Taban vektörleri ve Rotasyon

Şimdi iki adet vektörle tanışacağız, $\hat{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bu vektörler tek başlarına bir anlam ifade etmiyorlar, fakat bu vektörleri bir skalerle çarpıp toplarsak, iki boyutlu uzayın tamamını elde edebiliriz. Örnek olarak, $\hat{\imath}$ vektörünü 2 skaleri ve $\hat{\jmath}$ vektörünü 3 skaleri ile çarpıp toplarsak.

$$\begin{aligned} \hat{\imath} + \hat{\jmath} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 * 2 \\ 0 * 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 * 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 + 0 \\ 0 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Gördüğünüz üzere bu iki vektörü skalerler ile çarpıp topladığımızda yeni bir vektör elde ediyoruz, bu çarpıp toplama işlemine lineer kombinasyon deniyor. Eğer bu skalerler gerçel sayılar kümesinde ise, elde edeceğimiz vektörlerin kümesi ikinci boyut uzayının tamamını temsil eden vektörler oluyor, işte bu kümeye aralık -span- diyoruz. İkinci, üçüncü, dördüncü ve n. boyutun tamamını üretebilmeyi sağlayan taban vektörlerine standart taban vektörleri denir.
Uzayda oluşturulacak bütün vektörlerin bu taban vektörlerinden elde edilebilmesi için, taban vektörlerinin doğrusal bağımsız olması gerekiyor, yani tek bir doğru üzerinde bulunmamaları gerekiyor. Örneğin yukarıdaki i vektörü ve j vektörü birbirine doksan derece dik açıda bulunuyorlar, eğer j vektörü de x ekseniyle paralel olsaydı, örneğin (2,0) gibi bir vektör olsaydı, lineer kombinasyon yoluyla ikinci boyut uzayındaki bütün vektörleri elde edemeyeceğimiz ve yalnızca paralel doğru üzerindeki noktalara sıkışıp kaldığımız için, bu iki vektöre lineer bağımlı diyecektik.

Taban vektörlerini değiştirerek üretilecek vektörlerin de farklı değerlerde olmasını sağlayabilirsiniz. Örneğin C vektörü (1,1) noktasını temsil etsin ve bunu standart i,j taban vektörleri ile çarpalım.

$$C(\hat{\imath} + \hat{\jmath}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi taban vektörlerinde i vektörünü değiştirelim ve (-1,0) yapalım.

$$C(\hat{\imath} + \hat{\jmath}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

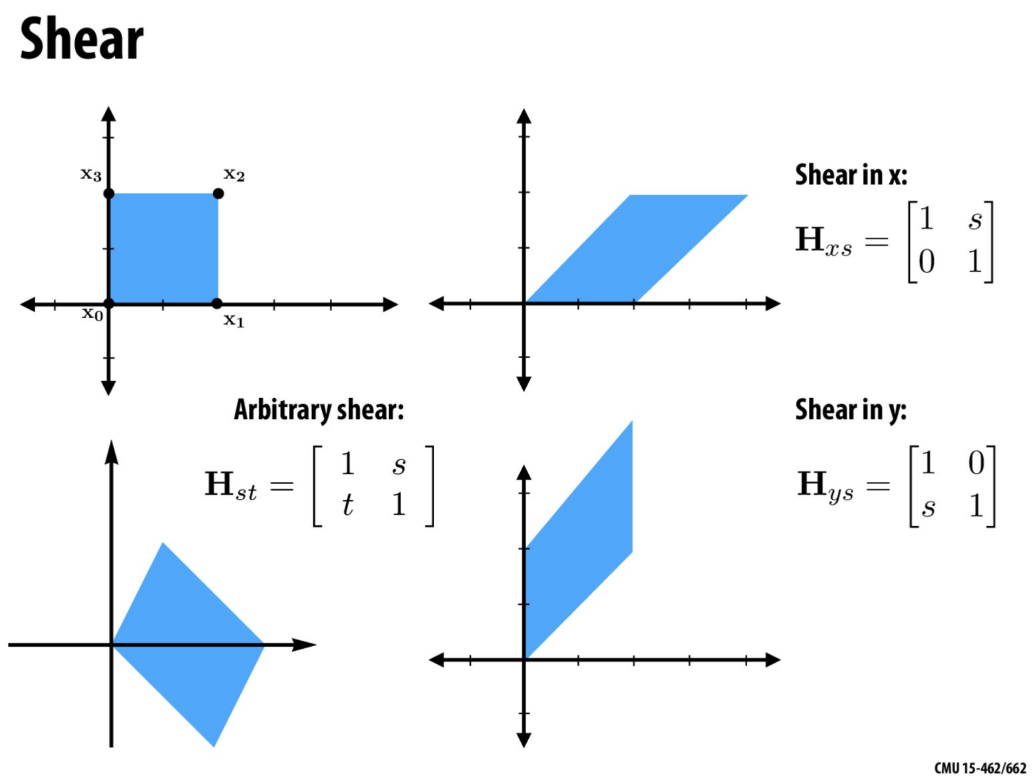
Gördüğünüz üzere nokta y eksenine göre aynalanmış, yansıtılmış bir hale geçti. Yani taban vektörlerini değiştirerek noktaların konumlarını değiştirebiliriz. Bu taban vektörlerini bir matris içerisine koyupta aynı işlemi gerçekleştirebilirdik. Bu iki boyutlu matrisin özel bir adı da var, Y-Aynalama matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

