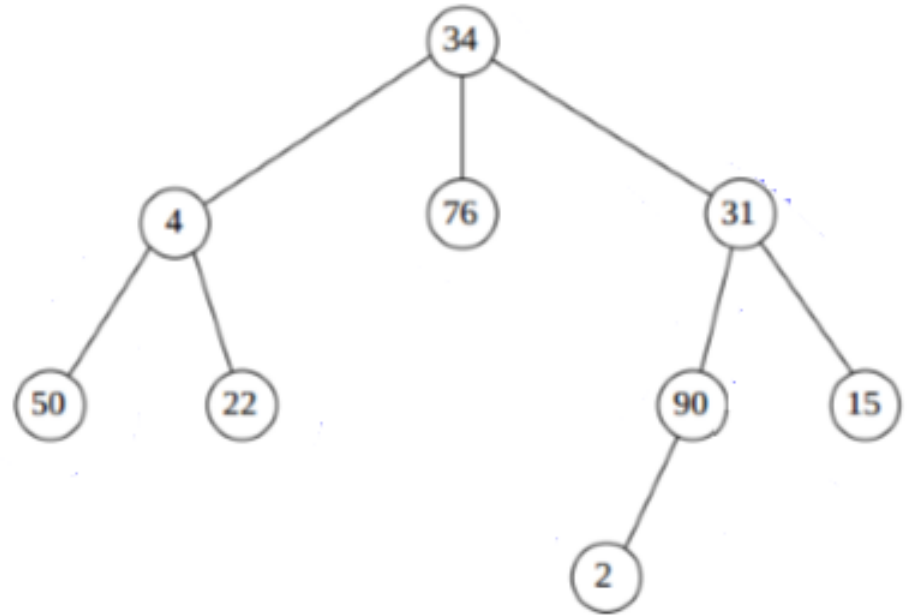
Recorridos de los Árboles

Ejemplo



Recorridos de los Árboles

Ejemplo

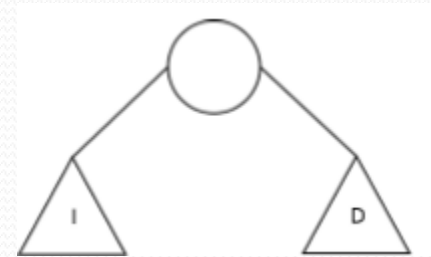


- ▶ preorden: 34, 4, 50, 22, 76, 31, 90, 2, 15
- ▶ inorden: 50, 4, 22, 34, 76, 2, 90, 31, 15
- ▶ postorden: 50, 22, 4, 76, 2, 90, 15, 31, 34

ARBOLES BINARIOS

Terminología

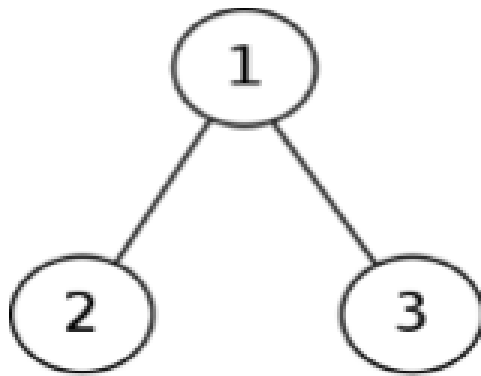
- Son un caso particular.
- El árbol es de grado 2.
- Cada nodo puede tener un hijo izquierdo y/o un hijo derecho.
- Un árbol binario está formado por un nodo raíz, un subárbol izquierdo I y uno derecho D.
- Donde I y D son árboles binarios. Los subárboles se suelen representar gráficamente como triángulos.



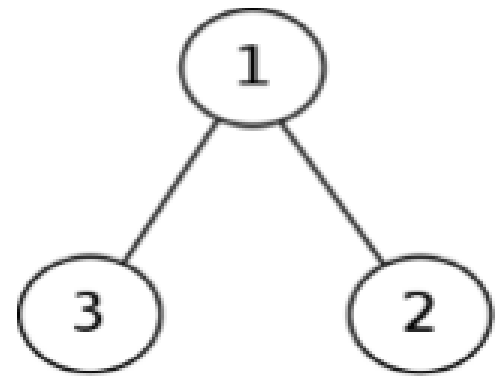
ARBOLES BINARIOS

son iguales

- Para que dos árboles binarios sean iguales, deben tener tanto la misma estructura, como el mismo contenido.



