Coma 1.12.2015

ÜB4

$\boxed{1\ a)}$ (1) $f(x)+g(x) = o(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} + \frac{g(x)}{x} = 0$$

(2) $\frac{f(x)}{g(x)}$

Gegen Bsp:

$f(x) = x^3 \qquad g(x) = x^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)\cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2 \cdot x} = 1 \neq 0$$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \cdot g(x) = 0$

b) z.z. $\frac{|x - rd(x)|}{|x|} = \frac{|rd(x) - x|}{|rd(x)|} + o(eps)$

$$\frac{|x - rd(x)|}{|x|} - \frac{|rd(x) - x|}{|rd(x)|} = \frac{|x - rd(x)|\,(|rd(x)| - |x|)}{|x|\,|rd(x)|}$$

$\triangle$ ungl. $\to \leq \frac{|x - rd(x)|\,|rd(x) - x|}{|x|\,|rd(x)|}$

$$= \underbrace{\frac{|x - rd(x)|^2}{|x^2|}}_{\leq eps^2} \cdot \frac{|x|}{|rd(x)|}$$

$$\leq eps^2 \cdot \frac{|x|}{|rd(x)|} = o(eps)$$

$\Rightarrow f(x) = o(eps)$

weil $\lim \frac{eps^2 \frac{|x|}{|rd(x)|}}{eps}$

$$= \lim_{eps\to 0} eps \frac{|x|}{|rd(x)|} = 0$$

$\boxed{A2}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\binom{x}{y} \mapsto x - y$

Ableitung $f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$

1-Norm: $\|x\|_1 = |x|$, $\left\|\binom{x}{y}\right\|_1 = |x| + |y|$

A Matrix in $\mathbb{R}^{n\times m}$ $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$

$\kappa_{abs} = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| = 1$

$|(x-y) - (\breve{x} - \breve{y})| \leq \kappa_{abs} \quad \varepsilon + o(\varepsilon)$

$\breve{x} = (1+\varepsilon_x)x$, $\breve{y} = (1+\varepsilon_y)y$, $\varepsilon = \max\{|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|\}$

$|(x-y) - (\breve{x} - \breve{y})| = |(x - \breve{x}) - (y - \breve{y})|$

$\overset{\triangle\text{ungl.}}{\leq} |x - \breve{x}| + |y - \breve{y}| = |x|\,|\varepsilon_x| + |y|\,|\varepsilon_y|$

$\leq \underbrace{(|x| + |y|)}_{\kappa_{abs}} \varepsilon \overset{x,y>0}{=} (x+y)\varepsilon$

$\leadsto$

$\kappa_{rel} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} \kappa_{abs}$

$\boxed{A3}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = (x-2)^2$

$K_{abs} \qquad k_{abs} = |f'(x)| = |2(x-2)|$

$x_0 = 4 \qquad k_{abs} = |f'(4)| = |2(4-2)| = |4|$

$k_{abs} = |f'(x)|$

↳ etwas negatives bei Kondition

↳ Dann irgendetwas falsch

↳ | Betragsstriche | !

Zu ÜB5

$\boxed{A1}$ für alle nicht nur für Differenzierbare zeigen.

$$|f(x_0) - f(x)| \leq k_{abs} |x_0 - x| + o(|x_0 - x|)$$

ist subadditiv

ist ähnlich zu handhaben

wie normaler lim

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{|f(x_0) - f(x)|}{|x_0 - x|} = k_{abs}$$

wenn diffbar reicht lim

$\boxed{A2}$ Kond kann nicht negativ sein

1 ist klein z.B. bzw $x > 1$ ist groß

↳ Top 10 der Funktionen.

$\boxed{\text{zu } A3}$

A ist notwendig für B,

$B \Rightarrow A$ wenn A nicht gegeben, dann gilt B nicht

A ist hinreichend für B

$A \Rightarrow B$.

↳ Sollen nicht nur einfach Bedingungen angeben, sondern uns allgemeiner damit beschäftigen.

$f_k(x) = \alpha(x, x_1)\lambda_1^k + \beta(x, x_1)\lambda_2^k \quad , x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{ÜBG}}$

1. Aufgabe

$f(x) = x(x-2) \quad , x, f(x) \in [-1, \infty)$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y+1} - 1 \quad , y, f^{-1}(y) \in [-1, \infty)$

a)

MATLAB

function handle

Bsp: $f(x) = 3x - 5x^2$

```
f = @ (x) (3* x - 5.* x^2)
>> f
f = @ (x) ..
>> f(1)
ans = -2
```

zu schreiben $\quad f(g(x)) = f \circ g(x)$

$f(f^{-1}(y)) = y$

$\frac{|f(f^{-1}(y)) - y|}{|y|}$ rel. Auswertungsfehler

Stabilität

Algorithmus: Zerlegung einer Funktion f in Elementarfunktionen $g_1, \dots, g_n$

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_1 (x_0)$$

Auswertungsfehler

$$\breve{f}(x_0) = \breve{g}_1 \circ \breve{g}_{n-1} \circ \dots \circ \breve{g}_1 (x_0)$$

