Triangulárne normy (t-normy)

Martin Bažík, Milan Augustín, Ľuboš Hlipala

12. októbra 2017

T-normy

Definition

Binárna operácia na intervale [0,1], t.j. funkcia $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ splňujúca axiómy:

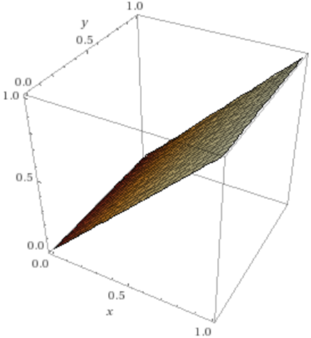
- (T1) *Komutatívnosť* $T(x,y) = T(y,x)$
- (T2) *Asociatívnosť* $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y),z)$
- (T3) *Monotónnosť ak* $y \leq z$, *tak* $T(x,y) \leq T(x,z)$
- (T4) *Okrajová podmienka* $T(x,1) = x$.

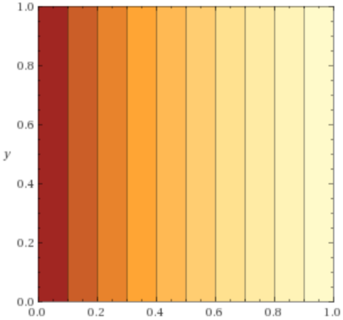
- Fuzzy konjunkcia $(a \wedge b)$

Príklad1

$$F(x, y) = x$$

Nesplĺňa T1 (komutatívnosť).

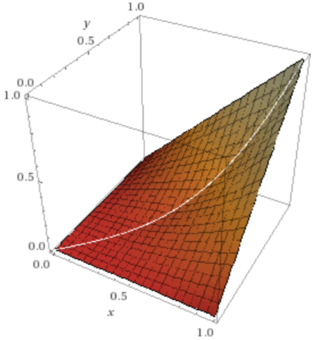


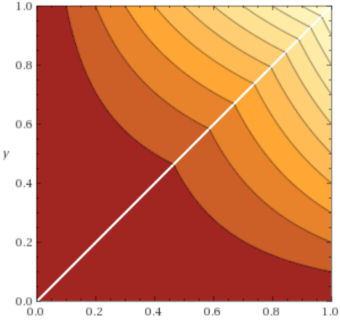


Príklad 2

$$F(x, y) = x * y * max(x, y)$$

NesplÍňa T2 (asociatívnosť).

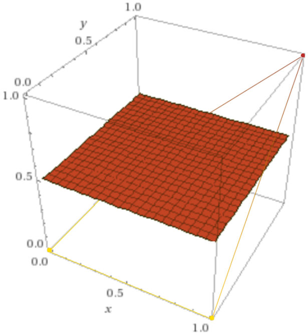




Príklad 3

$$F(x,y) = \begin{cases} 0.5 & ak (x,y) \in]0,1[^2 \\ min(x,y) & inak \end{cases}$$

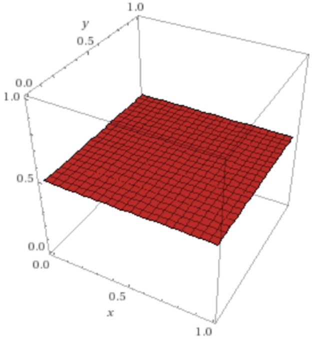
Nesplĺňa T3 (monotónnosť).

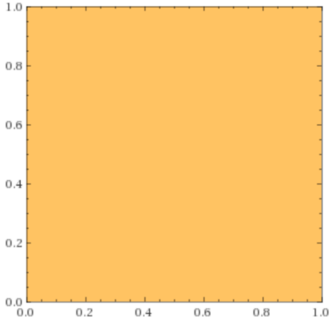


Príklad 4

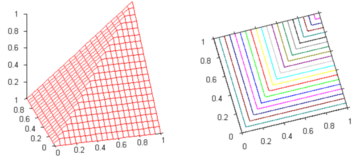
$$F(x, y) = 1/2$$

NesplÍňa T4 (okrajová podmienka).



