VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Domácí úkol z předmětu IMA

Sada 1 | 3. část

Daniel Čejchan
Martin Domin
Maroš Cocul'a
Filip Pobořil
Lukáš Procházka
Pavel Staněk

2015

1 | Příklad 1

Všimli jsme si, že vzorec

$$\frac{1}{1-(x-1)^5} \tag{1.1}$$

odpovídá vzorci součtu geometrické řady

$$\frac{a_1}{1-q} \qquad \text{pro } |q| < 1 \tag{1.2}$$

kde $a_1 = 1$ a $q = (x-1)^5$.

Musí platit, že $\left|(x-1)^5\right| < 1$, tedy $|x-1| < 1$. Z toho vyplývá, že střed konvergence výrazu je $x_0 = 1$ a poloměr konvergence $r = 1$.

Protože integrál je v intervalu $[\frac{1}{2}, 1]$, což leží v intervalu $[1-1, 1+2] = [0, 2]$, lze zadání přepsat do formy:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{5(n-1)} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} (x-1)^{5n-5}\, dx \right) \tag{1.3}$$

Spočteme integrál:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (x-1)^{5n-5}\, dx = \left[\frac{(x-1)^{5n-4}}{5n-4} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 0 - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{5n-4}}{5n-4} \tag{1.4}$$

A vyjde nám:

$$I = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{5n-4} \cdot (5n-4)} \tag{1.5}$$

Zkusíme spočíst několik prvních částí řady:

$$a_1 = \frac{1}{(-2)^{5-4} \cdot (5-4)} = -\frac{1}{2} \tag{1.6}$$

$$a_2 = \frac{1}{(-2)^{10-4} \cdot (10-4)} = \frac{1}{(-2)^6 \cdot (6)} = \frac{1}{64 * 6} \doteq 0,0026 \tag{1.7}$$

$$a_3 = \frac{1}{(-2)^{15-4} \cdot (15-4)} = \frac{1}{(-2)^{11} \cdot (11)} = -\frac{1}{2048 * 11} \tag{1.8}$$

Pro a_3 platí, že $|a_3| < 0,0001$, tedy ho už ze součtu můžeme vynechat. Výsledkem tedy je:

$$I = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{384} \right) \pm 0,0001 \doteq (-0,49740) \pm 0,0001 \tag{1.9}$$

2 | Příklad 2

Uvědomíme si, že zadání lze přepsat jako:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \tag{2.1}$$

V tomto podání lze výraz v sumě snadno zintegrovat podle x:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^{n}\right)' \tag{2.2}$$

V intervalu x, pro které řada konverguje, můžeme derivaci převést před sumu. Obor konvergence tím nezměníme.

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^{n}\right)' = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n}\right)' \tag{2.3}$$

Takováto suma odpovídá geometrické řadě, kde

$$\begin{aligned} a_1 &= x - \frac{1}{2} \\ q &= x - \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Součet této řady známe, je to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} - x} = -\frac{\frac{3}{2} - x - 1}{\frac{3}{2} - x} = \frac{1}{\frac{3}{2} - x} - 1 \tag{2.5}$$

Pro obor konvergence této řady platí:

$$\begin{gathered} |q| < 1 \\ \left|x - \frac{1}{2}\right| < 1 \\ x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Nyní dosadíme součet do výrazu 2.3:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{3}{2} - x} - 1\right)' = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{2} - x\right)^2} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2} - x\right)^2} \tag{2.7}$$

A toto je náš výsledek.

3 | Příklad 3

Výraz pod odmocninou musí být větší nebo roven nule, tedy

$$\begin{aligned} \cos \pi x + y &\geq 0 \\ y &\geq -\cos \pi x \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dále, výraz v logaritmu musí být větší jak nula, tedy

$$\begin{aligned} \cos \pi x - y &> 0 \\ y &< \cos \pi x \end{aligned} \tag{3.2}$$

