

PROBEKLAUSUR

Hinweis: Die Aufgaben sind NICHT nach Relevanz geordnet! Bearbeiten Sie zunächst die Aufgaben, die Ihnen am wichtigsten erscheinen bzw. wo Sie die größten Defizite aufweisen!

Aufgabe 1: (Wahr oder nicht wahr- das ist hier die Frage...)

	Aussage	Wahr	Falsch
1	Reelle Zahlen lassen sich im Computer eindeutig darstellen.		X
2	$\mathbb{G}(q, l)$ ist abgeschlossen bezüglich der Addition.		X
3	Die Kondition ist die Eigenschaft eines Problems.	X	
4	$f(x) := x^2 \Rightarrow \kappa_{abs}(x) = 2x$.		X
5	Sei $A = L \cdot R$. Ohne Zeilentausch gilt: Die erste Zeile von A entspricht immer der ersten Zeile von R .	X	
6	Für Lipschitz-stetige Funktionen gilt: $\kappa_{rel} \leq L$ (L ist Lipschitz-Konstante).		X
7	$f(x) := x! \Rightarrow f(x) = O(x)$ für $x \rightarrow \infty$.		X
8	Der relative Rundungsfehler ist nie größer als die Maschinengenauigkeit.	X	
9	Jeder endliche fünfstellige Bruch ist ein endlicher Dezimalbruch.	X	
10	\forall Matrizen $A : \kappa(A) > 1$.		X
11	Sei $f(x) = e^x$. Dann gilt $\forall x \in \mathbb{R} : \kappa_{rel}(x) \leq \kappa_{abs}(x)$.		X
12	$f(x) = O(g(x)) \Rightarrow f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow \infty$.		X
13	$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$ für $x \rightarrow \infty$.	X	
14	Ich bin (und wurde) sehr gut auf die CoMa-Klausur vorbereitet, sodass mich -fast- nichts mehr abschrecken kann.	X	

Aufgabe 2: (It's now time to make a change...)

Wandeln Sie folgende Zahlen in die angegebene Basis um:

a) $1221_3 = x_2$

b) $3,1415_{10} = x_{20}$

c) $ADCF_{16} = x_{10}$

d) Berechnen Sie: $123_q \cdot 345_q$ für $q = 10, 9, 8$

Aufgabe 3: (Mit Kondition kommt man durch's Leben...)

a) Welche Werte haben die Konditionen der Funktion $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ in Abhängigkeit von x_0 ? Kann man die Funktionsauswertung vereinfachen?

b) Definieren Sie den Begriff "relative Kondition"! Veranschaulichen Sie die absolute Kondition am Beispiel einer linearen Funktion!

Aufgabe 4: (Ich glaub', mich laust ein Drei-Term-Affe...)

Auf einem bisher lausfreien Affen sind 10 Läuse geboren¹. Jede Laus legt jeden Tag 10 Eier außer an dem Tag, an dem sie geboren wurde. An diesem legt sie nur 5 Eier. Aus jedem Ei schlüpft nach einem Tag eine neue Laus. Wie viele Läuse hat der Affe nach 20 Tagen unter der Voraussetzung, dass keine Laus stirbt?

Aufgabe 5: (Steht das Bäumchen sehr stabil, stört die Störung ihn nicht viel...)

Geben Sie für folgende Funktionen eine obere Schranke für die Stabilität an!

a) $f(x) = g_1(g_2(x)) + g_3(x)$ mit $g_1(x) = x^2$, $g_2(y) = y - 5$, $g_3(x) = 2e^x$.

b) $f(x) = (g_1(x) + g_2(x)) \cdot g_3(x)$ mit $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = \sqrt{x}$, $g_3(x) = 17x$.

Aufgabe 6: (Kriegst Du ein LGS nicht 'raus, benutze das Verfahr'n von Gauß...)

