Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Wahr oder falsch...

Aussage	**Wahr**	**Falsch**
Es gibt Algorithmen, deren Stabilität kleiner als 1 ist.		
Die RELATIVE Kondition ist die Eigenschaft eines beschriebenen Problems.		
In [1,100] gibt es unendlich viele Zahlen mit der Mantissenlänge 8.		
Der Aufwand der LR-Zerlegung ist nicht größer als der bei der herkömmlichen Bestimmung von x mit $Ax = b$.		
Für alle Funktionen f gilt: $\kappa_{abs}(f,x) \geq 1$.		
Im Zweierkomplement sind ohne Weiteres alle Rechnungen problemlos durchführbar.		
Die Abbildung Φ, die natürliche 4-adische Zahlen in 2-adische Zahlen umwandelt, ist keine Bijektion.		
Bei Polynominterpolationen sind äquidistante Stützstellen nach Möglichkeit zu vermeiden.		
Für alle Basen $q \in \mathbb{N}$ sind bei variabler Bitanzahl alle natürlichen Zahlen darstellbar.		
Die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{7x^2}$ ist in $o(\sqrt[3]{x})$ für $x \to 0$.		
Die Gleichung $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k L_k$ mit $L_k(x) = \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$ löst das Interpolationsproblem $p_n \in P_n : p_n(x_k) = f_k \; \forall k = 0, ..., n$.		

Aufgabe 2: Umwandeln... Und in $\mathbb{G}(10,3)$ angeben...

a) $4,2035_6 = x_{18}$
b) $62817_9 = x_3$
c) $0,000003_4 = x_8$
d) $\pi_{10} = x_\pi$ (Lösbar, aber eher eine Spaßaufgabe. Keine Panik :-) !)

Aufgabe 3: Einfach ableiten... (e ist die Eulersche Zahl!)

a) $f(x) = 3x^2 \cdot 4e^{2x}$

b) $f(x) = 2sin(5x^2) + ln(4x)$

c) $f(x) = |13x^5 + x^2|$ für $x \neq -\frac{\sqrt[3]{169}}{13}$

d) $f(x) = sin(\pi n) + e^{cos(3x^2)}$ mit $n \in \mathbb{Z}$

e) $f(x) = x \cdot sin(n\pi) \cdot tan(e^{\frac{1}{6} \cdot ln(\frac{1}{x^2})})$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $x \neq 0$

Aufgabe 4:

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = ((x+3)(x-3))^2$. Bestimmen Sie die relative Kondition an der Stelle $x = 2$!

b) Die Funktion f setzt sich wie folgt zusammen:

- die Identitätsfunktion wird mit 3 addiert
- analog wird die Identitätsfunktion um 3 verringert
- anschließend wird beides multipliziert
- letztens wird quadriert

Geben Sie die Elementarfunktionen an!

c) Ermitteln Sie unter Benutzung eines Auswertungsbaumes die kleinste obere Schranke für die Stabilität des in b) angegebenen Algorithmus an der gestörten Stelle $\tilde{x} = 2,1$!

d) Schätzen Sie für $x = 2$, $\tilde{x} = 2,1$ und $eps = 10^{-16}$ den Gesamtfehler ab!

Aufgabe 5: A ist in L und R zu zerlegen...

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 20 & 7 & 33 \\ -12 & -1 & -10 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 17 & 10 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6: Stabilitätsabschätzung...

Der Marokkaner Al Gebra und sein Freund Erik haben die untenstehende Stabilitäts-Aufgabe -jeder auf seine Weise- gelöst. Sie kommen ZUFÄLLIG auf dasselbe Ergebnis! Aber nur eine Rechnung stimmt! Wessen? Welche Fehler hat der andere gemacht?
Hinweis: Am sinnvollsten ist es sicherlich, die Aufgabe erstmal selbst zu rechnen und die Lösungswege zu vergleichen...