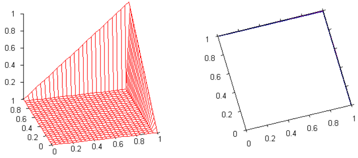


Základné t-normy



Obr.: Minimová

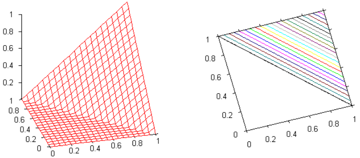
$$T_M(x, y) = \min(x, y)$$



Obr.: Drastický Súčin

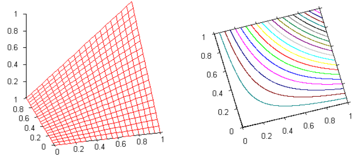
$$T_D(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), & \text{ak } \max(x, y) = 1, \\ 0, & \text{inak.} \end{cases}$$

Základné t-normy



Obr.: Lukasiewicz

$$T_L(x,y) = \max(x+y-1,0)$$



Obr.: Súčinová

$$T_P(x,y) = x.y$$

Vlastnosti

Poznámka:

Zrejme pre každú t-normu T platí

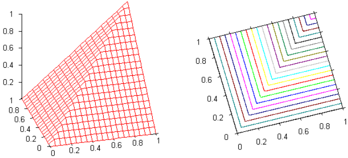
$$T(1, x) = T(x, 1) = x,$$

$$T(0, x) = T(x, 0) = 0.$$

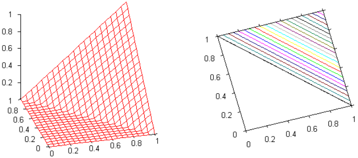
Definition

- Ak pre t-normy T_1 a T_2 je pre každý bod $(x, y) \in [0, 1]^2$ splnená nerovnosť $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$, hovoríme, že T_1 je *slabšia* ako T_2, alebo T_2 je *silnejšia* ako T_1 a píšeme $T_1 \leq T_2$.
- Ak pre t-normy T_1 a T_2 platí, že $T_1 \leq T_2$ a $T_1 \neq T_2$, t.j. ak $T_1 \leq T_2$, ale $T_1(x_0, y_0) < T_2(x_0, y_0)$ pre nejaký bod $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$, tak $T_1 < T_2$.

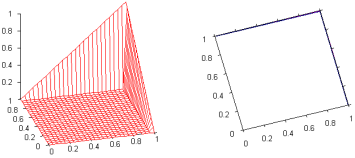
Sila



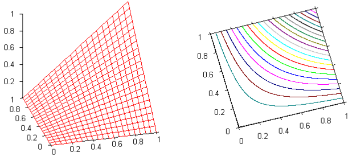
Obr.: Minimová



Obr.: Lukasiewicz



Obr.: Drastický Súčin



Obr.: Súčinová

Idempotentné prvky

Definition

Význačné sú tie prvky, pre ktoré platí $T(a, a) = a$. Nazývame ich *idempotentné prvky t-normy* T. Zrejme pre ľubovoľnú t-normu sú 0 a 1 idempotentné prvky. Preto ich nazývame *triviálnymi idempotentnými prvkami.*

Veta. (Klement, Mesiar, Pap) Minimová t-norma je jediná, pre ktorú je každý jej prvok $a \in [0,1]$ idempotentný, t.j.

$$(\forall a \in [0,1] : T(a,a) = a) \iff T = T_M.$$

Dôkaz. Ak pre t-normu T očakávame $T(x,x) = x$ pre každé $x \in (0,1)$, potom keď $y \leq x < 1$ monotónnosť (T3) implikuje

$$y = T(y,y) \leq T(x,y) \leq min(x,y) = y$$

Spolu s komutativitou (T1) a okrajovou podmienkou (T4) získame $T = T_M$

Poznámka: Vysvetliť

Algebraické vlastnosti

- Archimedovská vlastnosť
- Striktná monotónnosť
- Deliteľ nuly
- Nilpotentný prvok
- Nilpotentnosť

