

Computerorientierte Mathematik I

Mitschrift der Tutorien

Samanta Scharmacher¹
Nicolas Lehmann² (Dipl. Kfm., BSC)

¹ Freie Universität Berlin, FB Mathematik und Informatik,
Institut für Informatik, scharbrecht@zedat.fu-berlin.de

² Freie Universität Berlin, FB Mathematik und Informatik,
Institut für Informatik, AG Datenbanksysteme, Raum 170,
mail@nicolaslehmann.de, <http://www.nicolaslehmann.de>



Tutorium 1, 28.10.2015

Tutor stellt sich vor: Tim Dittmann, eMail: tim@zedat.fu-berlin.de
Die geschriebenen Programme an die eMail-Adresse des Tutors senden.

Organisatorisches

Skript abzuholen im Copyshop in Dahlem Dorf (Königin-Luise -Strasse,
Preis 5,80 EUR

Scheinkriterien:

- Klausur bestehen mit ≥ 4.0
- Klausurtermine 05.02.2015 und 15.04.2015
- 60% der Programmieraufgaben
- 60% der Theorieaufgaben
- einmal Vorrechnen

Die Abgabe der Übungszettel erfolgt in Zweiergruppen. Es ist ok, tutoriumübergreifende Übungsgruppen zu bilden. Abgabe soll bei Tim Dittmann erfolgen (Samanta Scharmacher und Nicolas Lehmann), zwei Wochen nach dem Erscheinen des Zettels. Quellcode an die eMail senden und Abgabe der Lösung des Zettel inklusive gedrucktem Quellcode ins Fach des Tutors.

Subject der eMail = [CoMa] <Name1> <Name2> <Übungszettelnummer>

Abgabe der Dateien in gezippter Form. Es soll immer eine Run-Datei `run_x.y.m` und Funktions-Dateien abgegeben werden. (Mit x ist Zettelnummer und y ist Aufgabennummer.)

Positionssysteme

Einleitung

Problem: Natürliche Zahlen sind abstrakte mathematische Objekte, die wir darstellen wollen.

Lösung hierfür sind Positionssysteme.

$n \in \mathbb{N}$, mit Basis $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$n = \sum_{i=0}^k r_i \cdot q^i, 0 \leq r_i < q$ und identifizieren n mit dem r_i bzw. mit Ziffern (Darstellung von n zur Basis q)

Beispiel

$$1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 123_{10}$$

$$1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 = 123_7$$

Umrechnen

Umrechnen: $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$n_0 = \sum_{i=0}^k r_i \cdot q^i \longrightarrow \frac{n_0}{q} = \sum_{i=1}^k r_i \cdot q^{i-1} + \text{Rest } r_0$$

$$n_1 = \sum_{i=0}^k r_i \cdot q^i \longrightarrow \frac{n_1}{q} = \sum_{i=1}^k r_i \cdot q^{i-2} + \text{Rest } r_1$$

...

$$n_k = r_k \cdot 1 \longrightarrow \frac{n_k}{q} = 0 + \text{Rest } r_k$$

\Rightarrow Darstellung von n ist $r_k r_{k-1} \dots r_1 r_0$

Beispiel: $n = 52_{10}, q = 3$

$$n_0 = 52_{10} \longrightarrow 17 \text{ Rest } 1$$

$$n_1 = 17_{10} \longrightarrow 5 \text{ Rest } 2$$

$$n_2 = 5_{10} \longrightarrow 1 \text{ Rest } 2$$

$$n_3 = 1_{10} \longrightarrow 0 \text{ Rest } 1$$

$$n = 1221_3$$

Darstellung von negativen Zahlen

$q = 2$ ab jetzt (Dual bzw. Binärsystem) mit Vorzeichen-Bit: Darstellung der Zahl im 2er-System, erstes Bit gibt Vorzeichen an ($+$ = 0, $-$ = 1)

0.1 Beispiel

z.B. 4-Bit, $3_{10} = 0011_2$, $-3 = 1011$ (nicht Zweierkomplement!)

N-Bit Zweierkomplement

$N=4$, positive Zahlen wie gewohnt, negative wie folgt:

$$n = -3_{10} \rightarrow 0011 \rightarrow 1100 \rightarrow 1101 \text{ (Bit-Flip, } +1)$$

Vorteile: 0 eindeutig ($0000 \rightarrow 1111 \rightarrow [1]0000$) [nur 4 Bit]

Programmieren in MATLAB

Funktionen

```
function c = kgV(a,b)
c = 0;
i = 1;

while i <= a*b % solange i <= a * b tue folgendes
    if mod(i,a) == 0 && mod(i,b) == 0
        c = i;
        break; % beende die Schleife
    else % ansonsten
        i = i+1;
    end
end

end %eof
```

