

分类号: 0174.41

单位代码: 10359

学 号: 04071104100251

合肥工业大学

Hefei University of Technology

# 硕士学位论文

MASTER DISSERTATION



论文题目: 关于等距曲线的若干研究

学位类别: 学历硕士

学科专业:  
(工程领域) 计算数学

作者姓名: 陈 远 宁

导师姓名: 黄有度 教授

完成时间: 2007 年 5 月

关于等距曲线的若干研究

The Study of Offset Curves

作者姓名 陈 远 宁  
学位类型 学 历 硕 士  
学科、专业 计 算 数 学  
研究方向 计算机辅助几何设计  
导师及职称 黄 有 度 教 授

2007 年 5 月

# 合 肥 工 业 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合合肥工业大学硕士学位论文质量要求。

答辩委员会签名：（工作单位、职称）

主 席： 冯玉瑞 中财大 教授

委 员： 朱功勤 合工大 教授

檀 永 江 ..

苏 明 合工大 教授  
邱 弘 毅 合工大 教授

导 师： 黄 智 毅 合工大 教授

## 独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标志和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得合肥工业大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签字：陈运宇 签字日期：2007年6月9日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解合肥工业大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅或借阅。本人授权合肥工业大学可以将学位论文的全部或部分论文内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文者签名：陈运宇

导师签名：

黄书毅

签字日期：2007年6月9日

签字日期：07年6月8日

学位论文作者毕业后去向：

工作单位：

电话：

通讯地址：

邮编：

## 致 谢

本文是在我尊敬的导师黄有度教授的悉心指导下完成的。黄老师给予我很多关键性的指导，并提出很多宝贵意见。黄老师渊博的知识，严谨的态度，对学生的亲切关怀和一丝不苟的治学精神，诲人不倦的工作作风，使我受益匪浅。在此向黄老师致以深深的敬意和衷心的感谢！

另外，在研究生学习期间和论文写作过程中，也得到了理学院朱功勤教授、苏化明教授、邬弘毅教授、檀结庆教授、朱晓临教授、林京教授、唐铄教授的帮助，在此表示诚挚的谢意！

对所有在我读研期间给过我帮助的同学和朋友表示衷心的感谢！

感谢家人对我的关心和支持！谢谢！

最后，要感谢审阅硕士论文和出席硕士论文答辩会的各位专家学者，感谢他们在百忙中给予的批评指正。

作者：陈远宁

2007年 5月

# 关于等距曲线的若干研究

## 摘 要

等距线又叫平行线,是指与原函数方向距离为常数  $d$  的点的集合。等距曲线在计算机图形及三维数控机床等方面的应用非常广泛,因此目前关于等距曲线的研究,已成为 CAGD 中的一个热门课题。

1990 年 Farouki 和 Sakkalis 提出了一类特殊的平面曲线叫做 PH (Pythagorean Hodograph) 曲线。PH 曲线具有多项式参数速度,因此它有精确有理等距线,它的弧长为多项式函数。Farouki 等同时给出了多项式参数曲线为 PH 曲线的充分必要条件。PH 曲线由于具有良好的性质,在实际生活中有很多重要的应用。三次 PH 曲线是 PH 曲线中最基本的曲线,它有很多性质仍有待研究。另外它是多项式 PH 曲线中次数最小的一种曲线,在逼近 Bézier 曲线,逼近 B-样条曲线等方面都有很好的性质。不过也有缺点,就是不能处理拐点。三次 PH 曲线偶继承了 PH 曲线的优点,同时又摒弃了它的缺点,用三次 PH 曲线偶逼近 Bézier 曲线,逼近 B-样条曲线非常值得研究。

关键词: Bézier 曲线      PH 曲线      PH 曲线偶      等距曲线

# The Study of Offset Curves

## Abstract

Offset curves, also called parallel curves, are defined as locus of points which are at constant distance  $d$  along the normal from the generator curves. Offset are widely used in various applications, such as computer graphics, 3D NC machining, and so on. Therefore, the study of offset curves has become a hot topic of CAGD.

Farouki and Sakkalis introduced a class of special planar polynomial curves called *Pythagorean Hodograph* (PH) curves in 1990. The PH curves have polynomial parametric speed, accordingly its offset is a rational curve and its arc length is a polynomial function. Farouki also has given the sufficient and necessary condition for the polynomial parametric curves to be PH curves. PH curves have many remarkable properties, therefore it has many important applications. The cubic PH curves are the easiest curves of the PH curves, it also has many good properties. It's the lowest-degree curves of all polynomial PH curves, it can approximate Bézier curves, B-spline curves and so on. But it also has flaws, e.g. it can't deal with inflexion and self-intersection etc. The couple of planar PH cubics inherit the advantage of cubic PH curves and overcome its weakness. It is worth to study approximating the Bézier curves or B-spline curves with the couple of planar PH curves.

**Keywords:** Bézier curves; PH curves; The couple of PH curves; offset curves

# 目 录

第一章 绪 论 .....	1
1.1 CAGD 概述 .....	1
1.2 等距线等距面综述 .....	2
1.3 本文的主要研究内容和成果 .....	5
第二章 基础知识 .....	6
2.1 Bézier 曲线及其性质 .....	6
2.1.1 Bézier 曲线的定义和性质 .....	6
2.1.2 Bernstein 基函数的性质 .....	6
2.1.3 Bézier 曲线的性质 .....	7
2.2 空间曲线上的 Frenet 标架 .....	10
2.3 本章小结 .....	11
第三章 PH 曲线 .....	12
3.1 PH 曲线基本知识 .....	12
3.2 三次 PH 曲线 .....	13
3.2.1 三次 PH 曲线的定义 .....	13
3.2.2 三次 PH 曲线的性质 .....	14
3.2.3 构造三次 PH 曲线的几何方法 .....	15
3.3 五次 PH 曲线 .....	17
3.3.1 五次 PH 曲线的结构 .....	17
3.3.2 五次 PH 曲线的性质 .....	18
3.4 三次 PH 曲线偶 .....	19
3.4.1 三次 PH 曲线偶的 $C^1$ Hermite 插值 .....	19
3.4.2 “好”的三次 PH 曲线偶的判定 .....	22
3.5 本章小结 .....	26
第四章 平面 PH 曲线的应用 .....	27
4.1 用三次 PH 曲线构造平面 Bézier 曲线的等距线 .....	27
4.1.1 构造三次 PH 曲线的控制多边形 .....	27
4.1.2 用三次 PH 曲线逼近 Bézier 曲线 .....	28
4.1.3 等距线生成 .....	31
4.1.4 误差分析 .....	31
4.1.5 算法的基本步骤 .....	34
4.2 五次 PH 曲线的应用 .....	35
4.2.1 五次螺线的构造 .....	35
4.2.2 利用五次 PH 曲线进行曲线过渡 .....	37
4.3 PH 曲线偶的应用 .....	40



4.3.1 构造 Bézier 曲线的等距线..... 41

4.3.2 等距线的生成..... 42

4.3.3 误差分析 ..... 42

4.3.4 算法的基本步骤 ..... 47

4.4 本章小结 ..... 48

第五章 全文总结和展望..... 49

参考文献 ..... 50

## 插图清单

图 2-1	三次 Bézier 曲线.....	6
图 2-2	Bézier 曲线凸包性.....	9
图 3-1	图 3-2.....	15
图 3-3	图 3-4.....	16
图 3-5	三次 PH 曲线偶的 $C^1$ Hermite 插值.....	21
图 4-1	给定的初始条件 .....	27
图 4-2	构造出的 PH 曲线的控制多边形.....	27
图 4-3	第 $i$ 段 Bézier 子曲线与其对应的 PH 曲线.....	29
图 4-4	当 $b_1$ 落入两圆域时,二次 Bézier 曲线曲率单调.....	29
图 4-5	PH 样条曲线1的端点条件.....	30
图 4-6	PH 样条曲线2的端点条件.....	31

# 第一章 绪 论

## 1.1 CAGD 概述

CAGD 这个名词最早出现在 1974 年召开的 Utah 会议上,是由 Barnhill 和 Riesenfeld 提出,它表示计算机辅助几何设计(CAGD)的意思,从此,以几何造型方法为主体的 CAGD 开始以一门独立的学科出现。CAGD 主要研究工业产品的几何问题,它是各种几何外形信息的计算机表示、分析与综合,以函数逼近论、微分几何、计算数学以及数据技术为基础的边缘学科,其核心问题是计算机表示,即要解决既适合计算机处理且有效地满足形状表示与几何设计要求,又便于形状信息传递和产品数据交换的形状描述的数学方法。1963 年美国 Boeing 飞机公司的 Ferguson 首先提出了自由曲面表示的参数矢函数方法,并成功构造了 Ferguson 双三次曲面片,该方法由 FMILL 系统实现,它可以生成数控纸带。Ferguson 所采用的曲面的参数形式从此成为形状数学描述的标准形式。Ferguson 将四角点的混合偏导矢(又叫“扭矢”)都取为零矢量,1964 年美国麻省理工学院(MIT)的 Coons 发展了具有一般性的曲面描述方法,给定围成封闭曲线的四条边界就可以定义一块曲面片。1967 年 Coons 进一步推广了他这一思想,Coons 双三次曲面片在 CAGD 实践中广泛应用。1971 年法国雷诺(Renault)汽车公司的 Bézier 发表了由控制多边形定义曲线的方法。它是雷诺公司 UNISURF CAD 系统的数学基础。1972 年 de Boor 给出了关于 B 样条的一套标准算法。1974 年美国通用汽车(GM)公司的 Gordon 和 Riesenfeld 将 B 样条理论用于形状描述,提出了 B 样条曲线曲面。为了解决自由曲线曲面和初等曲线曲面的统一表示,1975 年美国锡拉丘兹(Syracuse)大学的 Versprille 首先提出了有理 B 样条方法。以后主要地由于 Piegl 和 Tiller 等人的功绩,至 80 年代后期,非均匀有理 B 样条(NURBS)方法成为用于曲线曲面描述的最广为流行的技术。1991 年,国际标准化组织(ISO)把 NURBS 作为定义工业产品几何形状的唯一数学方法。

不断地研究和发展使得基于矩形拓扑网的曲面造型技术逐渐走向成熟。但在实际应用中并不是所有的曲面都可以用矩形网曲面来描述。在一些复杂的零件造型中,矩形曲面片与矩形拓扑的局限性就明显暴露出来。但由于当今 CAD 系统中的曲面几乎都是定义在矩形区域上的,修改现有的系统要比完全地集成新的方案容易得多,这使得非矩形曲面片即所谓 N-边曲面片难以在 CAD/CAM 系统中普及开来,这也多少限制了非矩形曲面片理论的发展。N-边曲面片一直是一个广泛研究的题目。1973 年 Barnhill 给出了三角域上的超限插值曲面,1976 年 Sabin 又给出了三边贝齐尔曲面片,成为最为流行的三边曲面片。由于三边曲面片适合于有限元分析中广泛应用的三边形元素的需要,因而受到了更多的关注。

CAGD 应用日趋广泛,除了围绕汽车、航空、造船这三大工业部门的几何外形设计问题之外。经过20年的发展,理论不断深化,方法日益丰富,应用愈加广泛。在国外,计算机辅助几何设计的应用除了上述三个方面及一般机械零部件的设计这些传统领域外,正在扩展到越来越多的技术领域。例如:人体造型、人体器官(脑、心脏、胃等)X光断层扫描立体图形重建、导弹地形匹配、飞机模拟训练、石油勘探地形结构图建立、鞋、帽外形设计、动画片和艺术图案设计等等。

## 1.2 等距线等距面综述

等距(offset)曲线曲面也称为平行或位差曲线曲面,它们是基曲线曲面沿法向距离为 $d$ 的点的轨迹,为近十年来 CAGD 的一大热点。其应用领域遍及数据加工中刀具轨迹计算、机器人行走路径规划、行位公差学、公路铁路线型设计、箱报等带厚度物体设计、钣金零件为装配所预留的等宽度间隙计算、等间距挖洞加工、艺术花纹设计、实体造型和图形学等。

由于曲线曲面的单位法矢包含平方根项,等距曲线的代数次数相当高<sup>[1]</sup>,且一般不再具有原基曲线曲面的相同类型。除直线、圆、平面、球面、圆柱面、圆环面以外,有理曲线曲面的 offset 一般无法表示为有理形式,从而无法被通用的 CAGD 系统来处理<sup>[1-3]</sup>。于是何种类型的有理曲线曲面其 offset 仍为有理,又是如何来构造的,成为了人们非常关注的一个问题,这也就是 offset 研究中的精确有理表示和插值造型问题<sup>[4-15]</sup>;如果不能满足上述条件,为了使 CAGD 系统能有效处理,那就必须对 offset 进行逼近,这就是 offset 研究中基于几何或代数的逼近算法问题<sup>[16-31]</sup>;当法向距离 $d$ 大于基曲线的最小曲率半径或其中部分曲线段间的距离时,offset 会产生尖点,环或自交现象<sup>[32]</sup>,另外 offset 有时还会出现断裂现象,对此提出了 offset 中异常情况对策<sup>[33-39]</sup>;最后一类研究问题是测地 offset<sup>[40-43]</sup>、广义 offset<sup>[44, 40, 45]</sup>和 offset 最优化<sup>[46]</sup>。

1990年, Farouki<sup>[47]</sup>等首次提出了 PH 曲线的概念,由此开辟了有理表示精确研究之先河。PH 曲线为一类参数曲线其平面多项式曲线的 offset 表达式中分母根号内为完全平方,所以可以精确有理表示。后来,他有把平面 PH 曲线推广到空间 PH 曲线与曲面,并给出了具有有理 offset 的可展曲面的显示表达<sup>[4]</sup>。与此同时,他对 PH 曲线做了进一步的理论和应用研究<sup>[5, 6]</sup>,并把其弧长函数是原参数的多项式函数这一特性成功应用于速度控制是基于轨迹弧长的数控加工和工业机器人中<sup>[7]</sup>。Pottman<sup>[8]</sup>依据投影对偶表示和包络技术,导出了有理曲线曲面的 offset 的精确有理表示的条件。Martin<sup>[9]</sup>等研究了扫掠体的等距曲面,并给出自交检测。Farouki<sup>[10]</sup>对凸多面体、旋转体和简单轮廓线的拉伸体这三种简单实体的表面均给出了等距面的精确表示。Martin<sup>[11]</sup>证明了 Dupin 曲面(即曲率线为圆弧的曲面)的等距曲面也是 Dupin 曲面。Peternel<sup>[12]</sup>等利用 Laguerre

几何模型间的几何变换,给出了构造任意有理曲面的PH曲面的几何。另一方面由于PH曲面的一些优点,实际应用需要对已知型值点列构造用两端点的位矢、单位切矢和有向曲率作Hermite插值的PH曲线。一般三次参数曲线的 $GC^2H$ 插值为deBoor<sup>[13]</sup>所研究。1995年Farouki等<sup>[14]</sup>给出五次PH曲线的 $C^1H$ 插值算法;1997年Meek等<sup>[15]</sup>给出平面分段三次PH曲线的 $GC^1$ 插值算法。

在offset逼近算法方面,主要有:(1)等距移动(offsetting)控制网格(顶点)来得到offset逼近曲线控制网格(顶点)的方法。如Cobb<sup>[16]</sup>把B样条曲线的控制顶点沿曲线上与其距离最近点(称为结点)处的曲线法矢方向平移等距离d;Coquillart<sup>[17]</sup>把上述方法的d根据结点曲率及结点与原控制顶点的距离作修正;Tiller<sup>[18]</sup>等把NURBS曲线B网的各边沿法向平移距离d,再由相邻平移边的交点来得到offset逼近曲线的B网;Elber和Cohen<sup>[19]</sup>以Cobb得到的B网为初值,利用控制顶点对应与结点的逼近误差来迭代地扰动修正个控制顶点的偏移量;他们用NURBS曲线的和与积表示误差函数,并结合自适应的分割算法<sup>[20]</sup>,即把基曲线上逼近误差最大的点取为分割点,进行offset逼近。(2)基圆包络逼近法。如Lee等<sup>[21]</sup>先用二次Bézier样条曲线逼近基圆,再把此逼近曲线沿基曲线扫掠所得的包络线作为offset逼近。(3)基于插值或拟合的方法。如Klass<sup>[22]</sup>和Pham<sup>[23]</sup>分别用三次Hermite和有限个采样点的三次B样条插值曲线逼近等距线;Hoschek<sup>[24]</sup>用样条曲线对等距线采样点的逼近误差的最小二乘解来调整offset端点的切矢模;Hoschek和Wissel<sup>[25]</sup>用多段低次保端点高阶连续的样条曲线做非线性最优化的offset逼近;Sederberg等<sup>[26]</sup>用仅有中间控制顶点为区间点的偶次区间Hermite插值曲线来进行offset逼近;Piegl和Tiller<sup>[27]</sup>对NURBS提出基于样本点插值的offset曲线曲面逼近算法;Li和Hsu<sup>[28]</sup>提出基于Legendre级数逼近的方法;Farouki<sup>[29]</sup>利用双三次Hermite插值曲面来逼近等距曲面等。以上方法均在基曲线上取有限个样本点来考核误差,并与分割算法相结合来提高精度。(4)不会产生自交的逼近法。如Chiang等<sup>[30]</sup>把基曲线上的点与二维网格点相对应,用图象处理的方法求等距线逼近;Kimmel<sup>[31]</sup>在具有精度所需分辨率的矩形网格上进行小波计算,最终通过对应网格点值的等高线来生成等距曲线逼近。在异常情况对策研究方面,Maekawa等<sup>[32]</sup>提出了基于子分的区间投影多面体算法,用于计算平面等距曲线的局部自交点和整体自交点;Maekawa等<sup>[33]</sup>计算了使管道曲面不产生自交的最大可能半径;Maekawa<sup>[34, 35]</sup>讨论了在显式或隐式表示下二次曲面的等距面的自交问题;Chen和Ravani<sup>[36]</sup>提出了用于计算一般参数曲面的等距曲面上自交曲线的步进算法;Aomura等<sup>[37]</sup>提出了计算均匀双三次B样条曲面片的等距面上自交曲线的步进算法;Vafiadou等<sup>[38]</sup>用光线跟踪方法绘制Bézier曲面片的等距面的自交;Maekawa等<sup>[39]</sup>提出了一种基于Bernstein子分的Bézier曲面片的等距面的自交曲线的计算方法。

至于测地等距线,定义为曲面上沿曲线C的测地线距离为d的点的轨迹<sup>[40]</sup>。

Patrikalakis等<sup>[41]</sup>首次提出NURBS曲面上测地等距线的算法；Rausch等<sup>[42]</sup>和Kunze等<sup>[43]</sup>用测地等距线的方法分别计算了曲面上两条曲线之间的中线和测地Voronoi图。广义等距曲线曲面的概念最早由Brechtner<sup>[44]</sup>提出；Pottmann<sup>[40]</sup>对它作了进一步的推广，并应用于自由曲面三轴铣削的无碰撞研究<sup>[45]</sup>。offset的最优化问题为Alhanaty等<sup>[46]</sup>提出，即求一形体，使得其等距线的周长变化最小或其等距面的面积变化最小，这在固体燃烧和在液体环境下的药物释放中有重要应用。他们在凸集和星状集范围内给出了最优解。

