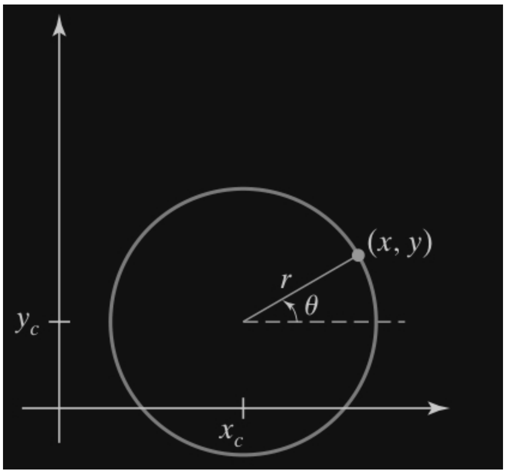
Çember Oluşturma Algoritması



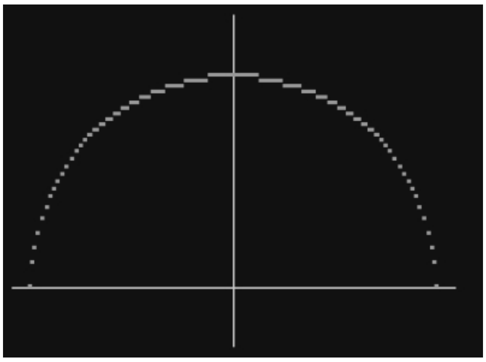
Bir çember verilen bir (x_c, y_c) merkez noktasına eşit uzaklıktaki noktalar kümesi olarak tanımlanır, bunu figürde de görebilirsiniz. Herhangi bir çember için, (x,y) noktaları kartezyen koordinat sisteminde pisagor teoremi ile aşağıdaki formül ile ifade edilebilir.

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \tag{1}$$

Bu denklemi kullanarak çemberin çevresindeki noktaları yani y değerlerini x ekseninde $x_c - r$ noktasından $x_c + r$ noktasına birer birim ilerleyerek birinci denklemin düzenlenmiş hali ile hesaplayabiliriz.

$$y = y_c \pm \sqrt{r^2 - (x_c - x)^2} \tag{2}$$

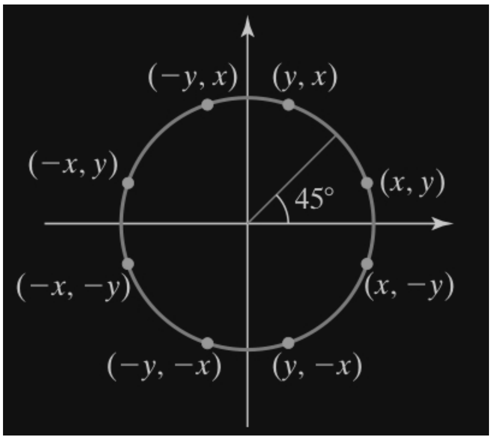
Bu çemberin noktalarını hesaplamak için yeterli bir denklem gibi gözükse de, çok fazla hesaplama yükü gerektireceğinden ve çemberin çevresindeki noktaların arasındaki boşluklar eşit aralıkta olmayacağı için yeterince iyi bir çözüm değil.



Bu eşit dağılmama problemini polar koordinat sistemini kullanarak çözebiliriz fakat bu sefer de işin içine trigonometrik fonksiyonlar gireceği için yine hesaplama maliyeti problemi ile karşılaşacağız. Bu nedenle farklı bir yola ihtiyacımız var.

Bu noktada çemberin simetrisi yardımımıza koşabilir, eğer üçüncü figüre odaklanırsanız, dörde ayrılmış olan çemberin çeyrekliklerinin birbirlerinin benzeri olduklarını görebilirsiniz. Dolayısı ile eğer birinci çeyrekliği hesaplayabilirsek, ikinci çeyreği Y eksenine göre yansıtarak bulabiliriz, geriye kalan üçüncü ve dördüncü çeyrekleri ise ilk iki çeyreğin X eksenine göre yansımasından çıkartabiliriz. Bunu bir adım daha ileriye götürürsek, çemberin oktantları arasında da bir simetri olduğunu görebiliriz, oktant ise çemberin sekizde biri demektir. Birbirine komşu olan oktantlardaki bölümler 45 derece ile ayrılmış bir çizgiye göre simetriktirler. Çemberin bu özelliğini kullanarak x=0 x=y arası noktalarını hesapladıktan sonra işlerimizi büyük oranda kolaylaştırabiliriz. Çemberin bu oktantındaki eğim birden daha az veya bire eşittir. X ekseninin sıfır noktasında eğim sıfırdır ve x değeri y değerine eşitken, eğim eksi birdir.