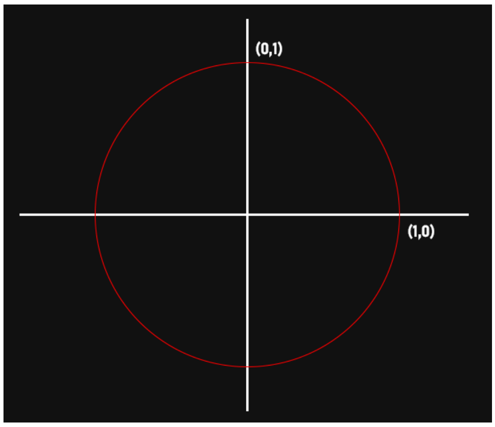
X ekseni etrafında aynalamak istiyorsak eğer, X-Aynalama Matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Biçilme -shear- matrisi dediğimiz matris ise, fotoğrafta göreceğiniz matris tipidir.



Bu matrisleri gördükten ve taban vektörleriyle çarpılmanın anlamını kavradıktan sonra, bir noktayı herhangi bir eksen etrafında nasıl döndürebiliriz onu görelim, bunun için birim çembere bakalım.

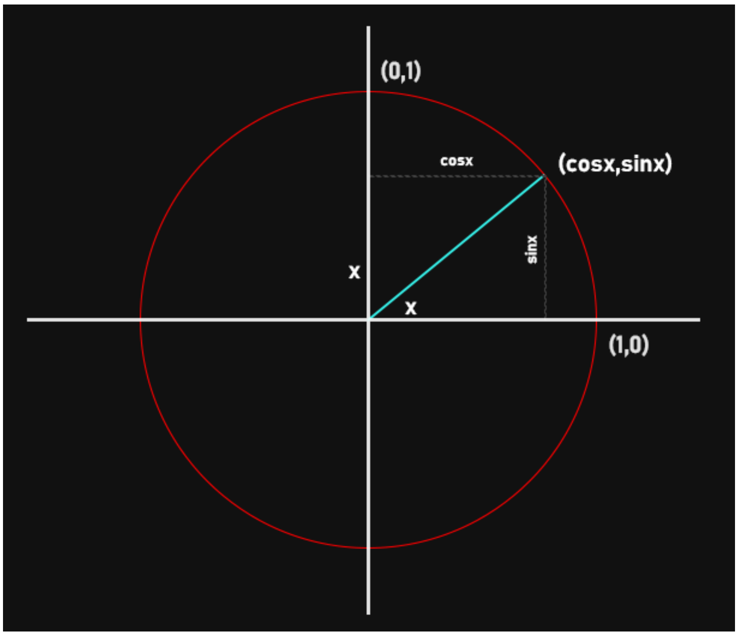


X ekseninin orjine göre sağ tarafı pozitif, sol tarafı negatif, Y ekseninin orjine göre üst tarafı pozitif, alt tarafı negatif ve çemberin yarıçapı bir birim uzunluğunda. Şimdi taban vektörlerini hatırlayın, taban vektörleri aslında birim çemberin x ve y ekseninde bulunan yarıçapları olacaktır resimde görüldüğü üzere, birim çember üzerinde seçeceğimiz bir noktayı ise x ekseninin