Wichtige Regeln (Stabilitätsberechnung)

1. $f(x) = g \circ h(x) \Rightarrow \sigma_f \leq 1 + \kappa_{rel_g} \cdot \sigma_h$

2. $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow \sigma_f \leq 1 + \frac{|g(x)| + |h(x)|}{|g(x) + h(x)|} \cdot \max\{\sigma_g, \sigma_h\}$

   $f(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow \sigma_f \leq 1 + \frac{|g(x)| + |h(x)|}{|g(x) - h(x)|} \cdot \max\{\sigma_g, \sigma_h\}$

   $f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow \sigma_f \leq 1 + 2 \cdot \max\{\sigma_g, \sigma_h\}$

   $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow \sigma_f \leq 1 + 2 \cdot \max\{\sigma_g, \sigma_h\}$

3. Elementarfunktionen haben Stabilität $\sigma = 1$

4. $()$ vor $\circ$ vor $\cdot$ / $\div$ vor $+$ / $-$

absolute Kondition

$K_{abs} = |f'(x)|$ wenn f stetig

relative Kondition

$K_{rel} = K_{abs} \cdot \frac{|x_0|}{|f(x_0)|}$

Basenumwandlung

ganze Zahlen:

1) ins Dezimalsystem umwandeln
2) Division durch neue Basis
3) mit Ganzzahlanteil weiterrechnen
4) Ergebnis = Reste ablesen
5) von unten nach oben ablesen

nicht ganze Zahlen (< 1):

1) ins Dezimalsystem umwandeln
2) Multiplikation mit neuer Basis
3) mit Resten weiterrechnen
4) Ergebnis = Ganzzahlanteil
5) von oben nach unten ablesen

Beispiel für ganze Zahlen

$87_{10} = x_3$

$87 : 3 = 29 \quad R: 0$

$29 : 3 = 9 \quad R: 2$

$9 : 3 = 3 \quad R: 0$

$3 : 3 = 1 \quad R: 0$

$1 : 3 = 0 \quad R: 1$

$87_{10} = 10020_3$

Überprüfung:

$1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 \ldots + 2 \cdot 3^1 + 3^0 \cdot 0 = 87$

Beispiel für nicht ganze Zahlen

$0{,}5_9 = x_6$

$\frac{1}{9} \cdot 5 = \frac{5}{9}$

$\frac{5}{9} \cdot 6 = \frac{30}{9} = 3 \quad R: \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{6}{3} = 2 \quad R: \underline{0}$

$\Rightarrow 0{,}32_6$

Dualsystem

Vorzeichenbit

0 = positive Zahl

1 = negative Zahl

Zahlen, die darstellbar sind:

$-2^{N-1} \leq x \leq 2^{N-1} - 1$

Dezimalzahl als Dualzahl darstellen:

- positive Zahl: einfach berechnen
- negative Zahl:

1) positive Zahl darstellen (hier: 12):

011100 # Bits = 5, davon ein Vorzeichenbit

2) Bits umklappen:

110011 $(0 \rightleftarrows 1)$

3) eine Eins addieren:

$$
\begin{array}{r}
110011 \\
+ \quad {}_{1\,1}1 \\
\hline
10100
\end{array}
\quad \hat{=} -12
$$

Berechnungen im Dualsystem:

Beispiel:

$$\frac{11_2}{101_2} + \frac{10_2}{11_2} = \frac{11_2 \cdot 11_2 + 10_2 \cdot 101_2}{101_2 \cdot 11_2} = \frac{10011_2}{1111_2}$$

Berechnung:

1)
$$
\begin{array}{r}
11 \cdot 11 \\
\hline
11 \\
{}_{1\,1}11 \\
\hline
1001
\end{array}
$$

2)
$$
\begin{array}{r}
10 \cdot 101 \\
\hline
10 \\
0 \\
10 \\
\hline
1010
\end{array}
$$

3)
$$
\begin{array}{r}
1001 \\
+ {}_{1}1010 \\
\hline
10011
\end{array}
$$

4)
$$
\begin{array}{r}
101 \cdot 11 \\
\hline
101 \\
101 \\
\hline
1111
\end{array}
$$

$$\frac{10011}{1111}$$

Kondition

Die Kondition ist eine Eigenschaft des Problems!

