Cours tut
1a)

$0{,}2421_5 = x_{15}$

$0{,}2421_5 = \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{2}{125} + \frac{1}{625} = \frac{361}{625}_{10}$

$\frac{361}{625} \cdot 15 = 8 \text{ R } \frac{83}{125}$

$\vdots$

$\Rightarrow \quad 0{,}89E6$

$0{,}1_{10} = 0{,}0\overline{0011}_2$

3 a)

$a = \frac{z}{2^n} \quad z \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N}$

$a = \frac{5^n z}{5^n \cdot 2^n} = \frac{5^n z}{10^n}$

~~$0{,}2 \times 1{,}3{,}4{,}5 = 0{,}4$~~

Zusammenfassung der letzten Woche

Kondition (Fehler verstärkungs faktor)

Kondition der Grundrechenarten

Eingabedaten: $\check{x} = x(1+\varepsilon_x)$, $\check{y} = y(1+\varepsilon_y)$

relative Kondition: $\frac{|x \circ y - \check{x} \circ \check{y}|}{|x \circ y|} \leq \kappa_{rel}\, \varepsilon + O(\varepsilon)$

$\circ = +, -, \cdot, /$

Multiplikation: $\kappa_{rel} = 2$ } Fehler wird verdoppelt

Division: $\kappa_{rel} = 2$

Addition: κ_{rel} → Fehler bleibt wie vorher

Subtraktion: $\kappa_{rel} = \frac{|x| + |y|}{|x-y|}$

$$|x+y - \check{x} + \check{y}| = |x - \check{x} + y - \check{y}|$$ ← def anwenden

$$= |x\varepsilon_x + y\varepsilon_y|$$

dreiecks ungleichung

$$\leq |x||\varepsilon_x| + |y||\varepsilon_y|$$

$$\leq |x+y|\,\varepsilon$$

Kondition von Funktionsauswertungen

absolute Kondition in x_0, absoluter Eingabefehler $\varepsilon = |x_0 - x|$

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \kappa_{abs}\, |x_0 - x| + O(|x_0 - x|)$$

- f differenzierbar: $\kappa_{abs} = |f'(x_0)|$
- f lipschitz stetig: $\kappa_{abs} \leq L$
- f geschachtelte Funktion: $f(x_0) = g(h(x_0))$

  $\kappa_{abs}(f, x_0) \leq \kappa_{abs}(g, h(x_0)) \cdot \kappa_{abs}(h, x_0)$

  $=$ g, h differenzierbar
- f unstetig in x_0: $\kappa_{abs} = \infty$

relative Kondition: an der Stelle x_0:

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq K_{rel} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|} + \mathcal{O}(|x_0 - x|)$$

Satz: $K_{rel} = \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} \cdot K_{abs}$

↳ Herleitung

$$|f(x_0) - f(x)| \leq K_{abs} |x_0 - x| \quad \Big| : |f(x_0)| \ : |x_0|$$

$$\frac{|f(x_0) - f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \frac{|x_0|}{|f(x_0)|} K_{abs} \frac{|x_0 - x|}{|x_0|}$$

Bsp

$f(x) = ax$ ← ist diffbar

$K_{abs} = a$

$K_{rel} = 1$