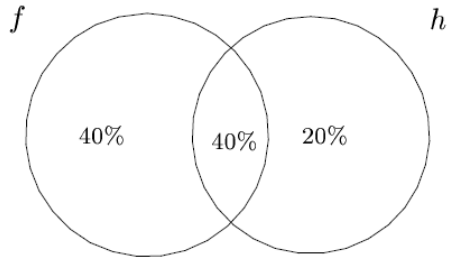
Triangulárne normy

Definícia a základné vlastnosti triangulárnych noriem

Všimnime si takúto úlohu:

Príklad. V chlapčenskej triede je 60% hokejistov a 80% futbalistov. Minimálne koľko percent chlapcov hrá súčasne aj hokej aj futbal?

Zrejme najčastejšie a zároveň aj najnázornejšie riešenie nám poskytujú Vennove diagramy:



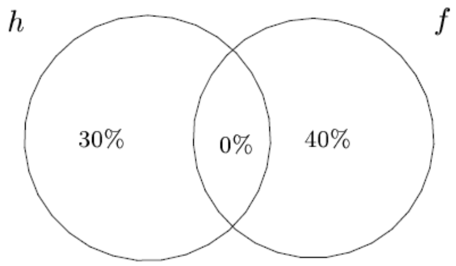
Naše riešenie môžeme zapísať aj takto:

$$p = (h + f - 100)\%,$$

pričom h, f sú percentá hokejistov a futbalistov a p nám dáva odpoveď na našu otázku. Toto však nie je všeobecné riešenie, o čom sa môžeme presvedčiť v nasledujúcej úlohe, ktorá je len číselnou modifikáciou úvodnej úlohy:

Príklad. V chlapčenskej triede je 30% hokejistov a 40% futbalistov. Minimálne koľko percent chlapcov hrá súčasne aj hokej aj futbal?

Opäť nám riešenie poskytujú Vennove diagramy:



Teraz už nebude problém prepísať riešenie pomocou funkcie dvoch premenných $P: [0, 100]^2 \to [0, 100]$, keď prvá premenná bude udávať percento hokejistov a druhá premenná percento futbalistov. Potom

$$P(x, y) = \max\{0, x + y - 100\}\%,$$

teda poradie premenných nie je dôležité *(komutatívnosť)*. Navyše, ak jedna z premenných je 100%, tak hodnota P je totožná s hodnotou zvyšnej premennej *(jednotkový prvok)*.

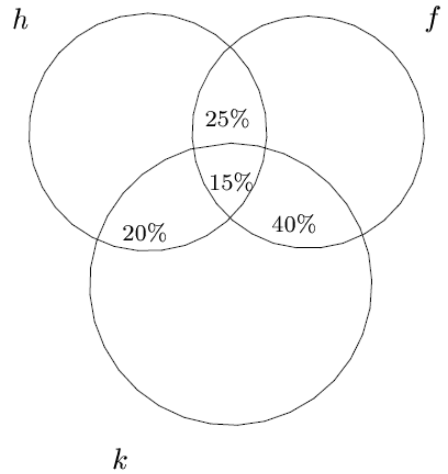
Skúsme túto úlohu trochu pozmeniť:

Príklad. V chlapčenskej triede je 60% hokejistov, 80% futbalistov a 75% karatistov.

a) Minimálne koľko percent chlapcov sa venuje súčasne všetkým trom športom?

b) Minimálne koľko percent chlapcov sa zároveň venuje aj futbalu aj karate?

Opäť použijeme Vennove diagramy:



Riešenie časti a) teda môžeme zapísať pomocou funkcie troch premenných $P' : [0, 100]^3 \to [0, 100]$, pričom jednotlivé premenné predstavujú percentá futbalistov, hokejistov a karatistov:

$$P'(x, y, z) = \max\{0, x + y + z - 200\}\%,$$

zrejme

$$P'(x, y, z) = P(P(x, y), z) = P(x, P(y, z)),$$

riešenie opäť môžeme vyjadriť pomocou funkcie dvoch premenných *(asociatívnosť)*. Časť b) riešime tak ako pôvodnú úlohu. Keď porovnáme výsledok časti *b*) s výsledkom pôvodnej úlohy, tak zistíme, že

$$\text{ak } y \leq z, \text{tak } P(x, y) \leq P(x, z),$$

keď x, y, z sú percentá v uvedenom poradí *(monotónnosť)*.