Tutorium 2, 04.11.2015

Wiederholung zur Vorlesung

$$z_n z_{n-1} z_{n-2} \dots z_0 z_{-1} \dots z_{-m} = \sum_{i=-m}^n z_i \cdot q^i, \quad q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad z_i \in \{0, \dots, q-1\}$$

z.B. $q = 10$ Dezimalbruch, $q = 2$ Dualbruch

Nicht jeder Bruch ist in endlicher q -adischer Bruch.

z.B. $\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,\overline{3}$, aber jeder Bruch ist ein periodischer q -adischer Bruch.

z.B. $\frac{1}{4} = 0,25\overline{0} = 0,24\overline{9}$

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,3 \cdot (1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots) = 0,3 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,001100110011_2 = 0,\overline{0011} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) \cdot (2^0 + 2^{-4} + 2^{-8} + \dots) = \frac{3}{16} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-4i} = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{1-2^{-4}} = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{3}{16} \cdot \frac{16}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Umrechnen

$$q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad z = \sum_{i=-m}^n z_i \cdot q^i = \sum_{i=0}^n z_i \cdot q^i + \sum_{i=-m}^{-1} z_i \cdot q^i$$

Hinweis: Erste Summe wie gewohnt umrechnen, zweite Summe konvertieren zu $\sum_{i=1}^m z_i \cdot q^{-i}$

1. Fall: $m \in \mathbb{N}$

$$z = p_1 p_2 \dots p_m, \quad \text{mit } m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$$p_1 = \sum_{i=1}^m z_i \cdot q^{-i} \longrightarrow \sum_{i=2}^m z_i \cdot q^{-i+1} + z_1$$

$$p_2 = \sum_{i=2}^m z_i \cdot q^{-i+1} \longrightarrow \sum_{i=3}^m z_i \cdot q^{-i+2} + z_2$$

...

$$p_m = z_m \cdot q^{-1} \longrightarrow 0 + z_m$$

2. Fall: $m \in \infty$

$$p_k = \sum_{i=k}^{\infty} z_i \cdot q^{-i} \longrightarrow \sum_{i=k+1}^{\infty} z_i \cdot q^{-i+1} + z_k \quad \text{mit } p_{k+1} = p_l, \quad l \leq k$$

$$\Rightarrow z = z_n \dots z_0, z_1 \dots z_{l-1} \overline{z_l \dots z_k}$$

Beispiel

$$z = \frac{1}{7}, \quad q = 10$$

$$p_1 = \frac{1}{7} \longrightarrow \frac{10}{7} = \frac{3}{7} + 1$$

6

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{3}{7} \longrightarrow \frac{30}{7} = \frac{2}{7} + 4 \\ p_3 &= \frac{2}{7} \longrightarrow \frac{20}{7} = \frac{6}{7} + 2 \\ p_4 &= \frac{6}{7} \longrightarrow \frac{60}{7} = \frac{4}{7} + 8 \\ p_5 &= \frac{4}{7} \longrightarrow \frac{40}{7} = \frac{5}{7} + 5 \\ p_6 &= \frac{5}{7} \longrightarrow \frac{50}{7} = \frac{1}{7} + 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0, \overline{142857}$$

In diesem Fall $l = 1, k = 6, p_1 = \frac{1}{7} = p_{k+1}$

Beispiel

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{10}, q = 2 \\ p_1 &= \frac{1}{10} \longrightarrow \frac{1}{5} + 0 \\ p_2 &= \frac{1}{5} \longrightarrow \frac{2}{5} + 0 \\ p_3 &= \frac{2}{5} \longrightarrow \frac{4}{5} + 0 \\ p_4 &= \frac{4}{5} \longrightarrow \frac{8}{5} + 1 \\ p_5 &= \frac{8}{5} \longrightarrow \frac{16}{5} + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0, \overline{00011}, \text{ da } p_2 = p_6$$

Umrechnen

Rechnen mit Dualzahlen geht genauso wie im Dezimalsystem, z.B.: $111 \cdot 101, 1$

$$11, 1 + 111 + 0000 + 11100 = 100110, 1$$

Numerische Darstellung von reellen Zahlen

Problem: Reelle Zahlen sind nicht abzählbar, weshalb es kein Ziffernsystem für sie geben kann. Man kann nur Approximationen ausgeben, z.B. q-adische Brüche.

Festkommazahlen

Feste Anzahl von n Vor- und Nachkommastellen.

Darstellung einer reellen Zahl: $z_{n-1}z_{n-2}\dots z_0, z_{-1}\dots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} z_i \cdot q^i, z_i \in \{0, \dots, q-1\}$

Beispiel

$x = \pi, n = 3, m = 1 \rightarrow \tilde{x} = 003, 1$, Problem: Kann ungenau sein, bei festem n und m .

Gleitkommazahlen

genauer bedeutet, dass der absolute Fehler $|x - \tilde{x}|$ bzw. der relative Fehler $\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$ möglichst klein ist.