uzunluğunu cosx, y ekseninin uzunluğunu sinx ile ifade edebiliriz, neden böyle olduğunu denklemden inceleyelim. Sinüs ve kosinüsun tanımları ile, birim çemberin yarıçapının yani üçgenin hipotenüsünün bir birim uzunluğunda olduğunu aklımızda tutmamız yeterli.

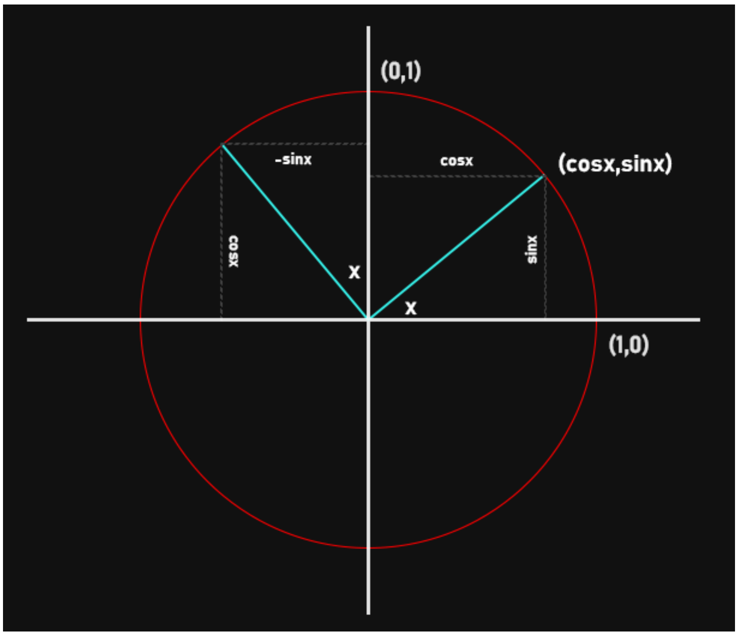
$$sinx = \frac{\text{karşı kenar}}{hipotenus} \quad cosx = \frac{\text{komşu kenar}}{hipotenus}$$

Hipotenüs yerine bir koyarsak eğer payda kısmı bir olacağından dolayı.

$$sinx = \frac{\text{karşı kenar}}{1} = \text{karşı kenar} \quad cosx = \frac{\text{komşu kenar}}{1} = \text{komşu kenar} \tag{3}$$



Yani herhangi bir noktayı açısına göre bulabiliriz. Şimdi birim çember üzerinde olan bir noktayı başka bir yere taşımak isteseydik eğer, bunu birim çemberi döndürerek elde edebilirdik, birim çemberini döndürmekle X-Y eksenlerini döndürmek aynı şey.



