Stabilitätsanalyse

mit mehreren Variablen

11.01.2011

Andreas Lockow

Beispiel

$$F(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_1) + (sin(x_2))^2$$

mit dem Algorithmus

$$F_1(x_1, x_2) = f_1(f_1(f_2(x_1), x_1), f_2(f_3(x_2)))$$

$$f_1(x, y) = x + y \qquad f_2(x) = x^2 \qquad f_3(x) = sin(x)$$

Zerlegung des Algorithmuses

$$F_1(x_1, x_2) = f_1(\underbrace{f_1(f_2(x_1), x_1)}_{x}, \underbrace{f_2(f_3(x_2))}_{y})$$

$$f_1(x, y) = x + y$$

$$f_2(x) = x^2$$

$$f_3(x) = sin(x)$$

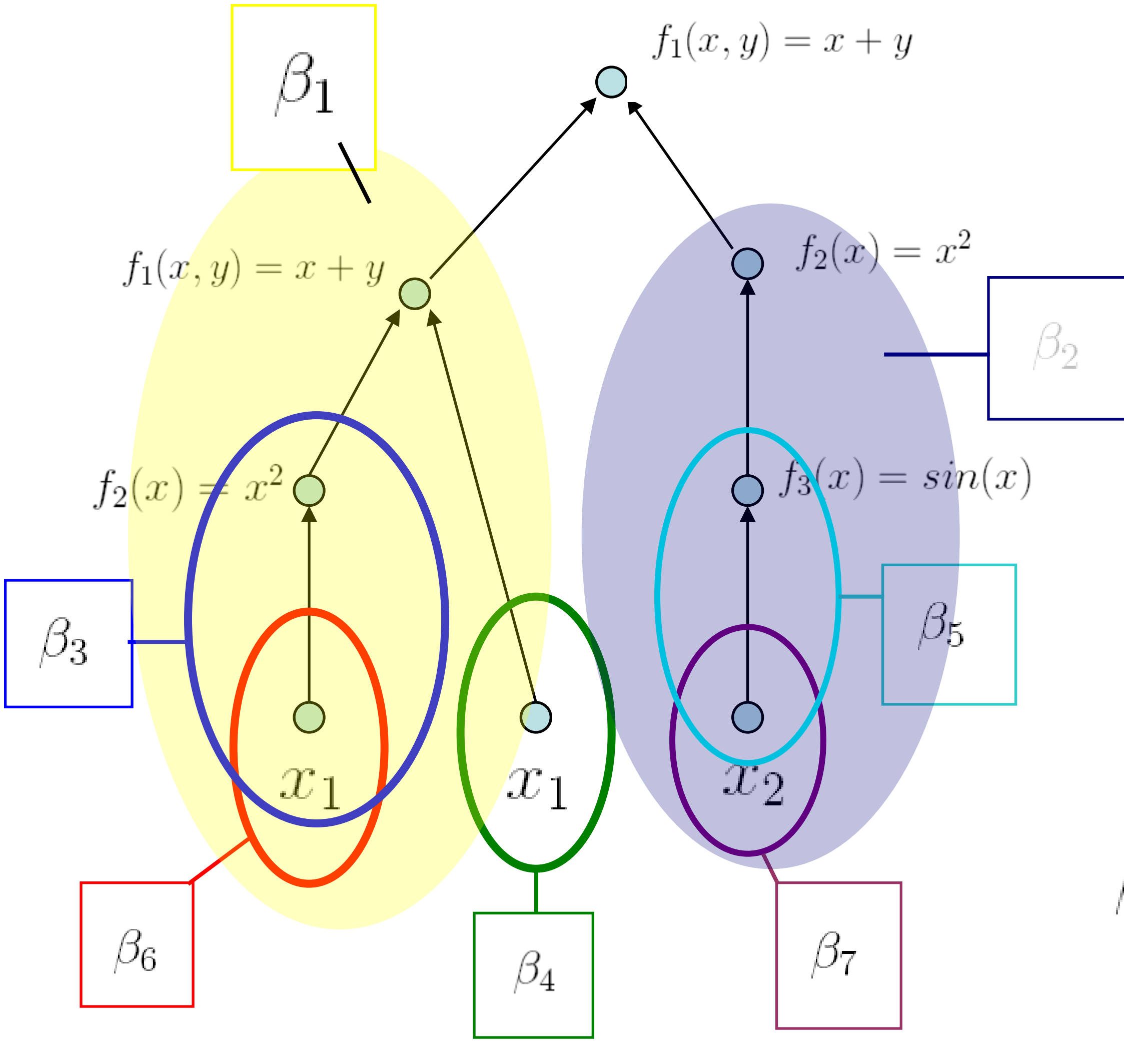
$$= f_1(\underbrace{f_2(x_1)}_{x}, \underbrace{x_1}_{y}) + f_2(f_3(x_2))$$