国际学者围绕offset虽然做了以上大量研究，但分析表明，这些工作还有许多缺陷：

1. PH条件只是具有有理等距曲线的平面多项式曲线所应满足的一个充分条件。换言之，PH曲线只是所有等距线能精确有理表示的参数曲线（OR曲线）的一个子集。那么，OR曲线一般形式怎样？分哪几类？如何构造它呢？

2. 等距面的研究限于PH曲面及扫掠体和简单实体的表面作为基曲面，对CAGD常用的抛物面、双曲面、柱面、锥面、非可展有理直纹面等，其offset有理表示尚一无所知。

3. 对PH曲线的插值研究者寥寥，三次情况下曲线无法产生拐点<sup>[47]</sup>，Farouki的方法仅限于H插值。对OR曲线以上的H插值由于技术难度和复杂计算，更鲜有人涉足。

4. 对offset的逼近，以offsetting控制顶点的多种方法为最简单直观。Elber<sup>[48]</sup>以逼近曲线所需控制顶点的多少为准则来评价优劣。但所有这些方法都无有效的手段来控制误差。那么能否精确分析顶点偏移中的误差，给出最优逼近呢？

5. Lee的基圆包络逼近法所得到的逼近曲线次数太高，对n次多项式或有理多项式曲线而言，逼近曲线是 $3n-2$ 或 $5n-4$ 次的有理曲线。那么能否降低逼近曲线的次数，例如，使其与基曲线同次呢？又能否把它推广到曲面逼近呢？

我国数学界同仁针对以上论题进入深入研究，取得了一系列结果。吕伟<sup>[49]</sup>和郑建民<sup>[51]</sup>利用复分析、重新参数化和代数几何技术，找到了OR曲线的充要条件，一般形式，分类及构造方法；Farouki和Sederberg<sup>[52]</sup>称这一结果为他们所意想不到的(unexpected)，并通过证明抛物线的等距线的亏格为零，从理论上验证了我们结论的正确性。与此同时，吕伟<sup>[53-55]</sup>证明了中心线为有理曲线的管道曲面可有理参数化；证明了椭圆抛物面、双曲抛物面、椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面的等距面都为有理曲面；吕伟与Pottmann<sup>[56]</sup>证明了不可展的有理直纹面的等距面为有理曲面。陈国栋与王国瑾<sup>[57-59]</sup>利用平面Bézier曲线的复数表示，按插值和PH、OR条件，构造了平面五次PH曲线的Hermite插值曲线，平面双三次PH曲线的Hermite插值曲线和平面八次抛物-PH曲线的Hermite插值曲线。刘利刚和王国瑾<sup>[60, 61]</sup>给出了基于法矢曲线逼近的等距曲线最佳逼近和基于球面三角网格逼近的等距曲面逼近算法，远优于国外专家的逼近效果。寿华好

<sup>[62]</sup>等给出了基于刘徽割圆术的等距曲线逼近算法。

### 1.3 本文的主要研究内容和成果

本文主要研究了三次PH曲线和五次PH曲线以及PH曲线偶的性质和应用。  
本文的研究成果有以下几个方面：

- 1 给出了一种构造三次PH曲线控制多边形的办法
- 2 用三次PH曲线偶构造Bézier曲线的等距曲线

## 第二章 基础知识

在后面的章节中，我们要用到Bézier曲线以及微分几何方面的一些知识，为了方便起见，我们对此做一些简短的介绍。

### 2.1 Bézier曲线及其性质<sup>[63]</sup>

#### 2.1.1 Bézier 曲线的定义和性质

##### 1. 定义

给定空间  $n+1$  个点的位置矢量  $P_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ ，则 Bézier 参数曲线上各点坐标的插值公式是：

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t), \quad t \in [0,1]$$

其中， $P_i$  构成该 Bézier 曲线的特征多边形， $B_{i,n}(t)$  是  $n$  次 Bernstein 基函数：

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

$0! = 1$

Bézier 曲线实例如图 2-1 所示。

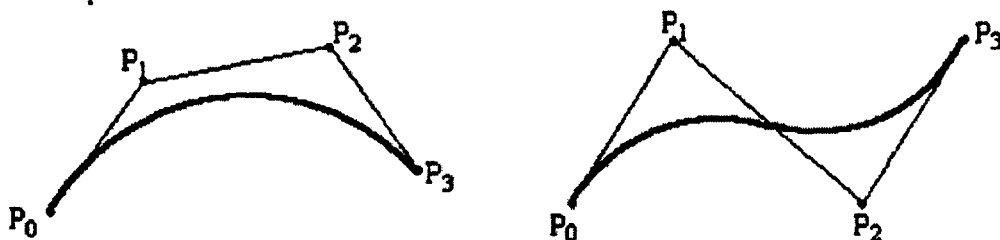


图 2-1 三次 Bézier 曲线

#### 2.1.2 Bernstein 基函数的性质

##### (1) 正性

$$B_{i,n}(t) = \begin{cases} = 0 & t = 0, 1 \\ > 0 & t \in (0, 1), i = 1, 2, \dots, n-1; \end{cases}$$

##### (2) 端点性质

$$B_{i,n}(0) = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$B_{i,n}(1) = \begin{cases} 1 & (i = n) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

##### (3) 权性

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \equiv 1 \quad t \in (0, 1)$$



由二项式定理可知： $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \equiv \sum_{i=0}^n C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = [(1-t) + t]^n \equiv 1$

(4) 对称性

$$B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(t)$$

因为  $B_{n-i,n}(t) = C_n^{n-i} [1 - (1-t)]^{n-(n-i)} \cdot (1-t)^{n-i} = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = B_{i,n}(1-t)$

(5) 递推性。

$$B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

即高一次的 Bernstein 基函数可由两个低一次的 Bernstein 调和函数线性组合而成。因为

$$\begin{aligned} B_{i,n}(t) &= C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = (C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}) t^i (1-t)^{n-i} = (1-t) C_{n-1}^i t^i (1-t)^{(n-1)-i} + t C_{n-1}^{i-1} t^{i-1} (1-t)^{(n-1)-(i-1)} \\ &= (1-t) B_{i,n-1}(t) + t B_{i-1,n-1}(t) \end{aligned}$$

(6) 导函数

$$B'_{i,n}(t) = n[B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)], \quad (i = 0, 1, \dots, n);$$

(7) 最大值

$B_{i,n}(t)$  在  $t = \frac{i}{n}$  处达到最大值。

(8) 升阶公式

$$(1-t)B_{i,n}(t) = (1 - \frac{i}{n+1})B_{i,n+1}(t)$$

$$tB_{i,n}(t) = \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(t)$$

$$B_{i,n}(t) = (1 - \frac{i}{n+1})B_{i,n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(t)$$

(9) 积分

$$\int_0^1 B_{i,n}(t) dt = \frac{1}{n+1}$$

### 2.1.3 Bézier 曲线的性质

(1) 端点性质

a 曲线端点位置矢量

由 Bernstein 基函数的端点性质可以推得，当  $t=0$  时， $P(0)=P_0$ ；当  $t=1$  时， $P(1)=P_n$ 。由此可见，Bézier 曲线的起点、终点与相应的特征多边形的起点、终点重合。

b 切矢量

因为  $P'(t) = n \sum_{i=0}^n P_i [B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)] = n \sum_{i=0}^n \Delta P_i B_{i,n-1}(t)$ ，其中  $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$  所以当

$t=0$ 时， $P'(0) = n(P_1 - P_0)$ ，当  $t=1$ 时， $P'(1) = n(P_n - P_{n-1})$ ，这说明 Bézier 曲线的起点和终点处的切线方向和特征多边形的第一条边及最后一条边的走向一致。

c 二阶导矢

$$P''(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i) B_{i,n-2}(t)$$

当  $t=0$ 时， $P''(0) = n(n-1)(P_2 - 2P_1 + P_0)$ ，

当  $t=1$ 时， $P''(1) = n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2})$ 。

上式表明：2 阶导矢只与相邻的 3 个顶点有关，事实上， $r$  阶导矢只与  $(r+1)$  个相邻点有关，与更远点无关。

将  $P'(0)$ ， $P''(0)$  及  $P'(1)$ ， $P''(1)$  代入曲率公式  $\kappa(t) = \frac{|P'(t) \times P''(t)|}{|P'(t)|^3}$ ，可以得到 Bézier

曲线在端点的曲率分别为：

$$\kappa(0) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{|(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_1)|}{|P_1 - P_0|^3}$$

$$\kappa(1) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{|(P_{n-1} - P_{n-2}) \times (P_n - P_{n-1})|}{|P_n - P_{n-1}|^3}$$

d  $k$  阶导函数的差分表示

$n$  次 Bézier 曲线的  $k$  阶导数可用差分公式为：

$$P^k(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k P_i B_{i,n-k}(t) \quad t \in [0,1]$$

其中高阶向前差分矢量由低阶向前差分矢量递推地定义：

$$\Delta^k P_i = \Delta^{k-1} P_{i+1} - \Delta^{k-1} P_i$$

例如：

$$\Delta^0 P_i = P_i$$

$$\Delta^1 P_i = \Delta^0 P_{i+1} - \Delta^0 P_i = P_{i+1} - P_i$$

$$\Delta^2 P_i = \Delta^1 P_{i+1} - \Delta^1 P_i = P_{i+2} - 2P_{i+1} + P_i$$

(2) 对称性

由控制顶点  $P_i^* = P_{n-i}, (i=0,1,\dots,n)$ , 构造出的新 Bézier 曲线, 与原 Bézier 曲线形状相同, 走向相反。因为:

$$C^*(t) = \sum_{i=0}^n P_i^* B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_{n-i} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_{n-i} B_{n-i,n}(1-t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(1-t), t \in [0,1]$$

这个性质说明 Bézier 曲线在起点处有什么几何性质, 在终点处也有相同的性质。

### (3) 凸包性

由于  $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \equiv 1$ , 且  $0 \leq B_{i,n}(t) \leq 1 (0 \leq t \leq 1, i=0,1,\dots,n)$ , 这一结果说明当  $t$  在  $[0, 1]$  区间变化时, 对某一个  $t$  值,  $P(t)$  是特征多边形各项顶点  $P_i$  的加权平均, 权因子依次是  $B_{i,n}$ 。在几何图形上, 意味着 Bézier 曲线  $P(t)$  在  $t \in [0, 1]$  中各点是控制点  $P_i$  的凸线形组合, 即曲线落在  $P_i$  构成的凸包之中, 如图 2.2 所示。

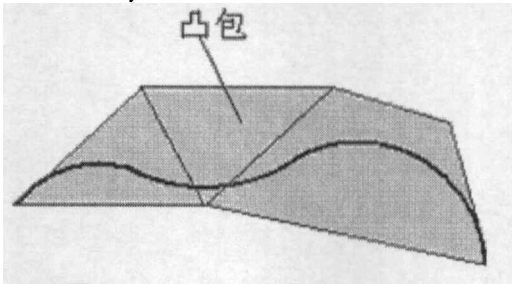


图 2.2 Bézier 曲线凸包性

### (4) 几何不变性。

这是指某些几何特性不随坐标变换而变化的特性。Bézier 曲线的位置与形状与其特征多边形顶点  $P_i (i=0, 1, \dots, n)$  的位置有关, 它不依赖坐标系的选择, 即有:

$$\sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}\left(\frac{u-a}{b-a}\right) \quad (\text{参变量 } u \text{ 是 } t \text{ 的置换})$$

### (5) 变差缩减性。

若 Bézier 曲线的特征多边形  $P_0 P_1 \dots P_n$  是一个平面图形, 则平面内任意直线与  $P(t)$  的交点个数不多于该直线与其特征多边形的交点个数, 这一性质叫变差缩减性质。此性质反映了 Bézier 曲线比其特征多边形的波动小, 也就是说 Bézier 曲线比特征多边形的折线更光滑。

### (6) 仿射不变性

对于任意的仿射变换  $A$ :

$$A([P(t)]) = A\left\{\sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t)\right\} = \sum A[P_i] B_{i,n}(t)$$

即在仿射变换下,  $P(t)$  的形式不变。

## 2.2 空间曲线上的 Frenet 标架<sup>[64]</sup>

即在仿射变换下,  $P(t)$  的形式不变。

## 2.2 空间曲线上的 Frenet 标架<sup>[64]</sup>

给定  $\Gamma: r = r(s)$  为一  $C^3$  类曲线, 其中  $s$  是曲线  $\Gamma$  的自然参数。令

$$\alpha(s) = \dot{r}(s) \quad (\text{单位切向量}).$$

显然  $\ddot{r}(s) \perp \dot{r}(s)$ 。设  $\ddot{r}(s) \neq 0$ 。令

$$\beta(s) = \frac{\ddot{r}(s)}{|\ddot{r}(s)|}.$$

则称  $\beta(s)$  为曲线  $\Gamma$  在点  $s$  处的主法向量 (单位向量)。单位向量  $\gamma(s) = \alpha(s) \times \beta(s)$  为曲线  $\Gamma$  在点  $s$  处的副法向量。 $\alpha(s)$ 、 $\beta(s)$  和  $\gamma(s)$  构成一副标架, 称为曲线  $\Gamma$  上 Frenet (伏雷内) 标架, 记作  $[r(s): \alpha(s), \beta(s), \gamma(s)]$ 。

基本向量  $\alpha(s)$ 、 $\beta(s)$  和  $\gamma(s)$  的计算

给定曲线  $\Gamma: r = r(t)$  (一般参数表示), 它可以写成

$$r = r(s(t))$$

于是

$$r''(t) = \ddot{r}(s) (s'(t))^2 + \dot{r}(s) s''(t), \quad r'(t) = \dot{r}(s) s'(t),$$

因此  $\dot{r}(s)$  与  $r'(t)$  共线,  $r''$ 、 $\dot{r}(s)$  和  $\ddot{r}(s)$  共面 (都在  $t$  点的密切平面上)。所以

$$\alpha = \frac{r'}{|r'|}, \quad \gamma = \frac{r' \times r''}{|r' \times r''|}, \quad \beta = \gamma \times \alpha = \frac{(r' \cdot r') r'' - (r' \cdot r'') r'}{|r'| |r' \times r''|}$$

定义 2.2.1 对于曲线  $\Gamma: r = r(s)$ , 称  $\kappa(s) = |\ddot{r}(s)|$  为曲线  $\Gamma$  在  $s$  点的曲率, 当

$\kappa(s) \neq 0$  时,  $\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$  称为曲线  $\Gamma$  在  $s$  点的曲率半径。

定理 2.2.1 对用一般参数  $s$  表示的曲线  $\Gamma: r = r(s)$ , 曲率

$$\kappa = \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}.$$

设给定空间曲线  $\Gamma: r = r(s)$ 。副法向量  $\gamma(s) = \alpha(s) \times \beta(s)$ 。则

$$\dot{\gamma}(s) = \dot{\alpha}(s) \times \beta(s) + \alpha(s) \times \dot{\beta}(s) = \kappa(s) \beta(s) \times \beta(s) + \alpha(s) \times \dot{\beta}(s) = \alpha(s) \times \dot{\beta}(s)$$

于是  $\dot{\gamma}(s) \perp \alpha(s)$ 。又  $\dot{\gamma}(s) \perp \gamma(s)$ , 所以  $\dot{\gamma} \parallel \beta$ 。

定义 2.2.2 对于曲线  $\Gamma: r = r(s)$ , 设  $\ddot{r}(s) \neq 0$ 。则由  $\dot{\gamma}(s) = -\tau(s) \beta(s)$  所确定

的函数  $\tau(s)$  称为曲线  $\Gamma$  在点  $s$  的挠率。当  $\ddot{r}(s) = 0$  时, 规定  $\tau(s) = 0$ 。对用一般参

数  $t$  表示的曲线  $\Gamma: r = r(t)$ , 挠率

$$\tau = \frac{(r', r'', r''')}{(r' \times r'')^2}.$$

定理 (空间曲线的 Frenet 公式)

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = k\beta \\ \dot{\beta} = -k\alpha + \tau\gamma \\ \dot{\gamma} = -\tau\beta \end{cases}$$

该定理可用  $\dot{\beta}$  表示成  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  的线形组合，然后分别与  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  做内积求得。

### 2.3 本章小结

由于 Bézier 曲线方面的知识是本文的基础，如后面的 PH 曲线以及用 PH 曲线逼近 Bézier 曲线等都要用到 Bézier 曲线方面的知识，所以本章介绍了 Bézier 曲线的定义和一些性质。另外在后面的章节还要用到微分几何方面的一些方法和知识，所以在本章也一并做了个简单的介绍。

### 第三章 PH 曲线

#### 3.1 PH 曲线基本知识<sup>[65]</sup>

定义 3.1. 对一多项式参数曲线  $p(t) = (x(t), y(t))$ ，如果存在另一多项式  $\sigma(t)$ ，使得  $x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$ ，则称  $p(t)$  为 PH 曲线。

根据这一定义，可以推出 PH 曲线的如下定理：

定理 3.1<sup>[1]</sup> 平面参数曲线  $p(t) = (x(t), y(t))$  是 PH 曲线的充要条件为

$$x'(t) = w(t)[u^2(t) - v^2(t)] \quad (1)$$

和

$$y'(t) = 2w(t)u(t)v(t) \quad (2)$$

其中， $w(t), u(t)$  和  $v(t)$  分别为非零的实多项式，且  $u(t), v(t)$  不同时为常数， $(u(t), v(t)) = 1$ ， $w(t)$  为首项系数为 1 的多项式。

推论 3.1 PH 曲线必可表示为：

$$r(t) = (x(t), y(t)) = \left( \int w(t)(u^2(t) - v^2(t))dt, \int 2w(t)u(t)v(t)dt \right)$$

定理 3.2 由式(1)、(2)定义的 PH 曲线的次数为  $\lambda + 2\mu + 1$ ，其中

$$\lambda = \deg(w(t)), \mu = \max\{\deg(u(t)), \deg(v(t))\}$$

定理 3.3  $n$  次 PH 曲线有  $n+3$  个自由度

平面上的 PH 曲线也可以用复数表示，有时反而显得很方便。对于复平面中的奇数次 Bézier 曲线

$$P(t) = \sum_{j=0}^{2n+1} p_j B_j^{2n+1}(t), p_j = p_{xj} + ip_{yj},$$

若

$$P'(t) = \left( \sum_{j=0}^n \omega_j B_j^n(t) \right)^2, \omega_j = \omega_{xj} + i\omega_{yj}$$

则  $P(t)$  为 PH 曲线。

定理 3.4 具有  $2n+1$  次的 PH 曲线  $P(t)$  的参数化速率可表示为：

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{2n} \omega_k^* B_k^{2n}(t),$$

