4. Übungszettel zur Vorlesung „Computerorientierte Mathematik I“

Wintersemester 2012/13

Prof. Dr. Rupert Klein
Anna Hartkopf, Martin Götze

Abgabe in die Tutorenfächer oder im Tutorium bis spätestens Donnerstag, den 29. November 2012, 18^{00}

Aufgabe 1. *Konditionstraining I* [5 Punkte]

(i) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die absolute Kondition der folgenden Abbildungen an der Stelle x_0:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\pi}{2}$,

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^3$.

(ii) Geben Sie eine Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und zwei Stellen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ an, so dass die Auswertung von h in x_1 im Sinne der absoluten Kondition gut, die von h in x_2 im Sinne der absoluten Kondition schlecht konditioniert ist. Verwenden Sie keines der Beispiele aus (i).

Aufgabe 2. *Konditionstraining II* [5 Punkte]
Wir betrachten die Gleichungen

$$x^n - c = 0 \tag{1_n}$$

und

$$mx + b = 0. \tag{2}$$

Wir betrachten das Problem der Bestimmung von x bei Störung von c in (1_n) bzw. von m in (2) bei festgehaltenem b. Bestimmen Sie jeweils die absolute Kondition κ_{abs}.

Veranschaulichen Sie sich und Ihrem Tutor Ihre Ergebnisse anhand zweier Graphiken.

Aufgabe 3. *Training am Gerät* [5 Punkte]
Wir betrachten die Funktionen $v, w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^5$ mit

$$v(x) = \left(x^2, x^2, x^2, (1-x)^2, (1-x)^2\right)^t$$
$$w(x) = \left(x^2, 4x(1-x), 6(1-x)^2, 4x(1-x), (1-x)^2\right)^t$$

(Dabei bezeichnet ^{t} das Transponieren, d. h. $w(x)$ und $v(x)$ sind Spaltenvektoren, die nur des Platzes wegen als Zeilen geschrieben sind).

(i) Schreiben Sie eine MATLAB- oder OCTAVE-Funktion `skalarprodukt(x)`, die bei Übergabe von x das Skalarprodukt

$$\langle v(x), w(x)\rangle := \sum_{i=1}^{5} v_i(x)w_i(x)$$

berechnet.

(ii) Rufen Sie Ihre Funktion mit den Werten

$$x_i = 10^i \pi, \qquad 0 \le i \le 6$$

auf. Was beobachten Sie?

(iii) Versuchen Sie, Ihre Implementierung durch Ausnutzung der konkreten Werte von $x \mapsto \langle v(x), w(x)\rangle$ zu verbessern, d. h. auch für Werte von x mit $|x| \gg 1$ genauer zu machen.

Aufgabe 4. *Jetzt wieder Kondition* [5 Punkte]
Beweisen Sie folgende Verallgemeinerung des Satzes über verkettete Auswertung aus der Vorlesung:

Satz. *Seien für $1 \le i \le n$ Funktionen $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Für $x_1 \in \mathbb{R}$ definiere induktiv $x_{i+1} := f_i(x_i)$, $1 \le i \le n$. Bezeichnet $\kappa_{\text{abs}}(g, y)$ die absolute Kondition der Auswertung einer Funktion g im Punkt y, so gilt*

$$\kappa_{\text{abs}}(f_n \circ \cdots \circ f_1, x_1) \le \prod_{i=1}^{n} \kappa_{\text{abs}}(f_i, x_i).$$

Ist für jedes $1 \le i \le n$ die Funktion f_i differenzierbar in x_i, so gilt Gleichheit.

Freiwillige Zusatzaufgabe 5. *Spielereien* [0 Punkte]
Schreiben Sie eine anonyme MATLAB- oder OCTAVE-Funktion, d. h. eine Funktion der Form `decbin = @(n) ...` in *einer Zeile*, die bei Aufruf von `decbin(n)` die Binärdarstellung der natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ zurückgibt.