Tieto jednoduché úlohy nás priviedli k špeciálnej skupine funkcií, ktoré sú komutatívne, asociatívne, monotónne a ich maximálna hodnota je súčasne aj jednotkovým prvkom. Funkcie s týmito vlastnosťami, definované na jednotkovom štvorci $[0, 1]^2$, zaviedli Schweizer a Sklar takto:

Definícia. *Triangulárna norma (t-norma)* je binárna operácia na jednotkovom intervale $[0, 1]$, t.j. funkcia $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ taká, že pre každé $x, y, z \in [0, 1]$ sú splnené nasledujúce axiómy:

- (T1) *Komutatívnosť*
$$T(x,y) = T(y,x)$$
- (T2) *Asociatívnosť*
$$T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$$
- (T3) *Monotónnosť*
$$ak \;\; y \leq z, \;\; tak \;\; T(x,y) \leq T(x,z)$$
- (T4) *Okrajová podmienka*
$$T(x,1) = x.$$

Poznámka Začiatky problematiky t-noriem sa spájajú s funkcionálnymi rovnicami a slávnym matematikom N.H.Abelom.

Pre nadobudnutie lepšej predstavy o t-normách uvádzame nasledujúce dva príklady. Prvý z nich ukazuje nezávislosť axióm (T1)-(T4) a druhý prezentuje základné a zároveň aj najznámejšie t-normy.

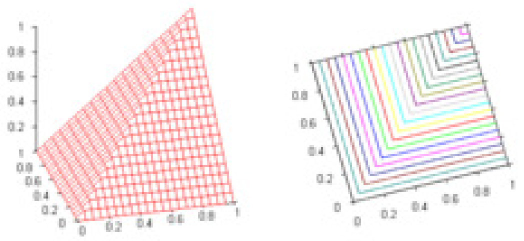
Príklad

- Funkcia $F_1 : [0,1]^2 \to [0,1]$ daná predpisom
$$F_1(x,y) = x,$$
spĺňa (T2), (T3) a (T4), ale nespĺňa (T1).
- Funkcia $F_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ daná predpisom
$$F_2(x,y) = x.y.\max(x,y),$$
spĺňa (T1), (T3) a (T4), ale nespĺňa (T2).
- Funkcia $F_3 : [0,1]^2 \to [0,1]$ daná predpisom
$$F_3(x,y) = \begin{cases} 0.5, & \text{ak } (x,y) \in]0,1[^2, \\ \min(x,y), & \text{inak}, \end{cases}$$
spĺňa (T1), (T2) a (T4), ale nespĺňa (T3).
- Funkcia $F_4 : [0,1]^2 \to [0,1]$ daná predpisom
$$F_4(x,y) = \frac{1}{2},$$
spĺňa (T1), (T2) a (T3), ale nespĺňa (T4).

Základné štyri t-normy sú:

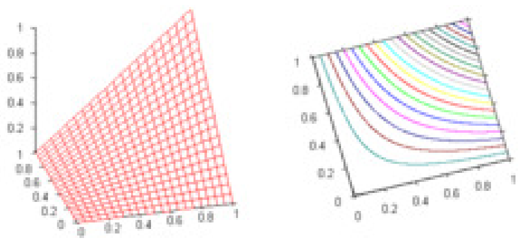
- *Minimová t-norma* $T_M : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$T_M(x,y) = \min(x,y).$$



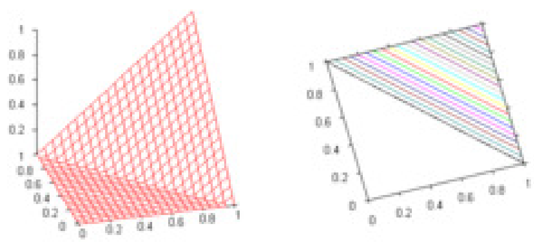
- *Súčinová t-norma* $T_P : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$T_P(x,y) = x.y.$$