其中，

$$\omega_k^* = \sum_{i=\max(0,k-n)}^{\min(p,k)} \frac{(\omega_{xi}\omega_{xk-i}\omega_{yi}\omega_{yk-i})C_n^i C_n^{k-i}}{C_{2n}^k}$$

定理 3.5  $P(t)$  的等距线可表示成有理多项式形式:

$$P_d(t) = (x_d(t), y_d(t)) = \left[ \frac{\sum_{l=0}^{4n+1} p_{xl}^{**} B_l^{4n+1}(t)}{\sigma(t)}, \frac{\sum_{l=0}^{4n+1} p_{yl}^{**} B_l^{4n+1}(t)}{\sigma(t)} \right],$$

其中,  $d$  为等距距离,  $\Delta$  表示差分,

$$p_{xl}^{**} = \sum_{k=\max(0,l-2n-1)}^{\min(2,pl)} ((p_{xl-k}\omega_k^* \mp (2n+1)\Delta p_{yk}d)C_{2n}^k C_{2n+1}^{l-k}) / C_{4n+1}^k$$

$$p_{yl}^{**} = \sum_{k=\max(0,l-2n-1)}^{\min(2,pl)} ((p_{yl-k}\omega_k^* \pm (2n+1)\Delta p_{xk}d)C_{2n}^k C_{2n+1}^{l-k}) / C_{4n+1}^k$$

## 3.2 三次 PH 曲线

### 3.2.1 三次 PH 曲线的定义

上面讨论了平面参数曲线  $p(t)=(x(t),y(t))$  是 PH 曲线的充要条件,得到了(1)式和(2)式,在通常情况下为了使得曲线没有奇点,取  $w(t)=1$ ,然后将其中  $u(t),v(t)$  用 Bézier 形式表示。在求三次 PH 曲线时,令

$$u(t)=u_0b_{0,1}(t)+u_1b_{1,1}(t), v(t)=v_0b_{0,1}(t)+v_1b_{1,1}(t),$$

将它们代入(1),(2)可得三次 PH Bézier 曲线的控制顶点的关系<sup>[3]</sup>:

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0) \\ p_2 = p_1 + \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + v_0u_1) \\ p_3 = p_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1) \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $p_0, p_1, p_2$  和  $p_3$  为三次 PH Bézier 曲线的控制顶点。

由(3)式可以得到如下定理:

定理 3.6<sup>[1]</sup> 三次 Bézier 曲线  $p(t)=p_0b_{0,3}(t)+p_1b_{1,3}(t)+p_2b_{2,3}(t)+p_3b_{3,3}(t)$  为

$w(t)=1$  时的 PH Bézier 曲线的充要条件为  $L_1^2=L_0L_2$ , 且  $\angle p_0p_1p_2=\angle p_1p_2p_3$ , 其中

$L_0$ ,  $L_1$  和  $L_2$  为控制多边形的边长。

### 3.2.2 三次 PH 曲线的性质<sup>[65]</sup>

三次 PH 曲线具有以下性质：

性质 1. 三次 PH 曲线的曲率为

$$\kappa(t) = \frac{2(u(t)v'(t) - u'(t)v(t))}{(u^2(t) + v^2(t))^2}。$$

性质 2. 三次 PH 曲线没有实拐点。

性质 3. 三次 PH 曲线的参数速率为

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^2 \sigma_i B_i^2(t)。$$

其中

$$\sigma_0 = u_0^2 + v_0^2, \sigma_1 = u_0 u_1 + v_0 v_1, \sigma_2 = u_1^2 + v_1^2$$

性质 4. 三次 PH 曲线的弧长可表示为

$$s(t) = \sum_{k=0}^3 s_k B_k^3(t)$$

其中

$$s_0 = 0, s_k = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j, k = 1, 2, 3.$$

性质 5 三次 PH 曲线的等距线可表示为

$$r_d(t) = \frac{\sum_{i=0}^5 \omega_i Q_i B_i^5(t)}{\sum_{i=0}^5 \omega_i B_i^5(t)}, 0 \leq t \leq 1$$

其中

$$\begin{aligned} Q_0 &= P_0 + \frac{3d}{\sigma_0} T \cdot \Delta P_0, Q_1 = \frac{2\sigma_1 P_0 + 3\sigma_0 P_1}{2\sigma_1 + 3\sigma_0} + \frac{15d}{2\sigma_1 + 3\sigma_0} T \cdot \frac{2\Delta P_1 + 3\Delta P_0}{5} \\ Q_2 &= \frac{\sigma_2 P_0 + 6\sigma_1 P_1 + 3\sigma_0 P_2}{\sigma_2 + 6\sigma_1 + 3\sigma_0} + \frac{30d}{\sigma_2 + 6\sigma_1 + 3\sigma_0} T \cdot \frac{\Delta P_2 + 6\Delta P_1 + 3\Delta P_0}{10} \\ Q_3 &= \frac{3\sigma_2 P_1 + 6\sigma_1 P_2 + \sigma_0 P_3}{3\sigma_2 + 6\sigma_1 + \sigma_0} + \frac{30d}{3\sigma_2 + 6\sigma_1 + \sigma_0} T \cdot \frac{3\Delta P_2 + 6\Delta P_1 + \Delta P_0}{10} \\ Q_4 &= \frac{3\sigma_2 P_2 + 2\sigma_1 P_3}{3\sigma_2 + 2\sigma_1} + \frac{15d}{3\sigma_2 + 2\sigma_1} T \cdot \frac{2\Delta P_2 + 3\Delta P_1}{5}, Q_5 = P_3 + \frac{3d}{\sigma_2} T \cdot \Delta P_2 \end{aligned}$$



$d$  为等距距离,  $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i, i = 0, 1, 2, 3, T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  为旋转矩阵。

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sigma_0, \omega_1 = \frac{1}{5}(2\sigma_1 + 3\sigma_0), \omega_2 = \frac{1}{10}(\sigma_2 + 6\sigma_1 + 3\sigma_0), \\ \omega_3 &= \frac{1}{10}(3\sigma_2 + 6\sigma_1 + \sigma_0), \omega_4 = \frac{1}{5}(3\sigma_2 + 2\sigma_1), \omega_5 = \sigma_2 \end{aligned}$$

性质 6 三次 PH 曲线可以用几何参数来表示其等距线, 可表示为以下形式:

$$r_d(t) = \sum_{j=0}^3 P_j B_j^3(t) + d \frac{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\alpha_1 B_0^2(t) + \alpha_2 B_1^2(t) + \alpha_3 B_2^2(t))}{\|\alpha_1\| B_0^2(t) - \sqrt{\|\alpha_1\| \cdot \|\alpha_3\|} \cos \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle B_1^2(t) + \|\alpha_3\| B_2^2(t)}$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  表示向量  $P_1 - P_0, P_2 - P_1, P_3 - P_2$ ,  $\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle$  表示边向量  $\alpha_1, \alpha_3$  的夹角。

### 3.2.3 构造三次 PH 曲线的几何方法<sup>[66]</sup>

由定理 2.6 的内容我们就可以通过构造控制多边形的方法来构造三次 PH 曲线。

给定始末点  $p_0, p_3$  及其对应切向量与弦线的夹角  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$  (如图 3-1 所示)。很显然  $\alpha = 0, \beta = 0$ , 以及  $\alpha \geq \pi, \beta \geq \pi$  条件中有一个成立的话均不能构造出三次 PH 曲线, 所以  $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ , 下面分几种情形讨论。

1、当  $0 < \alpha + \beta < \pi$  时 (如图 3-2 所示)。

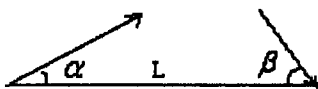


图 3-1

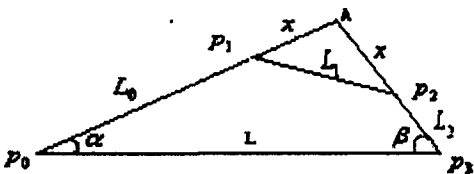


图 3-2

由平面几何知识以及题目已知的条件可得:

$$\frac{\sin \beta}{L_0 + x} = \frac{\sin \alpha}{L_2 + x} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{L} \quad (4)$$

$$\frac{L_1}{2x} = \cos \frac{(\alpha + \beta)}{2} \quad (5)$$

$$L_2^2 = L_1 L_3 \quad (6)$$

由(4), (5)可得

$$L_0 = \frac{L \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} - x \quad (7)$$

$$L_2 = \frac{L \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - x \quad (8)$$

$$L_1 = 2x \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (9)$$

(7), (8), (9)代入(6)可得

$$\left( \frac{L \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - x \right) \left( \frac{L \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} - x \right) = 4 \cos^2 \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) x^2 \quad (10)$$

由(10)式可知:

$$x = \frac{2L \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) [(\sin \alpha + \sin \beta) + \sqrt{(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + 4 \sin \alpha \sin \beta (1 + 2 \cos(\alpha + \beta))}]}$$

其中负根已舍去。

把  $x$  代入(7) (8) (9)即可求得:

$$L_0 = \frac{L \sin \beta [\sin \beta - \sin \alpha + \sqrt{(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + 4 \sin \alpha \sin \beta (1 + 2 \cos(\alpha + \beta))}]}{\sin(\alpha + \beta) [(\sin \alpha + \sin \beta) + \sqrt{(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + 4 \sin \alpha \sin \beta (1 + 2 \cos(\alpha + \beta))}]}$$

$$L_1 = \frac{2L \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) [(\sin \alpha + \sin \beta) + \sqrt{(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + 4 \sin \alpha \sin \beta (1 + 2 \cos(\alpha + \beta))}]}$$

$$L_2 = \frac{L \sin \alpha [\sin \alpha - \sin \beta + \sqrt{(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + 4 \sin \alpha \sin \beta (1 + 2 \cos(\alpha + \beta))}]}{\sin(\alpha + \beta) [(\sin \alpha + \sin \beta) + \sqrt{(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + 4 \sin \alpha \sin \beta (1 + 2 \cos(\alpha + \beta))}]}$$

2、当  $\alpha + \beta = \pi$  时, 如图 3-3 所示。

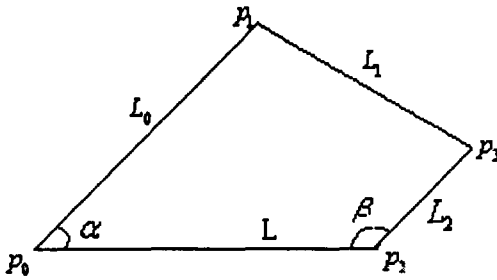


图 3-3

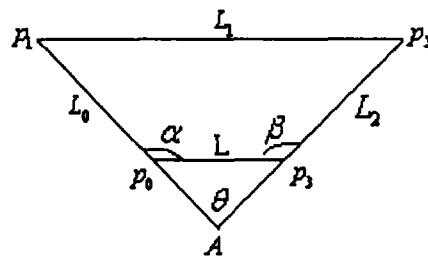


图 3-4

同样我们可以列出下列等式:

$$L_0 = L \cos \alpha + L_2; \quad L_1 = L \sin \alpha; \quad L_1^2 = L_0 L_2;$$

由上面三个式子可解得:

$$L_0 = \frac{L \cos \alpha + L \sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}}{2}; \quad L_1 = L \sin \alpha; \quad L_2 = \frac{-L \cos \alpha + L \sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}}{2}$$

3、当  $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$  时，如图 3-4 所示。

由图 3-4 我们可以看出当  $\theta \geq \frac{\pi}{3}$ ，即  $\alpha + \beta \geq \frac{4\pi}{3}$  时，由大角对应大边原理，

$L_1 \geq AP_1 > L_0$ ;  $L_1 \geq AP_2 > L_2$ ;  $L_1^2 = L_0 L_2$  不能成立，此时不能构造出满足条件的三次 PH 曲线。

当  $\theta < \frac{\pi}{3}$ ，即  $\pi < \alpha + \beta < \frac{4\pi}{3}$  时，由图中图形关系及平面几何知识可得：

$$|\overline{AP_0}| = \frac{L \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta - \pi)}; \quad |\overline{AP_3}| = \frac{L \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta - \pi)};$$

设  $|\overline{AP_1}| = |\overline{AP_2}| = x$ ，则有：

$$(x - |\overline{AP_0}|)(x - |\overline{AP_3}|) = 4x^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

可解得：

$$x = \frac{L(\sin \alpha + \sin \beta) + L\sqrt{(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + 4(2 \cos(\alpha + \beta) + 1) \sin \alpha \sin \beta}}{2(2 \cos(\alpha + \beta) + 1) \sin(\alpha + \beta)}$$

由此可得：

$$L_0 = \frac{L[(\sin \alpha - (4 \cos(\alpha + \beta) + 1) \sin \beta) + L\sqrt{(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + 4(2 \cos(\alpha + \beta) + 1) \sin \alpha \sin \beta}]}{2(2 \cos(\alpha + \beta) + 1) \sin(\alpha + \beta)}$$

$$L_1 = -\frac{L(\sin \alpha + \sin \beta) + L\sqrt{(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + 4(2 \cos(\alpha + \beta) + 1) \sin \alpha \sin \beta}}{2(2 \cos(\alpha + \beta) + 1) \sin(\frac{\alpha + \beta}{2})}$$

$$L_2 = \frac{L[(\sin \beta - (4 \cos(\alpha + \beta) + 1) \sin \alpha) + L\sqrt{(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + 4(2 \cos(\alpha + \beta) + 1) \sin \alpha \sin \beta}]}{2(2 \cos(\alpha + \beta) + 1) \sin(\alpha + \beta)}$$

### 3.3 五次 PH 曲线<sup>[67]</sup>

#### 3.3.1 五次 PH 曲线的结构

因为三次 PH 曲线没有拐点，在实际应用中受到很多限制。在实际应用中经常用到五次 PH 曲线。

对应于五次 PH 曲线有两种情况：(1)  $\lambda = 0, \mu = 2$ ; (2)  $\lambda = 2, \mu = 1$ 。

第一种情况时  $\omega(t)=1$ 。令  $f(t)=\sum_{i=0}^2 f_i B_i^2(t)$ ,  $f=(u,v)$ 。则 PH 曲线对应的 Bézier 点为

$$\begin{cases} P_0=(x_0,y_0), P_1=P_0+(u_0^2-v_0^2, 2u_0v_0)/5 \\ P_2=P_1+(u_0u_1-v_0v_1, u_0v_1+u_1v_0)/5 \\ P_3=P_2+2(u_1^2-v_1^2, 2u_1v_1)/15+(u_0u_2-v_0v_2, u_0v_2+u_2v_0)/15 \\ P_4=P_3+(u_1u_2-v_1v_2, u_1v_2+u_2v_1)/5 \\ P_5=P_4+(u_2^2-v_2^2, 2u_2v_2)/5 \end{cases}$$

其中,  $P_0$  为任意点。由于  $\omega(t)=1$ , 所以  $r'(t)$  处处不为零, 从而曲线没有尖点。

第二种情况时,  $u(t), v(t)$  为一次的,  $\omega(t)$  为二次的, 此时一般有两个尖点。

若  $\omega(t)$  的两个根为  $\xi_1, \xi_2$ ,  $r(t)$  在  $\xi_1, \xi_2$  处导矢为零, 对应于两个尖点。此时

$$\omega_0=\xi_1\xi_2, \omega_1=[(\xi_1-1)\xi_2+(\xi_2-1)\xi_1]/2, \omega_2=(\xi_1-1)(\xi_2-1)。$$

下面分析第一种情况时的几何特征。

定理 3.7 设  $r(t)$  为平面五次 Bézier 曲线,  $L_j(j=1,2,3,4,5)$  为其控制多边形边长,  $\psi_j(j=1,2,3,4)$  为向量  $P_jP_{j-1}$  到  $P_jP_{j+1}$  的转角, 则  $r(t)$  为 PH 曲线的充要条件为:

$$L_1/L_5=(L_2/L_4)^2, \quad \psi_1+\psi_4=\psi_2+\psi_3$$

### 3.3.2 五次 PH 曲线的性质

五次 PH 曲线有以下性质:

性质 1. 五次 PH 曲线的曲率为  $\kappa(t)=\frac{2(u(t)v'(t)-u'(t)v(t))}{(u^2(t)+v^2(t))^2}$

性质 2. 五次 PH 曲线的弧长可表示为

$$S(t)=\sum_{i=0}^5 s_i B_i^5(t)$$

其中,  $s_0=0$ ,  $s_i=\frac{1}{5}\sum_{j=0}^{i-1}\sigma_j$ ,  $i=1,2,3,4,5$

PH 曲线还可以用复数的形式进行表示。如果我们用复数  $x+iy$  表示平面上的点  $(x,y)$ , 则平面参数曲线  $r(t)=(x(t),y(t))$  可被看作实参数  $t$  的复函数

$z(t) = x(t) + iy(t)$ 。此时若有  $\omega(t) = u(t) + iv(t)$ ，满足  $\gcd(u, v) = 1$ ，则它在保形映射  $z \rightarrow z^2$  下的象  $\omega^2(t) = u^2(t) - v^2(t) + i2u(t)v(t)$ ，它的实部和虚部正好满足 *Pythagorean* 三角的关系。因此，在复数表示下，我们把速端曲线具有以下形式的参数曲线称之为 PH 曲线

$$r'(t) = z^2(t)$$

三次 PH 曲线在复数形式表达式中我们可以得到更紧凑的表达形式，记  $P_k = x_k + iy_k$ ， $k=1, 2, 3$ ， $\omega_i = u_i + v_i, i=0, 1$ 。有：

$$P_1 = P_0 + \omega_0^2/3, P_2 = P_1 + \omega_0\omega_1/3, P_3 = P_2 + \omega_1^2/3$$

同样对于五次 PH 曲线我们也可以用复数表示，记  $P_k = x_k + iy_k$ ， $k=1, 2, 3, 4, 5$ ，

$\omega_i = u_i + v_i, i=0, 1, 2$ ，我们可以得到：

$$\begin{cases} P_1 = P_0 + \omega_0^2/5 \\ P_2 = P_1 + \omega_0\omega_1/5 \\ P_3 = P_2 + (2\omega_1^2 + \omega_0\omega_2)/15 \\ P_4 = P_3 + \omega_1\omega_2/5 \\ P_5 = P_4 + \omega_2^2/5 \end{cases}$$

### 3.4 三次PH曲线偶<sup>[68, 69]</sup>

#### 3.4.1 三次PH曲线偶的 $C'$ Hermite插值

在计算机辅助几何设计系统中，由于几何拼接和数据插值的需要，往往提出曲线  $GC'$  或  $C'$  ( $i=0, 1$ ) Hermite插值(以下简称H插值)问题。即给定曲线两端点处位矢  $R_0$ 、 $R_1$  和导矢  $T_0$ 、 $T_1$  等，来求一条参数插值曲线满足条件。我们通常可用三次参数曲线来进行  $C'$  H插值。因PH曲线具有上述优良性质及应用前景，用它进行H插值就显得更为必要了。PH曲线的最低次数为三次，但三次PH曲线恒凸，无法处理拐点。那么，是否存在其它形式的低次PH曲线满足给定的一阶连续Hermite插值条件呢？基于上述考虑，陈国栋、王国瑾采用复分析方法，构造了三次PH曲线偶来满足  $C'$  Hermite插值条件。此曲线可灵活处理拐点，克

