复合函数的单调性（同增异减）

复合函数的定义：由两个或两个以上的函数构成的函数，如 $y=f(g(x))$

外层函数 内层函数

证：设 $\forall x_1, x_2 \in I$ 且 $x_1 < x_2$

$\because g(x)$ 在 I 上减函数

$\therefore g(x_1) > g(x_2)$

又 $\because f(x)$ 在 I 增

$f(g(x_1)) > f(g(x_2))$

$h(x_1) > h$

$y=f(u)$ 与 $u=g(x)$

$x\nearrow$ $u\nearrow$ $y\nearrow$

$x\nearrow$ $u\nearrow$ $y\downarrow$

增 增 增

减 减 增

减 增 减

增 减 减

2. 函数的单调性

证明：$f(x)=x+\frac{k}{x}\ (k>0)$ 在 $[\sqrt{k},+\infty)$ 上单调递增

证明：1° 设 $\forall x_1, x_2 \in [\sqrt{k},+\infty)$ 且 $x_1<x_2$

2° 作差（变形）

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{k}{x_1}-x_2-\frac{k}{x_2}$$

$$=(x_1-x_2)+\left(\frac{k}{x_1}-\frac{k}{x_2}\right)$$

$$=(x_1-x_2)\cdot\frac{k(x_2-x_1)}{x_1x_2}$$

$$=\underbrace{(x_1-x_2)}_{<0}\underbrace{\left[1-\frac{k}{\underbrace{x_1x_2}_{>k}}\right]}_{>0}<0$$

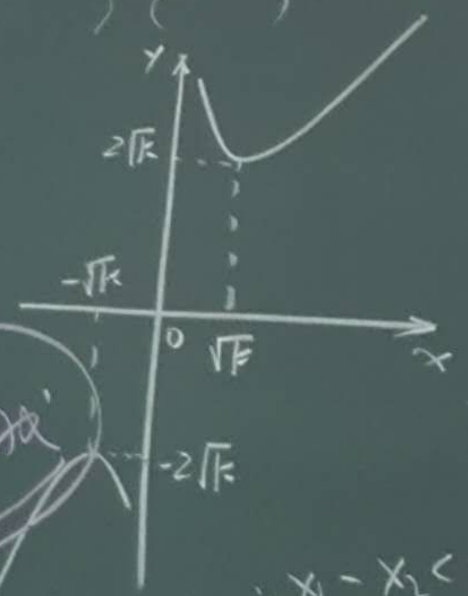
3° 判断与0大小

4° 下结论

$f(x_1)<f(x_2)$

∴ $f(x)$ 在 $[\sqrt{k},+\infty)$ 上单调递增

函数图象



$x_1<x_2$ ∴ $x_1-x_2<0$

又∵ $x_1, x_2 \in [\sqrt{k},+\infty)$

∴ $x_1x_2>k$

∴ $1-\frac{k}{x_1x_2}>0$