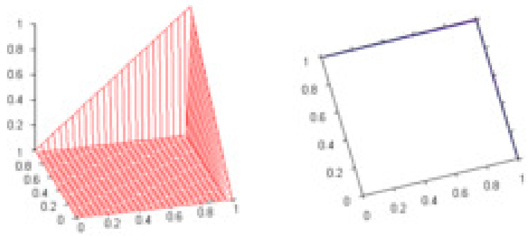
- *Łukasiewiczova t-norma* $T_L : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$T_L(x,y) = \max(x+y-1,0).$$



- *Drastický súčin* $T_D : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$T_D(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & \text{ak } \max(x,y) = 1, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$



Poznámka. Všimnime si, že Łukasiewiczova t-norma je vlastne naša funkcia P z úvodnej úlohy, ale definovaná na jednotkovom štvorci $[0,1]^2$.

Poznámka. Zrejme pre každú t-normu T platí

$$T(1,x) = T(x,1) = x,$$

$$T(0,x) = T(x,0) = 0.$$

Vzhľadom na to, že t-normy sú funkcie dvoch premenných, môžeme ich zvyčajným spôsobom porovnávať.

Definícia

- Ak pre t-normy T_1 a T_2 je pre každý bod $(x,y) \in [0,1]^2$ splnená nerovnosť $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$, hovoríme, že T_1 je *slabšia* ako T_2, alebo T_2 je *silnejšia* ako T_1 a píšeme $T_1 \leq T_2$.
- Ak pre t-normy T_1 a T_2 platí, že $T_1 \leq T_2$ a $T_1 \neq T_2$, t.j. ak $T_1 \leq T_2$, ale $T_1(x_0,y_0) < T_2(x_0,y_0)$ pre nejaký bod $(x_0,y_0) \in [0,1]^2$, tak $T_1 < T_2$.

Poznámka.

- Všimnime si, že pre ľubovoľnú t-normu T a pre každé $a \in [0,1]$ platí $T(a,a) \leq a$.
- Význačné sú tie prvky, pre ktoré platí $T(a,a) = a$. Nazývame ich *idempotentné prvky t-normy* T. Zrejme pre ľubovoľnú t-normu sú 0 a 1 idempotentné prvky. Preto ich nazývame *triviálnymi idempotentnými prvkami.*
- Postupným aplikovaním axióm (T3) a (T4) zistíme, že minimová t-norma je najsilnejšia a drastický súčin je najslabšia t-norma, teda pre ľubovoľnú t-normu T platí:

$$T_D \leq T \leq T_M.$$

- Pre spomínané základné t-normy platí takéto usporiadanie:

$$T_D < T_L < T_P < T_M.$$

Pre minimovú t-normu platí nasledujúca vlastnosť.
Veta. (Klement, Mesiar, Pap) Minimová t-norma je jediná, pre ktorú je každý jej prvok $a \in [0,1]$ idempotentný, t.j.

$$(\forall a \in [0,1] : T(a,a) = a) \iff T = T_M.$$

Asociatívnosť nám umožňuje jednoznačne rozšíriť každú t-normu T na $n-$árnu operáciu na jednotkovom intervale. Kvôli jednoduchosti zavedieme takéto označenie:

Definícia. Ak T je t-norma, $x \in [0,1]$ a $n \in N$, tak

$$x_T^{(n)} = \begin{cases} x, & \text{ak } n = 1, \\ T(x, x_T^{(n-1)}), & \text{ak } n > 1. \end{cases}$$

Jednou z dôležitých vlastností, ktorá nás pri funkciách často zaujíma, je spojitosť. Spojitosť t-noriem máme definovanú nasledovne:

Definícia. Hovoríme, že t-norma T je *spojitá*, ak funkcia $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je spojitá v každom bode $(x,y) \in [0,1]^2$.

Z axióm (T1) a (T3) vyplýva pre spojitosť t-noriem nasledujúce tvrdenie.

Veta. (Klement, Mesiar, Pap) Triangulárna norma je spojitá práve vtedy, keď je spojitá v prvej súradnici, t.j. pre každé $y \in [0,1]$ je funkcia jednej premennej

$$T(.,y) : [0,1]^2 \to [0,1]$$

spojitá.