服了一般三次PH曲线恒凸的缺陷，同时又无须Farouki方法中对曲线的高次要求，因而计算简单方便。下面用显式给出了相应的两条Bézier 曲线表示及其控制顶点的计算公式，以及曲线为PH曲线的充分条件。

设  $\Gamma: P(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t)$  为已适当参数化的平面多项式

曲线，其在复平面上的相应表示为  $Z(t) = \sum_{i=0}^n Z_i B_i^n(t)$ ，其中  $B_i^n(t)$  为  $n$  次 Bernstein

基， $z_i = x_i + iy_i$  是控制顶点  $P_i = (x_i, y_i)$  对应的复数表示。由文献[1]可知，若  $Z(t)$  为PH曲线，则此时曲线切矢需满足PH 条件：

$$Z'(t) = w(t)G^2(t) \tag{1}$$

其中  $w(t)$  和  $G(t)$  分别为实系数和复系数多项式(原文献[1]中对应于式(1) 的条件为实分析形式)。若取  $w(t) = 1$ ， $G(t) = a(1-t) + bt$ ，其中  $a, b$  为待定的复系数。则所得三次PH 曲线为最简单的PH曲线，此时

$$Z'(t) = (a(1-t) + bt)^2 \tag{2}$$

将式(2)展开， 并利用积分关系式：

$$\int C_k^n (1-t)^{n-k} t^k dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k+1}^{n+1} C_j^{n+1} (1-t)^{n+1-j} t^j + C \tag{3}$$

其中  $k = 0, 1, \dots, n$ ， 对式(2)积分可得：

$$Z(t) = \sum_{i=0}^3 Z_i B_i^3(t) \tag{4}$$

这里初始点  $R_0$  对应积分常数  $C$ ， 从而可求得曲线的控制顶点为：

$$(Z_0, Z_1, Z_2, Z_3) = (R_0, R_0 + \frac{a^2}{3}, R_0 + \frac{a^2}{3} + \frac{ab}{3}, R_0 + \frac{a^2}{3} + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{3}) \tag{5}$$

下面讨论一下如何构造满足  $C^1$  H插值条件的三次PH曲线偶。

给定两端点处的位矢  $R_0, R_1$  和切矢  $T_0, T_1$ ， 今用两条三次PH曲线：

$$Z_1(t) = \sum_{i=0}^3 Z_{1,i} B_i^3(t), \quad Z_2(t) = \sum_{i=0}^3 Z_{2,i} B_i^3(t) \tag{6}$$

来进行  $C^1$  H插值， 如图3-5所示：

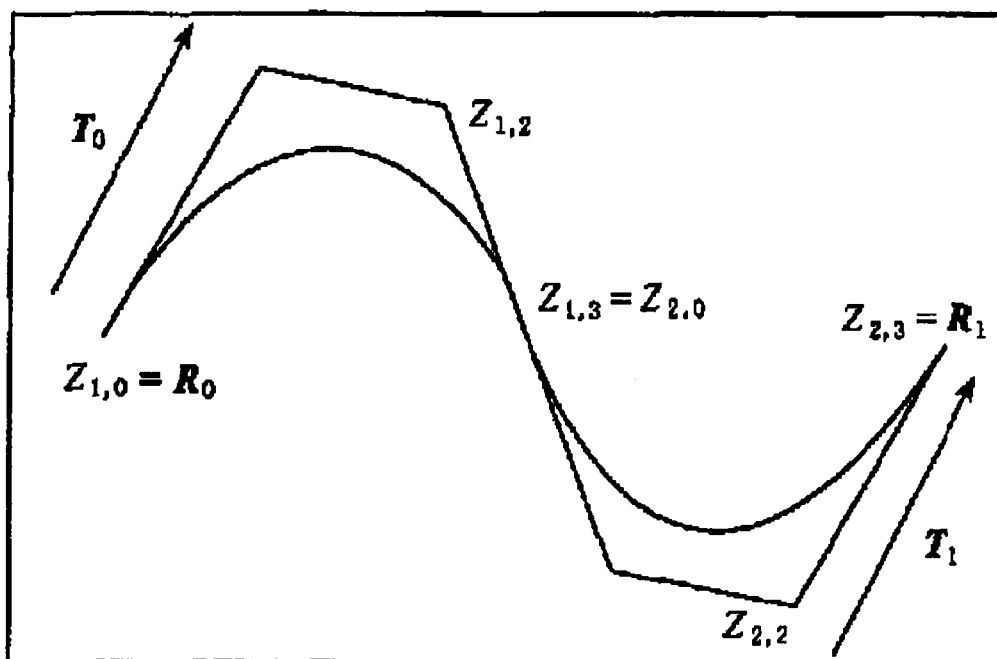


图3-5 三次PH 曲线偶的  $C^1$  Hermite 插值

由式(2)可设:

$$Z_1'(t) = (a(1-t) + bt)^2, \quad Z_2'(t) = (c(1-t) + dt)^2 \quad (7)$$

其中  $a, b, c, d$  为待定的复系数。进一步由式(4)知:

$$\begin{aligned} (Z_{1,0}, Z_{1,1}, Z_{1,2}, Z_{1,3}) &= (R_0, R_0 + \frac{a^2}{3}, R_0 + \frac{a^2}{3} + \frac{ab}{3}, R_0 + \frac{a^2}{3} + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{3}) \\ (Z_{2,3}, Z_{2,2}, Z_{2,1}, Z_{2,0}) &= (R_1, R_1 - \frac{d^2}{3}, R_1 - \frac{d^2}{3} - \frac{cd}{3}, R_1 - \frac{d^2}{3} - \frac{cd}{3} - \frac{d^2}{3}) \end{aligned} \quad (8)$$

由  $C^1$  H 端点插值条件及两条三次PH 曲线连接点处保持  $C^1$  连续的条件可得:

$$Z_{1,0} = R_0, \quad a^2 = T_0; \quad Z_{2,3} = R_1, \quad d^2 = T_1; \quad Z_{1,3} = Z_{2,0}, \quad b^2 = c^2; \quad (9)$$

由 (8) (9) 式可得:

$$\begin{aligned} Z_{1,0} &= R_0, \quad a = \pm \sqrt{T_0}; \quad Z_{2,3} = R_1; \quad d = \pm \sqrt{T_1}; \\ c &= \pm b; 2b^2 + ab + cd + \alpha = 0; \quad \alpha = (T_0 + T_1) + 3(R_1 - R_0); \end{aligned} \quad (10)$$

对于给定的端点及切向条件, 从式(8)中粗看, 似乎有16个解满足条件, 但由于PH曲线内在的特征及三次PH曲线偶的对称性, 实际上只有4个不同的解如下:

$$Z_{1,0} = R_0, \quad a = \sqrt{T_0}; \quad Z_{2,3} = R_1, \quad d = \sqrt{T_1};$$

$$b = \begin{cases} -\frac{1}{4}(\sqrt{T_0} + \sqrt{T_1} \pm \sqrt{(\sqrt{T_0} + \sqrt{T_1})^2 - 8\alpha}), & c=b; \\ -\frac{1}{4}(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1} \pm \sqrt{(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1})^2 - 8\alpha}), & c=-b; \end{cases} \quad (11)$$

对应于一组  $a, b, c, d$ , 相应地可求得一条满足  $C^1H$  插值条件的三次PH曲线偶。

在实际数值实验与图形观察中, 我们发现所得4条插值曲线中, 存在1条曲线能很好地满足几何设计要求, 可灵活处理拐点, 而其它插值曲线则可能存在尖点、圈点或明显不符合几何形状设计的要求。

Farouki和Neff提出用最小绝对旋转指标:

$$R_{abs} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 |\kappa(t)| \sigma(t) dt$$

来确认这个“好”的解。这里

$$\kappa(t) = 2 \frac{u(t)v'(t) - u'(t)v(t)}{\sigma^2(t)}$$

是曲率。另一种选择“好”的解的方法是采用最小弹性弯曲能量:

$$\varepsilon = \int_0^1 \kappa^2(t) \sigma(t) dt$$

但是, 这两种方法都需要构造出所有四个解, 然后计算出各自的相应量进行比较。

### 3.4.2 “好”的三次PH曲线偶的判定

利用“缺少逆平行切向”作为经典三次曲线与三次PH曲线偶一阶Hermite插值形状相似的依据, 对于“合理”的插值数据给出一个先验方法判定三次PH曲线偶的“好”的解, 而对于任意的Hermite数据, 由于问题比较复杂, 只给出一些初步的结果。

#### 3.4.2.1 缺少逆平行切向

根据  $b, c$  的符号, 记三次PH曲线偶  $C^1H$  Hermite插值的四个解为  $(+, +), (+, -), (-, +)$  和  $(-, -)$ 。如果用三次PH曲线偶  $C^1H$  Hermite插值曲线替代经典三次曲线, 会出现与五次PH插值曲线类似的问题。对于某些Hermite数据, 与经典三次曲线形状最接近的解, 不具有最小绝对旋转指标或弹性弯曲能量值, 即不是四个解当中“最好”的。另外, 同样与五次PH插值曲线类似, 对于某些Hermite数据, 在所得到的四个三次PH曲线偶  $C^1H$  Hermite插值解当中。有两个解具有相等的绝对旋转指标和弹性弯曲能量值, 这样, 就无法选择出“好”的解。所以我们需要找一个新的选择标准。我们仍然采用“缺少逆平行切向”的概念来明确惟一经典三次曲线与“好”的三次PH曲线偶  $C^1H$  Hermite插值解之间“形状



相似”的概念：

给定区间 $[0, 1]$ 上插值于给定Hermite数据的两条曲线 $r(t)$ 和 $s(t)$ ，如果不存在参数 $t^* \in [0, 1]$ ，使得 $r'(t^*) = -ks'(t^*)$ ，其中 $k$ 为正实数，则称曲线 $r(t)$ 和 $s(t)$ 在 $t \in [0, 1]$ 上缺少逆平行切向。与绝对旋转指标和弹性弯曲能量标准不同，缺少逆平行切向标准只构造“好”的插值曲线即可，是一个定性的标准，而前者是定量的标准，需要构造出所有四条插值曲线。

### 3.4.2.2 对于“合理”Hermite数据的插值解

这里给出的“合理”Hermite数据的特征包括了实际应用中出现的大多数情况。实际上，对于那些表明切向或参数速率突变的Hermite数据，不管是经典三次曲线还是三次PH曲线偶均不可能产生理想形状的插值曲线(即无结点、尖点或曲率变化极值)。对于固定的端点 $R_0=0$ ， $R_1=1$ ，我们对“合理”的端点切向 $T_0$ ， $T_1$ ，引用[70]中定义的区域D：

$$D=\{T \mid \operatorname{Re}(T)>0, |T|<3\}$$

对于一般的端点 $R_0$ ， $R_1$ ，区域D定义为：

$$D=\{T \mid \operatorname{Re}(\overline{TR^*})>0, |T|<3|R^*|\}$$

其中， $R^*=R_1-R_0$ 。对于这样的“合理”Hermite数据，与经典三次曲线缺少逆平行切向对于选择“好”的三次PH曲线偶 $C^1$ Hermite插值解来说是一个合理的前提。因为对于这样的数据，我们能够保证传统三次曲线总是有好的切向变量。如果端点切矢 $T_0$ ， $T_1$ 位于D内，则经典三次插值曲线的速端曲线 $c'(t)$ 对于所有 $t \in [0, 1]$ 完全位于D内。

定理 3.8 如果端点切矢 $T_0$ ， $T_1$ 位于D内，则 $(+, +)$ 三次PH曲线偶 $C^1$ Hermite插值解的速端曲线 $z'(t)$ 对于所有 $t \in [0, 1]$ 完全位于D内。

证明  $(+, +)$ 三次PH曲线偶 $C^1$ Hermite插值解的速端曲线是

$$z_1'(t)=[a(1-t)+bt]^2$$

与

$$z_2'(t)=[c(1-t)+dt]^2$$

的拼接曲线，其中

$$a=\sqrt{T_0}; d=\sqrt{T_1}; c=b=-\frac{1}{4}(\sqrt{T_0}+\sqrt{T_1}-\sqrt{(\sqrt{T_0}+\sqrt{T_1})^2-8\alpha}), \quad \alpha=(T_0+T_1)-3。$$

下面证明 $z_1'(t)$ 、 $z_2'(t)$ 位于开集

$$\sqrt{D} = \{ z | \operatorname{Re}(z) > |\operatorname{Im}(z)|, |z| < \sqrt{3} \}$$

内。给定复数集合A和B，由复集合的Minkowski几何代数知识可知，A和B的Minkowski和为

$$A \oplus B = \{ a + b | a \in A, b \in B \},$$

其Minkowski积为

$$A \otimes B = \{ a \times b | a \in A, b \in B \}.$$

对于给定的双变量函数 $f(a, b)$ ，其隐式集合

$$A f B = \{ f(a, b) | a \in A, b \in B \}$$

是Minkowski和与积的推广。对于任意 $a, d \in \sqrt{D}$ ，因为

$$b = \frac{-(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 8\alpha}}{4} = \frac{-(a+d) + \sqrt{24 - 7a^2 - 7d^2 + 2ad}}{4} \equiv f(a, d)$$

所以b在区域

$$\sqrt{D} f \sqrt{D} = \{ f(z_3, z_4) | z_3 \in \sqrt{D}, z_4 \in \sqrt{D} \}$$

中，由[71]可得以上集合包含于 $\sqrt{D}$ 。又因为 $c = b$ ，所以

$$c \in \sqrt{D} f \sqrt{D} \subset \sqrt{D}, z'_1(t) \subset D, z'_2(t) \subset D.$$

定理1表明(+, +)三次曲线偶 $C^1$  Hermite插值解为“好”的插值解。因为区域D位于复平面的右半平面，所以区域D内不存在这样的两点使得经典三次曲线与三次PH曲线偶之间存在逆平行切向。

**推论1** 如果切矢 $T_0, T_1$ 位于区域D内，则(+, +)三次曲线偶 $C^1$  Hermite插值解相对于惟一经典三次插值曲线总是不存在逆平行切向。另一方面，“合理”Hermite数据使得经典三次曲线和(+, +)三次PH曲线偶都有好的形状性质。因为二者的速端曲线都位于D内，所以它们的实部都是正的。因此，二者一定是正则曲线，它们的 $x$ 分量是严格的递增函数。因此有以下结论：

**推论2** 如果切矢 $T_0, T_1$ 位于区域D内，则经典三次曲线和(+, +)三次PH曲线偶都不存在自交。

#### 3.4.2.3 速端弯曲数

如果放松“合理”Hermite数据这一要求，即对于任意的Hermite数据是否存在惟一的三次曲线偶 $C^1$  Hermite插值解对于经典三次曲线不存在逆平行切向？下面我们利用速端弯曲数来讨论这个问题。

插值于端点 $R(0)=0, R(1)=1$ 以及切矢 $T_0, T_1$ 的经典三次曲线

$$c(t) = \sum_{i=0}^3 c_i B_i^3(t)$$

的控制顶点为  $c_0 = 0, c_1 = \frac{T_0}{3}, c_2 = 1 - \frac{T_1}{3}, c_3 = 1$ , 其速端曲线  $c'(t)$  是一条二次曲线:

$$c'(t) = T_0(1-t)^2 + 2(3-T_0-T_1)(1-t)t + T_1t^2$$

所以  $c'(t)$  的控制多边形是一个重心在  $1=R(1)-R(0)$  的三角形。插值于相同数据的

三次PH曲线偶的速端曲线  $z'_1(t)$  是:

$$z'_1(t) = [a(1-t) + bt]^2, t \in [0, 1]$$

与

$$z'_2(t) = [c(1-t) + dt]^2, t \in [0, 1]$$

的拼接曲线。其中, 系数  $a, b, c, d$  由式(6)给出。虽然有四个不同的插值解, 但是它们的速端曲线有相同的两 endpoints, 即

$$z'_1(0) = T_0, z'_2(1) = T_1,$$

且

$$z'_1(0) = c'(0), \quad z'_2(1) = c'(1)。$$

这样连接两条速端曲线得到闭曲线  $\gamma(t)$  :

$$\gamma(t) = \begin{cases} z'_1(t), t \in [0, 1] \\ z'_2(2-t), t \in [1, 2], t \in [0, 3] \\ c'(3-t), t \in [2, 3] \end{cases}$$

我们将利用  $\gamma(t)$  关于原点的弯曲数来比较经典三次曲线和三次 PH 曲线偶。一

条复值曲线  $\gamma(t)$  在  $t \in [a, b]$  上关于原点的弯曲数  $W$  有如下定义:

$$W = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$$

因为  $\gamma(t)$  为分段曲线, 所以有

$$W = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{z'_1(t)}{z'_1(t)} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_1^2 \frac{z'_2(t)}{z'_2(t)} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_2^3 \frac{c'_1(t)}{c'_1(t)} dt$$

所以,  $W$  与曲线  $z(t), c(t)$  的旋转数有如下关系:

$$W = R_z - R_c$$

其中

$$R_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \kappa_{z_1}(t) |z_1'(t)| dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \kappa_{z_2}(t) |z_2'(t)| dt, R_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \kappa_c(t) |c'(t)| dt$$

曲线  $\gamma(t)$  关于原点的弯曲数  $W$  的可能值为  $0, \pm 1, \pm 2$ 。

对于每一条三次 PH 曲线偶，我们构造相应的曲线  $\gamma(t)$ ，得到四个弯曲数  $W_{++}, W_{+-}, W_{-+}, W_{--}$ 。如果经典三次曲线的速端曲线  $c'(t)$  与负实轴有交点，则弯曲数  $W_{++}, W_{--}$  为奇数， $W_{+-}, W_{-+}$  为偶数。相反，如果  $c'(t)$  与负实轴无交点，则  $W_{++}, W_{--}$  为偶数， $W_{+-}, W_{-+}$  为奇数。由此，我们通过判断速端曲线  $c'(t)$  是否与负实轴有交点，就可以得到关于这些弯曲数的奇偶性。

**定理 2** 当  $W \neq 0$  时，三次 PH 曲线偶  $z(t)$  对于经典三次曲线  $c(t)$  存在逆平行切向。

证明与 [70] 中引理 2 类似。

### 3.5 本章小结

三次 PH 曲线作为次数最低的 PH 曲线，有着很多优点。但也有着不可避免的缺陷，那就是不能处理拐点。三次 PH 曲线偶继承了三次 PH 曲线的优点，又克服了它的一些缺点，在很多方面要优于三次 PH 曲线。五次 PH 曲线的次数比三次要高，同时它的自由度也高，五次 PH 曲线是次数最低的能处理拐点的 PH 曲线。本章主要介绍了 PH 曲线的定义和性质，三次 PH 曲线的构造，五次 PH 曲线的性质以及三次 PH 曲线偶的构造和“好”的三次 PH 曲线偶的判定。