Şimdi ikinci denklemdeki kök hesaplamasına veya trigonometrik hesaplamalara gerek kalmadan çemberin noktalarını bulabileceğimiz metodu geliştirelim. Metodun temel fikrinde iki piksel arasındaki orta noktayı alarak, noktanın çemberin içinde kalıp kalmadığına göre yerleştirilecek pikselin konumunu hesaplamak yatıyor.



Bresenham çizgi algoritmasında olduğu gibi birim aralıklarda ilerleyeceğiz -veya örnekleyeceğiz diyebilirsiniz- ve her seferinde çembere daha yakın olan noktayı belirleyeceğiz. r yarıçaplı ve ekrandaki orta noktası (x_c, y_c) olan bir çember için, çemberi orijine oturtacağız ve orijin etrafında çemberin çevresindeki yolu hesaplayacağız, ardından çemberin her bir noktasına orta nokta değerlerini ekleyerek çemberin gitmesi gerektiği yere öteleyeceğiz. İlk çeyreklikte, x=0 değerinden x=y değerine kadar eğim sıfırdan eksi bire değişiyor. Bu nedenle pozitif X ekseninde ve bu oktantta birer birim ilerleyerek, esas çembere dikey olarak iki muhtemel piksel pozisyonundan hangisinin daha yakın olduğunu karar parametresi ile belirleyeceğiz. Bu iki muhtemel pozisyon, pikselin bulunduğu dikey konumdan ibaret, yani bir birim aşağı mı konulacağı yoksa aynı konumda kalacağına karar vereceğiz. Geriye kalan yedi oktant için simetriyi kullanabiliriz. Bu orta nokta metodunu uygulayabilmek için çember fonksiyonunu şöyle tanımlayacağız.

$$f_c(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 \tag{3}$$

Gördüğünüz üzere sadece birinci denklemdeki r değişkenini karşı tarafa attık. Çemberin çevresinde olan herhangi bir nokta bu denklemi sağlayacaktır yani $f_c(x, y) = 0$ sonucunu üretecektir. Eğer ki nokta çemberin içinde kalıyorsa, sonuç negatif olacaktır. Eğer nokta çemberin dışında kalıyorsa sonuç pozitif olacaktır. Şu şekilde özetlenebilir.

$$f_c(x, y) \begin{cases} < 0, \text{Eğer (x,y) çemberin sınırları içindeyse.} \\ = 0, \text{Eğer (x,y) çember üzerinde ise.} \\ > 0, \text{Eğer (x,y) çember sınırlarının dışında ise.} \end{cases} \tag{4}$$

Her bir adımda yani iki noktanın ortasında bu karar testini gerçekleştirip ona göre adım atacağız. Bresenham algoritmasında olduğu gibi bunu da kademeli artan hesaplamalarla yani rekürsif olarak tanımlayacağız.

Tekrar üçüncü figüre bakacak olursanız, x_k+1 konumunda iki adet aday piksel görebilirsiniz. Eğer x_k, y_k noktasına pikseli yerleştirdiğimizi varsayarsak, bir sonraki pikselin (x_k+1, y_k) noktasında yani y ekseninde aynı konumda mı olacağını yoksa (x_k+1, y_k-1) noktasında mı yani y ekseninde bir adım aşağıda mı olacağını çembere yakınlığına göre belirlememiz gerekiyor. Karar parametresini iki piksel arasında hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} p_k &= f_c(x_k+1, y_k-\frac{1}{2}) \\ &= (x_k+1)^2 + (y_k-\frac{1}{2})^2 - r^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Eğer $p_k < 0$ ise bu orta noktanın çemberin içerisinde kaldığına ve y_k konumunun yani dikeyde bulunulan konumun değiştirilmemesi gerektiğine işaret ediyor. Diğer türlü ya nokta çemberin üzerinde ya da dışındadır demiştik, o halde yatayda bir adım inmemiz yani $y_k - 1$ konumuna inmemiz gerekiyor. Şimdi ardışık karar parametrelerini elde etmeye çalışalım, bunun için rekürsif tanımı kullanacağız. Bir sonraki karar parametresini çemberin x eksenindeki $(x_{k+1}+1)$ değeri ile hesaplayacağız, bunun aynı zamanda x_k+2 konumuna eşit olduğuna dikkat edin.