Berechnung von der absoluten Kondition:

1) f ist stetig & differenzierbar

$\rightarrow K_{abs}(x_0) = |f'(x)|$

Beispiel: $f(x) = x^3 \rightarrow K_{abs} = |3x_0^2|$

2) Lipschitz-stetig

$\rightarrow K_{abs} \leq L$

f ist Lipschitz-stetig $\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y| \quad \forall x,y$

Beispiel: $f(x) = |3x| \rightarrow ||3x| - |3y|| = \underbrace{3}_{=L}|x-y|$

3) $f(x) = g \circ h(x) \quad (= g(h(x)))$

$\rightarrow K_{abs_f} \leq K_{abs_h} \cdot K_{abs_g}$

Beispiel: $f(x) = \tan(|x|)$, $g(x) = \tan x$,

$h(x) = |x|$

$\rightarrow K_{abs_f} \leq 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = |(\tan x)'|$

4) f ist nicht stetig

$\rightarrow K_{abs} = \infty$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, gesucht: $K_{abs}(0)$

$K_{abs} = \infty$ (außer an $x_0 = 0$ ableitbar (Regel 1))

CoMa I Tutorium 31.01.2012

Aufgabe:

Ermitteln Sie unter Benutzung eines Auswertungsbaumes die kleinste obere Schranke für die Stabilität des Algorithmus!

): $F(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_1 \cdot (x_2 + 1))^2$

mit $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x + 1$,

$f_3(x, y) = x \cdot y$, $f_4(x, y) = x + y$

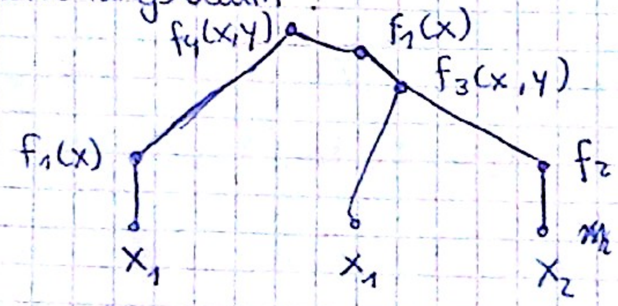
mit $F_1(x_1, x_2) = (\underbrace{f_1(x_1)}_{x}, \underbrace{f_1(f_3(x_1, f_2(x_2)))}_{y})$

$\rightsquigarrow f_1(x_1) + f_1(f_3(x_1, f_2(x_2)))$

$f_1(x_1 \cdot f_2(x_2))$

$f_1(x_1 \cdot (x_2 + 1)) = x_1^2 + (x_1 \cdot (x_2 + 1))^2$

Auswertungsbaum:



pessimistisch = mit Eingabewerten als Blätter

→ $f_1(x)$ etc. sind hier keine Elementarfunktionen mehr, da wir annehmen, dass bei der Eingabe ein Fehler passiert

$x_1 = \sigma_{x_2} = 1$

1 Kante (bei f_1(links)) ist Konkatenation

f_1(links) $\leq 1 + K_{rel_{f_1}} \cdot \sigma_{x_1}$

$= 1 + |2x| \cdot \frac{|x|}{|x^2|} \cdot 1 = 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$

äre $f_0(f_1, f_1)$ mit $f_1 = x$ und $f_0 = x \cdot x$, dann wäre

s Multiplikation

$$\sigma_{f_2} \leq 1 + K_{rel\,f_2} \cdot \sigma_{x_1} = 1 + 1 \cdot \frac{|x|}{|x+1|} \cdot 1 \qquad x = x_1$$

Konditionen einsetzen $\underline{\underline{x = x_2}}$

$$1 + \frac{|x_2|}{|x_2+1|}$$

Kondition $K_{rel.}$ ist immer 2

$$\sigma_{f_3} \leq 1 + K_{rel\,f_3} \cdot \max\{\sigma_{x_1}, \sigma_{f_2}\}$$
$$= 1 + 2 \cdot \left(1 + \frac{|x_2|}{|x_2+1|}\right) = 3 + 2\,\frac{|x_2|}{|x_2+1|}$$

$$\sigma_{f_1(\text{rechts})} \leq 1 + K_{rel\,f_1} \cdot \sigma_{f_3}$$
$$= 1 + 2 \cdot \left(3 + 2 \cdot \frac{|x_2|}{|x_2+1|}\right)$$
$$= 7 + 4\,\frac{|x_2|}{|x_2+1|}$$