## 第四章 平面 PH 曲线的应用

### 4.1 用三次PH曲线构造平面Bézier曲线的等距线<sup>[72]</sup>

等距曲线在工业领域有着广泛的应用，但在通常情况下，Bézier 曲线的等距线并不具有多项式表达形式，这与CAD/ CAM 系统不兼容。为得到具有多项式形式的表达式或为了克服“不兼容”这一问题，郑志浩、汪国昭采用了用PH曲线逼近Bézier曲线然后求其等距线的方法，取得了不错的效果。

#### 4.1.1 构造三次PH曲线的控制多边形

由于多边形的边是内在不变量，因此适合于计算机辅助几何设计。由第三章的定理，可根据给定的初始条件来构造三次PH 曲线的控制多边形。

构造方法1. 根据已知始点方向的单位切矢及弦长为 $L$  的初始条件，就可以构造一个三次PH曲线的控制多边形。

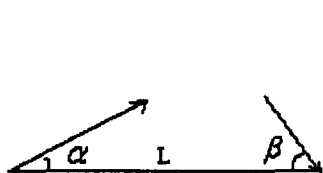


图4-1 给定的初始条件

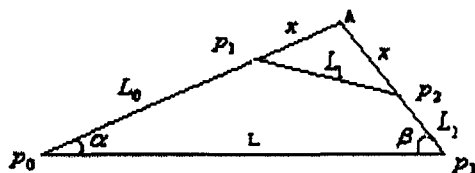


图4-2 构造出的PH 曲线的控制多边形

事实上，取  $L_0 = L_1 = L_2 = \frac{L}{2\cos\theta + 1}$ ，则由  $p_0 p_1 p_2 p_3$  所构成的控制多边形满足三次PH 曲线生成条件。

构造方法2. 给定首末端点的切矢方向和弦长 $L$ ，设  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$  为切向与弦的夹角（如图1所示），则可构造一个三次PH曲线的凸控制多边形。事实上，由于  $p_0 p_1 p_2 p_3$  构成的控制多边形所确定的 Bézier 曲线是三次 PH 曲线，得

$L_1^2 = L_0 L_2$ ，即有  $\frac{L_1}{L_0} = \frac{L_2}{L_1}$ 。建立以  $p_0 p_3$  为  $X$  轴，以  $p_0$  为原点的直角坐标系。

设  $p_1 p_2, p_2 p_3$  的斜率为  $k_1, k_2$ ，因有  $\angle p_0 p_2 p_1 = \angle p_2 p_3 p_1$ ，又设  $k_{p_0 p_2}, k_{p_1 p_3}$  分

别为  $p_0 p_2, p_1 p_3$  的斜率，进一步有  $\frac{k_{p_0 p_2} - k_1}{1 + k_{p_0 p_2} k_1} = \frac{k_{p_1 p_3} - k_2}{1 + k_{p_1 p_3} k_2}$ 。令  $\frac{\alpha - \beta}{2} = \gamma$ ，整

理得到关于  $L_0$  的一元二次方程  $pL_0^2 + qL_0 + r = 0$ 。其中，

$$p = (\sin\alpha - \tan\gamma\cos\alpha) [(\tan\beta - \tan\gamma) \times (\cos\alpha + \tan\beta\sin\alpha) - (1 + \tan\beta\tan\gamma) \times (\sin\alpha - \tan\beta\cos\alpha)]$$

$$q = L [ (\tan\gamma\cos\alpha - \sin\alpha) (2\tan\beta - \tan\gamma + \tan\gamma\tan^2\beta) \\ + (1 + \tan^2\gamma)(\tan\beta\cos\alpha - \sin\alpha) \tan\beta ] \\ r = -\tan^2\beta(1 + \tan^2\gamma) L^2 .$$

$L_0$  由方程  $pL_0^2 + qL_0 + r = 0$  解出，已提及

$$L_1 = \frac{-L_0\cos\gamma + \sqrt{L_0^2\cos^2\gamma - 4\cos\beta L_0(L_0\cos\alpha - L)}}{2\cos\beta} \\ L_2 = \frac{L_1^2}{L_0}$$

$L_1$ 、 $L_2$  可由上式解出。

构造方法3. 我们可以用第三章中3.2.3构造三次PH曲线的几何方法来构造PH曲线的控制多边形，然后计算出PH曲线。该方法计算简单，而且 $\alpha, \beta$ 的范围比上述方法要广， $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ 。

#### 4.1.2 用三次PH曲线逼近Bézier曲线

问题1 给定 $n$ 次Bézier曲线  $b(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ 。如何构造一三次PH 样条曲线来逼近它？

首先对  $n$  次 Bézier 曲线  $b(t)$  进行离散，即在参数区间  $[0, 1]$  加入  $N$  个节点

$t_1, t_2, \dots, t_N$ ，把整条曲线离散成  $N+1$  段  $n$  次 Bézier 曲线  $b^i(t) = \sum_{j=0}^n b_j^i B_j^n(t)$ ，其中  $b_j^i$

为第  $i$  段子曲线的第  $j$  个顶点，其算法可以用伪语言表示如下：

Input :  $b_0, \dots, b_n, N, t_1, t_2, \dots, t_N$

初值：  $b_0^{(0)} = b_0, \dots, b_n^{(0)} = b_n, t_0 = u_0 = 0$

for  $i = 1 : N + 1$

for  $j = 1 : n - 1$

$$u_i = \frac{t_i - t_{i-1}}{1 - \sum_{k=0}^{i-1} t_k};$$

$$b_0^{(i)} = b(u_{i-1}); b_n^{(i)} = b(u_i); b_j^i = \sum_{k=0}^j b_k^{(i-1)} C_j^k u_i^k (1 - u_i)^{j-k};$$

$$b_j^{(i)*} = \sum_{k=0}^{n-j} b_{k+j}^{(i-1)*} C_{n-j}^k u_i^k (1-u_i)^{n-j-k} ; b_0^{(i)*} = b(u_i) ; b_n^{(i)*} = b_n ;$$

next j

next i

Output :  $b_0^{(i)}, \dots, b_n^{(i)} (i = 1, \dots, N + 1)$

对  $n$  次 Bézier 曲线  $b(t)$  加入  $N$  个节点后, 曲线变为  $N + 1$  段子曲线,  $L_i = |b_n^{(i)} - b_0^{(i)}|$  表示第  $i$  子曲线段弦长。离散后每段  $b^{(i)}(t)$  的端点切矢为  $d_0^i = n(b_1^{(i)} - b_0^{(i)})$ ,  $d_n^i = n(b_n^{(i)} - b_{n-1}^{(i)})$ 。设以原 Bézier 曲线的第  $i$  段离散子曲线的端点条件、按 PH 构造方法 1 或构造方法 2、3 产生的三次 PH 曲线段记为  $p^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^3 p_j^{(i)} B_j^3(t)$ , 每段三次 PH 曲线  $p^{(i)}(t)$  的首末端点切矢分别为  $d_{p_0}^i, d_{p_1}^i$  与  $b^{(i)}(t)$

的关系如图 5 所示, 则由  $N + 1$  段三次 PH 曲线构成的样条为  $p(t) = \bigcup_{i=1}^{N+1} p^{(i)}(t)$ 。

可产生以下两种形式的样条曲线:

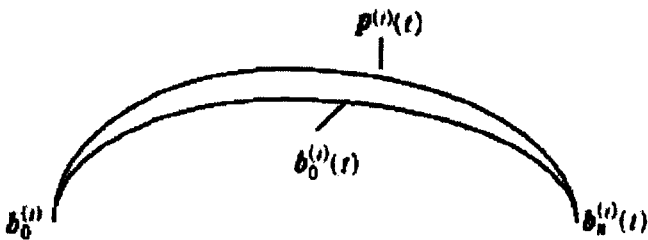


图 4-3 第  $i$  段 Bézier 子曲线与其对应的 PH 曲线

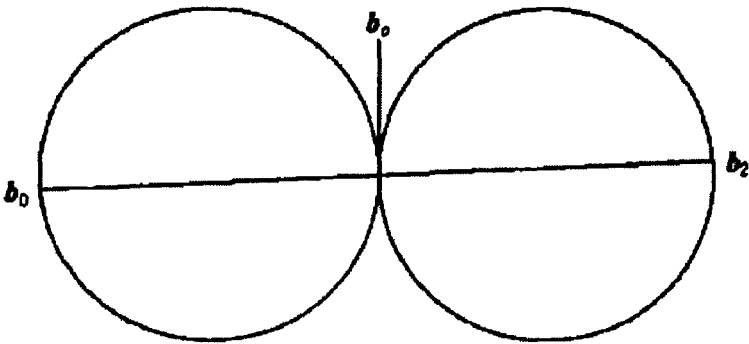


图 4-4 当  $b_1$  落入两圆域时, 二次 Bézier 曲线曲率单调

PH 样条曲线 1. 如果原 Bézier 曲线的曲率具有单调性(特别对于二次 Bézier 曲线

$b(t) = \sum_{i=0}^2 b_i B_i^2(t)$ , 易判别其曲率的单调性。不妨设  $b_0$  与  $b_2$  的中点为  $b_1$ , 当  $b_1$  处

于以  $b_0$  与  $b_2$  为直径的圆域(如图 6 所示)时,  $b(t)$  具有曲率单调性, 此时, 根

据首段离散Bézier 子曲线的第一个端点的切矢量  $d_0^1$  和弦长  $L_1$ ，可用构造方法1产生第一段三次PH曲线；根据第一条三次PH 曲线的末端点的切矢量  $d_{p_1}^1$  和第二段子曲线的弦长  $L_2$ ，同样用构造方法1产生第二段三次PH 曲线；依此类推，一直到第  $N$  段逐步构造三次PH 曲线。为了保证末端点的切矢方向也与原Bézier 曲线同向，可以第  $N$  段的三次PH 曲线的末端点的切矢  $d_{p_1}^N$ 、第  $N+1$  段原Bézier 子曲线的末端点的切矢  $d_1^{N+1}$  和弦长  $L_{N+1}$  为条件，用构造方法2来得到第  $N+1$  段的PH曲线。通过这种方法可产生一条与原Bézier 曲线具有首末端点同向的  $N+1$  段  $G^1$  连续的三次PH样条曲线  $p(t)$ ，如图4-5 所示。这时得到的三次PH 样条曲线具有保形性，对处理曲率单调的曲线，采用这种方法计算量小。

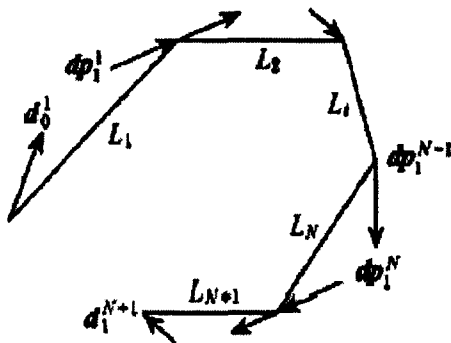


图4-5 PH 样条曲线1的端点条件

PH样条曲线2. 如果  $b(t)$  是一般性Bézier曲线，为得到保形性逼近，根据首段子曲线的首末端点切矢量  $d_0^1, d_1^1$  和弦长  $L_1$ ，可以用构造方法2 产生第一段三次PH 曲线；再以第二段子曲线的首末端点切矢量  $d_0^2, d_1^2$  及弦长  $L_2$ ，用构造方法2 得到第二段三次PH 曲线；依此类推，一直到第  $N+1$  段， 最后得到一条如图4-6 所示的  $G_1$  连续的三次PH 样条曲线  $p(t)$ 。这种样条适合于任何形式的Bézier 曲线，但计算量稍大。



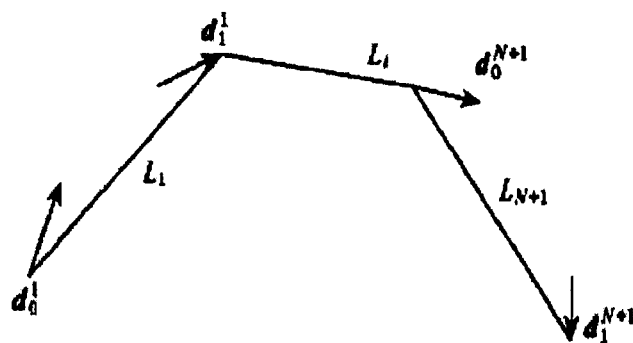


图4-6 PH 样条曲线2 的端点条件

我们认为上述两种  $G_1$  连续的三次PH 样条曲线可作为原曲线的逼近曲线。从理论上讲,逼近程度越高,由PH 生成的等距线就越逼近于原Bézier曲线的精确等距线。

#### 4.1.3 等距线生成

对于三次PH 样条曲线  $p(t)$  上的子曲线  $p^{(i)}(t) = (p_x^{(i)}(t), p_y^{(i)}(t))$ , 根据定理2, 令  $p=1$ , 可得出其对应的有理形式的等距线

$$p_d^{(i)}(t) = \left( \frac{p_x^{(i)}(t)\sigma^{(i)}(t) \mp dp_y^{(i)'}(t)}{\sigma^{(i)}(t)}, \frac{p_y^{(i)}(t)\sigma^{(i)}(t) \pm dp_x^{(i)'}(t)}{\sigma^{(i)}(t)} \right)$$

其中,

$$\sigma^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^2 a_j^{(i)} B_j^2(t), a_0^{(i)} = |3(p_1^{(i)} - p_0^{(i)})|,$$

$$a_1^{(i)} = \left\langle \sqrt{3(p_1^{(i)} - p_0^{(i)})}, \sqrt{3(p_3^{(i)} - p_2^{(i)})} \right\rangle, a_2^{(i)} = |3(p_3^{(i)} - p_2^{(i)})|.$$

则  $p(t)$  的等距线为  $p_d(t) = \bigcup_{i=1}^{N+1} p_d^{(i)}(t)$ 。

#### 4.1.4 误差分析

##### 逼近误差估计

定义2. 设  $p(t)$  与  $b(t)$  是在同一定义域  $D$  上的两条曲线,  $\varepsilon = \max_{t \in D} \sqrt{\langle p(t) - b(t), p(t) - b(t) \rangle}$  为曲线  $p(t)$  和  $b(t)$  的误差。

##### (1) 逼近三次Bézier曲线的误差

三次Bézier曲线与三次B-样条曲线是能产生拐点的次数最低的多项式曲线, 也是在CAD/ CAM最常用到的曲线, B-样条曲线可通过加入节点的方法转化为多段Bézier曲线, 因此它们本质上有一致性, 现估计其逼近误差。

定理4. 原三次Bézier曲线  $b(t)$  与其被离散成  $N+1$  段子曲线后所对应构造的三次

PH 样条曲线 $p(t)$ 的误差 $\varepsilon_a$ 有估计式

$$\varepsilon_a \leq \frac{1}{4} \max_{1 \leq i \leq N+1} \sqrt{\max\{|X^{(i)}|^2, |Y^{(i)}|^2\}},$$

其中：

$$X^{(i)}=3(p_1^{(i)}-b_1^{(i)}), Y^{(i)}=3(p_2^{(i)}-b_2^{(i)})$$

证明：离散原Bézier曲线为 $b^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^3 b_j^{(i)}B_j^3(t)$ , 对应的三次PH 曲线段为

$$p^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^3 p_j^{(i)}B_j^3(t), \quad i=1, \dots, N+1.$$

这时由于 $b_0^{(i)}=p_0^{(i)}, b_3^{(i)}=p_3^{(i)}$ 。得

$$\begin{aligned} \langle p^{(i)}(t)-b^{(i)}(t), p^{(i)}(t)-b^{(i)}(t) \rangle &= (|X^{(i)}|^2(1-t)^2 + |Y^{(i)}|^2t^2)(1-t)^2t^2 + 2\langle X^{(i)}, Y^{(i)} \rangle t^3(1-t)^3 \\ &\leq \frac{1}{16} \max\{|X^{(i)}|^2, |Y^{(i)}|^2\}, \end{aligned}$$

整个曲线的逼近误差满足估计式。证毕。

二次Bézier 曲线升一阶后得到三次Bézier 曲线，其逼近误差同上。

(2) 逼近高于三次的Bézier曲线的误差

定理5. 原 $n(n>3)$ 次Bézier 曲线 $b(t)$ 与其对应构造的三次PH 样条曲线 $p(t)$ 的误差 $\varepsilon_a$ 有关系式，

$$\varepsilon_a \leq \max_{1 \leq i \leq N+1} \sqrt{\max_{t \in [0,1]} (f_a^{(i)}(t))}.$$

其中

$$f_a^{(i)}(t) = \sum_{l=0}^{2n} q_l^{(i)*} B_l^{2n}(t),$$

是一个 $2n$  次Bernstein 多项式，

$$q_l^{(i)*} = \sum_{j=\max(0, l-n)}^{\min(n, l)} \frac{C_n^j C_n^{l-j} \Delta q_{l-j}^{(i)} \cdot \Delta q_{l-j}^{(i)}}{C_{2n}^l}, \quad p_j^{(i)*} = \sum_{j=\max(0, j-(n-3))}^{\min(j, 3)} \frac{C_3^q C_{n-3}^{j-q}}{C_n^j} p_q^{(i)}, \quad p_j^{(i)*} - b_j^{(i)} = \Delta q_j^{(i)}.$$

证明 为求逼近误差，将 $n$ 次 $(n>3)$ Bézier曲线 $b(t)=\sum_{j=0}^n b_j B_j^n(t)$ ，离散成 $N+1$ 段子曲线 $b^{(i)}(t)$ ，用于逼近的第 $i$ 段子曲线的三次PH 曲线段为 $p^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^3 p_j^{(i)} B_j^3(t)$ ，经逐步升阶后得到其 $n$ 次表示形式 $p^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^n p_j^{(i)*} B_j^n(t)$ ，将其代入内积表达式得：

$$f_a^{(i)}(t) = (p^{(i)}(t)-b^{(i)}(t), p^{(i)}(t)-b^{(i)}(t)) = \sum_{l=0}^{2n} q_l^{(i)*} B_l^{2n}(t)$$

加入N 个节点后整个曲线上的逼近误差即为定理5

证毕.