Die Aufgabenstellung: σ_f bestimmen von $f(x) = 25x^2 + cos(\pi x) = h_4(h_1(x)) + h_2(h_3(x))$ mit $h_1(x) = 5x$, $h_2(x) = cosx$, $h_3(x) = \pi x$, $h_4(x) = x^2$ an der Stelle $x = 10^{-5}$.

So rechnete Erik:

$\sigma_{h1} = \sigma_{h3} = 1.$
$\sigma_{h_4 \circ h_1} \leq 1 + \frac{2x \cdot x}{x^2} \cdot \sigma_{h1} = 3$
$\sigma_{h_2 \circ h_3} \leq 1 + \frac{sinx}{cosx} \cdot x = 1 + x \cdot tanx$

Daraus folgt: $\sigma_f(10^{-5}) \leq 1 + \frac{|25x^2|+|cos(\pi x)|}{|25x^2+cos(\pi x)|} \cdot max\{3, 1 + x \cdot tanx\} = 1 + 1 \cdot 3 = 4.$

Al rechnete hingegen:

$\sigma_{h1} = \sigma_{h3} = 1.$
$\sigma_{h_4 \circ h_1} \leq 1 + \frac{|2 \cdot (5x)| \cdot |5x|}{(5x)^2} \cdot \sigma_{h1} = 3$
$\sigma_{h_2 \circ h_3} \leq 1 + \frac{|sin(\pi x)|}{|cos(\pi x)|} \cdot |\pi x| = 1 + |\pi x| \cdot |tan(\pi x)|$

Daraus folgt: $\sigma_f(10^{-5}) \leq 1 + \frac{|25x^2|+|cos(\pi x)|}{|25x^2+cos(\pi x)|} \cdot max\{3, 1 + |\pi x| \cdot |tan(\pi x)|\} = 1 + 1 \cdot 3 = 4.$

Aufgabe 7: Norm-Beweis

Weisen Sie nach, dass zu gegebener Vektornorm $|| \cdot ||$ im $\mathbb{R}^n$ durch die Matrixnorm

$$||A_M|| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{||Ax||}{||x||},\ A \in \mathbb{R}^{n,n}$$

eine Norm definiert wird!

Aufgabe 8: Konditionsbestimmung von Nullstellenproblemen...

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^5 - a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Bestimme die relative Kondition der Nullstellenbestimmung. Mach Dir die absolute Kondition anhand zweier Grafiken klar- je einmal für κ_{abs} klein bzw. groß.

Aufgabe 9: Code-Aufgabe...

Was passiert im folgenden Code bei Vorhandensein der Funktion 'dec2basis', die eine Dezimalzahl in eine angegebene Basis umwandelt?

```
function z = namenlos(n,N)
fehler = (n>(((2^N)/2) - 1) || n< (-(2^N)/2));
if fehler
    error('Für eine korrekte Darstellung muss die Anzahl der Bits erhöht werden!');
end

if (n>=0)
    erg = dec2basis(n,2);
    erg = [zeros(1,N - length(erg)) erg];
else
    erg = dec2basis(abs(n),2);
    erg = [zeros(1,N - length(erg)) erg];
    einsen = find(erg==1);
    nullen = find(erg==0);
```

```
    erg(einsen) = 0;
    erg(nullen) = 1;
    a=0;
    for i=0:(N-1)
        a = a + erg(N-i) * 2^i;
    end
    a = a + 1;
    erg = dec2basis(a,2);
end
z = erg;
```

Welche Ausgaben liefern bei Vorhandensein der Funktion 'dec2basis' die Programmaufrufe 'namenlos(5,5)', 'namenlos(7,2)' und 'namenlos(-4,5)'?

Aufgabe 10: Invertierbarkeit und Kondition einer Matrix...

