Coma Tut 24.11.2015

A3

$x, y, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$x + y = s$

a) $\breve{x} \times \breve{y} \neq \breve{s}$

$x = 10{,}2 \qquad y = 1{,}3$

$\breve{x} = 10 \quad \breve{y} = 1 \quad \breve{s} = 12$

b) $|\breve{x} + \breve{y} - \breve{s}| \leq 4\, |\breve{s}|\, eps$ $\qquad eps \leq 0{,}5$

$|\underbrace{x(1+\varepsilon_x) + y(1+\varepsilon_y)}_{c>0} - s(1+\varepsilon_s)|$

$\Rightarrow |x(1+eps) + y \overset{(1 \times eps)}{\cancel{\tfrac{3}{2}}} - s \overset{(1-eps)}{\cancel{\tfrac{1}{2}}}|$

$\cancel{= |(x+y)\tfrac{3}{2} - s\tfrac{1}{2}|}$

$\cancel{|s \cdot \tfrac{3}{2} - s \cdot \tfrac{1}{2}| = |s| \cdot 1}$

$\cancel{s \cdot \tfrac{1}{2} = |s|}$

$|x + y\ (1 \times eps) - s(1-eps)|$

$|s|\, |(1 + eps - 1 + eps)|$

$|s| \cdot |2|\, |eps|$

$\breve{x} = x(1+\varepsilon_x)$

$|\varepsilon_x| \leq eps$

$eps \geq \frac{|s - \breve{s}|}{|s|} = \frac{|s - s(1+\varepsilon_s)|}{|s|}$

$|s|\, eps \geq |s - \breve{s}| \geq |s| - |\breve{s}|$

$\Rightarrow |\breve{s}| + |s|\, eps \geq |s|$

$|\breve{s}| \geq |s| \cdot (1 - eps)$

$|\breve{s}| \geq \frac{1}{2} |s|$

$2 |\breve{s}| \geq |s|$

Kondition Teil 2

selbst def. was abs Kond der Subtraktion beträgt

Satz $K_{rel} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} K_{abs}$ $\qquad \frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq K_{abs} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} \cdot \frac{|x_0|}{|f(x_0)|}$

---

allg. Modellproblem: $\qquad g : I \to \mathbb{R}$

finde x^* sodass $g(x^*) = y^*$ $\quad (*)$

absolute Kondition

$$|x^* - x| \leq K_{abs} |y^* - y|$$

~~Existenz und~~

Existenz und Eindeutigkeit von gestörten Lösungen

Lemma: g stetig diffbar, $g(x^*) = y^*$, $g'(x^*) \neq 0$

$\Rightarrow$ existiert α, β sodass für $y \in (g(\alpha), g(\beta))$

eine eindeutige Lösung $x \in (\alpha, \beta) =: U$ existiert.

$\Rightarrow$ existiert eine Umkehrfunktion $g^{-1} : V \to U$

$\rightsquigarrow$ Äquivalentes Problem

Auswerten von $g^{-1}(y^*)$

<u>Lemma:</u> Vor: wie für Existenz und Eindeutigkeit

$\Rightarrow g^{-1}$ differenzierbar in y und $(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(x)}$

$\rightsquigarrow \kappa_{abs}$ von $(x) = \frac{1}{|g'(x)|}$

<u>relative Kondition</u>

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \kappa_{rel} \frac{|y^* - y|}{|y^*|}$$

<u>Satz:</u> $\kappa_{rel} = \frac{|g(x^*)|}{|x^*| \, |g'(x^*)|}$

Näherungsverfahren: x_n $\quad x_n \rightarrow x^*$

$$\frac{|x^* - x_n|}{|x^*|} \leq tol$$

$\boxed{tol = \text{tolleranz}}$

$$\Rightarrow \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \kappa_{rel} \frac{|y^* - y|}{|y^*|} \leq \kappa_{rel} \, eps \sim Tol$$

$\rightsquigarrow$ Schlecht konditionierte Probleme lassen sich nur schlecht approximieren

gehören zusammen

Kondition hängt vom Problem ab.

<u>Drei-Term-Rekursion</u> ← für Aufgabe (steht auch im Skript)

$x_{k+1} + a x_k + b x_{k-1} = 0$

geschlossene Darstellung $x_k = \alpha(x_0, x_1) \lambda_1^k + \beta(x_0, x_1) \lambda_2^k$

$$\alpha = \frac{\lambda_2 x_0 - x_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \beta = \frac{x_1 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

λ_1, λ_2 Nullstellen von $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, $\quad |\lambda_2| \geq |\lambda_1|$

$$f^k(x_0) = \alpha(x_0) \lambda_1^k + \beta(x_0) \lambda_2^k$$