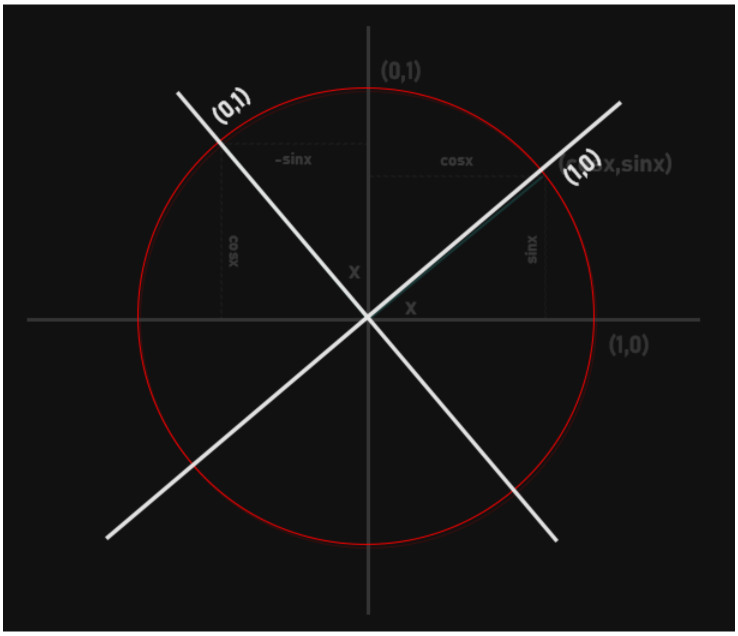
Mavi olarak gördükleriniz taban vektörlerinin x derece döndürüldükten sonraki halleri. $\hat{i}$ standat taban vektörünü yani X eksenini döndürdükten sonra, yatay uzunluğu cosx, dikey uzunluğu sinx oluyor $\begin{bmatrix} cosx \\ sinx \end{bmatrix}$, burada kafa karıştırıcı kısım Y ekseninin yani $\hat{j}$ standart taban vektörünün x derece döndürüldükten sonraki konumu, farkındaysanız soldaki ve sağdaki üçgenler aynı üçgenler fakat, x açısının karşısındaki uzunluk, birim çemberin orjine göre sol tarafına düştüğü için ve o taraf negatif sayıları temsil ettiği için, -sinx değerini alıyor. x açısının komşusundaki kenar ise cosx uzunluğunda olduğu ve y ekseninin pozitif tarafında kaldığı için sağdaki ile aynı kalıyor $\begin{bmatrix} -sinx \\ cosx \end{bmatrix}$. Bu ikisini bir matriste gösterirsek.

$$\begin{bmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{bmatrix} \tag{4}$$

Bu matrisin adı iki boyutlu rotasyon -döndürme- matrisidir.
Bir noktanın döndürme işlemi gerçekleştirdikten sonraki koordinatlarını aşağıdaki matris-sütun vektörü çarpımı ile elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$x' = x\cos x - y\sin x$$
$$y' = x\sin x + y\cos x \tag{5}$$

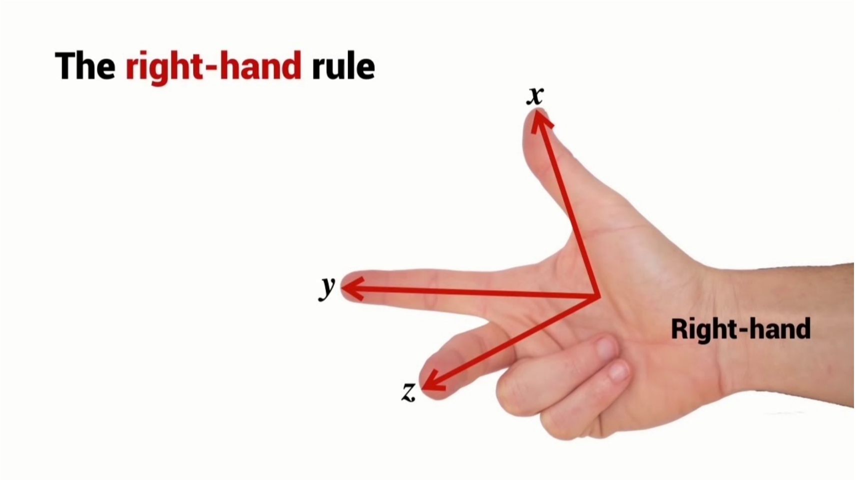
Noktanın x koordinatını temsil eden elemanı ile x ekseninin dönüşümünü sağlayan yeni taban vektörünü, y koordinatınınkini ise y ekseninin dönüşümünü sağlayan yeni taban vektörü ile çarpıp sonucu elde ediyoruz.
Rotasyon sonrası eksenler



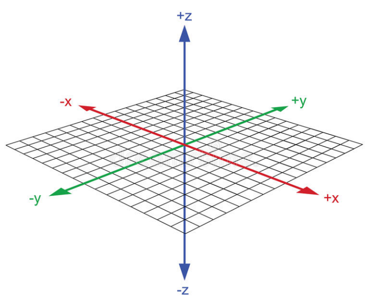
Sinx ve cosx fonksiyonlarının radyan derece aldığını hatırlatarak, bu işlemin doğruluğunu test edelim. Örneğin V(1,1) vektörünün Y eksenindeki yansımasının (-1,1) olduğunu görmüştük, V vektörü x ekseni ile 45 derecelik açı yapan bir vektör, 45 derece ise $\frac{\pi}{4}$ radyan, döndürme işleminden sonra gideceği (-1,1) noktası ise 90+45 derece yani $\frac{3\pi}{4}$ radyan. Bunu rotasyon matrisi ile halletmek istersek.

