Teil 1 10 Punkte

R	F	Frage
X		Die absolute Kondition ist eine Eigenschaft des Problems.
X		Die Kondition einer Matrix bezüglich einer Zeilensummennorm ist immer größer gleich 1.
X		Im Intervall [99,101] gib es zwölf Zahlen in G(10,3).
X		Es gibt Funktionsauswertungen deren relative Kondition echt kleiner eins ist.
	X	Die Durchführung des Gauß'schen Algorithmus in Gleitkommaarithmetik ergibt gerundet die exakte Lösung.
X		Die Addition von Gleitkommazahlen ist nicht Assoziativ.
	X	Die Zifferndarstellung von $\mathbb{Z}$ induziert eine Zifferndarstellung in $\mathbb{R}$.
	X	Der relative Rundungsfehler ist nicht abhängig von der Maschinengenauigkeit.
	X	Die relative Kondition ist unabhängig von den Eingabedaten.
X		Für a,b ϵ Nmit a>b gilt ggT(a,b) = ggT(b,a-b)

Teil 2

1.) 2 + 2 Punkte

x = 22010_3 y = $1{,}02_3$

a.) Berechne x + y und x * y ohne in das dekadische System umzurechnen im G(3,4)
Lösung: x+y = $22011{,}02_3$ gerundet 22020_3, x*y = $\underline{\underline{100220{,}20_3}}$, gerundet $\underline{\underline{101000_3}}$

b.) Stelle x und y in G(9,3) dar.
Lösung: X = $\underline{\underline{263_9}}$ y = $\underline{\underline{1{,}2_9}}$

2.) 4+3 Punkte

a.)

Berechnen Sie die relative Kondition der Auswertungen der Funktionen

f: R->R, f(x) = 3|x+3| + 2x-4 an der Stelle x_0= -3

Lösung:

Funktion ist an der Stelle -3 nicht differenzierbar. Deshalb kann die Funktion nicht als ganzes differenziert werden. Die Lösung ist die getrennte Betrachtung der Intervalle.

$f'_1(x)$ = 3(-x-3)+2x-4 auf]-∞,3[

= -x-13 = -1

$f'_2(x)$ = 3x+9+2x-4 auf]3,+∞[

= 5x+5 = 5

$K_{abs} = \lim\ \sup_{x\to -3} \frac{|f(x)-f(-3)|}{|x=3|}$ = max i ∈ {1,2} {Lim x->-3 | $f_i'(x)$} = 5

Der linksseitige Grenzwert ist |-1|, Der rechtsseitige Grenzwert ist |5|

$K_{rel} = \frac{|x|}{|f(x)|} * K_{abs} = \frac{|-3|}{|10|} * 5 = \underline{\underline{3,2}}$

g: R->R, g(u) = $e^{\cos(4u^2)}$ an der Stelle $u_0 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$

Lösung:

$f'(x) = -8*u*\sin(4u^2)e^{\cos(4u^2)}$

$K_{abs} = |g'(\sqrt{\frac{\pi}{8}})| = -4\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ => $K_{rel} = \underline{\underline{\pi}}$

b.)

Zur Auswertung einer Funktion:

$p(x) = \sin(x-2\pi) + e^{\cos(x)}$ an der Stelle $x_0 = \pi/2$ soll folgender Algorithmus verwendet werden:

$p(x) = (h_1 \circ h_2)(x) + (h_4 \circ h_3)(x)$ mit

$h_1(x) = x-2\pi$, $h_2(x) \sin(x)$, $h_3(x) = \cos(x)$, $h_4(x)=e^x$

Berechnen Sie die obere Schranke für die Stabilität des Algorithmus.

$P(x) = \sin(x-2\pi) + e^{\cos(x)}$

$\delta h_2 \circ h_1 = 1 + \frac{|X0-2\pi)|}{|\sin(X0-2\pi)|} * |\cos(X_0-2\pi)| = 1$

$\delta h_4 \circ h_3 = 1 + \frac{|\cos(X0)|}{|e^{\cos(X0)}|} * | -\sin(x_0) * e^{\cos(X0)}| = 1$

$\delta p = 1 + K_{max}\{\delta h_2 \circ h_1, \delta h_4 \circ h_3\}$

$= 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$

3.) 2+2 Punkte

a.)

Zeigen Sie: $\frac{||\mathrm{A-rd(A)}||\infty}{||A||\infty} \leq$ eps

$$Maximum\ von \sum_{j=1}^{n} |aij - aij|$$

Bws.: $\in = Fehler$

$\frac{\max \sum_{j=1}^{n} |aij - aij(1+\epsilon ij)|}{max \sum_{j=1}^{n} |aij|} = \frac{\sum_{j=1}^{n} |aij - aij(1+\epsilon ij)|}{max \sum_{j=1}^{n} (aij)} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} |a1j - a1j(1+\epsilon ij)|}{\sum_{j=1}^{n} |a1j|} =$
$\frac{\sum_{j=1}^{n} |aij \in ij|}{\sum_{j=1}^{n} |a1j|} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} |aijEps|}{\sum_{j=1}^{n} |aij|} = Eps \frac{\sum |a1j|}{\sum |a1j|} = \underline{\mathrm{Eps}}$

b.)

Betrachten Sie die Matrix

A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Zeigen Sie $||A||\infty \leq ||A||_1$

Tipp: Als Abschätzung Def. 9.3 aus dem Skript verwenden, mit der Vektornorm $||x||_1 = \sum_{I=2}^{2} |xi|$ sowie dem Vektor $\binom{1}{0}$

Lösung: $||A||\infty = 3$

z.z.: $\left||A|\right|\infty \leq ||A||_1$

$||A||_1 = \sup x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \frac{||Ax||1}{||x||1} \geq \frac{\left||A\binom{1}{0}\right||1}{|\left|\binom{1}{0}\right||1} = \frac{|\left|\binom{2}{2}\right||1}{|\left|\binom{1}{0}\right||1} = {}^4/_1 = 4$

$||A||1 \geq 4 > 3 = \underline{\underline{||A||\infty}}$

4.)

Programmieraufgabe.

War zu viel Text zum Mitschreiben.

Lösungen:

a.) Es ist das Lösen eines linearen Gleichungssystem mittels gauß'schen Algorithmus implementiert.
b.) Der Fehler ist, dass n nicht definiert ist.
    007: n = s(1)
c.) Nur die dritte Eingabe wird akzeptiert.