Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Ch. Schütte

Klausur zur Vorlesung
Computerorientierte Mathematik I im WS 2010/11 A

Name:______________________________ Matr.-Nr.:____________________

Studiengang:
○ Mathematik ○ Bioinformatik ○ Informatik ○ anderer:

Angestrebter Abschluß:
○ Diplom ○ Lehramt(Staatsexamen) ○ anderer:
○ Bachelor(Mono) ○ Bachelor(Kombi, Lehramt) ○ Master

Beschriften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, mit Ihrem Namen. Bitte heften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, nach der Klausur mit einem der bereitgestellten Hefter zusammen. Bitte benutzen Sie keinen Bleistift. Erlaubte Hilfsmittel sind alle Ihre schriftlichen Unterlagen, Bücher und ein nicht programmierbarer Taschenrechner. Die Klausur besteht mit Deckblatt aus insgesamt vier Seiten auf zwei Blättern.

Wenn Sie Ihre Klausurergebnisse auf der Website der Vorlesung unter Ihrer Matrikelnummer nachlesen wollen, unterschreiben Sie bitte die folgende Erklärung:

Ich bin damit einverstanden, daß mein Ergebnis bei dieser Klausur unter meiner Matrikelnummer auf der Website zur Vorlesung veröffentlicht wird.

______________________________ Unterschrift

Aufgabe	I	II.1	II.2	II.3	II.4	$\sum$
Punkte						

Viel Erfolg!

Teil I (10 Punkte)

Kreuzen Sie an, ob die jeweiligen Aussagen „wahr“ oder „falsch“ sind. Für jede richtig angekreuzte Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch angekreuzte Aussage wird ein Punkt abgezogen. Wenn Sie kein Kreuz setzen, hat das keine Auswirkungen. Sie können jedoch nicht weniger als 0 Punkte in Teil I bekommen!

wahr	falsch	Aussage
		Die absolute Kondition einer Funktionsauswertung ist immer größer oder gleich 1.
		Die periodischen Dezimalbrüche sind eine Zifferndarstellung der reellen Zahlen.
		Die Kondition einer Matrix bezüglich der Zeilensummennorm ist immer größer oder gleich 1.
		Die absolute Kondition ist eine Eigenschaft des verwendeten Algorithmus.
		Der beim Runden einer beliebigen reellen Zahlen x auf Gleitkommazahlen $\mathbb{G}(q,\ell)$ auftretende relative Rundungsfehler ist immer kleiner als die Maschinengenauigkeit.
		Die Zahl $x = 4250103_6$ ist bezüglich $q = 9$ und $\ell = 8$ ein Element von $\mathbb{G}(q,\ell)$.
		Die relative Kondition ist immer unabhängig von den Eingabedaten.
		Die relative Kondition der Drei-Term-Rekursion $x_{k+1} + ax_k + bx_{k-1} = 0$ ist für alle konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ und gegebenen $x_{-1} \in \mathbb{R}$ gleichmäßig in k beschränkt.
		Die Addition zweier negativer Zahlen ist beliebig schlecht konditioniert.
		Unvermeidbare, schlecht konditionierte Elementaroperationen sollten immer am Anfang des Algorithmus durchgeführt werden.

Teil II finden Sie auf den Seiten 3 und 4.

Teil II (25 Punkte)

Bearbeiten Sie <u>**alle**</u> der folgenden Aufgaben!

Aufgabe 1 (2+3+2 Punkte)
$x = 320.4_5$ und $y = 2.22_5$ sind zwei 5-adische Brüche.

a) Berechnen Sie die Summe $x + y$, ohne in das Dezimalsystem umzurechnen. Runden Sie das Ergebnis auf eine Gleitkommazahl aus $\mathbb{G}(5, 2)$.

b) Runden Sie x und y zuerst auf Gleitkommazahlen aus $\mathbb{G}(5, 2)$, und berechnen Sie anschließend die Summe dieser Gleitkommazahlen. Runden Sie das Ergebnis wiederum auf eine Gleitkommazahl aus $\mathbb{G}(5, 2)$.

c) Wandeln Sie $x = 320.4_5$ und $y = 2.22_5$ in Dezimalbrüche um.

Aufgabe 2 (4+5 Punkte)

a) Berechnen Sie die relative Kondition der Auswertung der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5 - 2x + 4 \qquad \text{an der Stelle } x_0 = -2 \text{ und}$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \exp(x - 2 + (x - 2)^2) \qquad \text{an der Stelle } x_0 = 3.$$

b) Zur Auswertung der Funktion

$$h(x) = \exp(x - 2 + (x - 2)^2)$$

an der Stelle $x_0 = 3$ soll folgender Algorithmus verwendet werden:

$$h(x) = h_4\left(h_3\left(h_2(h_1(x_0)), h_1(x_0)\right)\right)$$

mit

$$h_1(x) = x - 2, \qquad h_2(x) = x^2, \qquad h_3(x, y) = x + y, \qquad h_4(x) = e^x.$$

Berechnen Sie durch Benutzung der Auswertungsbäume aus der Vorlesung eine obere Schranke für die Stabilität des Algorithmus.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie für $x \to \infty$:

a) $f(x) = \mathcal{O}(x^2),\ g(x) = \mathcal{O}(x^2) \Longrightarrow f(x) - g(x) = \mathcal{O}(x)$

b) $3x^5 + (10 - x^2)^2 = o(x^6)$

bitte wenden

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)
Betrachten Sie das Problem des Lösens der nichtlinearen Gleichung

$$x^* \in \mathbb{R}^+ : \qquad g(x^*) = c$$

für $g(x) = x^4$, $c > 0$, wobei wir nur an positiven Lösungen $x^* \geq 0$ interessiert sind.

a) Berechnen Sie die absolute und die relative Kondition des Problems für Störungen der rechten Seite c.

b) Wie verhalten sich die relative und die absolute Kondition im Falle $c \searrow 0$?

Ende der Klausuraufgaben