推论1. 定理5 的逼近误差进一步有估计式  $\varepsilon_a \leq \max_{1 \leq i \leq N+1} (\sqrt{\max_{0 \leq l \leq 2n} (|q_l^{(i)*}|)})$

### (3) 等距线误差估计

定理6 原n次Bézier曲线的精确等距线与其对应构造的三次PH样条等距线的误差有估计式

$$\varepsilon_d \leq \varepsilon_a + 2d \max_{1 \leq i \leq N+1} \sqrt{1-m(i)},$$

其中,

$$m^{(i)} = \min_{t \in [0,1]} \{f^{(i)}(t)\},$$

$\Delta$ 表示x或y向一阶差分,

$$f^{(i)}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n+1} p_k^{(i)*} B_k^{n+1}(t)}{\sum_{k=0}^{n+1} q_k^{(i)*} B_k^{n+1}(t)},$$

$$p_k^{(i)*} = \frac{\sum_{j=\max\{0, k-(n-1)\}}^{\min\{2, k\}} ((\Delta b_{xk-j}^{(i)} \Delta p_{xj}^{(i)} + \Delta b_{yk-j}^{(i)} \Delta p_{yj}^{(i)}) C_{n-1}^{k-j} C_2^j)}{C_{n+1}^k},$$

$$Lb_j^{(i)} = |b_{j+1}^{(i)} - b_j^{(i)}|,$$

$$q_k^{(i)*} = \frac{\sum_{j=\max\{0, k-(n-1)\}}^{\min\{2, k\}} b_{k-j}^{(i)} C_{n-1}^{k-j} C_2^j \omega_j^{(i)*}}{C_{n+1}^k},$$

$$\omega_2^{(i)*} = |\omega_1^{(i)2}|, \omega_0^{(i)2} = p_1^{(i)} - p_0^{(i)}, \omega_0^{(i)*} = |\omega_0^{(i)2}|, \omega_1^{(i)2} = p_3^{(i)} - p_2^{(i)}, \omega_1^{(i)*} = \langle \omega_0^{(i)}, \omega_1^{(i)} \rangle.$$

证明: 设由PH 样条算法产生的第i 段的等距线和原n 次Bézier 曲线b(t) 的第i 段的等距线分别为

$$p_d^{(i)}(t) = p^{(i)}(t) \pm d \frac{(-p_y^{(i)'}(t), p_x^{(i)'}(t))}{\sqrt{p_x^{(i)'}(t)^2 + p_y^{(i)'}(t)^2}}, \quad b_d^{(i)}(t) = b^{(i)}(t) \pm d \frac{(-b_y^{(i)'}(t), b_x^{(i)'}(t))}{\sqrt{b_x^{(i)'}(t)^2 + b_y^{(i)'}(t)^2}}$$

$i=1, \dots, N+1.$

$$b_x^{(i)'}(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta b_{xj}^{(i)} B_j^{n-1}(t), \quad b_y^{(i)'}(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta b_{yj}^{(i)} B_j^{n-1}(t),$$

$$p_x^{(i)'}(t) = 3 \sum_{j=0}^2 \Delta p_{xj}^{(i)} B_j^2(t), \quad p_y^{(i)'}(t) = 3 \sum_{j=0}^2 \Delta p_{yj}^{(i)} B_j^2(t),$$

$$p_j^{(i)} = p_{xj}^{(i)} + i p_{yj}^{(i)}, \quad b_j^{(i)} = b_{xj}^{(i)} + i b_{yj}^{(i)}.$$

从而第*i* 段的误差为：

$$\|p_d^{(i)}(t) - b_d^{(i)}(t)\| \leq \|p^{(i)}(t) - b^{(i)}(t)\| + \sqrt{2}d \sqrt{1 - \frac{b_x^{(i)'}(t)p_x^{(i)'}(t) + b_y^{(i)'}(t)p_y^{(i)'}(t)}{\sqrt{b_x^{(i)'^2}(t) + b_y^{(i)'^2}(t)} \sqrt{p_x^{(i)'^2}(t) + p_y^{(i)'^2}(t)}}}$$

有

$$\sqrt{p_x^{(i)'^2}(t) + p_y^{(i)'^2}(t)} = 3 \sum_{j=0}^2 \omega_j^{(i)*} B_j^2(t),$$

$\omega_j^{(i)*}$  的定义如定理6所述。由于

$$\Delta b_{xj}^{(i)} \Delta b_{xk}^{(i)} + \Delta b_{yj}^{(i)} \Delta b_{yk}^{(i)} \leq \sqrt{\Delta b_{xj}^{(i)2} + \Delta b_{yj}^{(i)2}} \sqrt{\Delta b_{xk}^{(i)2} + \Delta b_{yk}^{(i)2}},$$

有

$$\sqrt{b_x^{(i)'^2}(t) + b_y^{(i)'^2}(t)} \leq n \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{\Delta b_{xj}^{(i)2} + \Delta b_{yj}^{(i)2}} B_j^{n-1}(t),$$

将其代入，经整理可得定理6结论。

**推论2.** 定理6中原Bézier曲线的等距线与三次PH样条曲线的等距线误差有以下关系

$$\varepsilon_d \leq \varepsilon_a + \sqrt{2}d \max_{1 \leq i \leq N+1} \sqrt{\max_{0 \leq l \leq n+2} \left[ \frac{v_l^{(i)}}{u_l^{(i)}} \right]}.$$

其中，

$$u_l^{(i)} = \sum_{j=\max\{0, l-n-1\}}^{\min\{1, l\}} q_{l-j}^{(i)*} C_l^j C_{n+1}^{l-j} / C_{n+2}^l,$$

$$v_l^{(i)} = \sum_{j=\max\{0, l-n-1\}}^{\min\{1, l\}} (q_{l-j}^{(i)*} - p_{l-j}^{(i)*}) / C_{n+2}^l.$$

#### 4.1.5 算法的基本步骤

输入： *n*次Bézier曲线**b**(*t*)，等距距离*d*，逼近误差  $\varepsilon_a$  和精确等距线与PH 等距线误差  $\varepsilon_d$ 。如果曲率较大，在曲率最大处离散。

初始值： *N* = 1.

Step1. 把**b**(*t*)在 *t*<sub>1</sub>, *t*<sub>2</sub>, ..., *t*<sub>*N*</sub> 处进行离散，得到*N*+1条离散子曲线 **b**<sup>(*i*)</sup>(*t*)，*i* =

1, ..., N + 1。

Step2. 在上述离散条件下, 选用PH样条曲线1或PH样条曲线2(如果原Bézier 满足曲率单调, 可用PH 样条曲线1构造相应的三次PH 样条曲线  $p^{(i)}(t)$ ,  $i=1, \dots, N+1$ ).

Step3. 利用定理5或推论1的误差估计式计算逼近误差  $\varepsilon_a^N$ 。

Step4. 如果  $\varepsilon_a^N \leq \varepsilon_d$ , 转Step5; 否则, 转Step7。

Step5. 计算三次PH 样条曲线的精确等距线。

Step6. 利用定理6或推论2判断原Bézier曲线的精确等距线与三次PH样条的等距线的误差  $\varepsilon_d^N$ 。如果  $\varepsilon_d^N \leq \varepsilon_d$ , 输出PH等距线; 否则, 转Step7。

Step7. N + 1.

输出: 满足误差要求的b(t)的逼近等距线

## 4.2 五次PH曲线的应用<sup>[67]</sup>

曲率值不改变符号, 曲率随曲线参数单调变化的曲线称为螺线。高速公路的设计中通常用回旋螺线, 它的曲率跟弧长成线形关系。PH螺线具有PH曲线的优点, 弧长可精确计算, 具有有理形式的等距线。因此用PH螺线代替回旋螺线用于高速公路的设计是可行并有效的。在高速公路、铁路及机器人运动轨迹中, 光顺曲线有着很重要的作用。曲率极值只应该出现在设计员明确出现的地方, 像三次Bézier曲线及回旋螺线都可以应用到这些实际领域。PH曲线可用于高速公路设计中的曲线过渡, Baass将其分为几种情况:

- 1 直线到直线的过渡
- 2 直线到圆的过渡
- 3 圆到圆的C行过渡
- 4 圆到圆的S行过渡

由于回旋曲线曲率与弧长的线形关系, Baass推荐用回旋曲线作为过渡曲线, 我们也可以用三次Bézier曲线作为过渡曲线, 但没有PH曲线的性质。

下面我们用五次PH螺线作为过渡曲线, 它有很好的性质, 它没有内部尖点、拐点, 可以很好地应用于高速公路的设计中。质点沿螺线前进时, 其向心加速

度  $a_n = (\frac{v}{\rho})^2$ ,  $\rho$  为曲率半径。因此在速率一定的情况下, 曲率逐渐变大时, 向

心加速度也逐渐变大, 向心力也变大。这样当其作为过渡曲线时, 就避免了向心力出现突变的情况, 可以应用到要求较高的实际场合, 直线与圆相切时, 向心力就有一个突变。

### 4.2.1 五次螺线的构造

设  $P(t) = \sum_{i=0}^5 p_i B_i^5(t) = (x(t), y(t))$ 。若  $P(t)$  为PH曲线，则有：

$$x'(t) = u^2(t) - v^2(t), y'(t) = 2u(t)v(t)$$

令

$$u(t) = \alpha(1-t)^2 + 2\rho t(1-t) + \beta t^2 \quad (1)$$

$$v(t) = \mu(1-t)^2 + 2\xi t(1-t) + \gamma t^2 \quad (2)$$

利用Bézier公式的求导公式可得：

$$P'(t) = \sum_{i=0}^4 \Delta p_i B_i^4(t)$$

其中

$$\Delta P_i = P_{i+1} - P_i$$

由五次PH曲线的性质可知，五次PH曲线的控制顶点满足以下关系式：

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \frac{1}{5}(\alpha^2 - \mu^2)T + \frac{2}{5}\alpha\mu N \\ P_2 &= P_1 + \frac{1}{5}(\alpha\rho - \mu\xi)T + \frac{1}{5}(\alpha\xi + \mu\rho)N \\ P_3 &= P_2 + \frac{1}{15}(2\rho^2 - 2\xi^2 + \alpha\beta - \mu\gamma)T + \frac{1}{15}(4\rho\xi + \alpha\gamma + \mu\beta)N \\ P_4 &= P_3 + \frac{1}{15}(\beta\rho - \gamma\xi)T + \frac{1}{5}(\beta\xi + \gamma\rho)N \\ P_5 &= P_4 + \frac{1}{5}(\beta^2 - \gamma^2)T + \frac{2}{5}\beta\gamma N \end{aligned}$$

$T$ 、 $N$  为相互正交的向量， $P(t)$  的曲率可表示为：

$$\kappa(t) = \frac{2(u(t)v'(t) - u'(t)v(t))}{(u^2(t) + v^2(t))^2} \quad (3)$$

给出初始点  $P_0$  及  $P_0$ 、 $P_5$  处的切向量  $T$ 、 $G$  和  $P_5$  处的曲率半径  $R$ ，将  $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \rho, \xi$  定义如下：

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{7R\sin\theta} \quad (4)$$

$$\rho = \alpha = \frac{7\beta}{4(1+\cos\theta)} \quad (5)$$

$$\mu = \xi = 0 \quad (6)$$

$$\gamma = \beta \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

曲线  $P(t)$  的曲率具有以下性质：

$$\kappa(0) = 0, \kappa(1) = \frac{1}{R}, \kappa'(1) = 0, \kappa'(t) > 0 \quad (0 \leq t < 1)$$

由于  $\kappa'(t) > 0$ ，所以为一螺线，下面来证明它。

证明：将  $\rho = \alpha$ ， $\mu = \xi = 0$  代入方程 (1)、(2) 有：

$$u(t) = \alpha + (\beta - \alpha)t^2$$

$$v(t) = \gamma t^2$$

将  $u(t)$ 、 $v(t)$  及其导数代入曲率公式有：

$$\kappa(t) = \frac{4\alpha\gamma t}{[\alpha^2 + 2\alpha(\beta - \alpha)t^2 + (\beta - \alpha)^2 t^4 + \gamma^2 t^4]^2}$$

将 (4)、(5)、(6)、(7) 代入上式可得：

$$\kappa(t) = \frac{1024(1 + \cos \theta)^2 t}{R[49 + (56 \cos \theta - 42)t^2 + (25 - 24 \cos \theta)t^4]^2}$$

则  $\kappa(0)$ 、 $\kappa(1)$  可由上式将  $t = 0, t = 1$  代入取得。对  $\kappa(t)$  求导可得：

$$\kappa'(t) = \frac{7168(1 + \cos \theta)^2}{R[49 + (56 \cos \theta - 42)t^2 + (25 - 24 \cos \theta)t^4]^3} f(\lambda)$$

其中

$$f(\lambda) = 7 - 6(4 \cos \theta - 3)\lambda - (25 - 24 \cos \theta)\lambda^2, \lambda = t^2$$

在  $f(\lambda)$  中  $\lambda^2$  的系数为负， $f(0) > 0, f(1) = 0$ ，故  $f(\lambda) > 0$  ( $0 \leq \lambda < 1$ )，因此

$$\kappa'(1) = 0, \kappa'(t) > 0, \quad 0 \leq t < 1。$$

这样构造的五次PH曲线就是一螺线。

#### 4.2.2 利用五次PH曲线进行曲线过渡

由于  $\rho = \alpha$ ， $\mu = \xi = 0$ ，我们有

$$P(1) - P(0) = p_5 - p_0 = \frac{1}{15}(8\alpha^2 + 3\beta^2 + 4\alpha\beta - 3\gamma^2)T + \frac{2}{15}(2\alpha + 3\beta)\gamma N \quad (8)$$

方程 (8) 中  $T$  和  $N$  的系数在后面的内容中也会出现，它们可以表示成  $r$  和  $\theta$  的关

系式：

$$\frac{1}{15}(8\alpha^2 + 3\beta^2 + 4\alpha\beta - 3\gamma^2) = \frac{7r \sin \theta}{120(1 + \cos \theta)^2} (63 + 26 \cos \theta + 12 \cos^2 \theta) \quad (9)$$

$$\frac{2}{15}(2\alpha + 3\beta)\gamma = \frac{7\gamma(1 - \cos \theta)}{60(1 + \cos \theta)} (13 + 6 \cos \theta) \quad (10)$$

#### I 用五次PH曲线连接一直线和圆

给定一点  $Z$ ，单位向量  $T$  和半径为  $R$  的圆  $\Omega$ ， $\Omega$  以  $C$  为圆心，令  $L$  为过点  $Z$ ，平行于  $T$  的直线，令

$$N = \frac{(C - Z) - [(c - z) \cdot T]T}{\|(C - Z) - [(c - z) \cdot T]T\|}$$

令  $h = (c - z) \cdot N$ ，如果  $\frac{60}{91}h < r < h$ ，那么则有以下图所示的唯一的一条五次PH螺线

连接直线  $L$  和圆  $\Omega$ ，使得在连接处是  $G^2$  连续的，证明如下：

从方程 (8) 可以得出：

$$(p_5 - p_0) \cdot N = \frac{2}{15}(2\alpha + 3\beta)\gamma$$

点  $p_5$  在圆  $\Omega$  上，于是有：

$$(p_5 - p_0) \cdot N = h - r \cos \theta$$

由上面两个方程可以得到：

$$\frac{2}{15}(2\alpha + 3\beta)\gamma = h - r \cos \theta$$

再根据方程 (9)，(10) 可以得到：

$$18r \cos^2 \theta + (11r - 60h) \cos \theta + 91r - 60h = 0$$

令  $\cos \theta = \lambda$ ，可以得到：

$$f(\lambda) = 18r\lambda^2 + (11r - 60h)\lambda + 91r - 60h$$

如果  $\frac{60}{91}h < r < h$ ，则有：

$$f(0) = 91r - 60h > 0, f(1) = 120(r - h) < 0$$

所以对于  $\lambda \in (0, 1)$ ，方程  $f(\lambda) = 0$  有唯一解。

这样我们可以通过求解  $f(\lambda) = 0$ ，得到  $\cos \theta$  的值，然后将其代入 (5)、(6)、(7)

就可以求得满足条件的五次PH螺线。

#### II 用C形五次PH螺线连接两个圆



设有给定点两圆  $\Omega_0$  和  $\Omega_1$ ，分别以  $C_0, C_1$  为圆心，半径分别为  $r_0$  和  $r_1$ ，不失一般性，可设  $r_0 \geq r_1$ ，如果  $r_1 - r_0 < \|C_1 - C_0\| < 2.675(r_1 + r_0)$ ，那么我们可以用一对五次PH螺线来连接两个圆，并且在连接处是  $G^2$  连续的，为方便起见，令与  $\Omega_1$  连接的曲线为  $P_i(t)$ ，且满足：

$$P'_i(t) = [u_i^2(t) - v_i^2(t)]T_i + 2u_i(t)v_i(t)N_i \quad (i=0,1)$$

这里

$$u_i(t) = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)t^2$$

$$v_i(t) = \gamma_i t^2$$

为保证两曲线  $G^2$  拼接，可让她们在各自的起始点相连接，因为在起始点处，她们的曲率都为0，令  $T_0 = -T_1 = T$ ，我们可以得到  $N_0 = N_1 = N$ ，令  $-T$  与  $P'_0(1)$  的夹角， $T$  与  $P'_1(1)$  的夹角为  $\theta$ ，此时  $0 < \theta < \pi/2$ 。不失一般性，适当选取  $T, N$  的方向，使得

$$T \cdot (C_1 - C_0) > 0, T_x N_y - T_y N_x = 1,$$

从方程8可以得到：

$$(P_1(1) - P_0(1)) \cdot T = \frac{1}{15}(8\alpha_0^2 + 3\beta_0^2 + 4\alpha_0\beta_0 - 3\gamma_0^2 + 8\alpha_1^2 + 3\beta_1^2 + 4\alpha_1\beta_1 - 3\gamma_1^2) \quad (11)$$

和

$$(P_1(1) - P_0(1)) \cdot N = \frac{2}{15}[(2\alpha_1 + 3\beta_1)\gamma_1 - (2\alpha_0 + 3\beta_0)\gamma_0] \quad (12)$$

既然  $P_1(1)$  和  $P_0(1)$  分别在圆  $\Omega_0$  和  $\Omega_1$  上，则下面两式成立：

$$(P_1(1) - P_0(1)) \cdot T = T \cdot (C_1 - C_0) + (r_0 + r_1) \sin \theta \quad (13)$$

$$(P_1(1) - P_0(1)) \cdot N = N \cdot (C_1 - C_0) + (r_0 - r_1) \cos \theta \quad (14)$$

从方程 (11)、(12) 可以得到：

$$T \cdot (C_1 - C_0) = \frac{1}{15}(8\alpha_0^2 + 3\beta_0^2 + 4\alpha_0\beta_0 - 3\gamma_0^2 + 8\alpha_1^2 + 3\beta_1^2 + 4\alpha_1\beta_1 - 3\gamma_1^2) - (r_0 + r_1) \sin \theta \quad (15)$$

从 (12)，(14) 可以得到：

$$N \cdot (C_1 - C_0) = \frac{2}{15}[(2\alpha_1 + 3\beta_1)\gamma_1 - (2\alpha_0 + 3\beta_0)\gamma_0] - (r_0 - r_1) \cos \theta \quad (16)$$

由 (9), (10), (15), (16) 可以得到:

$$T \cdot (C_1 - C_0) = \frac{(r_0 + r_1)}{120} g_1(\theta)$$

$$N \cdot (C_1 - C_0) = \frac{(r_1 - r_0)}{60} g_2(\theta)$$

这里

$$g_1(\theta) = \frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2} (321 - 58 \cos \theta - 36 \cos^2 \theta) \quad (17)$$

$$g_2(\theta) = \frac{1}{1 + \cos \theta} (91 + 11 \cos \theta + 18 \cos^2 \theta) \quad (18)$$