Gegeben sei $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{pmatrix}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Für welche x ist $A(x)$ invertierbar?
b) Berechne $\kappa_\infty(A(x))$!
c) Was geschieht mit $\kappa_\infty(A(x))$ in der Nähe der x_0, für die $A(x_0)$ nicht invertierbar ist?
d) Gib ein x an, für das $\kappa_\infty(A(x)) < 10$ gilt!

Aufgabe 11: Asymptotische Notation...

Im Folgenden gelte: $n \to \infty$!

a) Seien $f_1(n) = O(g(n))$ und $f_2(n) = O(g(n))$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$f_1(n) + f_2(n) = O(g(n))$$

gilt. Zeigen Sie ferner, dass

$$f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g(n))$$

oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

b) Seien $f_1(n) = o(g(n))$ und $f_2(n) = o(g(n))$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$f_1(n) + f_2(n) = o(g(n))$$

gilt. Zeigen Sie ferner, dass

$$f_1(n) \cdot f_2(n) = o(g(n))$$

oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

c) Gilt $2^{n+1} = O(2^n)$?

d) Gilt $2^{2n} = O(2^n)$?

Aufgabe 12: Eine Beweisaufgabe zum Rechnen...

Gegeben sei die sogenannte Hilbert-Matrix $H \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ mit $i = 1...n$.
Man betrachtet für $x, b \in \mathbb{R}^n$ das lineare Gleichungssystem

$$Hx = b.$$

Wählt man als rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ mit $b_i = 1$ für $i = 1$ bzw. $b_i = 0$ für $i > 1$,
so ist die exakte Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ durch

$$x_i = (-1)^{i+1} \cdot i \cdot \tbinom{n+i-1}{n-1}\tbinom{n}{n-i}$$

gegeben.
Zeige für $n = 4$, dass das wie oben angegebene x wirklich das lineare Gleichungssystem $Hx = b$ löst!

Hinweis: Die letzten beiden Faktoren von x_i beschreiben Binomialkoeffizienten!

Aufgabe 13: Gedanken lesen...

Denk Dir eine dreistellige Zahl, bei der die erste und letzte Ziffer verschieden sind! Drehe diese Zahl um und subtrahiere die kleinere von der größeren! Falls Dein Ergebnis zweistellig ist (z.B. 78), füge eine Null vor (z.B. 078)! Drehe diese Zahl (Ergebnis) erneut um und addiere zum Ergebnis das umgedrehte Ergebnis!

Übungsaufgaben - LÖSUNGEN

Aufgabe 1: Wahr oder falsch...

Aussage	**Wahr**	**Falsch**
Es gibt Algorithmen, deren Stabilität kleiner als 1 ist.		X
Die RELATIVE Kondition ist die Eigenschaft eines beschriebenen Problems.	X	
In [1,100] gibt es unendlich viele Zahlen mit der Mantissenlänge 8.		X
Der Aufwand der LR-Zerlegung ist nicht größer als der bei der herkömmlichen Bestimmung von x mit $Ax = b$.	X	
Für alle Funktionen f gilt: $\kappa_{abs}(f, x) \geq 1$.		X
Im Zweierkomplement sind ohne Weiteres alle Rechnungen problemlos durchführbar.		X
Die Abbildung Φ, die natürliche 4-adische Zahlen in 2-adische Zahlen umwandelt, ist keine Bijektion.		X
Bei Polynominterpolationen sind äquidistante Stützstellen nach Möglichkeit zu vermeiden.	X	
Für alle Basen $q \in \mathbb{N}$ sind bei variabler Bitanzahl alle natürlichen Zahlen darstellbar.		X
Die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{7x^2}$ ist in $o(\sqrt[3]{x})$ für $x \to 0$.	X	
Die Gleichung $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k L_k$ mit $L_k(x) = \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$ löst das Interpolationsproblem $p_n \in P_n : p_n(x_k) = f_k \ \forall k = 0, ..., n$.	X	

Aufgabe 2: Einfach umwandeln... Und in $\mathbb{G}(10, 3)$ angeben...