$$= f_2(x_1) + x_1 + f_2(f_3(x_2))$$

$$= x_1^2 + x_1 + f_2(sin(x_2))$$

$$= (x_1^2 + x_1) + (sin(x_2))^2 \mathrel{\hat{=}} F(x_1, x_2)$$

Der Auswertungsbaum β



β besteht aus den Teilbäumen β_1 und β_2.
Man schreibt deshalb auch : $\beta = [\beta_1, \beta_2]$

Genauso gelten:

$$\beta_1 = [\beta_3, \beta_4] \quad \beta_2 = [\beta_5]$$

$$\beta_3 = [\beta_6]$$

$$\beta_5 = [\beta_7]$$

$$\beta_6 = [\,] \quad \beta_4 = [\,] \quad \beta_7 = [\,]$$

[ ] bedeutet, dass es ein Blatt ist

Anzahl der Knoten

Die Anzahl der Knoten im Baum ist die um 1 erhöhte Summe der Anzahl der Knoten seiner Teilbäume.

Beispiele: $\#\beta = 1 + \#\beta_1 + \#\beta_2$ (8 = 1 + 4 + 3)

Knoten der weggenommenen Wurzel

$$\#\beta_1 = 1 + \#\beta_3 + \#\beta_4$$ (4 = 1 + 2 + 1)

Was ist ein Baum?

- besitzt eine Wurzel („Endknoten“)
- es gibt nur eine Wurzel
- jedes Blatt ist mit der Wurzel verbunden
- von jedem Blatt geht nur eine Kante aus, sofern der Baum nicht trivial ist
- trivialer Baum ist der Baum, der nur aus einem Blatt besteht (also β = [ ])

f^{β_i} ist die Funktion im Wurzelknoten β_i

Allgemein gilt: $$z^{\beta} = \begin{cases} z^{\beta} & , \#\beta = 1 \\ f^{\beta}(z^{\beta_1}, \ldots, z^{\beta_n}) & , \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_n] \end{cases}$$

Beispiele:

$f^{\beta_3}(z^{\beta_6}) = (z^{\beta_6})^2 = x_1^2$

$z^{\beta_6} = x_1$, weil β_6 ein Blatt ist

$z^{\beta_1} = f^{\beta_1}(z^{\beta_3}, z^{\beta_4}) = f^{\beta_1}(f^{\beta_3}(z^{\beta_6}), z^{\beta_4})$, denn $z^{\beta_3} = f^{\beta_3}(z^{\beta_6})$, weil $\beta_3 = [\beta_6]$

$z^{\beta_1} = f^{\beta_1}(x_1^2, x_1) = x_1^2 + x_1$

Stabilitätsanalyse

Allgemein gilt:

$$\sigma^{\beta} \leq \begin{cases} 1 & , \#\beta = 1 \\ 1 + \kappa_{rel} \cdot max\{\sigma^{\beta_1}, ..., \sigma^{\beta_n}\} & , \beta = [\beta_1, ..., \beta_n] \end{cases}$$

mit κ_{rel} : relative Kondition von $f^{\beta}(z^{\beta_1}, ..., z^{\beta_n})$

Fangen wir an…

… erstmal trivial: $\sigma^{\beta_6} = \sigma^{\beta_4} = \sigma^{\beta_7} = 1, \text{ weil Blätter}$