Archimedovská vlastnosť

Definition

T-norma T je *archimedovská,* ak pre všetky body $(x, y) \in]0, 1[^2$ existuje $n \in N$ také, že
$$x_T^{(n)} < y.$$

$$x_{T_M}^{(n)} = x, \quad x_{T_P}^{(n)} = x^n, \quad x_{T_L}^{(n)} = \max\{0, nx - n + 1\}$$

Poznámka: Odvodiť

Vety

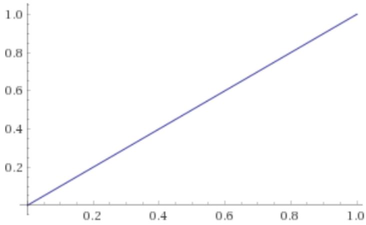
Veta. (Klement, Mesiar, Pap) Triangulárna norma T je archimedovská práve vtedy, ked pre každé $x \in]0,1[$ je

$$\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0.$$

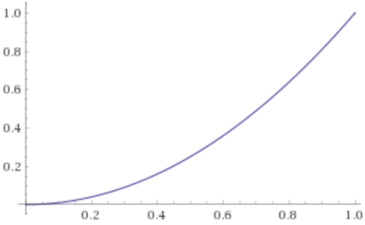
Veta. (Klement, Mesiar, Pap)

- Ak t-norma T je archimedovská, tak pre každé $x \in]0,1[$ platí $T(x,x) < x$.
- Ak je t-norma T spojitá sprava, potom je archimedovská práve vtedy, keď pre každé $x \in]0,1[$ platí $T(x,x) < x$.

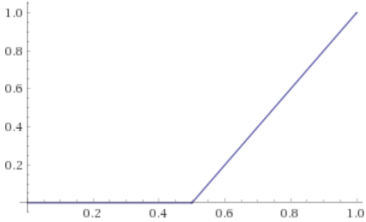
Diagonály



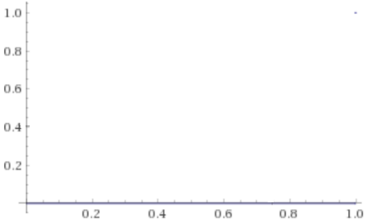
Obr.: Minimová t-norma



Obr.: Súčinová t-norma



Obr.: Lakasiewiczova t-norma



Obr.: Drastický súčin

Striktná monotónnosť

- Hovoríme, že t-norma T je *striktne monotónna*, ak je rastúca na $]0,1]^2$ ako funkcia $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ alebo ekvivaletne,

$$\text{ak} \quad x \in]0,1] \quad \text{a} \quad y < z, \quad \text{tak} \quad T(x,y) < T(x,z).$$

- Hovoríme, že t-norma T je *združene striktne monotónna*, ak platí:

$$\text{ak} \quad x < x' \quad \text{a} \quad y < y', \quad \text{tak} \quad T(x,y) < T(x',y').$$

- Hovoríme, že t-norma T je *striktná*, ak je spojitá a striktne monotónna.

Viď minimová

Veta

Veta. (Klement, Mesiar, Pap) Ak je t-norma T striktne monotónna, potom je aj združene striktne monotónna.