a) $4,2035_6 = 4,65D9_{18} \approx 4,35_{10}$
b) $62817_9 = 2002220121_3 \approx 41500_{10}$
c) $0,00003_4 = 0,0014_8 \approx 0,00293_{10}$
d) $\pi_{10} = 10_\pi \approx 3,14_{10}$

Aufgabe 3: Einfach ableiten... (e ist natürlich die Eulersche Zahl!)

a) $f'(x) = e^{2x}(24x^2 + 24x)$

b) $f'(x) = 20x \cdot cos(5x^2) + \frac{1}{x}$

c) $f'(x) = 65x^4 + 2x$ für $x \geq -\frac{\sqrt[3]{13^2}}{13}$ bzw. $f'(x) = -65x^4 - 2x$ für $x < -\frac{\sqrt[3]{13^2}}{13}$

d) $f'(x) = -6x \cdot sin(3x^2) \cdot e^{cos(3x^2)}$

e) $f(x) = 0 = f'(x)$ (Wer das nicht erkannt hat, hat hier echt tierisch die Arschkarte gezogen :-) ...)

Aufgabe 4:

a) $f(x) = ((x+3)(x-3))^2 = (x^2-9)^2 \Rightarrow \kappa_{abs} = |f'(x)| = |2(x^2-9)\cdot 2x| = |4x(x^2-9)|$.

Daraus ergibt sich $\kappa_{rel} = |4x(x^2-9)| \cdot \frac{|x|}{|(x^2-9)^2|} = \frac{|4x^2|}{|x^2-9|} \overset{x=2}{=} \frac{16}{5}$.

b) $f_0(x) = x$ (muss nicht angegeben werden) $f_1(x) = x+3$ $f_2(x) = x-3$ $f_3(x,y) = x \cdot y$ $f_4(x) = x^2$

c)

$$\begin{array}{ccccc} x & & & & x \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \mathrm{f}_1(x) = x+3 & & & & f_2(x) = x-3 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \mathrm{f}_3(x,y) = x\cdot y & & \\ & & \downarrow & & \\ & & \mathrm{f}_4(x) = x^2 & & \end{array}$$

$\sigma_x = 1$

$\sigma_{f_1} \leq 1 + \kappa_{rel_{f_1}} \cdot \sigma_x = 1 + \frac{|x|}{|x+3|} \cdot 1 \overset{x=2,1}{=} \frac{24}{17}$

$\sigma_{f_2} \leq 1 + \kappa_{rel_{f_2}} \cdot \sigma_x = 1 + \frac{|x|}{|x-3|} \cdot 1 \overset{x=2,1}{=} \frac{10}{3}$

$\sigma_{f_3} \leq 1 + \kappa_{rel_{Mult.}} \cdot max\{\sigma_{f_1}, \sigma_{f_2}\} = 1 + 2 \cdot max\{\frac{24}{17}, \frac{10}{3}\} = 1 + 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{23}{3}$

$\sigma_{f_4} \leq 1 + \kappa_{rel_{f_4}} \cdot \sigma_{f_3} \leq 1 + |2x| \cdot \frac{|x|}{|x^2|} \cdot \frac{23}{3} = 1 + 2 \cdot \frac{23}{3} = \frac{49}{3}$

d) Gesamtfehler = $\kappa_{rel_f}\cdot$ Eingabefehler + $\sigma_{f_4}\cdot$ Auswertungsfehler

- $\kappa_{rel_f} = \frac{16}{5}$
- Eingabefehler $= \frac{|x-\tilde{x}|}{|x|} = \frac{|2-2{,}1|}{|2|} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$
- $\sigma_{f_4} \leq \frac{49}{3}$
- Auswertungsfehler $\leq eps = 10^{-16}$

Der daraus resultierende Gesamtfehler lässt sich nach oben durch $0{,}16 + 1{,}6\overline{3} \cdot 10^{-15}$ abschätzen.

