2. Übungszettel zur Vorlesung „Computerorientierte Mathematik I“

Wintersemester 2012/13

Prof. Dr. Rupert Klein
Anna Hartkopf, Martin Götze

Abgabe in die Tutorenfächer oder im Tutorium bis spätestens Donnerstag, den 15. November 2012, 18^{00}

Aufgabe 1. *Negatives* [4 Punkte]
Verwenden Sie in dieser Aufgabe fünf Bits zur Zweierkomplementdarstellung der Zahlen im Dualsystem, vier für den Wert und eines für das Vorzeichen.

(i) Rechnen Sie in der angegebenen Darstellung $4 + (-14)$,

(ii) Rechnen Sie nun $4 + (-3)$, $4 + (-4)$ und $(-3) + (-5)$.

(iii) Was geht schief, wenn Sie $15 + 5$, bzw. $(-15) + (-5)$ rechnen?

Aufgabe 2. *Gebrochenes* [2 Punkte]
Berechnen Sie für folgende Zahlen jeweils eine Darstellung als q-adischer Bruch für die angegebene Basis q:

1.2331_5, $q = 10$,

$\mathrm{A.E\overline{1}}_{16}$, $q = 3$.

Aufgabe 3. *Periodisches* [4 Punkte]
Beweisen Sie: Genau dann hat $\frac{1}{k} \in \mathbb{Q}$ (mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) eine endliche, abbrechende Darstellung als q-adischer Bruch, wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ die Zahl q^n durch k teilbar ist.

Aufgabe 4. *Umrechnung mit dem Rechner II* [6 Punkte]
In der letzten Übung haben Sie ein Programm geschrieben, dass natürliche Zahlen von der Darstellung in Basis 10 in die Darstellung zur Basis 2 umrechnet. Ergänzen Sie Ihr Programm so, dass es nun bei Eingabe zweier natürlicher Zahlen diese als Bruch interpretiert und die gegebene rationale Zahl in die Darstellung zur Basis 2 umrechnet.

Aufgabe 5. *Abzählbares* [4 Punkte]
Überlegen Sie, ob die folgenden Mengen abzählbar sind. Begründen Sie Ihre Behauptungen

(i) $\mathbb{Q}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Q}\}$

(ii) Die Menge $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^n$ aller endlichen Tupel rationaler Zahlen.

(iii) $\{A \subseteq \mathbb{Q} \mid A \text{ ist endlich}\}$

(iv) $\{A \subseteq \mathbb{Q} \mid A \text{ ist unendlich}\}$