chapter3

计63 肖朝军 2016011302

第6题

- **解题思路**：该题主要需要利用 `cholesky` 算法对 `Hilbert` 矩阵进行分解，再利用分解结果来求解方程，并计算求解结果的残差及误差。
- **代码**：

```
function ans = cholesky(n, x)
    % 生成参数
    H = hilb(n);
    b = H * x;
    A = H;

    % cholesky分解主体
    for j = 1:n
        for k = 1:j-1
            A(j, j) = A(j, j) - A(j, k)^2;
        end
        A(j, j) = sqrt(A(j, j));

        for i = j+1:n
            for k = 1:j-1
                A(i, j) = A(i, j) - A(i, k) * A(j, k);
            end
            A(i, j) = A(i, j)/A(j, j);
        end
    end
    L = A;

    % 将上三角部分清零
    for i = 1:n
        for j = i+1:n
            L(i,j) = 0;
        end
    end

    % 求解方程
    y = L\b;
    x_ = L.'\y;

    % 计算残差
    r = b - H * x_;

    % 计算误差
```

```
    deltx = x_ - x;

    rnorm = norm(r, inf);
    xnorm = norm(deltx, inf);

    fprintf('the value of residual is %f\n\n', rnorm);
    fprintf('the value of error is %f\n\n', xnorm);

    ans = [rnorm, xnorm]
end
```

- **问题回答**:

$$
\begin{gathered}
(1) n=10\text{时}, ||\mathbf{r}||_\infty = 4.4409\times 10^{-16}, \ ||\mathbf{\Delta x}||_\infty = 4.05\times 10^{-4} \\
(2)\text{在右端项加上扰动之后}, \ ||\mathbf{r}||_\infty = 4.4409\times 10^{-16}, \ ||\mathbf{\Delta x}||_\infty = 5.875\times 10^{-4} \\
(3) n=8\text{时}, \ ||\mathbf{r}||_\infty = 4.4409\times 10^{-16}, \ ||\mathbf{\Delta x}||_\infty = 7.013\times 10^{-6}; \\
n=12\text{时}, \ ||\mathbf{r}||_\infty = 4.4409\times 10^{-16}, \ ||\mathbf{\Delta x}||_\infty = 5.5272\times 10^{-2}
\end{gathered}
$$

n	r_norm	delta_x_norm	r_norm扰动	delta_x_norm扰动
8	4.44*10^-16	1*10^-6	2.22*10^-16	2.183*10^-7
10	4.44*10^-16	4.05*10^-4	4.44*10^1-6	7.013*10^-6
12	4.44*10^-16	0.05527	8.88*10^-16	0.07848

可以看到，当右端项扰动1e-7时，残差无太大变化，误差略有增大；残差对于n的取值不敏感，误差对于n的取值非常敏感，当n小时，误差小，n大时，误差增大。这个实验进一步说明了 `Hilbert` 矩阵的病态性，阶数大，矩阵条件数大。