Aufgabe 5: A ist in L und R zu zerlegen...

a) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6: Stabilitätsabschätzung...

Al hat Recht!!! Erik hat weder resubstituiert noch Beträge in den Rechnungen verwendet!
Ich möchte in der Nachklausur NUR Al's sehen :-) !!!

Aufgabe 7:

1. z.z.: $\|A\|_M \geq 0$, $\|A\|_M = 0 \Leftrightarrow A$ ist Nullmatrix

„$\Leftarrow$": A NM $\Rightarrow \sup \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} = 0 \overset{x \neq 0}{\Rightarrow} \|A\|_M = 0$

„$\Rightarrow$": $\sup \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} = 0 \Rightarrow \|A\|_V = 0 \underset{\|x\| \neq 0}{\Rightarrow} A$ ist NM

2. z.z.: $\|c \cdot A\|_M = |c| \cdot \|A\|_M$

$\|cA\|_M = \sup \frac{\|cAx\|_V}{\|x\|_V} = \sup \frac{|c| \cdot \|Ax\|_V}{\|x\|_V} = |c| \cdot \sup \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} = |c| \|A\|_M$

3. z.z.: $\|A+B\|_M \leq \|A\|_M + \|B\|_M$

$\|A+B\|_M = \sup \frac{\|(A+B)x\|_V}{\|x\|_V} \leq \sup \frac{\|Ax\|_V + \|Bx\|_V}{\|x\|_V}$

$\leq \sup \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} + \sup \frac{\|Bx\|_V}{\|x\|_V}$

$= \|A\|_M + \|B\|_M$

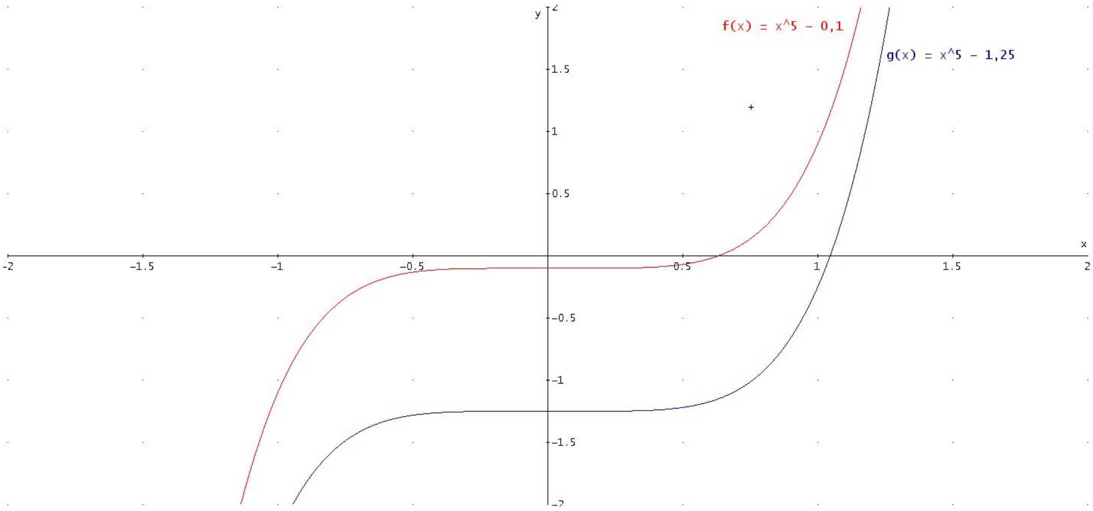
Aufgabe 8: Konditionsbestimmung von Nullstellenproblemen...

Wir betrachten o.B.d.A. den Fall, dass die Nullstelle positiv ist, also $a > 0$.

Nullstellenfunktion: $n_f(a) = \sqrt[5]{a} \Rightarrow n'_f(a) = |n'_f(a)| = \kappa_{abs} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$

und $\qquad \kappa_{rel} = \kappa_{abs} \cdot \frac{a}{\sqrt[5]{a}} = \frac{1}{5}$.