$$\begin{bmatrix} \cos(\frac{3\pi}{4}) & -\sin(\frac{3\pi}{4}) \\ \sin(\frac{3\pi}{4}) & \cos(\frac{3\pi}{4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

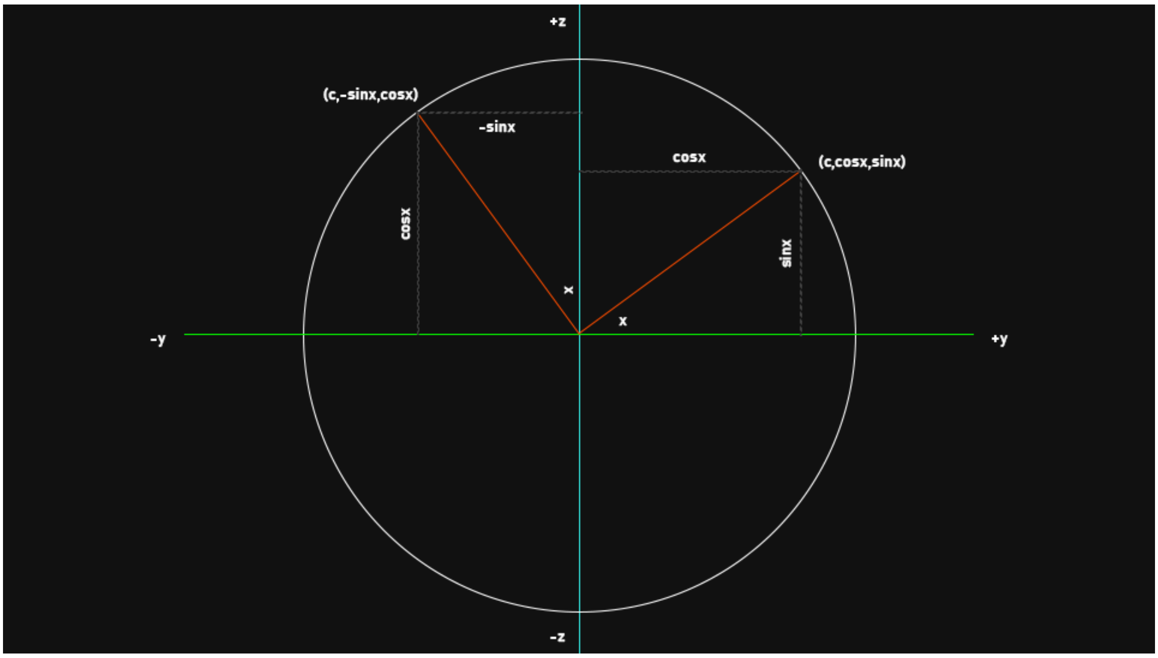
Şimdi üç boyutta nasıl rotasyon işlemini gerçekleştirebileceğimizi düşünelim. Sağ elinizin üç parmağını resimdeki gibi açarsanız eğer, orta parmak Z eksenini, baş parmak X eksenini, işaret parmağı Y ekseninini temsil eder. Örneğin Z ekseni etrafında rotasyon uygulamak istersek, orta parmak etrafında elimizi döndürmemiz gerekir, yani orta parmak -Z ekseni- konum olarak sabit kalıyorken, diğer eksenler Z ekseninin etrafında dönmektedir, bu geriye kalan bütün eksenler için de aynı şekilde çalışır. Dolayısı ile, X-Y-Z eksenlerinden herhangi birisini döndürmek istiyorsak, bir ekseni sabit tutup, geriye kalan eksenleri döndürmemiz gerekiyor.