V mnohých prípadoch postačuje pracovať so slabšími formami spojitosti. V prípade t-noriem sa jedná o spojitosť zľava (sprava).

Definícia. Hovoríme, že t-norma T je *spojitá zľava (resp. sprava)*, ak pre každé $y \in [0,1]$ a pre ľubovoľnú neklesajúcu (resp. nerastúcu) postupnosť $(x_n)_{n\in N}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n, y) = T(\lim_{n\to\infty} x_n, y).$$

Vďaka monotónnosti a komutatívnosti t-noriem, pre tento typ spojitosti platí nasledujúce tvrdenie.

Veta.(Klement, Mesiar, Pap) Triangulárna norma je *spojitá zľava (resp. sprava)* práve vtedy, keď je spojitá zľava (resp. sprava) v prvej súradnici, t.j. ak pre každé $y \in [0,1]$ a pre každú postupnosť $(x_n)_{n\in N} \in [0,1]^N$ platí

$$\sup T(x_n, y) = T(\sup x_n, y),$$

resp.

$$(\inf T(x_n, y) = T(\inf x_n, y))\,.$$

Príklad. Zrejme T_M, T_P, T_L sú spojité t-normy, ale T_D nie je spojitá t-norma (ale je spojitá sprava). Ďalej, napr. t-norma, daná predpisom:

$$T_{a,\lambda}^{\Delta}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x + y \leq 1 + a \text{ a } \max(x,y) < 1, \\ \lambda, & \text{ak } x + y > 1 + a \text{ a } \max(x,y) < 1, \\ \min(x,y), & \text{inak.} \end{cases}$$

kde $a \in]0,1[, \lambda \in]0,a[$, nie je spojitá (ani sprava, ani zľava).

Algebraické vlastnosti t-noriem

Každú úsečku dĺžky b vieme pokryť nejakým počtom úsečiek danej dĺžky $a > 0$. Toto tvrdenie môžeme zapísať aj takto: pre ľubovoľné dve kladné reálne čísla a, b existuje prirodzené číslo n také, že $a.n > b$, čo je známa archimedovská vlastnosť reálnej osi vzhľadom na sčítanie. Podobne je definovaná aj archimedovská vlastnosť pre násobenie na intervale $]0,1[$: pre ľubovoľné dve reálne čísla a, b z intervalu $]0,1[$ existuje prirodzené číslo n také, že $a^n < b$. Archimedovská vlastnosť pre t-normy bola zavedená takto:

Definícia. Hovoríme, že t-norma T je *archimedovská,* ak pre všetky body $(x,y) \in]0,1[^2$ existuje $n \in N$ také, že

$$x_T^{(n)} < y.$$

Príklad Vyjadrime $x_T^{(n)}$, $x \in]0,1[$ pre základné štyri t-normy T_M, T_P, T_L, T_D :

$$x_{T_M}^{(n)} = x, \quad x_{T_P}^{(n)} = x^n, \quad x_{T_L}^{(n)} = \max\{0, nx - n + 1\}, \quad x_{T_D}^{(n)} = x.\chi_{\{1\}}(n).$$

Aplikovaním predchádzajúcej definície zistíme, že t-normy T_P, T_L, T_D sú archimedovské, ale T_M nie je archimedovská. Aj t-norma $T = T_{a,\lambda}^{\Delta}$ z príkladu 2.1.12. je archimedovská, nakoľko $x_T^{(3)} = 0$ pre všetky $x \in]0,1[$.

Pri overovaní archimedovskej vlastnosti často využívame nasledujúce tvrdenia:

Veta. (Klement, Mesiar, Pap) Triangulárna norma T je archimedovská práve vtedy, keď pre každé $x \in]0,1[$ je

$$\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0.$$

Veta. (Klement, Mesiar, Pap)

- Ak t-norma T je archimedovská, tak pre každé $x \in]0,1[$ platí $T(x,x) < x$.
- Ak je t-norma T spojitá sprava, potom je archimedovská práve vtedy, keď pre každé $x \in]0,1[$ platí $T(x,x) < x$.