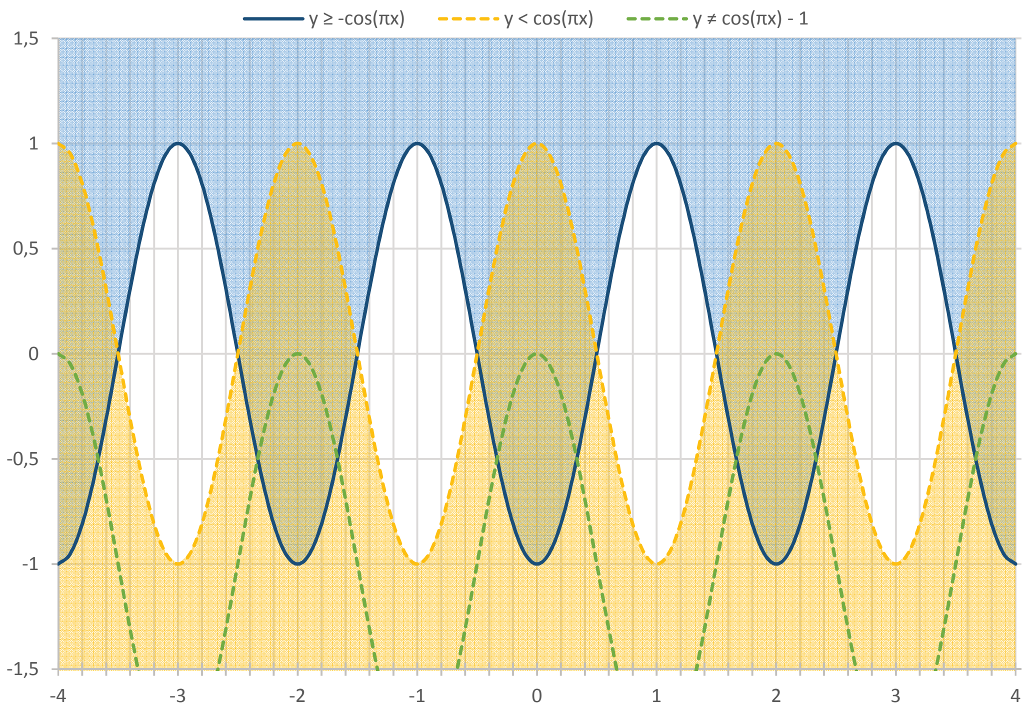
A jako poslední, dělitel nesmí být roven nule, tedy

$$\begin{aligned} \ln(\cos \pi x - y) &\neq 0 \\ \cos \pi x - y &\neq 1 \\ y &\neq \cos \pi x - 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Konjunkce těchto podmínek tedy je:

$$y \geq -\cos \pi x \wedge y < \cos \pi x \wedge y \neq \cos \pi x - 1 \tag{3.4}$$

Zakresleno:



(3.5)

4 | Příklad 4

Nejdříve upravíme zadání:

$$f(x,y) = 2x^3 + 6x^2 + xy^2 + y^2 \tag{4.1}$$

Zderivujeme podle x a y:

$$f'_x = 6x^2 + 12x + y^2 \tag{4.2}$$

$$f'_y = 2xy + 2y = 2y(x+1) \tag{4.3}$$

Vyřešíme rovnici 4.3 proti nule:

$$2y(x+1) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = -1 \tag{4.4}$$

A dosadíme do rovnice 4.2:

$$\begin{aligned}
y = 0 \Rightarrow \quad & 6x^2 + 12x = 0 \\
& 6x(x+2) = 0 \\
& \\
& y = 0 \wedge (x = 0 \vee x = -2) \\
& \\
x = -1 \Rightarrow \quad & 6 \cdot (-1)^2 + 12 \cdot (-1) + y^2 = 0 \\
& 6 - 12 + y^2 = 0 \\
& y^2 = 6 \\
& \\
& x = -1 \wedge (y = \sqrt{6} \vee y = -\sqrt{6})
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Vyšly nám tedy následující dvojice pro potenciální extrémy:

$$\left\{(0,0); (-2,0); (-1,\sqrt{6}); (-1,-\sqrt{6})\right\} \tag{4.6}$$

Nyní spočteme druhé derivace:

$$\begin{aligned}
f''_{xy} &= f''_{yx} = 2y \\
f''_{xx} &= 12x + 12 \\
f''_{yy} &= 2x + 2
\end{aligned} \tag{4.7}$$

A pro každý potenciální extrém spočteme determinant D_2:

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} \\
D_2(0,0) &= \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 \\
D_2(-2,0) &= \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 24 \\
D_2(-1,\sqrt{6}) &= \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} = -24 \\
D_2(-1,\sqrt{6}) &= \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} = -24
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Extrémy jsou tedy v bodech $\{(0,0);(-2,0)\}$, přičemž v bodě $(0,0)$ je maximum a v bodě $(-2,0)$ je minimum.