Döndürme işlemini aynı ikinci boyutta nasıl tanımladıysak tekrar o şekilde tanımlayacağız, bunu en iyi örnekle açıklayabilirim. Örneğin X ekseni etrafında rotasyon uygulamak istediğimizi varsayalım, X ekseni sabit kalıyorken Y-Z eksenleri hareket edecektir. İki boyutlu rotasyonda da olduğu gibi, saat yönünün tersine bir açı ile eksenleri döndüreceğiz. Referans olarak aşağıdaki resime bakın.



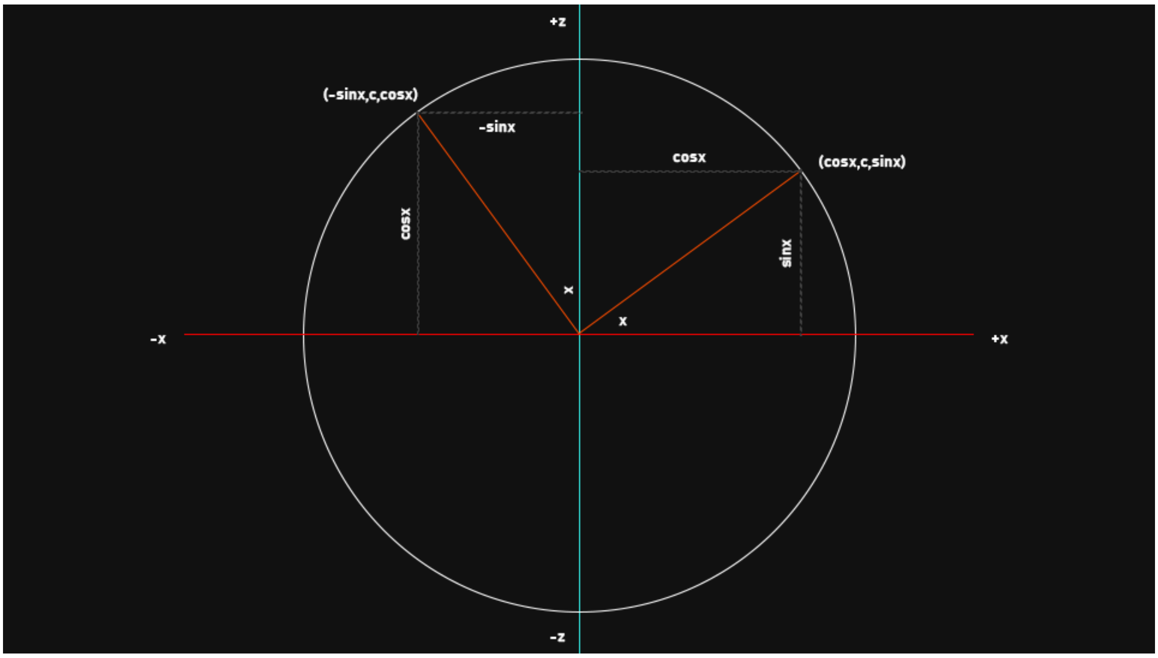
X eksenini karşınıza alıp baktığınızda, saat yönünün tersine doğru döndürürken, Y ekseninin pozitif kısmı Z ekseninin pozitif kısmına yaklaşır, Z ekseninin pozitif kısmı ise Y ekseninin negatif kısmına, bunu iki boyutlu olarak resmedelim ve taban vektörünün rotasyon sonrası birim çemberde alacağı değere bakalım.



Bulunduğu eksen etrafında döndüğü için konumu değişmeyen koordinatı c ile ifade ettim, üçgenin kenar uzunluklarının işaretlerini, kenarlarını eksen üzerine yansıtarak ve karşı ise sinx, komşu ise cosx ile değerlendirerek, saat yönünün tersine olan rotasyon işlemini tıpkı ikinci boyutta olduğu gibi üçüncü boyutta da bütün eksenlere -taban vektörlerine- uygulayabilirsiniz. X ekseni etrafındaki rotasyon işlemini aşağıdaki vektörle ifade edebiliriz. Matrise değişen ve değişmeyen standart taban vektörlerini koyacağız. Resimdeki c yerine sıfır koyacağız çünkü o koordinat değişmiyor. Eğer matrise sütun sütun bakarsanız, birinci sütun i yani x eksenini temsil eden standart taban vektörü, geriye kalanlar rotasyon işlemi uygulandıktan sonra bulundukları konumu gösteren j ve k standart taban vektörü, k vektöründen daha önce bahsetmedim fakat hemen açıklayayım, kendisi z eksenini temsil ediyor ve (0,0,1) ile gösteriliyor.