Realisierung im Rechner

$$f(\varepsilon, x_0) = \breve{g}_n \circ \breve{g}_{n-1} \circ \dots \circ \breve{g}_1 (x_0)$$

mit $\breve{g}_i(y) = (1+\varepsilon_i) g_i(y)$, $|\varepsilon_i| \le eps$

Relative Stabilität σ_{rel} des Algorithmus

$$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_1 (x_0) \neq 0$$

gegenüber dem Rundungsfehler $\breve{g}_i(y) = g_i(y)(1+\varepsilon_i)$

$|\varepsilon_i| \le eps$ $\quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\|\varepsilon\| = \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|$

ist kleinste Zahl mit der Eigenschaft

$$\frac{|f(x_0) - \breve{f}(\varepsilon, x_0)|}{|f(x_0)|} \le \sigma_{rel} \, \|\varepsilon\| + o(\|\varepsilon\|)$$

Gibt es keine solche Zahl, ist $\sigma_{rel} = \infty$

Stabilitätsabschätzungen

Sei $f(x_0) \neq 0$, $g(x_0) \neq 0$, $h(x_0) \neq 0$ und

$$g(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_1 (x_0)$$

$$h(x_0) = h_m \circ h_{m-1} \circ \dots h_1 (x_0)$$

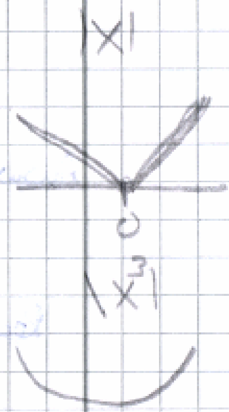
mit relativer Stabilität σ_g, σ_h, dann

- $f(x) = g(x) + h(x)$: $\sigma_f \le 1 + \max\{\sigma_g, \sigma_h\}$
- $f(x) = g(x) - h(x)$: $\sigma_f \le 1 + \frac{|g(x_0)| + |h(x_0)|}{|g(x_0) - h(x_0)|} \cdot \max\{\sigma_g, \sigma_h\}$

• $f(x) = g(x) \cdot h(x)$: $\sigma_f \leq 1 + 2 \max\{\sigma_g, \sigma_h\}$

Kondition der Mul und Div

• $f(x) = g(x)/h(x)$: $\sigma_f \leq 1 + 2 \max\{\sigma_g, \sigma_h\}$



Skalare Elementarfunktionen g_i

Sei k_i die relative Kondition von g_i an y_{i-1} und es sei

$f(x_0) = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_1(x_0)$, $y_i = g_i(y_{i-1})$, $y_0 = x_0$

Dann gilt:

$$\sigma_{rel} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=j+1} k_i = 1 + k_n(1 + k_{n-1}(1 + \dots + k_3(1 + k_2)\dots)).$$

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (a - bx)^2$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

Algorithmus 1:

$$f(x) = h_3 \circ h_2 \circ h_1(x)$$

mit $h_1(x) = bx$

$h_2(y) = a - y$ ist keine Subtraktion da a eine Konstante → für Kondition

$h_3(z) = z^2$

Algorithmus 2:

$$f(x) = \boxed{g_2 \circ g_1(x)} + g_4 \circ g_3(x)$$

mit $g_1(x) = 2abx$

$g_2(y) = a^2 - y$

$g_3(x) = x^2$

$g_4(y) = b^2 y$

Algorithmus 1

$\sigma_1 = 1$ (gegeben)

$$K_{abs}(h_2, y_1) = |-1| = 1$$

$$K_{rel}(h_2, y_1) = \frac{|y_1|}{|h_2(y_1)|} \cdot K_{abs} = \frac{|b x_0|}{|a - b x_0|} \cdot 1$$

$$\sigma_{rel_2} \le 1 + K_2 \cdot \sigma_1 = 1 + \frac{|b x_0|}{|a - b x_0|}$$

$$K_{abs}(h_3, y_2) = |2 y_2|$$

$$K_{rel}(h_3, y_2) = \frac{|y_2|}{|y_2^2|} \cdot |2 y_2| = 2$$

$$\sigma_{rel_f} \le 1 + K_3 \cdot \sigma_2 = 1 + 2 \cdot \left(\frac{|b x_0|}{|a - b x_0|} + 1 \right)$$

Algorithmus 2

Es ist noch nichts schiefgegangen, da erste Ausführung

vorraussetzung: $\sigma_1 = \sigma_3 = 1$

$$K_{abs}(g_2, y_1) = |-1| = 1$$

$$K_{rel}(g_2, y_1) = \frac{|y_1|}{|g_2(y_1)|} \cdot K_{abs} = \frac{|2abx_0|}{|a^2 - 2abx_0|}$$

$$\boxed{\sigma_2} \le 1 + K_2 \cdot \sigma_1 = 1 + \frac{|2abx_0|}{|a^2 - 2abx_0|}$$

$$K_{abs}(g_4, y_3) = |b|^2 = b^2$$

$$K_{rel}(g_4, y_3) = \frac{|y_3|}{|g_4(y_3)|} \cdot K_{abs} = \frac{|x_0^2|}{|b^2 x_0^2|} \cdot b^2 = 1$$

$$\sigma_4 \le 1 + K_4 \cdot \sigma_3 = 1 + 1 = 2$$

$$K_+ = 1$$

$$\sigma_f \le 1 + K_+ \cdot \max\{\boxed{\sigma_2}, \sigma_4\}$$

$$\le 1 + \max\{\sigma_2, \sigma_4\} = 1 + \max\left\{1 + \frac{|2abx_0|}{|a^2 - 2abx_0|}, 2\right\}$$