Stabilität der Addition: Fktwerte müssen ≥ 0 sein, dann kann man kürzen $\Rightarrow = 1$

$$\sigma_{f_4} = \sigma_{F_1} \leq 1 + K_{rel_+} \cdot \max\{\sigma_{f_1(\text{links})}, \sigma_{f_1(\text{rechts})}\}$$
$$= 1 + \cancel{\frac{|f_1(x_1)| + |f_1(f_3(f_2(x_2), x_1))|}{|\ldots|}} \cdot \left(7 + 4\,\frac{|x_2|}{|x_2+1|}\right)$$
$$= 8 + 4 \cdot \frac{|x_2|}{|x_2+1|}$$

$\Rightarrow$ Stabi. des Alg. hängt nur von x_2 ab

Bsp:

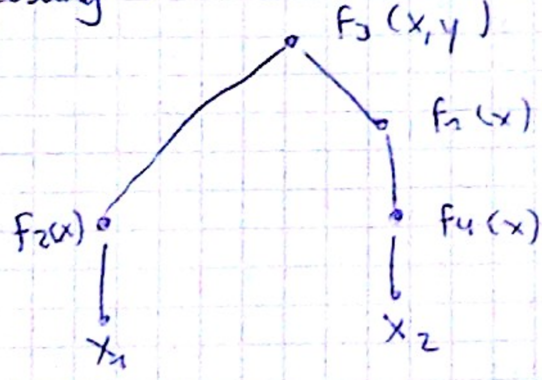
$$F_1(x_1, x_2) = \frac{25\,x_1^2}{\ln(x_2+2)} \qquad \text{mit } f_1(x) = \ln x$$

20 min (wie in der Klausur)

$$f_2(x) = 25\,x^2 \qquad f_3(x,y) = \frac{x}{y} \qquad f_4(x) = x+2$$

mit $F_1(x_1, x_2) = f_3(f_2(x_1), f_1(f_4(x_2)))$

Lösung:



$$\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = 1$$

$$\sigma_{f_2} \leq 1 + K_{rel\,f_2} \cdot \sigma_{x_1} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$
$$\sigma_{f_4} \leq 1 + K_{rel\,f_4} \cdot \sigma_{x_2} = 1 + \frac{|x_2|}{|x_2+2|} \cdot 1$$

$$\sigma_{f_1} \leq 1 + \kappa_{\ln} \cdot \sigma_{f_2} = 1 + \left|\frac{1}{x}\right| \cdot \frac{|x|}{|\ln x|} \cdot \left(1 + \frac{|x_2|}{|x_2+2|}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{|\ln x|} \cdot (\text{-}\text{''}\text{-})$$

$$\overset{\text{Res}}{\underset{x = x_2+2}{=}} 1 + \frac{1}{|\ln(x_2+2)|} \cdot (\text{-}\text{''}\text{-})$$

$$\sigma_{f_0} = \sigma_{f} \leq 1 + 2 \cdot \max\{\sigma_{f_2}, \sigma_{f_1}\}$$

$$= 1 + 2 \max\{3, 1 + \frac{1}{\ln(x_2+2)} \cdot \left(1 + \frac{|x_2|}{|x_2+2|}\right)\}$$

$$f(x) = |3x| \quad \rightsquigarrow \quad f(y) = |3y|$$

Lipschitz-stetig:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y|$$

$$|3x - 3y| \leq L \cdot |x-y|$$

$$3 \, |(x-y)| \leq L \cdot |x-y| \qquad | : |x-y|$$

$$3 \leq L$$

$$f(y) = |3y|$$

$$||3x| - |3y|| \leq L \, |x-y|$$

$$||3x| - |3y|| \leq ||3x - 3y|| = |3x-3y|$$

(und dann weiter wie oben: $\quad \leq L \cdot |x-y|$)

$$(\leq |3x| + |3y| \leq L \cdot |x-y|)$$

$$|3x - 3y| \leq 3|x-y|$$

$$\rightsquigarrow L = 3$$