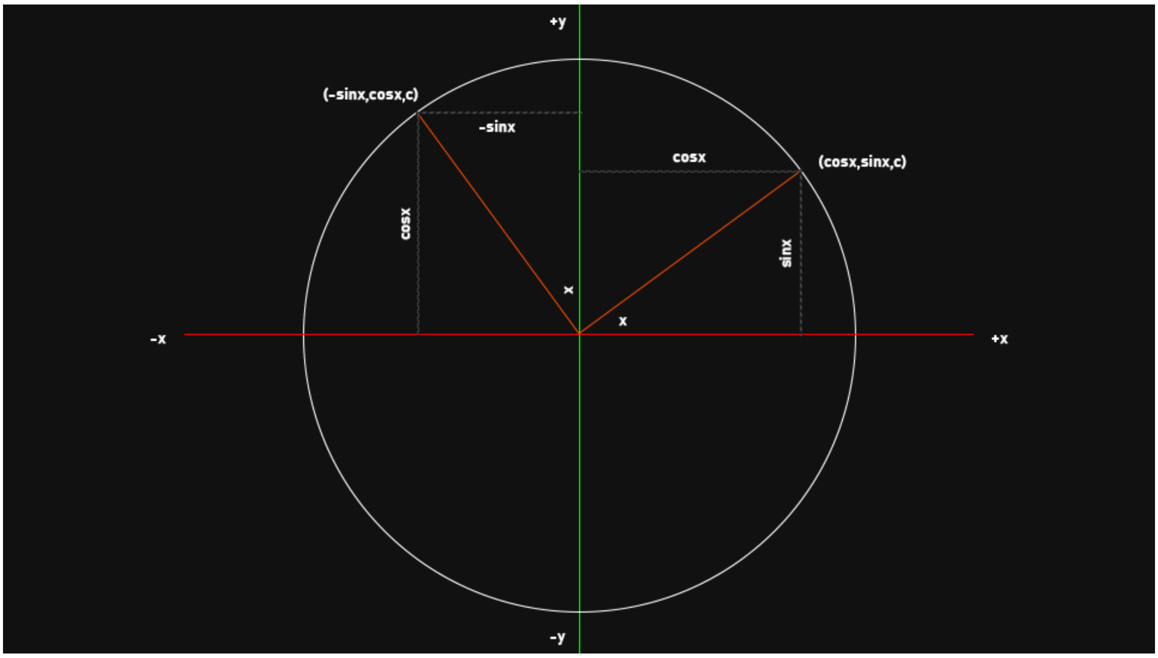
$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cosx & -sinx \\ 0 & sinx & cosx \end{bmatrix} \tag{7}$$

Y ekseni etrafında döndürmek için, X-Z eksenlerine karşıdan bakmamız gerekiyor.



$$R_y = \begin{bmatrix} cosx & 0 & sinx \\ 0 & 1 & 0 \\ -sinx & 0 & cosx \end{bmatrix} \tag{8}$$

Z ekseni etrafında döndürmek için, X-Y eksenlerine karşıdan bakmamız gerekiyor.



$$R_z = \begin{bmatrix} cosx & -sinx & 0 \\ sinx & cosx & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Bu üç rotasyon işlemini sırasıyla eksenlere uygularsak eğer, üç boyutlu uzayda istediğimiz noktaya ulaşabiliriz. Üç eksen de farklı açılar alarak çarpılırsa, aşağıdaki matrisi oluştururlar. X eksenindeki rotasyona roll (yatış, dönme) , Y eksenindeki rotasyona pitch (yunuslama, dalış), Z eksenindeki rotasyona yaw (sapma,yalpa) dönüşü denir.

$$
\begin{aligned}
R = R_z(\alpha)\,R_y(\beta)\,R_x(\gamma) &= \overset{\text{yaw}}{\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\text{pitch}}{\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}} \overset{\text{roll}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$