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmuses, ohne zuvor in eine andere Darstellung umzurechnen- also auch nicht ins Dezimalsystem!

Geben Sie die Rechenschritte nachvollziehbar an!

(Tipp: Was Sie bei dieser Aufgabe -und in der Klausur- auf einem Schmierzettel rechnen, den Sie nicht abgeben, sieht keiner...)

$$\begin{pmatrix} 14_5 & 1_5 \\ 33_5 & 24_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100_5 \\ -101_5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: (Frau L und Herr R - ein untrennbares Gespann...)

Bilden Sie die LR-Zerlegung der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Wozu dient die LR-Zerlegung? Berechnen Sie $\kappa(A)$!

$$(\text{Hinweis: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix})$$

¹Die Erklärung, wie es biologisch möglich ist, dass aus dem Nichts Läuse auf den Affen kommen, bleibt den Bioinformatikern bzw. Biologie-Haupt-/Nebenfächlern vorbehalten :-). Als Mathematiker nimmt man es als gegeben hin und macht sich über die Sinnhaftigkeit der Aussage keine Gedanken :-). ...

Aufgabe 8: (Suchet, so werdet ihr finden...)

Gegeben ist ein fehlerhafter Code! Ohne Fehler rechnet das Programm die einzugebene Zahl n in eine beliebige Basis q um. Als Output erhält man einen Vektor z mit den Koeffizienten $z_i \in \{1, \dots, q-1\}$ als Einträge.

```
1 function z = dec2basis(n)
2
3 if (n==0)
4     erg = 0;
5 else
6     erg = [ ];
7 end;
8     n != 0
9 while (n!=0)
10     erg = [mod(n,q), erg];
11     n = floor(n/q);
12 end
13 end
14 z = erg
```

Finden Sie alle fünf Fehler und geben Sie an, wie diese ausgebessert werden müssen!
Hinweis: Zeile 2, 8 und 13 sind wegen der Übersichtlichkeit leer!

Aufgabe 9: (Vater v , Mutter M und die kleine Norm...)

Sei $V = \mathbb{R}^N$, sei M eine symmetrische $N \times N$ -Matrix mit vollem Rang.

Beweisen oder widerlegen Sie: $\|\cdot\|$, gegeben durch $\|v\| = \sqrt{|v^T M v|}$ mit $v \in V$, bildet eine Norm auf V . Falls nein, welche Bedingung muss man noch an M stellen?

Aufgabe 10: (Erst der Aufwand, dann die Maß...)

Sei n eine Zweierpotenz, also $n = 2^j$ für ein $j \in \mathbb{N}$, und sei $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ eine Folge von Zahlen. Berechnen Sie den Aufwand, der nötig ist, um die Summe

$$A = \sum_{i=1}^n a_i$$

mittels hierarchischer Summation auszurechnen. Wählen Sie dazu ein geeignetes Aufwandsmaß und geben Sie den Aufwand als Funktion von n an!

Aufgabe 11: (Code \neq Kot !!!)

Gegeben sei folgender Code:

```
function s=prog(a)
if length(a)==1
    s=a;
    return;
elseif isempty(a)==1
    s=[];
    return;
end
i=floor(length(a)/2+1);
middle=[];
lower=[];
higher=[];
for j=1:length(a)
    if a(j)==a(i)
        middle=[middle a(j)];
    elseif a(j)<a(i)
        lower=[lower a(j)];
    elseif a(j)>a(i)
        higher=[higher a(j)];
    end
end
lower=prog(lower);
higher=prog(higher);
s=[lower middle higher];
```

Welche Ausgabe liefert das Programm für $a = 7:-1:1 = [7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1]$?

Ob HA, ob ALDaBi,
ob Algebra/Zahlentheorie,
ob Ana, CoMa oder LinA,
ob Theo, Exp oder ob Dida,
ob Stochi oder and'res "nur":

!!! GANZ VIEL ERFOLG BEI DER KLAUSUR !!!