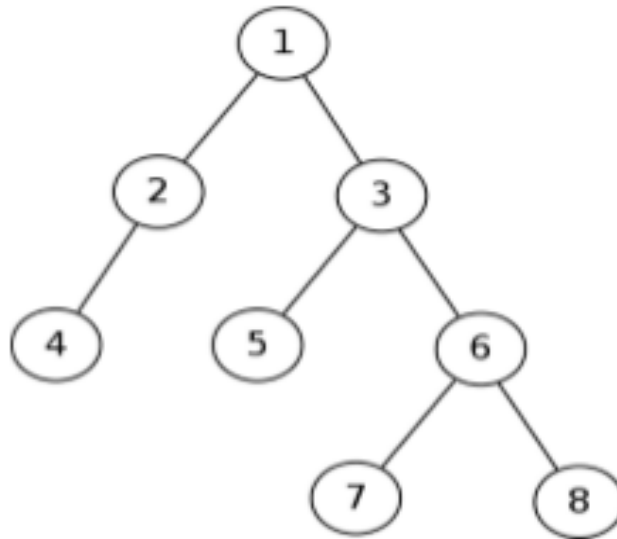
\neq



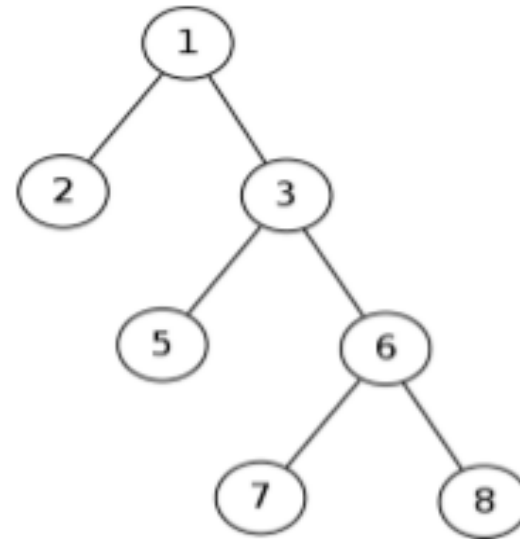
ARBOLES BINARIOS

AB Lleno

- Un **árbol binario lleno** es aquel en que cada nodo es un nodo interno con dos hijos no vacíos o una hoja.



No es lleno

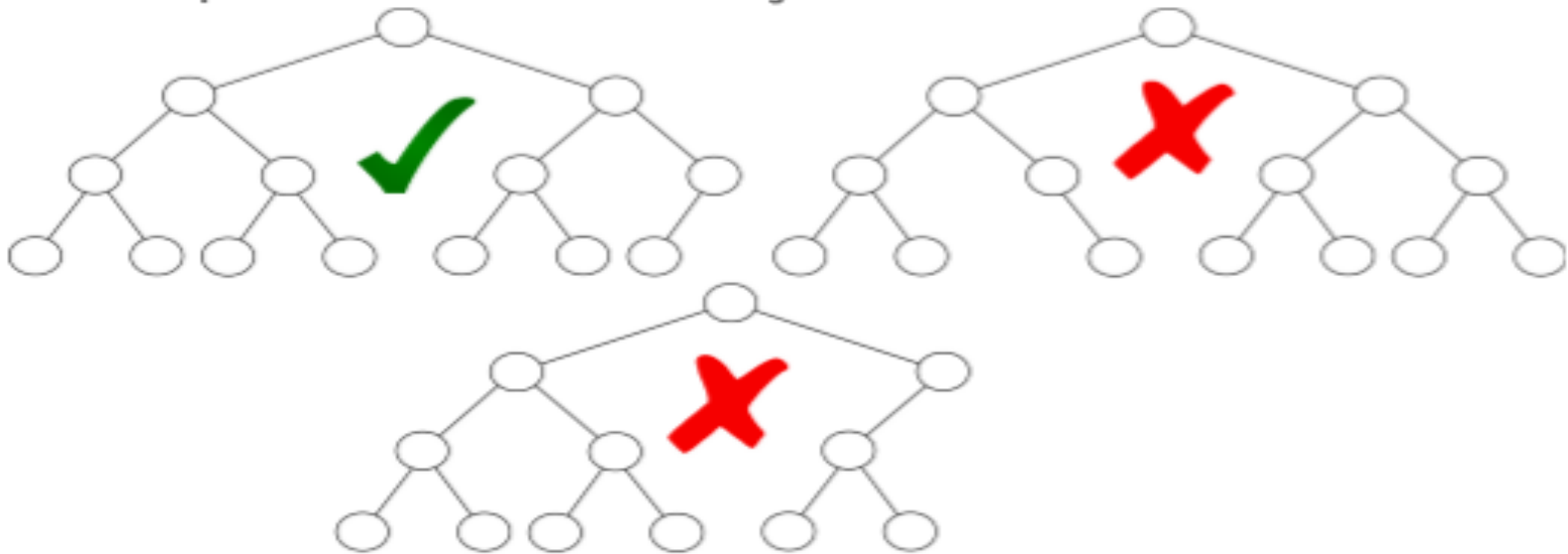


Si es lleno

ARBOLES BINARIOS

AB Completo

- Se denomina **árbol binario completo**, a aquél árbol binario de profundidad k que tiene todos los nodos posibles hasta el penúltimo nivel (profundidad $k - 1$), y donde los elementos del último nivel están colocados de izquierda a derecha sin dejar huecos entre ellos.



ARBOLES BINARIOS

AB Completo

- Altura: h .
- Número de nodos: $n = 2^{h+1} - 1$
- Numero de hojas: $\#h = 2^h$
- Nodos internos: $n - \#h$
- De la expresión para el número de nodos, puede despejarse h y se logra:

$$h = \log_2(n + 1) = O(\log n)$$

Árbol Binario – Bonus Track

Transformar árbol general a Binario