因为  $T$ 、 $N$  为相互正交的向量, 所以

$$\|C_1 - C_0\|^2 = \|(C_1 - C_0) \cdot T\|^2 + \|(C_1 - C_0) \cdot N\|^2$$

这样, 如果我们令:

$$f(\theta) = \|C_1 - C_0\|^2 - \|(C_1 - C_0) \cdot T\|^2 - \|(C_1 - C_0) \cdot N\|^2$$

$$= \|C_1 - C_0\|^2 - \left[\frac{r_0 + r_1}{120}\right]^2 g_1^2(\theta) - \left[\frac{r_1 - r_0}{60}\right]^2 g_2^2(\theta) \quad (19)$$

可通过  $f(\theta) = 0$ , 求得  $\theta$ 。具体如下:

从方程 (17)、(18)、(19) 可知:

$$f(0) = \|C_1 - C_0\|^2 - (r_1 - r_0)^2 > 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \|C_1 - C_0\|^2 - \frac{11449}{1600} (r_1 + r_0)^2 - \frac{8281}{3600} (r_1 - r_0)^2 < 0$$

由 (17)、(18) 可知,  $g_1(\theta) > 0$ ,  $g_2(\theta) > 0$ , 对其求导可知,  $g_1'(\theta) > 0$ ,  $g_2'(\theta) > 0$ 。

所以:

$$f'(\theta) = -2\left[\frac{r_0 + r_1}{120}\right]^2 g_1(\theta) g_1'(\theta) - 2\left[\frac{r_1 - r_0}{60}\right]^2 g_2(\theta) g_2'(\theta) < 0$$

$f(\theta)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内单调递减, 且  $f(0) > 0, f(\frac{\pi}{2}) < 0$ , 故  $f(\theta) = 0$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内有唯一

根。将  $\theta, r = r_0, \theta, r = r_1$  应用到 (4)、(5)、(6)、(7), 就可以求得对应的两五次 PH 螺线。

#### 4.3 PH 曲线偶的应用

在前面我们介绍了 PH 曲线偶的一些性质, 和用 PH 曲线偶构造构造  $C^1$  Hermite 插值这一节主要介绍用 PH 曲线偶构造平面 Bézier 曲线的等距线的算

法。

用三次 PH 曲线偶做曲线的逼近相比于用 PH 曲线做逼近有很多优点：(1) 在相同的情况下，它次数比较低；(2) 它可以处理拐点，而 PH 曲线一般要用五次才能处理拐点；(3) 它的自由度比三次 PH 曲线大，精度也比三次 PH 曲线高；(4) 三次 PH 曲线偶在端点处与原 Bézier 曲线切矢相等。所以这一节主要介绍一下用三次 PH 曲线偶做 Bézier 曲线的逼近。

由于在前面的章节已经讲过如何构造  $C^1$  Hermite 插值、如何判定三次 PH 曲线偶是“好”的。在这一节主要讲怎样构造 Bézier 曲线的等距线，以及它们的误差和一些具体的例子。

#### 4.3.1 构造 Bézier 曲线的等距线

对于  $n$  次 Bézier 曲线  $b(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ ，我们可以构造分段三次 PH 曲线偶去

逼近它。首先我们对  $n$  次 Bézier 曲线  $b(t)$  进行离散，即在参数区间  $[0, 1]$  加入  $N$

个节点  $t_1, t_2, \dots, t_N$ ，把整条曲线离散成  $N+1$  段  $n$  次 Bézier 曲线  $b^i(t) = \sum_{j=0}^n b_j^i B_j^n(t)$ ，

其中  $b_j^i$  为第  $i$  段子曲线的第  $j$  个顶点，其算法可以用伪语言表示如下：

Input :  $b_0, \dots, b_n, N, t_1, t_2, \dots, t_N$

初值:  $b_0^{(0)*} = b_0, \dots, b_n^{(0)*} = b_n, t_0 = u_0 = 0$

for  $i = 1 : N + 1$

for  $j = 1 : n - 1$

$$u_i = \frac{t_i - t_{i-1}}{1 - \sum_{k=0}^{i-1} t_k};$$

$$b_0^{(i)} = b(u_{i-1}); b_n^{(i)} = b(u_i); b_j^i = \sum_{k=0}^j b_k^{(i-1)*} C_j^k u_i^k (1 - u_i)^{j-k};$$

$$b_j^{(i)*} = \sum_{k=0}^{n-j} b_{k+j}^{(i-1)*} C_{n-j}^k u_i^k (1 - u_i)^{n-j-k}; b_0^{(i)*} = b(u_i); b_n^{(i)*} = b_n;$$

next  $j$

next  $i$

Output :  $b_0^{(i)}, \dots, b_n^{(i)} (i = 1, \dots, N + 1)$

对于离散后的 $n$ 次Bézier曲线，我们可以求出它的端点以及首末端点切矢，然后，可以用本文第三章中的方法构造满足条件的三次PH曲线偶，从而产生由 $N+1$ 段三次PH曲线偶构成的样条。

#### 4.3.2 等距线的生成

对于三次PH 曲线偶 $p(t)$ 的第 $i$ 段子曲线，由两段PH曲线 $p_1^i(t)$ 、 $p_2^i(t)$ 构成。

有 $p_1^i(t) = (p_{1x}^{(i)}(t), p_{1y}^{(i)}(t))$ 、 $p_2^i(t) = (p_{2x}^{(i)}(t), p_{2y}^{(i)}(t))$ 。根据定理2，令 $p=1$ 可得出其对应的有理形式的等距线：

$$p_{1d}^{(i)}(t) = \left( \frac{p_{1x}^{(i)}(t)\sigma_1^{(i)}(t) \mp dp_{1y}^{(i)'}(t)}{\sigma_1^{(i)}(t)}, \frac{p_{1y}^{(i)}(t)\sigma_1^{(i)}(t) \pm dp_{1x}^{(i)'}(t)}{\sigma_1^{(i)}(t)} \right)$$

$$p_{2d}^{(i)}(t) = \left( \frac{p_{2x}^{(i)}(t)\sigma_2^{(i)}(t) \mp dp_{2y}^{(i)'}(t)}{\sigma_2^{(i)}(t)}, \frac{p_{2y}^{(i)}(t)\sigma_2^{(i)}(t) \pm dp_{2x}^{(i)'}(t)}{\sigma_2^{(i)}(t)} \right)$$

其中

$$\sigma_1^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^2 a_{ij}^{(i)} B_j^2(t), a_{i0}^{(i)} = |3(p_{11}^{(i)} - p_{10}^{(i)})|, a_{i1}^{(i)} = \left\langle \sqrt{3(p_{11}^{(i)} - p_{10}^{(i)})}, \sqrt{3(p_{13}^{(i)} - p_{12}^{(i)})} \right\rangle,$$

$$a_{i2}^{(i)} = |3(p_{13}^{(i)} - p_{12}^{(i)})|, \sigma_2^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^2 a_{2j}^{(i)} B_j^2(t), a_{20}^{(i)} = |3(p_{21}^{(i)} - p_{20}^{(i)})|, a_{21}^{(i)} = \left\langle \sqrt{3(p_{21}^{(i)} - p_{20}^{(i)})}, \sqrt{3(p_{23}^{(i)} - p_{22}^{(i)})} \right\rangle,$$

$$a_{22}^{(i)} = |3(p_{23}^{(i)} - p_{22}^{(i)})|。$$

由此，我们可以得到三次曲线偶 $p(t)$ 的等距线为

$$p_d(t) = \bigcup_{i=1}^{N+1} (p_{1d}^{(i)}(t) \cup p_{2d}^{(i)}(t))。$$

#### 4.3.3 误差分析

##### 1 逼近误差估计

定义 设 $p(t)$ ， $b(t)$ 为平面上同一定义域 $D$ 上的两条曲线，称 $\varepsilon = \max_{t \in D} |p(t) - b(t)|$ 为曲线 $p(t)$ 与 $b(t)$ 的误差。

逼近三次 Bézier 曲线的误差

设三次 Bézier 曲线为 $b(t) = b_0(1-t)^3 + 3b_1(1-t)^2t + 3b_2(1-t)t^2 + b_3t^3$ ，则可以求得两端点的切矢分别为 $T_0 = 3(b_1 - b_0), T_1 = 3(b_3 - b_2)$ 。由此我们可以求得三次 PH 曲线偶的端点分别为

$$(p_{1,0}, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}) = (b_0, p_{1,0} + \frac{a^2}{3}, p_{1,1} + \frac{ab}{3}, p_{1,2} + \frac{b^2}{3})$$

$$(p_{2,3}, p_{2,2}, p_{2,1}, p_{2,0}) = (b_3, p_{2,3} - \frac{d^2}{3}, p_{2,2} - \frac{cd}{3}, p_{2,1} - \frac{c^2}{3})$$

其中

$$p_{1,0} = b_0, p_{2,3} = b_3, a = \sqrt{T_0}, d = \sqrt{T_1};$$

由“好”的三次 PH 曲线偶的判定原则，我们取

$$b = c = -\frac{1}{4}(\sqrt{T_0} + \sqrt{T_1}) + \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{T_0} + \sqrt{T_1})^2 - 8\alpha}$$

这里  $\alpha = (T_0 + T_1) + 3(b_3 - b_0)$ 。

由此可以得到

$$(p_{1,0}, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}) = (b_0, b_1, b_1 + \frac{ab}{3}, b_1 + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{3})$$

$$(p_{2,3}, p_{2,2}, p_{2,1}, p_{2,0}) = (b_3, b_2, b_2 - \frac{cd}{3}, b_2 - \frac{cd}{3} - \frac{c^2}{3})$$

由此可得  $P_1(t), P_2(t)$  的表达式为：

$$P_1(t) = b_0(1-t)^3 + 3b_1(1-t)^2t + 3(b_1 + \frac{ab}{3})(1-t)t^2 + (b_1 + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{3})t^3, t \in [0, 1]$$

$$P_2(t) = (b_2 - \frac{cd}{3} - \frac{c^2}{3})(1-t)^3 + 3(b_2 - \frac{cd}{3})(1-t)^2t + 3b_2(1-t)t^2 + b_3t^3, t \in [0, 1]$$

经过一系列的参数变换，我们可以得到：

$$P(t) = \begin{cases} b_0(1-2t)^3 + 6b_1(1-2t)^2t + 12(b_1 + \frac{ab}{3})(1-2t)t^2 + 8(b_1 + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{3})t^3, t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 8(b_2 - \frac{cd}{3} - \frac{c^2}{3})(1-t)^3 + 12(b_2 - \frac{cd}{3})(1-t)^2(2t-1) + 6b_2(1-t)(2t-1)^2 + b_3(2t-1)^3, t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

由上式我们可以得到三次 PH 曲线偶逼近三次 Bézier 曲线的误差为：

$$\varepsilon_a \leq \max \left\{ \left| \frac{(b_1 - b_0)}{2} \right|, \left| \frac{6b_1 - 3(b_0 + b_2) + 4ab}{12} \right|, \left| \frac{15b_1 - 9b_2 - 9b_0 - 3b_3 + 8ab + 8b^2}{24} \right|, \right. \\ \left. \left| \frac{(b_2 - b_3)}{2} \right|, \left| \frac{6b_2 - 3(b_3 + b_1) - 4cd}{12} \right|, \left| \frac{15b_2 - 9b_1 - 3b_3 - 3b_0 - 8cd - 8c^2}{24} \right| \right\}$$

证明：先考虑在区间  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  上它们的误差，由误差的定义有

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} \|p(t) - b(t)\| \\ &= \max_{t \in [0, \frac{1}{2}]} \left\| 3(b_1 - b_0)(1-t)^2 t + [3(b_0 - b_2) + 4ab](1-t)t^2 + \frac{(6b_1 - 3b_0 - 3b_3 - 4ab + 8b^2)}{3} t^3 \right\|\end{aligned}$$

对此我们可以令  $t = \frac{u}{2}$ , 则  $u \in [0, 1]$ 。我们可以得到：

$$\varepsilon_a = \max_{u \in [0, 1]} \left\| \frac{3(b_1 - b_0)}{2} (1-u)^2 u + \frac{[6b_1 - 3(b_0 + b_2) + 4ab]}{4} (1-u)u^2 + \frac{(15b_1 - 9b_2 - 3b_0 - 3b_3 + 8ab + 8b^2)}{24} u^3 \right\|$$

由于 Bézier 曲线上的模长不大于控制顶点模长的最大值，所以有：

$$\varepsilon_a \leq \max \left\{ \left| \frac{(b_1 - b_0)}{2} \right|, \left| \frac{6b_1 - 3(b_0 + b_2) + 4ab}{12} \right|, \left| \frac{15b_1 - 9b_2 - 9b_0 - 3b_3 + 8ab + 8b^2}{24} \right| \right\}$$

同理，当  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$  时，我们有：

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \max_{t \in [\frac{1}{2}, 1]} \|p(t) - b(t)\| \\ &= \max_{t \in [\frac{1}{2}, 1]} \left\| \frac{(6b_2 - 3b_0 - 3b_3 + 4cd - 8c^2)}{3} (1-t)^3 + [3(b_3 - b_1) - 4cd](1-t)^2 t + 3(b_2 - b_3)(1-t)t^2 \right\|\end{aligned}$$

做变量替换，令  $t = \frac{u+1}{2}$ ，得到：

$$\varepsilon_a = \max_{u \in [0, 1]} \left\| \frac{(15b_2 - 3b_0 - 3b_3 - 9b_1 - 8cd - 8c^2)}{24} (1-u)^3 + \frac{[6b_2 - 3(b_3 + b_1) - 4cd]}{4} (1-u)^2 u + \frac{3(b_2 - b_3)}{2} (1-u)u^2 \right\|$$

同理，我们可以得到：

$$\varepsilon_a \leq \max \left\{ \left| \frac{(b_2 - b_3)}{2} \right|, \left| \frac{6b_2 - 3(b_3 + b_1) - 4cd}{12} \right|, \left| \frac{15b_2 - 9b_1 - 3b_3 - 3b_0 - 8cd - 8c^2}{24} \right| \right\}$$

综上所述，我们有：

$$\varepsilon_a \leq \max \left\{ \left| \frac{(b_1 - b_0)}{2} \right|, \left| \frac{6b_1 - 3(b_0 + b_2) + 4ab}{12} \right|, \left| \frac{15b_1 - 9b_2 - 9b_0 - 3b_3 + 8ab + 8b^2}{24} \right|, \left| \frac{(b_2 - b_3)}{2} \right|, \left| \frac{6b_2 - 3(b_3 + b_1) - 4cd}{12} \right|, \left| \frac{15b_2 - 9b_1 - 3b_3 - 3b_0 - 8cd - 8c^2}{24} \right| \right\}$$

这里  $|\cdot|$  表示向量的模长。证毕。

对于二次 Bézier 曲线我们可以通过升阶的方法来求得其误差。用同样的方法我们还可以求得  $n$  次 Bézier 曲线的误差。

首先我们将  $n$  次 Bézier 曲线  $b(t) = \sum_{j=0}^n b_j B_j^n(t)$  离散成  $N+1$  段子曲线  $b^{(i)}(t)$ ，然

后在将其在  $t = \frac{1}{2}$  处离散成两段分别为

$$b_1^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^n b_{1j}^{(i)} B_j^n(t), b_2^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^n b_{2j}^{(i)} B_j^n(t)。$$

设用于逼近第  $i$  段子曲线的 PH 曲线偶分别为

$$P_1^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^3 p_{1j}^{(i)} B_j^3, P_2^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^3 p_{2j}^{(i)} B_j^3,$$

将其升阶至  $n$  次，得到表达式为

$$P_1^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^n p_{1j}^{(i)*} B_j^n, P_2^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^n p_{2j}^{(i)*} B_j^n,$$

然后让他们分别与  $b_1^{(i)}(t), b_2^{(i)}(t)$  求误差，可以得到它们的误差分别为

$$\varepsilon_1 \leq \max_{j=0,1,\dots,n} |p_{1j}^{(i)*} - b_{1j}^{(i)}|, \quad \varepsilon_2 \leq \max_{j=0,1,\dots,n} |p_{2j}^{(i)*} - b_{2j}^{(i)}|。$$

由此可得三次 PH 曲线偶逼近  $n$  次 Bézier 曲线的误差为

$$\varepsilon_a \leq \max_{j=0,1,\dots,n} \{|p_{1j}^{(i)*} - b_{1j}^{(i)}|, |p_{2j}^{(i)*} - b_{2j}^{(i)}|\}$$

## 2 等距线的误差估计

原  $n$  次 Bézier 曲线的精确等距线与其对应构造的三次 PH 曲线偶的等距线的误差有估计式

$$\varepsilon_d \leq \varepsilon_a + \sqrt{2d} \max_{1 \leq i \leq N+1} \sqrt{1-m(i)},$$

其中，

$$m^{(i)} = \min_{t \in [0,1]} \{f_1^{(i)}(t), f_2^{(i)}(t)\},$$

$\Delta$  表示  $x$  或  $y$  向一阶差分，

$$f_1^{(i)}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n+1} p_{1k}^{(i)*} B_k^{n+1}(t)}{\sum_{k=0}^{n+1} q_{1k}^{(i)*} B_k^{n+1}(t)},$$

$$p_{1k}^{(i)*} = \sum_{j=\max\{0,k-(n-1)\}}^{\min\{2,k\}} ((\Delta b_{1xk-j}^{(i)} \Delta p_{1xj}^{(i)} + \Delta b_{1yk-j}^{(i)} \Delta p_{1yj}^{(i)}) C_{n-1}^{k-j} C_2^j) / C_{n+1}^k,$$

$$Lb_{ij}^{(i)} = |b_{ij+1}^{(i)} - b_{ij}^{(i)}|,$$

$$q_{1k}^{(i)*} = \sum_{j=\max\{0,k-(n-1)\}}^{\min\{2,k\}} b_{1k-j}^{(i)} C_{n-1}^{k-j} C_2^j \omega_{1j}^{(i)*} / C_{n+1}^k,$$

$$\omega_{12}^{(i)*} = |\omega_{11}^{(i)2}|, \omega_{10}^{(i)2} = p_{11}^{(i)} - p_{10}^{(i)}, \omega_{10}^{(i)*} = |\omega_{10}^{(i)2}|, \omega_{11}^{(i)2} = p_{13}^{(i)} - p_{12}^{(i)}, \omega_{11}^{(i)*} = \langle \omega_{10}^{(i)}, \omega_{11}^{(i)} \rangle.$$