Poznamenajme, že na základe predchádzajúceho tvrdenia sa často v literatúre definuje archimedovskosť spojitých t-noriem pomocou diagonálnej nerovnosti

$$T(x,x) < x, \text{ pre } x \in]0,1[.$$

Teraz si budeme všímať ďalšie algebraické vlastnosti t-noriem. Dôležitá vlastnosť funkcií je monotónnosť. Pri t-normách rozlišujeme niekoľko typov monotónnosti:

Definícia.

- Hovoríme, že t-norma T je *striktne monotónna*, ak je rastúca na $]0,1]^2$ ako funkcia $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ alebo ekvivaletne,

$$\text{ak} \quad x \in]0,1] \quad \text{a} \quad y < z, \quad \text{tak} \quad T(x,y) < T(x,z).$$

- Hovoríme, že t-norma T je *združene striktne monotónna*, ak platí:

$$\text{ak} \quad x < x' \quad \text{a} \quad y < y', \quad \text{tak} \quad T(x,y) < T(x',y').$$

- Hovoríme, že t-norma T je *striktná*, ak je spojitá a striktne monotónna.

O vzťahoch medzi jednotlivými typmi monotónnosti sa viac dozvieme z nasledujúcej vety a príkladu:
Veta. (Klement, Mesiar, Pap)

- Triangulárna norma T je striktne monotónna práve vtedy, keď platí zákon o krátení, t.j. ak $T(x,y) = T(x,z)$ a $x > 0$, tak $y = z$.
- Ak je t-norma T striktne monotónna, potom je aj združene striktne monotónna.

Príklad.

- Łukasiewiczova t-norma je spojitá, ale nie je striktne monotónna, ani združene striktne monotónna.
- Triangulárna norma T, definovaná takto

$$T(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2}, & \text{ak } \max(x,y) < 1, \\ xy, & \text{inak}, \end{cases}$$

  je striktne monotónna, ale nie je spojitá.
- Súčinová t-norma T_P ako jediná z uvedených štyroch základných je aj spojitá, aj striktne monotónna, teda je striktná.
- Minimová t-norma T_M je spojitá a združene striktne monotónna (ale nie je striktne monotónna).

V teórii pologrúp je dôležitým pojmom *deliteľ nuly*. Pre t-normy definujeme tento pojem takto:
Definícia. Prvok $x \in]0,1[$ nazveme *deliteľ nuly* danej t-normy T, ak existuje $y \in]0,1[$ také, že $T(x,y) = 0$.
Hovoríme, že $x \in]0,1[$ je *nilpotentný prvok danej t-normy* T, ak existuje $n \in N$ také, že $x_T^{(n)} = 0$.
Poznámka. Triangulárna norma bez deliteľov nuly sa nazýva *pozitívna.*

Príklad Opäť sa zamerajme na štyri základné t-normy. Zrejme T_P, T_M nemajú ani deliteľa nuly, ani nilpotentné prvky. Naopak, každé $x \in]0,1[$ je deliteľom nuly a zároveň aj nilpotentným prvkom T_D, T_L.

Ďalšiu špeciálnu triedu t-noriem charakterizujú práve nilpotentné prvky a spojitosť:

Definícia. Hovoríme, že t-norma T je *nilpotentná*, ak je spojitá a každé $x \in]0,1[$ je jej nilpotentným prvkom.

Nilpotentné a striktné t-normy sú archimedovské a spojité. Ich vzťah je vyjadrený takto:

Veta. (Klement, Mesiar, Pap) Nech T je spojitá archimedovská t-norma. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné :

- T je nilpotentná.
- Existuje aspoň jeden nilpotentný prvok danej t-normy T.
- T nie je striktná.
- T má deliteľa nuly.

Poznámka. Typickou predstaviteľkou nilpotentných t-noriem je Łukasiewiczova t-norma, navyše všetky nilpotentné t-normy sú s ňou izomorfné. Naopak, súčinová t-norma je najznámejšia striktná t-norma. V nasledujúcich kapitolách sa s nimi ešte stretneme, majú totiž významné postavenie pri konštrukciách nilpotentných a striktných t-noriem.