Dôkaz

Striktne monotónna

$$y < z \implies T(x,y) < T(x,z)$$

$$x < z \implies T(x,y) < T(z,y)$$

Združene strikne monotónna

$$x < x' \wedge y < y' \implies T(x,y) < T(x',y')$$

Dôkaz

Nech

$$x < x' \wedge y < y' \implies T(x,y) < T(x',y)$$

$$\implies T(x,y') < T(x',y')$$

$$\implies T(x',y) < T(x',y')$$

$$\implies T(x,y) < T(x,y')$$

Z toho vyplýva

$$T(x,y) < T(x,y') < T(x',y') \implies T(x,y) < T(x',y')$$

Dôkaz

Nech

$$x < x' \wedge y < y' \implies T(x,y) < T(x',y)$$

$$\implies T(x,y') < T(x',y')$$

$$\implies T(x',y) < T(x',y')$$

$$\implies T(x,y) < T(x,y')$$

Z toho vyplýva

$$T(x,y) < T(x,y') < T(x',y') \implies T(x,y) < T(x',y')$$

Dôkaz

Nech

$$x < x' \wedge y < y' \implies T(x,y) < T(x',y)$$

$$\implies T(x,y') < T(x',y')$$

$$\implies T(x',y) < T(x',y')$$

$$\implies T(x,y) < T(x,y')$$

Z toho vyplýva

$$T(x,y) < T(x,y') < T(x',y') \implies T(x,y) < T(x',y')$$

Dôkaz

Nech

$$x < x' \wedge y < y' \implies T(x, y) < T(x', y)$$

$$\implies T(x, y') < T(x', y')$$

$$\implies T(x', y) < T(x', y')$$

$$\implies T(x, y) < T(x, y')$$

Z toho vyplýva

$$T(x, y) < T(x, y') < T(x', y') \implies T(x, y) < T(x', y')$$

Dôkaz

Nech

$$x < x' \wedge y < y' \implies T(x, y) < T(x', y)$$

$$\implies T(x, y') < T(x', y')$$

$$\implies T(x', y) < T(x', y')$$

$$\implies T(x, y) < T(x, y')$$

Z toho vyplýva

$$T(x, y) < T(x, y') < T(x', y') \implies T(x, y) < T(x', y')$$

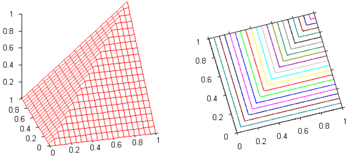
Deliteľ nuly

Definition

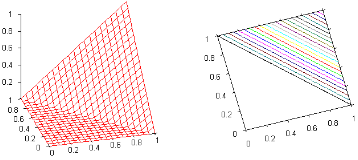
Prvok $x \in]0,1[$ nazveme *deliteľ nuly* danej t-normy T, ak existuje $y \in]0,1[$ také, že $T(x,y) = 0$.

Poznámka: Triangulárna norma bez deliteľov nuly sa nazýva *pozitívna.*

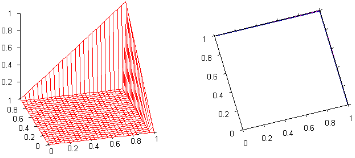
Deliteľ nuly



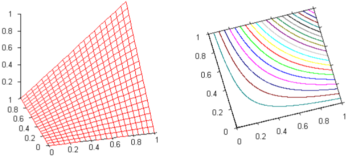
Obr.: Minimová



Obr.: Lukasiewicz



Obr.: Drastický Súčin



Obr.: Súčinová

Nilpotentné prvky

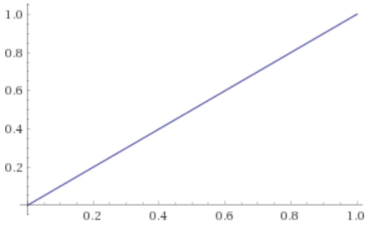
Definition

Hovoríme, že $x \in]0,1[$ je *nilpotentný prvok danej t-normy* T, ak existuje $n \in N$ také, že $x_T^{(n)} = 0$.

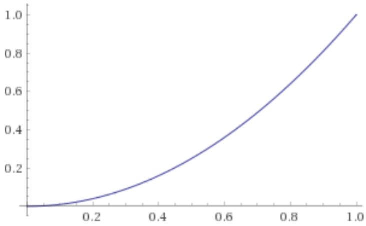
Definition

Hovoríme, že t-norma T je *nilpotentná*, ak je spojitá a každé $x \in]0,1[$ je jej nilpotentným prvkom.

