3. Übungszettel zur Vorlesung „Computerorientierte Mathematik I“

Wintersemester 2012/13

Prof. Dr. Rupert Klein
Anna Hartkopf, Martin Götze

Abgabe in die Tutorenfächer oder im Tutorium
bis spätestens Donnerstag, den 22. November 2012, 18^{00}

Aufgabe 1. *Vergleichen!* [4 Punkte]
Wir betrachten eine Gleitkommadarstellung $\mathbb{G}(q,\ell)$ mit $\mathrm{eps} := \mathrm{eps}(q,\ell) \le \frac{1}{2}$. Für drei reelle Zahlen $x, y, s \in [0,\infty)$ betrachte die folgenden Aussagen:

(1) $s = x + y$,

(2) $\mathrm{rd}(s) = \mathrm{rd}(x) + \mathrm{rd}(y)$,

(3) $|\mathrm{rd}(s) - \mathrm{rd}(x) - \mathrm{rd}(y)| \le 4\mathrm{eps}\,|\mathrm{rd}(s)|$.

Wir wollen (1) mit einem Rechner, der nur $\mathrm{rd}(x)$, $\mathrm{rd}(y)$ und $\mathrm{rd}(s)$ darstellen kann, überprüfen. Wir haben die beiden Alternativen (2) und (3) als Vorschläge für Gleichheitstests. Zeigen Sie, dass (3) der bessere ist, indem Sie nachweisen, dass im Allgemeinen zwar (1) $\Rightarrow$ (3), aber (1) $\not\Rightarrow$ (2) gilt.

Aufgabe 2. *Bestimmen!* [8 Punkte]
In der Vorlesung wurde die Maschinengenauigkeit $\mathrm{eps} = \mathrm{eps}(q,\ell)$ einer Gleitkommadarstellung als $\frac{1}{2}q^{1-\ell}$ definiert, also als der größte auftretende relative Rundungsfehler. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{eps} = \min\{x \in \mathbb{G}(q,\ell) \mid \mathrm{rd}(1+x) > 1\}$$

Nutzen Sie das, um ein Matlab- oder Octave-Programm zu schreiben, das eps auf Ihrem Rechner bestimmt.

Wenn Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der internen Funktion `eps` überprüfen wollen, achten Sie darauf, dass diese Funktion von einer leicht anderen Definition der Maschinengenauigkeit ausgeht. Ihr eps muss mit `2*eps` übereinstimmen.

Aufgabe 3. *Approximieren!* [4 Punkte]
Für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{G}(q,\ell)$ betrachten wir die Eigenschaft

$$|x - f(x)| \le |x - \tilde{x}|\,, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \tilde{x} \in \mathbb{G}(q,\ell) \qquad (\mathrm{B}_f)$$

Was bedeutet diese Eigenschaft anschaulich?

Überprüfen Sie, ob für die in der Vorlesung definierte Funktion $\mathrm{rd}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{G}(q,\ell)$ die Eigenschaft $(\mathrm{B}_{\mathrm{rd}})$ erfüllt ist. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4. *Vernachlässigen!* [4 Punkte]

(i) Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = o(x)$ und $g(x) = o(x)$ für $x \to 0$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen oder widerlegen Sie

- $\alpha f(x) + \beta g(x) = o(x)$, $x \to 0$,
- $f(x) \cdot g(x) = o(x)$, $x \to 0$,
- Sei zusätzlich $g(x) \neq 0$ für $x \neq 0$. Gilt $\frac{f(x)}{g(x)} = o(x)$ für $x \to 0$?

(ii) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Betrachte die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(\varepsilon) = \varepsilon \sin(\varepsilon x)$. Zeigen Sie, dass $f(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ für $\varepsilon \to 0$. Gilt sogar $f(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)$ für $\varepsilon \to 0$?