κ_{abs} klein $\Leftrightarrow$ $\kappa_{abs} \leq 1 \Leftrightarrow a \geq \frac{\sqrt[4]{5^3}}{25} \approx 0,1337480609$ bzw. κ_{abs} groß $\Leftrightarrow$ $\kappa_{abs} > 1000 \Leftrightarrow a < \frac{\sqrt[4]{2}}{50000} \approx 2,39 \cdot 10^{-5}$.



Das bedeutet, wenn a klein genug ist und minimal gestört wird, ändert sich die Nullstelle um einen entsprechend großen Wert. Ist a hingegen groß, so hat eine Störung nur minimale Auswirkung auf die Verschiebung der Nullstelle. Je größer a, desto geringer macht sich die Störung bemerkbar.
Ebenso verhält es sich bei der Verschiebung des Sachverhaltes auf die positive y-Achse, also für den Fall $a < 0$. Vielleicht wird jetzt klar, weshalb wir nur o.B.d.A. den Fall $a > 0$ betrachtet haben...

Aufgabe 9: Code-Aufgabe...

Das Programm 'namenlos' wandelt Dezimalzahlen ins Zweierkomplement um.

'namenlos(5,5)' liefert "00101".
'namenlos(7,2)' liefert die Fehlermeldung.
'namenlos(-4,5)' liefert "11100".

Aufgabe 10: Invertierbarkeit und Kondition einer Matrix...

a) A invertierbar $\Leftrightarrow det(A) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

b) $A(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2-x} & \frac{1}{x-2} \\ \frac{x}{2\cdot(x-2)} & \frac{1}{2\cdot(2-x)} \end{pmatrix} \Rightarrow \kappa_\infty = ||A(x)||\cdot||A(x)^{-1}|| = || \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{pmatrix} ||\cdot|| \begin{pmatrix} \frac{2}{2-x} & \frac{1}{x-2} \\ \frac{x}{2\cdot(x-2)} & \frac{1}{2\cdot(2-x)} \end{pmatrix} ||$

$= (4+|x|)\cdot max\{|\frac{2}{2-x}|+|\frac{1}{x-2}|, |\frac{x}{2\cdot(x-2)}|+|\frac{1}{2\cdot(2-x)}|\}$

$= \frac{6|x|+24}{|4-2x|}$ für $|x| \leq 5$ und $\frac{x^2+5|x|+4}{|4-2x|}$ für $|x| > 5$

c) $\kappa_\infty \to \infty$ für $x \to 2$

Das war zugegebenermaßen kaum ohne Computer ermittelbar...

d) Beispiel: $x = 0,5 \Rightarrow \kappa_\infty(A) = 9$

Aufgabe 11: Asymptotische Notation...

Zur Erinnerung:
$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_{\geq 0} : 0 \leq \limsup\limits_{n\to\infty} |\frac{f(n)}{g(n)}| \leq c$ bzw.
$f(n) = o(g(n)) \Leftarrow \limsup\limits_{n\to\infty} |\frac{f(n)}{g(n)}| = 0.$

(Der Übersichtlichkeit wegen wurden die Beträge weggelassen!)

a)

- zu zeigen: $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{f_1(n)}{g(n)} + \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{f_2(n)}{g(n)} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{f_1(n)+f_2(n)}{g(n)}$.

  $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{f_1(n)}{g(n)} + \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{f_2(n)}{g(n)} = \frac{\limsup\limits_{n\to\infty} f_1(n)}{\limsup\limits_{n\to\infty} g(n)} + \frac{\limsup\limits_{n\to\infty} f_2(n)}{\limsup\limits_{n\to\infty} g(n)} = \frac{\limsup\limits_{n\to\infty} f_1(n)+\limsup\limits_{n\to\infty} f_2(n)}{\limsup\limits_{n\to\infty} g(n)} =$
  $\frac{\limsup\limits_{n\to\infty} (f_1(n)+f_2(n))}{\limsup\limits_{n\to\infty} g(n)} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{f_1(n)+f_2(n)}{g(n)}$.

  q.e.d.

