初升高“暑假培训班”数学小检测（精英班）

满分 100 分，测试时间 40 分钟

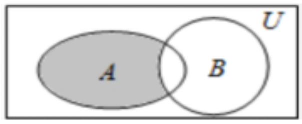
姓名：________；　　　　　　　　　　成绩：____________.

一、选择题：本大题共 7 小题，每小题 5 分，共 35 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把答案填在答题卡上。

1.（2019年全国新课标卷Ⅱ，1）设集合 $A=\{x|x^2-5x+6>0\}$，$B=\{x|x-1<0\}$，则 $A\cap B=$(　　)

A. (-∞，1)　B. (-2，1)　C. (-3，-1)　D. (3，+∞)

2. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\in N\,|\,x^2-6x+5\le 0\}, B=\{x\in N\,|\,x>2\}$，图中阴影部分所表示的集合为（　　）



A. $\{0,1,2\}$　B. $\{1,2\}$　C. $\{1\}$　D. $\{0,1\}$

3. 如果 $a<b<0$，那么下列不等式成立的是　　　　（　　）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $ab<b^2$　　C. $-ab<-a^2$　　D. $-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$

4. 已知集合 $A=\{0,2,4,6\}$，$B=\{n\in N\,|\,2^n<33\}$，则集合 $A\cap B$ 的子集个数为（　　）

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 4

5. 已知 $-1\le x+y\le 1$，$1\le x-y\le 3$，则 $8^x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^y$ 的取值范围是（　　）

A. $[2,2^8]$　　B. $\left[\frac{1}{2},2^8\right]$　　C. $[2,2^7]$　　D. $\left[\frac{1}{2},2^7\right]$

6. 已知函数 $f(x)=(ax-1)(x+b)$，如果不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,3)$，那么不等式 $f(-2x)<0$ 的解集为（　　）

A. $(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$　B. $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$　C. $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2},+\infty)$　D. $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

7. 若正数 a，b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，则 $\frac{1}{a-1}+\frac{9}{b-1}$ 的最小值为（　　）

A. 6　　B. 9　　C. 12　　D. 15

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，把答案填在答题卡上。

8. 集合 $M=\{a\,|\,\frac{6}{5-a}\in Z, a\in N\}$ 用列举法表示为________.

9. 若集合 $A=\{-1,1\}, B=\{x\,|\,mx=1\}$，且 $B\subseteq A$，则实数 m 取值集合__________.

10. 函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值为 5，则实数 a 的值为______.

11．已知二次函数 $f(x)=-x^2+2x+3$，不等式 $f(x)\geq m$ 的解集的区间长度为6(规定：闭区间 $\left[a,b\right]$ 的长度为 $b-a$)，则实数 m 的值是______.

三、解答题（本大题共3小题，共45分）

12.（本小题满分15分）已知 $f(x)=ax^2+x-a,a\in R$.

（1）若 $a=1$，解不等式 $f\left(x\right)\geq 1$；

（2）若 $a<0$，解不等式 $f\left(x\right)>1$.

13.（本小题满分15分）

已知集合 $A=\{x\,|\,(x+1)(x-3)<0\}$，集合 $B=\{x\,|\,x^2-ax+b<0,a,b\in R\}$.

（1）若A=B，求 a,b 的值；

（2）若b=3，且A∪B=A，求 a 的取值集合.

14．（本小题满分 15 分）

（1）已知$a>1,b>0,a+b=2$，求$\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{2b}$的最小值

（2）设$a>0,b>0,a+b=1$，求证：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}$　8.

思考题：（本小题 10 分）若$a\sqrt{c}>2b>0$,求$a^2+\dfrac{4(c^2+1)}{b(a\sqrt{c}-2b)}+\dfrac{c^3+c+2}{2c^2+2}$的最小值.

初升高“暑假培训班”数学小检测（精英班）

参考答案：

一、选择题：1～7，ABDACAA

二、填空题：13. $\{2,3,4,6,7,8,11\}$ 14. $\{0,-1,1\}$ 15. $a=\pm1$ 16. -5

三、解答题：

12. （1）当$a=1$，不等式$f(x)\geq1$即$x^2+x-1\geq1$，即$(x+2)(x-1)\geq0$，

解得$x\leqslant-2$，或$x\geq1$，

故不等式的解集为$\{x\mid x\leq-2或x\geqslant1\}$.