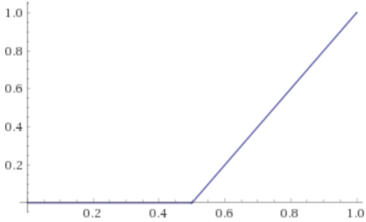
Diagonály



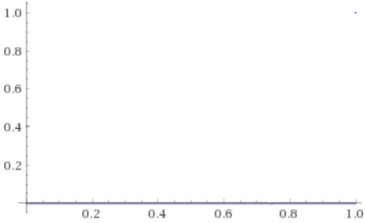
Obr.: Minimová t-norma



Obr.: Súčinová t-norma

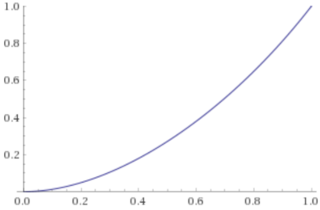


Obr.: Lakasiewiczova t-norma

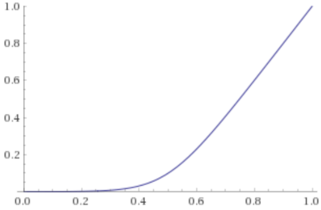


Obr.: Drastický súčin

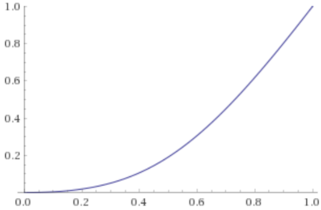
Diagonály



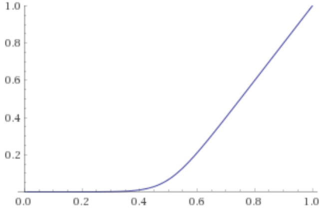
Obr.: Príklad 1



Obr.: Príklad 3



Obr.: Príklad 2



Obr.: Príklad 4

Parametrické t-normy

- Schweizer–Sklar t-normy
- Frankove t-normy
- ...

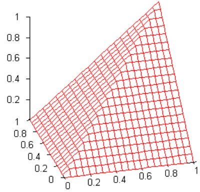
Schweizer–Sklar t-normy

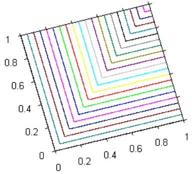
$$T_P^{SS}(x,y) = \begin{cases} T_{min}(x,y) & p = -\infty \\ (x^p + y^p - 1)^{\frac{1}{p}} & -\infty < p < 0 \\ T_{prod}(x,y) & p = 0 \\ (max(0, x^p + y^p - 1))^{\frac{1}{p}} & 0 < p < \infty \\ T_D(x,y) & p = \infty \end{cases}$$

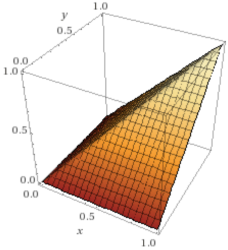
Vlastnosti

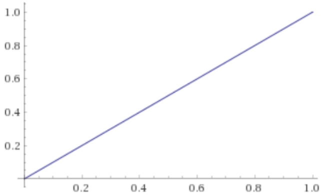
- Archimedovská iba pre $p > -\infty$
- Spojitá iba pre $p < +\infty$
- Striktná iba pre $-\infty < p \leq 0$
- Nilpotentná iba pre $0 < p < +\infty$ (pre $p = 1$ T_{Luk}).