Die Zahl $\tilde{x} = (-1)^s a q^e$ mit $s \in \{0, 1\}$ Vorzeichenbit und $a = 0, a_1 \dots a_l$, $a_1 \neq 0$ oder $\forall i : a_i = 0$, $a_i \in \{0, \dots, q - 1\}$ und Exponent $e \in \mathbb{Z}$ heißt Gleitkommazahl mit Mantissenlänge l , Schreibweise $\tilde{x} \in G(q, l)$

z.B.: $-12345,67 \rightarrow (-1)^1 \cdot 0,1234567 \cdot 10^{-2}$, also $s = 1, l = 7, e = -2, q = 10$

Tutorium 3, 11.11.2015

Runden

Suchen zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $rd(x) \in G(q, l)$ mit $|x - rd(x)| \leq |x - \tilde{x}|, \forall \tilde{x} \in G(q, l)$
Wir schreiben $x \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $x = 0, a_1 a_2 \dots a_{l+1} \dots \cdot q^l$ für passendes $l \in \mathbb{Z}$

Definiere $a := 0, a_1 \dots a_l + \begin{cases} 0, \text{ falls } a_q + 1 < \frac{1}{2}q \\ q^{-l}, \text{ sonst} \end{cases}$

$$x \geq 0 : rd(x) = a \cdot q^l$$

$$x < 0 : rd(x) = -rd(-x)$$

$rd(x)$ ist Lösung.

! nicht für ungerade q : z.B. $x = 1, 012 \rightarrow rd(x) \in G(3, 2) \rightarrow |x - rd(x)| = 0, 012$, aber $1, 1 \in G(3, 2)$ und $|1, 1 - 1, 012| = 0, 011 < 0, 012$

Ab jetzt q gerade:

- absoluter Rundungsfehler $|x - rd(x)|$ ist unbeschränkt!
- relativer rundungsfehler $\frac{|x - rd(x)|}{|x|} \leq \frac{q}{2} \cdot q^{-l} = eps$ (Maschinengenauigkeit)

Gleitkommazahl

Eine Gleitkommazahl $\tilde{x} \in G(q, l)$ repräsentiert alle $x \in \mathbb{R}$, die auf \tilde{x} gerundet werden, also alle x in $[\tilde{x} - q^{l-1}eps, \tilde{x} + q^{l-1}eps)$

Gleichheitsabfragen ergeben keinen Sinn!

Hausaufgabenvorbesprechung

zu 2)

- $0, 00001$ und $1 \in G(10, 1)$, $1 + 0, 00001 \notin G(10, 1) \rightarrow rd(1, 00001) = 1$

zu 3)

- Definition von eps
- Fallunterscheidung $rd(s) = 0$ und $rd(s) \neq 0$
- Dreiecksungleichung

Tutorium 4, 18.11.2015

Relative Konditionierung

o-Notation

o ist eines der Landau-Symbole. Landau-Symbole beschreiben Wachstum von Funktionen.

Def.: $f(x) \in o(h(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$

$o(x) = \{f | \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0\}$ z.B.: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \Rightarrow x^2 \in o(x)$ für $x \rightarrow 0$.

Kondition der Grundrechenarten

Wie verstärkt sich der (relative) Fehler in den Eingabedaten, wenn wir mit gerundeten Daten rechnen?

$$\tilde{x} = x \cdot (1 + \epsilon_x) \text{ und } \tilde{y} = y \cdot (1 + \epsilon_y)$$

$$\epsilon := \max(\epsilon_x, \epsilon_y) \leq \text{eps}(q, l)$$

Definition der relativen Kondition der Grundrechenarten.

Sei $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$, $x \cdot y \neq 0$, dann heißt die kleinste Zahl κ_{rel} mit $\frac{|x \cdot y - \tilde{x} \cdot \tilde{y}|}{|x \cdot y|} \leq \kappa_{rel} \epsilon + o(\epsilon)$ mit $\frac{o(\epsilon)}{\epsilon} \rightarrow 0$ für $\epsilon \rightarrow 0$

Kondition von Funktionsauswertungen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

Wir wollen untersuchen, wie sich kleine Abweichungen von x_0 auf die Auswertung von f auswirken.

Definition: Die absolute Kondition $= \kappa_{abs}$ von f an der Stelle x_0 ist die kleinste Zahl, so dass $|f(x_0) - f(\tilde{x}_0)| \leq \kappa_{abs} \cdot |\tilde{x}_0 - x_0| + o(|x_0 - \tilde{x}_0|)$, wenn κ nicht existiert, setze $\kappa_{abs} = \infty$

$$\tilde{x}_0 = rd(x_0)$$

Beispiel

$$f(x) = ax + b$$

$$|f(x) - f(\tilde{x})| = |a| \cdot |x - \tilde{x}| \Rightarrow \kappa_{abs} = |a|$$

$$f(x) = c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow \kappa_{abs} = 0$$

$$\text{Falls } f \text{ differenzierbar} \Rightarrow \kappa_{abs} = |f'(x_0)|$$

Tutorium 5, 25.11.2015