（2）若$a<0$，不等式为$ax^2+x-a-1>0$，即$(x-1)\left(x+\dfrac{a+1}{a}\right)<0$，

$\because 1-\left(-\dfrac{a+1}{a}\right)=\dfrac{2a+1}{a}$，

$\therefore$当$-\dfrac{1}{2}<a<0$时，$1<-\dfrac{a+1}{a}$ ，不等式的解集为$\left\{x\mid 1<x<-\dfrac{a+1}{a}\right\}$；

当$a=-\dfrac{1}{2}$时，$1=-\dfrac{a+1}{a}$，不等式即$(x-1)^2<0$，它的解集为ϕ；

当$a<-\dfrac{1}{2}$时，$1>-\dfrac{a+1}{a}$，不等式的解集为$\{x\mid-\dfrac{a+1}{a}<x<1\}$.

13. 解：（1）因为$A=\{x\mid-1<x<3\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+b<0,a,b\in R\}$

$A=B$，所以$x^2-ax+b=0$的两个根分别为$x=-1$与$x=3$

$a=2,b=-3$

（2）$[-2\sqrt{3},4]$

14. （1）由题意知$a>1,b>0,a+b=2$，可得：$(a-1)+b=1,a-1>0$，

则 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{2b}=[(a-1)+b](\frac{1}{a-1}+\frac{1}{2b})=1+\frac{1}{2}+\frac{a-1}{2b}+\frac{b}{a-1}\geq\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{a-1}{2b}\cdot\frac{b}{a-1}}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{a-1}{2b}=\frac{b}{a-1}$ 时，等号成立，

则 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{2b}$ 的最小值为 $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$。

（2）证明：因为 $a>0,\quad b>0,\quad a+b=1$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{ab}=\frac{2}{ab}\quad\frac{2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=8$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号.

$$a^2+\frac{4\left(c^2+1\right)}{b\left(a\sqrt{c}-2b\right)}+\frac{c^3+c+2}{2c^2+2}$$

$$=a^2+\frac{8\left(c^2+1\right)}{2b\left(a\sqrt{c}-2b\right)}+\frac{c^3+c+2}{2c^2+2}$$

$$\geq a^2+\frac{8\left(c^2+1\right)}{\left[\frac{2b+\left(a\sqrt{c}-2b\right)}{2}\right]^2}+\frac{c^3+c+2}{2c^2+2}(2b=a\sqrt{c}-2b)$$

$$=a^2+\frac{32\left(c^2+1\right)}{a^2c}+\frac{c^3+c+2}{2c^2+2}$$

$$\geq 2\sqrt{a^2\times\frac{32\left(c^2+1\right)}{a^2c}}+\frac{c^3+c+2}{2c^2+2}(a^2=\frac{32\left(c^2+1\right)}{a^2c})$$

$$=8\sqrt{\frac{2\left(c^2+1\right)}{c}}+\frac{c(c^2+1)+2}{2(c^2+1)}$$

$$=8\sqrt{\frac{2\left(c^2+1\right)}{c}}+\frac{c}{2}+\frac{1}{(c^2+1)}$$

$$\geq 8\sqrt{\frac{2\left(c^2+1\right)}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{2(c^2+1)}}(c=1)$$

。

令 $t=\sqrt{\frac{2(c^2+1)}{c}}=\sqrt{2(c+\frac{1}{c})}\geq 2(c=1)\Rightarrow a^2+\frac{4(c^2+1)}{b(a\sqrt{c}-2b)}+\frac{c^3+c+2}{2c^2+2}\geq 8t+\frac{2}{t}(t\geq 2)$ ，

又 $g(t)=8t+\frac{2}{t}(t\geq 2)$ 是增函数 $\Rightarrow g(t)_{\min}=g(2)=17\ \Rightarrow a^2+\frac{4(c^2+1)}{b(a\sqrt{c}-2b)}+\frac{c^3+c+2}{2c^2+2}\geq 17$