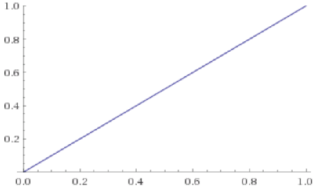
Schweizer–Sklar t-normy





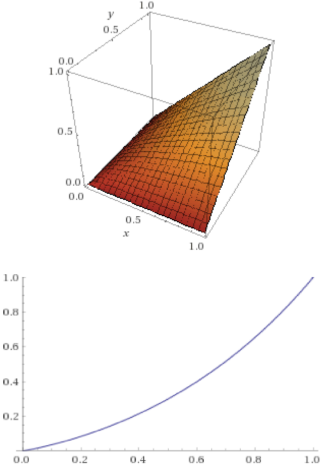




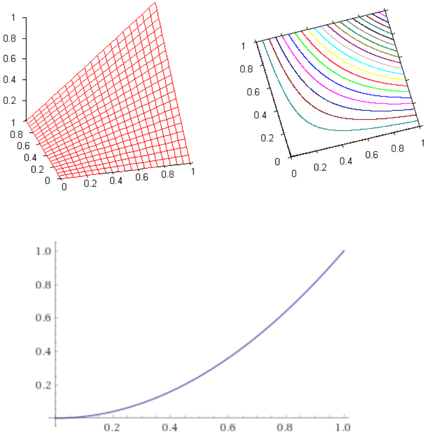


Obr.: T_{MIN}:Schweizer–Sklar pre p = $-\infty$

Obr.: Schweizer–Sklar pre p = -19000

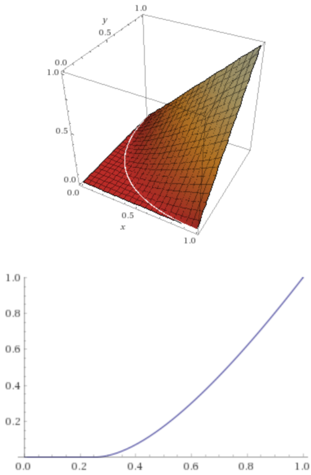


Obr.: Schweizer–Sklar pre p = -0.5

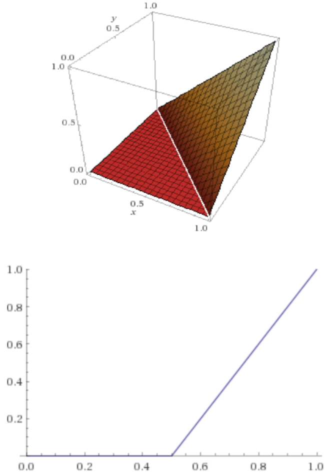


Obr.: T_{prod}:Schweizer–Sklar pre p = 0

Schweizer–Sklar t-normy

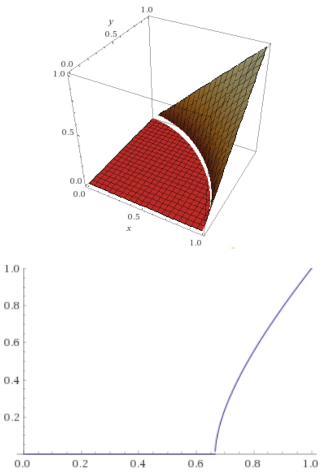


Obr.: Schweizer–Sklar pre p = 0.2

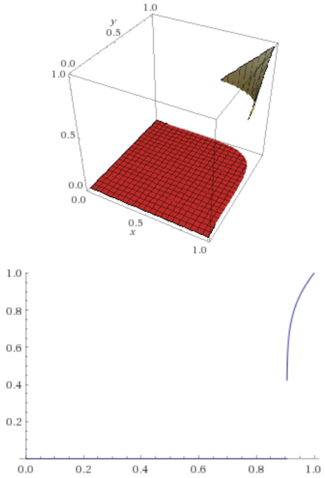


Obr.: T_{Luk}Schweizer–Sklar pre p = 1

Schweizer–Sklar t-normy

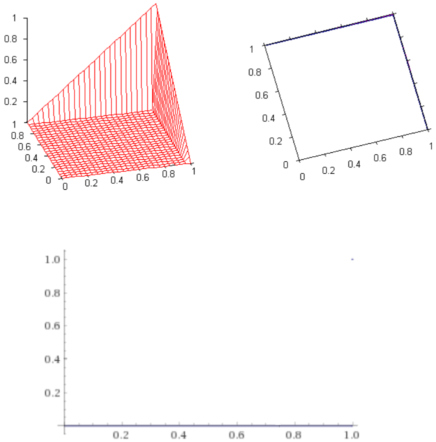


Obr.: Schweizer–Sklar pre p = 1.7



Obr.: Schweizer–Sklar pre p = 7

Schweizer–Sklar t-normy



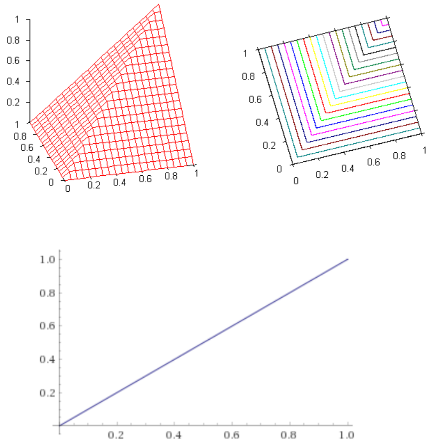
Obr.: T_D:Schweizer–Sklar pre p $= \infty$