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= f_c(x_{k+1}+1, y_{k+1}-\frac{1}{2}) \\ &= [(x_{k+1})+1]^2 + (y_{k+1}-\frac{1}{2})^2 - r^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Şimdi altıncı denklemden beşinci denklemi çıkartırsak ve düzenlersek bu denklemi elde ederiz.

$$p_{k+1} = p_k + 2(x_k+1) + (y_{k+1}^2 - y_k^2) - (y_{k+1} - y_k) + 1 \tag{7}$$

Farkındsayanız y_{k+1} değeri parametrenin işaretine bağlı olarak ya y_k ya da $y_k - 1$ olabilir. Tekrardan hatırlatacağım üzere, ya bir adım aşağı inebiliriz ya da aynı dikey konumda kalabiliriz. Parametrenin işaretine göre y_{k+1} değerine alacağı değerleri yedinci denklemde yerine koyarsak p_{k+1} karar parametresini elde edebileceğimiz iki sonuca varıyoruz.

Eğer karar parametresi p_k negatif ise, nokta çemberin içerisinde kalıyor demektir, dolayısıyla dikey pozisyonda yerimizde kalmalıyız yani y_{k+1} değeri y_k değerini almalı, bunu yedinci denklemde yerine koyarsak şu sonucunu elde ederiz.

$$p_{k+1} = 2x_{k+1} + 1 + 1 \tag{8}$$

Eğer karar parametresi pozitifse, nokta çemberin üstünde veya dışında kalıyor demektir, dolayısıyla dikey pozisyonda bir aşağı inmeliyiz yani y_{k+1} değeri $y_k - 1$ değerini almalı, yedinci denklemde yerine koyarsak şu sonucu elde ederiz.

$$p_{k+1} = 2x_{k+1} + 1 - 2y_{k+1} \tag{9}$$

Aynı zamanda birkaç paragraf önce dikkat etmeniz gerektiğini söylediğim ($x_{k+1}+1 = x_k+2$) eşitliğini kullanarak şu değerleri de bir önceki parametrelere bağlı olarak elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} 2x_{k+1} &= 2x_k + 2 \\ 2y_{k+1} &= 2y_k - 2 \end{aligned} \tag{10}$$

Başlangıç konumunda (0,r) bu iki terim sırasıyla 0 ve 2r değerlerine sahipler. Her bir ardışık $2x_{k+1}$ terimi bir önceki değere iki eklenerek ve her ardışık $2y_{k+1}$ terimi bir önceki terimden iki azaltılarak bulunabilir. Şimdi başlangıç karar parametresini elde etmeliyiz, bunu da $(x_0, y_0) = (0, r)$ konumundan başlayarak hesaplayacağız.

$$p_0 = f_c(1, r - \frac{1}{2}) \tag{11}$$

$$= 1 + (r - \frac{1}{2})^2 - r^2 \tag{12}$$

$$= \frac{5}{4} - r \tag{13}$$

Eğer yarıçap tamsayı değerinde ise, kesirli kısmı bir sayısına yuvarlayabiliriz, bu durumda başlangıç parametresi $p_0 = 1 - r$ ifadesine dönüşür.

Orta Nokta Çember Algoritması

1. Çemberin yarıçapını ve merkez noktasını (x_c, y_c) gir. Sonrasında çemberin orijine ortalanmış koordinatını şu şekilde ayarla.

$$(x_0, y_0) = (0, r)$$

2. Karar parametresinin başlangıç değerini şu şekilde hesapla.

$$p_0 = \frac{5}{4} - r$$

3. k=0 değerinden başlayarak her bir x_k konumunda şu testi uygula. Eğer ki karar parametresi $p_k < 0$ ise orijinde ortalanmış çemberin (0,0) üzerinde bulunacak nokta x_{k+1}, y_k noktasıdır ve karar parametresi şu şekildedir.

$$p_k + 1 = p_k + 2x_{k+1} + 1$$

Diğer türlü ise, karar parametresi şu şekildedir.

$$p_k + 1 = p_k + 2x_{k+1} + 1 - 2y_{k+1}$$

4. Geriye kalan yedi oktant içindeki simetri noktalarını belirle.
5. Her bir hesaplanmış (x,y) noktasını (x_c, y_c) çemberin merkez noktasına şu şekilde taşı.

$$x = x + x_c \quad y = y + y_c$$

6. Üçüncü adımdan dördüncü adıma, $x \geq y$ olana kadar tekrarla.