Nun wird es anspruchsvoller…

$$\sigma^{\beta_3} \leq 1 + \kappa_{rel} \cdot max\{\sigma^{\beta_6}\}, \text{ denn } \beta_3 = [\beta_6] \text{ und } \sigma^{\beta_6} = 1$$

Das bedeutet:

$$\sigma^{\beta_3} \leq 1 + \kappa_{rel\, f_2}(z^{\beta_6}) \cdot 1 = 1 + |2x| \cdot \frac{|x|}{|x^2|} = 1 + 2 = 3$$

$$\sigma^{\beta_5} \leq 1 + \kappa_{rel\,f_3}(z^{\beta_7}) \cdot max\{\sigma^{\beta_7}\}$$

$$\sigma^{\beta_5} \leq 1+|cos(x)|\tfrac{|x|}{|sin(x)|}\cdot 1 \overset{x=z^{\beta_7}=x_2}{=} 1+|cos(x_2)|\cdot\tfrac{|x_2|}{|sin(x_2)|}$$

$$\sigma^{\beta_2} \leq 1 + \kappa_{rel\,f_2}(z^{\beta_5}) \cdot max\{\sigma^{\beta_5}\}$$

$$= 1 + |2x| \cdot \tfrac{|x|}{|x^2|} \cdot max\{\sigma^{\beta_5}\}$$

$$= 1+2(1+|cos(x_2)|\cdot\tfrac{|x_2|}{|sin(x_2)|}) = 3+2(|cos(x_2)|\cdot\tfrac{|x_2|}{|sin(x_2)|})$$

Weiter geht's…

$$\sigma^{\beta_1} \leq 1 + \kappa_{rel\, f_1}(z^{\beta_3}, z^{\beta_4}) \cdot max\{\sigma^{\beta_3}, \sigma^{\beta_4}\}$$

κ_{rel} der Addition

$$= 1 + \frac{|z^{\beta}3| + |z^{\beta}4|}{|z^{\beta}3 + z^{\beta}4|} \cdot max\{\sigma^{\beta_3}, \sigma^{\beta_4}\}$$

Daraus ergibt sich:

$$\sigma^{\beta_1} \leq 1 + \frac{|x_1^2| + |x_1|}{|x_1^2 + x_1|} \cdot max\{3, 1\} = 1 + 3(\frac{|x_1^2| + |x_1|}{|x_1^2 + x_1|})$$

Zum Schluss noch σ^{β} …

$$\sigma^{\beta} \leq 1 + \kappa_{rel\,f_1}(z^{\beta_1}, z^{\beta_2}) \cdot max\{\sigma^{\beta_1}, \sigma^{\beta_2}\}$$

κ_{rel} der Addition

$$\sigma^{\beta} \leq 1 + \frac{|z^{\beta_1}|+|z^{\beta_2}|}{|z^{\beta_1}+z^{\beta_2}|} \cdot max\{\sigma^{\beta_1}, \sigma^{\beta_2}\}$$

$$= 1 + \frac{|(x_1^2+x_1)|+|(sin(x_2))^2|}{|(x_1^2+x_1)+(sin(x_2))^2|} \cdot max\{\sigma^{\beta_3}, \sigma^{\beta_4}\}$$

Relativer Fehler

Mit $\beta_{F_1} = \beta$ folgt:

$$\underbrace{\frac{|F(x_1, x_2) - F_1(x_1, x_2)|}{|F(x_1, x_2)|}}_{\text{relativer Fehler}} \leq \sigma^{\beta} \cdot eps = \sigma^{F_1} \cdot eps$$

$F(x_1, x_2)$ ist der reale (analytisch ermittelte) Wert

$F_1(x_1, x_2)$ ist der (meist) fehlerhafte, mit Rechner ermittelte Wert

Das war‘s… ☺

FRAGEN / PROBLEME / KRITIK / ANREGUNG ??? → Mailt mir !!!