Frankove t-normy

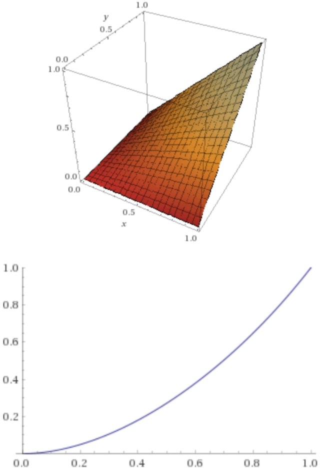
Pre $0 \leq p \leq +\infty$:

$$T_P^F(x,y) = \begin{cases} T_{min}(x,y) & p = 0 \\ T_{prod} & p = 1 \\ T_{Luk}(x,y) & p = +\infty \\ \log_p(1 + \frac{(p^x-1)(p^y-1)}{p-1}) & inak \end{cases}$$

Frankove t-normy

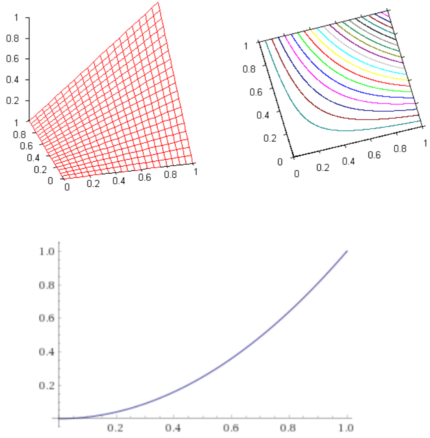


Obr.: T_{min}:Frank pre p = 0

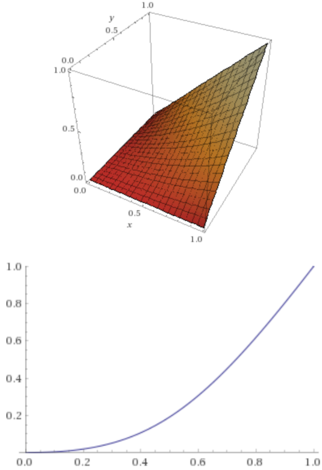


Obr.: Frank pre p = 0.5

Frankove t-normy

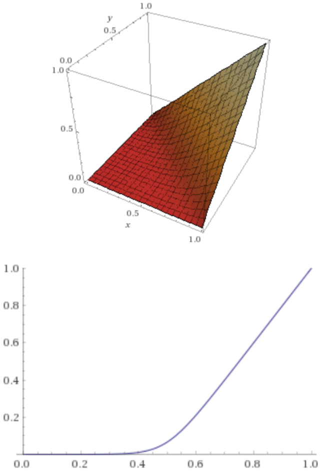


Obr.: T_{prod}:Frank pre p = 1

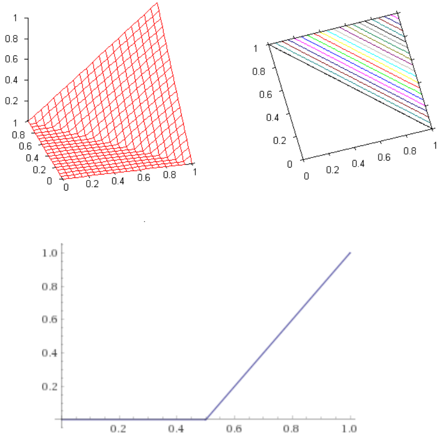


Obr.: Frank pre p = 7

Frankove t-normy



Obr.: Frank pre p = 30000



Obr.: T_{Luk}:Frank pre p $= \infty$