$f_2^{(i)}(t)$  的定义如同  $f_1^{(i)}(t)$ ，在这里就不赘述了。

证明：设由PH 样条算法产生的第*i*段的等距线和原*n* 次Bézier曲线*b*(*t*)的第*i*段的等距线分别为

$$p_{1d}^{(i)}(t) = p_1^{(i)}(t) \pm d \frac{(-p_{1y}^{(i)'}(t), p_{1x}^{(i)'}(t))}{\sqrt{p_{1x}^{(i)'}{}^2(t) + p_{1y}^{(i)'}{}^2(t)}}$$

$$p_{2d}^{(i)}(t) = p_2^{(i)}(t) \pm d \frac{(-p_{2y}^{(i)'}(t), p_{2x}^{(i)'}(t))}{\sqrt{p_{2x}^{(i)'}{}^2(t) + p_{2y}^{(i)'}{}^2(t)}}$$

$$b_{1d}^{(i)}(t) = b_1^{(i)}(t) \pm d \frac{(-b_{1y}^{(i)'}(t), b_{1x}^{(i)'}(t))}{\sqrt{b_{1x}^{(i)'}{}^2(t) + b_{1y}^{(i)'}{}^2(t)}}$$

$$b_{2d}^{(i)}(t) = b_2^{(i)}(t) \pm d \frac{(-b_{2y}^{(i)'}(t), b_{2x}^{(i)'}(t))}{\sqrt{b_{2x}^{(i)'}{}^2(t) + b_{2y}^{(i)'}{}^2(t)}}$$

$$i=1, \dots, N+1.$$

这里将*b*(*t*)的第*i*段在中点离散成两段，在分别求它们的等距线。

$$b_{1x}^{(i)'}(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta b_{1xj}^{(i)} B_j^{n-1}(t), \quad b_{1y}^{(i)'}(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta b_{1yj}^{(i)} B_j^{n-1}(t),$$

$$p_{1x}^{(i)'}(t) = 3 \sum_{j=0}^2 \Delta p_{1xj}^{(i)} B_j^2(t), \quad p_{1y}^{(i)'}(t) = 3 \sum_{j=0}^2 \Delta p_{1yj}^{(i)} B_j^2(t),$$

$$p_{ij}^{(i)} = p_{ixj}^{(i)} + i p_{iyj}^{(i)}, \quad b_{ij}^{(i)} = b_{ixj}^{(i)} + i b_{iyj}^{(i)}.$$

从而第*i*段中  $p_{1d}^{(i)}(t)$  与  $b_{1d}^{(i)}(t)$  的误差为：

$$\|p_{1d}^{(i)}(t) - b_{1d}^{(i)}(t)\| \leq \|p_1^{(i)}(t) - b_1^{(i)}(t)\| + \sqrt{2}d \sqrt{1 - \frac{b_{1x}^{(i)'}(t)p_{1x}^{(i)'}(t) + b_{1y}^{(i)'}(t)p_{1y}^{(i)'}(t)}{\sqrt{b_{1x}^{(i)'}{}^2(t) + b_{1y}^{(i)'}{}^2(t)} \sqrt{p_{1x}^{(i)'}{}^2(t) + p_{1y}^{(i)'}{}^2(t)}}}$$

有

$$\sqrt{p_{1x}^{(i)'}{}^2(t) + p_{1y}^{(i)'}{}^2(t)} = 3 \sum_{j=0}^2 \omega_{1j}^{(i)*} B_j^2(t),$$



由于

$$\Delta b_{1xj}^{(i)} \Delta b_{1zk}^{(i)} + \Delta b_{1yj}^{(i)} \Delta b_{1yk}^{(i)} \leq \sqrt{\Delta b_{1xj}^{(i)2} + \Delta b_{1yj}^{(i)2}} \sqrt{\Delta b_{1zk}^{(i)2} + \Delta b_{1yk}^{(i)2}},$$

有

$$\sqrt{b_{1x}^{(i)2}(t) + b_{1y}^{(i)2}(t)} \leq n \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{\Delta b_{1xj}^{(i)2} + \Delta b_{1yj}^{(i)2}} B_j^{n-1}(t),$$

将其代入，经整理可得

$$\|p_{1d}^{(i)}(t) - b_{1d}^{(i)}(t)\| \leq \|p_1^{(i)}(t) - b_1^{(i)}(t)\| + \sqrt{2}d \max_{1 \leq i \leq N+1} \sqrt{1 - f_1^{(i)}(t)}.$$

同理我们有

$$\|p_{2d}^{(i)}(t) - b_{2d}^{(i)}(t)\| \leq \|p_2^{(i)}(t) - b_2^{(i)}(t)\| + \sqrt{2}d \max_{1 \leq i \leq N+1} \sqrt{1 - f_2^{(i)}(t)}.$$

综上所述，我们有

$$\varepsilon_d \leq \varepsilon_a + \sqrt{2}d \max_{1 \leq i \leq N+1} \sqrt{1 - m(i)}$$

得证

#### 4.3.4 算法的基本步骤

输入： n次Bézier曲线**b**(t)，等距距离d，逼近误差 $\varepsilon_a$ 和精确等距线与PH等距线误差 $\varepsilon_d$ 。如果曲率较大，在曲率最大处离散。

初始值： N = 1.

Step1. 把**b**(t)在 $t_1, t_2, \dots, t_N$ 处进行离散，得到N+1条离散子曲线 $b^{(i)}(t)$ ， $i = 1, \dots, N+1$ 。再对 $b^{(i)}(t)$ 在 $t = \frac{1}{2}$ 处进行离散，得 $b_1^{(i)}(t)$ 和 $b_2^{(i)}(t)$ 。

Step2. 在上述离散条件下，选用构造相应的三次PH曲线偶 $p_1^{(i)}(t)$ 和 $p_2^{(i)}(t)$ ， $i=1, \dots, N+1$ 。

Step3. 利用逼近误差估计式计算逼近误差 $\varepsilon_a^N$ 。

Step4. 如果 $\varepsilon_a^N \leq \varepsilon_a$ ，转Step5;否则，转Step7。

Step5. 计算三次PH样条曲线的精确等距线。

Step6. 利用等距线误差估计式判断原Bézier曲线的精确等距线与三次PH样条的等距线的误差 $\varepsilon_d^N$ 。如果 $\varepsilon_d^N \leq \varepsilon_d$ ，输出PH等距线;否则，转Step7。

Step7. N + 1.

输出：满足误差要求的**b**(t)的逼近等距线

#### 4.4 本章小结

本章主要介绍了 PH 曲线的一些应用，第一节和第三节主要讲用 PH 曲线去逼近 Bézier 曲线，进一步用 PH 曲线的等距线去逼近 Bézier 曲线的等距线的办法来求 Bézier 曲线的等距线。第二节介绍了五次 PH 曲线在直线与直线之间的过渡、直线与曲线之间的过渡、曲线与曲线之间的过渡这些方面的应用。

## 第五章 全文总结和展望

本文第一章主要简单介绍了计算机辅助几何设计这个方向的来源、发展过程、研究背景、目的、意义等等，并且介绍了等距线这一领域的研究成果、现状、方法、有待解决的问题等。后面的章节主要介绍了 PH 曲线及其应用，主要分为三大块，三次 PH 曲线、五次 PH 曲线和 PH 曲线偶。第二章主要作为后面章节的铺垫，介绍了 Bézier 曲线的定义、性质等一些基本知识，以及在后面要用到的微分几何方面的一些知识。

本文的研究成果有以下几个方面：

- 1 给出了一种构造三次 PH 曲线控制多边形的办法
- 2 用三次 PH 曲线偶构造 Bézier 曲线的等距曲线

用三次 PH 曲线偶构造 Bézier 曲线的等距曲线，对于有些的 Bézier 曲线在一些区域它不一定有“合理”的 Hermite 插值数据或者端点切向，对于这种情况下该怎么办值得我们继续研究。

## 参考文献

- [1] Farouki, R.T., Neff, C.A., Analytic properties of plane offset curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1990, 7(1-4): 83-99
- [2] Pham, B., Offset curves and surfaces: a brief survey, *Computer Aided Design*, 1992, 24(4): 223-229
- [3] Maekawa, T., An overview of offset curves and surfaces, *Computer Aided Design*, 1999, 31(3): 165-173
- [4] Farouki, R.T, Sakkalis T. Pythagorean hodographs spaces curves, *Advance in Computational Mathematics*, 1994, 2: 41-46
- [5] Farouki, R.T, The conformal map of the hodograph plane, *Computer Aided Geometric Design*, 1994, 11(4): 363-390
- [6] Farouki, R.T, Pythagorean-hodograph curves in practical use, in: Barnhill, R.E. ed., *Geometry Processing For Design and Manufacturing*, SIAM: Philadelphia, PA, 1992, 3-33
- [7] Farouki, R.T., Shah, S., Real-time CNC interpolators for Pythagorean hodograph curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1996, 13: 583-600
- [8] Pottmann, H., Rational curves and surfaces with rational offsets, *Computer Aided Geometric design*, 1995, 12(2): 175-192
- [9] Martin, R.R., Stephenson, PC, Sweeping of three-dimensional objects, *Computer Aided Design*, 1990, 22(4): 223—234
- [10] Farouki, R.T., Exact offset procedures for simple solids, *Computer Aided Geometric Design*, 1985, 2(4): 257-279
- [11] Martin, R.R., Principal Patches-A New Class of Surface Patch Based on Differential Geometry. in: Hagen P J, eds. , *Proc. Eurographics'83*, North-Holland, Amsterdam
- [12] Peternell, M., Pottmann, H., A Laguerre geometric approach to rational offsets, *Computer Aided Geometric design*, 1998, 15(3): 223-249
- [13] deBoor, C., Hollig, K., Sabin, M., High accuracy geometric hermite interpolation, *Computer Aided Geometric Design*, 1987, 4(4): 269-278
- [14] Farouki, R.T., Neff, C.A., Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics, *Mathmatics of Computation*, 1995, 64(212): 1589-1609
- [15] Meek, D.S., Walton, D.J., Geometric Hermite interpolation with Tschirnhausen cubics, *Journal of Computational and Applied Mathmatics*, 1997, 81(2): 299-309
- [16] Cobb, E.S., Design of sculptured surfaces using the B-spline representation,

Phd Dissertation University of Utah, USA (Jun 1984)

- [17] Coquillart, S., Computing offsets of B-spline curves, *Computer Aided design*, 1987, 19(6): 305-309
- [18] Tiller, W., Hanson, E.G., Offsets of two-dimensional profiles, *IEEE Comput. Graph.& Applic*, 1984, 4(9): 36-46
- [19] Elber, G., Cohen, E., Offset approximation improvement by control points perturbation, In: Lyche T, Schumaker L L, editors. *Mathematical methods in computer aided geometric design II*, 1992, 229-237, New York
- [20] Elber, G., Cohen, E., Error bounded variable distance offset operator for free form curves and surfaces. *International Journal of Computational Geometry and Application*, 1991, 1(1): 67-78
- [21] Lee, I.K., Kim, M.S., Elber, G., Planar curve offset based on circle approximation. *Computer Aided Design*, 1996, 28(8): 617-630
- [22] Klass, R., An offset spline approximation for plane cubic splines, *Computer Aided design*, 1983, 15(4): 297-299
- [23] Pham, B., Offset approximation of uniform B-splines, *Computer Aided design*, 1988, 20(8): 471-474
- [24] Hoscheck, J., Spline approximation of offset curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1988, 20(1): 33-40
- [25] Hoscheck, J., Wissel N, Optimal approximate conversion of spline curves and spline approximation of offset curves, *Computer Aided Design*, 1988, 20(8): 475-483
- [26] Sederberg, T.W., Buehler D B. Offsets of polynomial Bézier curves: Hermite approximation with error bounds, In: Lyche T, Schumaker L L, editors. *Mathematical methods in computer aided geometric design II*, 1992, 549-558
- [27] Piegl, L.A., Tiller, W., Computing offsets of NURBS curves and surfaces. *Computer Aided Design* 1999; 31(2):147-156
- [28] Li, Y.M., Hsu, V.Y., Curve offsetting based on Legendre series. *Computer Aided Geometric Design*, 1998; 15(7): 711-720
- [29] Farouki, R.T., The approximation of non-degenerate offset surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 1986, 3(1): 15-43
- [30] Chiang, C.S., Hoffmann, C.M., Lynch, R.E., How to compute offsets without self-intersection. In: Silbermann, MJ, Tagare, D. Editors. *Proceedings of SPIE conference on curves and surfaces in computer vision and graphics II*, 1991, 1610: 76-87, Boston, Massachusetts
- [31] Kimmel, R., Bruckstein, A.M., Shape offsets via level sets, *Computer Aided*

Design, 1993, 25(3): 154-162

- [32] Maekawa, T., Patrikalakis, N.M., Computation of singularities and intersections of offsets of planar curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1993, 10(5): 407-429
- [33] Maekawa, T., Patrikalakis, N.M., Sakkalis, T., Yu, G., Analysis and applications of pipe surfaces. *Computer Aided Geometric Design* 1998; 15(5): 437-458
- [34] Maekawa, T., Self-intersections of offsets of quadratic surfaces: Part I, explicit surfaces. *Engineering with Computers* 1998; 14: 1-13
- [35] Maekawa, T., Self-intersections of offsets of quadratic surfaces: Part II, implicit surfaces. *Engineering with Computers* 1998; 14: 14-22
- [36] Chen, Y.I., Ravani, B., Offset surface generation and contouring in computer aided design. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design: ASME Transactions* 1987, 109(3): 133-142
- [37] Aomura, S., Uehara, T., Self-intersection of an offset surface. *Computer Aided Design* 1990; 22(7): 417-422
- [38] Vafiadou, M.E., Patrikalakis, N.M., Interrogation of offsets of polynomial surface patches. In: Post FH, Barth W, editors. *Eurographics'91, Proceedings of the 12<sup>th</sup> Annual European Association for Computer Graphics Conference and Exhibition*, pp. 247-59 and 538, Vienna, Austria, September 1991. Amsterdam: North Holland
- [39] Maekawa, T., Cho, W., Patrikalakis, N.M., Computation of self-intersections of offsets of Bézier surface patches. *Journal of Mechanical Design: ASME Transactions* 1997; 119(2): 275-283
- [40] Pottmann, H., General offset surfaces, *Neural Parallel and scientific Computations*, 1997, 5: 55-80
- [41] Patrikalakis, N.M., Bardis, L., Offsets of curves on rational B-spline surfaces. *Engineering with Computers* 1989; 5: 39-46
- [42] Rausch, T., Wolter, F.E., Sniehotta, O., Computation of medial curves on surfaces. In: Goodman, T., Martin, R., Editors. *The Mathematics of Surfaces VII*, pp. 43-68. *Information Geometers*, 1997
- [43] Kunze, R., Wolter, F.E., Rausch, T., Geodesic Voronoi diagrams on parametric surfaces. In: *Proceedings of Computer Graphics International. CGI'97*, June 1997, pp.230-237. IEEE Computer Society Press, 1997
- [44] Brechner, E.L., General tool offset curves and surfaces. In: RE Barnhill, editor. *Geometry processing for design and manufacturing*, SIAM, 1992, pp. 101-121

- [45] Pottmann, H., Wallner, J., Glaeser, G., Ravani, B., Geometric criteria for gouge free three axis milling of sculptured surfaces. In: Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences, Atlanta, Georgia. September 13-16 1998
- [46] Alhanaty, M., Bercovier, M., Shapes with offsets of nearly constant surface area. Computer Aided Design 1999; 31(4): 287-296
- [47] Farouki R T, Sakkalis T. Pythagorean hodographs, IBM Journal of Research and Development, 1990, 34(5): 736-752
- [48] Elber, G., Lee, I.K., Kim, M.S., Comparing offset curve approximation methods, IEEE Computer Graphics and Applications, 1997, 17(3): 62-71
- [49] 吕伟,有理等距曲线及其应用,浙江大学学报,1993, 12月增刊,29-37
- [50] Lü Wei, Offsets-rational parametric plane curves, Computer Aided Geometric design, 1995, 12: 601-616
- [51] Zheng Jianmin, On rational representation of offset curves, Chinese Science Bulletin, 1995, 40(1): 9-10
- [52] Farouki, R.T., Sederberg, T.W., Analysis of the offset to a parabola, Computer Aided Geometric Design, 1995, 12(6): 639-645
- [53] Pottmann H, Lü Wei, Ravani B. Rational ruled surfaces and their offsets, Graphical Models and Image Processing, 1996, 58(6): 544-552
- [54] Lü Wei, Rationality of the offsets to algebraic curves and surfaces, Applied Math., JCU, 1994, 9: B, 265-278
- [55] Lü Wei, Rational parameterization of quadrics and their offsets, Computing, 1996, 57(2): 135-147
- [56] Lü Wei, Pottmann H, Pipe surfaces with rational spine curve are rational, Computer Aided Geometric Design, 1996, 13: 621-628
- [57] 陈国栋, 王国瑾, 五次PH曲线的Hermite插值, 软件学报即将发表
- [58] 陈国栋, 王国瑾, 双三次PH曲线的C1 Hermite插值, 已投中国图形图象学报
- [59] 陈国栋, 王国瑾, 有理等距曲线的Hermite插值, 工程图学学报, 2000, 21(3): 64-69
- [60] 刘利刚, 王国瑾, 基于控制顶点偏移的等距曲线最优逼近, 软件学报即将发表
- [61] 刘利刚, 王国瑾, 基于球面三角网格逼近的等距曲线逼近算法, 工程图学学报, 2000, 21(3): 70-75
- [62] 寿华好, 刘利刚, 王国瑾, 基于刘徽割圆术的等距曲线逼近算法, 高校应用数学学报

- [63] 施法中, 计算机辅助几何设计与非均匀有理B样条, 北京航空航天大学出版社, 1994
- [64] 梅向明, 微分几何, 高等教育出版社, 1995
- [65] 韩西安, 叶正麟, 黄希利, Pythagorean Bézier 速端曲线及其性质, 计算机辅助设计与图形学学报, 1999, 11(4)
- [66] 陈远宁, 陈琳, 一种构造三次 PH 曲线的几何方法, 大学数学, 已录用
- [67] 马元魁, PH曲线理论及应用研究, 硕士论文
- [68] 陈国栋, 王国瑾, 三次PH曲线偶的 $C^1$  Hermite插值[J].计算机研究与发展 2002, 39(1): 110-113.
- [69] 马元魁, 张天平, 康宝生, 平面三次PH曲线偶 $C^1$  Hermite插值解的构造和形状分析, 计算机应用与软件2006, 123(8)
- [70] H. P. Moon, R. T. Farouki, H. I. Choi, Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants. Computer Aided Geometric Design,2001, 18: 93~115.
- [71] R. T. Farouki, H. P. Moon, B. Rarani. Algorithms for Minkowski products and implicitly-defined complex sets. Advances in Computational Mathematics, 2000, 13: 199~299.
- [72] 郑志浩, 汪国昭, 用三次 PH 曲线构造平面 Bézier 曲线的等距线算法[J] 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(3): 324-330.
- [73] 王国瑾、汪国昭, 郑建民著《计算机辅助几何设计》高等教育出版社, 施普林格出版社, 2001