- $f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g(n))$ gilt i.A. nicht! Z.B. $f_1(n) = f_2(n) = g(n) = n^2$, aber: $n^4 \neq O(n^2)$, wie man unter Verwendung der Definition sehr leicht überprüfen kann.

  Solange allerdings $deg(f_1) + deg(f_2) \leq deg(g)$ ist, gilt die Gleichung!

b)

- zu zeigen: $\limsup_{n\to\infty} \frac{f_1(n)}{g(n)} + \limsup_{n\to\infty} \frac{f_2(n)}{g(n)} = \limsup_{n\to\infty} \frac{f_1(n)+f_2(n)}{g(n)}$.

  Also: $0 + 0 = 0 = \limsup_{n\to\infty} \frac{f_1(n)+f_2(n)}{g(n)}$.

  - Die Beweisführung erfolgt hier analog zu a), nur rückwärts! -

q.e.d.

- $f_1(n) \cdot f_2(n) = o(g(n))$ gilt i.A. nicht! Z.B. $f_1(n) = f_2(n) = n^2$ und $g(n) = n^3$, aber: $n^4 \neq o(n^3)$.

  Solange allerdings $deg(f_1) + deg(f_2) < deg(g)$ ist, gilt die Gleichung!

c) $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = O(2^n)$ **gilt**, da: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot 2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2 \leq c$ ($c \in \mathbb{R}_{\geq 2}$ beliebig).

d) $2^{2n} = 2^n \cdot 2^n = O(2^n)$ gilt **nicht**, da: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot 2^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^n \to \infty$.

Der Ausdruck geht also gegen ∞ und somit **nicht** gegen einen **konstanten** Wert $c \in \mathbb{R}$!

(War das eine langwierige Sch***, die Lösungen zu dieser Aufgabe zu texen[1]...)

[1] Es heißt wirklich “texen“ (sprich: “techen“) und *nicht* “texten“! Abgeleitet von dem Softwarepaket LaTeX (sprich: “Latech“) ... LaTeX-Kenntnisse sind unabdingbar für das Schreiben der Bachelorarbeit und anderen mathematischen Seminararbeiten sowie das Erstellen von Aufgabenblättern für die Schule!

Aufgabe 12: Eine Beweisaufgabe zum Rechnen...

#1: $H := \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

#2: $b := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bis hierher: Eingabe der gegebenen Werte
Nun: Berechnung der Inversen

#3: H^{-1}

#4: H^{-1}

#5: $\begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}$

Der Lösungsvektor x:

#6: $x := H^{-1} \cdot b$

#7: $x := \begin{bmatrix} 16 \\ -120 \\ 240 \\ -140 \end{bmatrix}$

Bildungsvorschrift des x-Vektors (wegen Doppelbenennung hier "y" genannt):

#8: $y(i) := (-1)^{i + 1} \cdot i \cdot (\mathrm{COMB}(4 + i - 1, 4 - 1) \cdot \mathrm{COMB}(4, 4 - i))$

Daraus ergeben sich die Werte:

#9: y(1)

#10: 16

#11: y(2)

#12: −120

#13: y(3)

#14: 240

#15: y(4)

#16: −140

Anhand der Tatsache, dass nach Ermittlung der y_i der gleiche Vektor y herauskommt wie bei der rechnerischen Ermittlung (da also y = x), wurde gezeigt, dass das wie in #8 definierte x tatsächlich das lineare Gleichungssystem löst.

q.e.d.

Aufgabe 13: Gedanken lesen...

1089.

Bei Fragen/Problemen/Kritiken/Anregungen stehe ich euch jederzeit zur Verfügung!!!

Andi