CoMa I Klausurvorbereitung / Klausurzettel

Umformungen:

$(a+b)^2=a^2+2\mathrm{ab}+b^2 \quad (a-b)^2=a^2-2\mathrm{ab}+b^2 \quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$\frac{x}{\frac{1}{x^2}}=x\cdot x^2$$

$$h(x)=\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x-1}=(x-1)^{-1}$$

$$f(x)=\ln(x) \quad f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$\sqrt[n]{c}=c^{\frac{1}{n}}$$

$$x^{1/2} = \sqrt{x}$$
$$x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$x^{3/2} = x\sqrt{x}$$

Dreiecksungleichung:

$|a|-|b|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$

$|a|-|b|\leq|a-b|\leq|a|+|b|$

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

$$\log_a b=c \Leftrightarrow a^c=b \quad \log_a a=1 \quad \log_a 1=0$$

Trigonometrischer Pythagoras:

$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \tan\alpha\cot\alpha=1$$

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\pm\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\pm\tan\alpha\tan\beta}$$

Aufwandsberechnung:

„Ist limes f durch g konstant,
f gleich groß O(g) gilt σ *ist bekannt.*

Ist auch g gleich groß O(f), wird's netter,
dann gilt für beide nämlich Theta! „

Komplexität:

Die Komplexität ist das Infimum der Aufwände der Algorithmen des Problems, also der kleinste Aufwand, der betrieben werden muss um ein Problem zu lösen.

Effizienz:
Aufwand des Algorithmus ≈ Komplexität des Problems
z.B.: K(P) = O(n log n)
Algorithmus mit Aufwand = O(2n log n) ist effizient, weil Unterscheidung nur um konstanten Faktor
Algorithmus mit Aufwand = $O(n^3)$ nicht effizient.

Kondition: Eigenschaft des Problems
Kabs:

Variante	**Beispiel**	**Ergebnis**
f ist diffbar	$f(x)=x^4$	$Kabs=\lvert f'(x)\rvert=\lvert 4x^3\rvert$
f ist Lipschitzstetig Steigung hat Maximum $\lvert f(x)-f(y)\rvert\leq L\lvert x-y\rvert\ \ \forall x,y$	$f(x)=\lvert 2x\rvert$	$Kabs\leq L=2$ $\lvert\lvert 2x\rvert-\lvert 2y\rvert\rvert$ $=2\lvert\lvert x\rvert-\lvert y\rvert\rvert\leq 2\lvert x-y\rvert$
$f(x)=g\circ h(x)=g(h(x))$	$f(x)=\sin(x^2)$ $g(x)=\sin x$ $h(x)=x^2$ Bsp. 2: $f(x)=\sin(\lvert x\rvert)$ $g(x)=\sin x$ $h(x)=\lvert x\rvert$	$Kabs_f\leq Kabs_g\cdot Kabs_h$ $=\lvert\cos x\rvert\cdot\lvert 2x\rvert$ $\overset{Resubst}{\rightarrow}$ $=\lvert\cos(x^2)\rvert\cdot\lvert 2x\rvert$ $Kabs_f\leq Kabs_g\cdot Kabs_h$ $=\lvert\cos x\rvert\cdot 1$ $\overset{\text{Resubst}}{\rightarrow}$ $=\lvert\cos(\lvert x\rvert)\rvert$
f ist nicht stetig in x_0	$f(x)=\frac{1}{x^3}$ $x_0=0$	$Kabs=\infty$ für $x_0=0$ $Kabs=\left\lvert\frac{-3}{x^4}\right\rvert$ $\lvert f(x_0)-f(x)\rvert\leq Kabs(x_0-x)$

Krel:

$$Krel=\lvert Kabs\rvert\cdot\frac{\lvert x_0\rvert}{\lvert f(x_0)\rvert}$$

$$f(x)=x^n\ \Rightarrow\ Krel=\lvert n\rvert$$

Stabilität: Eigenschaft des Algorithmus

1)
$\sigma_{Elementarfunktion}=1$
Elementar-Fkt. ≙ Fkt., wo wir zuerst x einsetzen

2)
() vor $\circ$ vor $\cdot/\div$ vor $+/-$

3)

$$f(x)=g(x)+h(x)\ \Rightarrow\ \sigma_f\leq 1+\frac{\lvert g(x)\rvert+\lvert h(x)\rvert}{\lvert g(x)+h(x)\rvert}\cdot max\{\sigma_g,\sigma_h\}$$

$$f(x)=g(x)-h(x)\ \Rightarrow\ \sigma_f\leq 1+\frac{\lvert g(x)\rvert+\lvert h(x)\rvert}{\lvert g(x)-h(x)\rvert}\cdot max\{\sigma_g,\sigma_h\}$$

$$f(x)=g(x)\ \cdot/\div\ h(x)\ \Rightarrow\ \sigma_f\leq 1+2\cdot max\{\sigma_g,\sigma_h\}$$

4)

$$f(x)=g\circ h(x)\ \Rightarrow\ \sigma_f\leq 1+Krel_g\cdot\sigma_h$$

Gesamtfehler:

$GF \leq Krel \cdot Eingabefehler + \sigma \cdot Auswertungsfehler$

$EF : \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$

$AF \leq eps = 2.2204 \cdot 10^{-16}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Ableitungen

Funktion	**Ableitung**
Produktregel	
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g(x)$
Quotientenregel	
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	
$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$
Potenzfunktionen	
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x^3}$
$x^{1/2} = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
$x^{3/2} = x\sqrt{x}$	$\frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
Winkelfunktionen	
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
Exponentialfunktionen	
e^x	e^x
e^{kx}	$k e^{kx}$
Logarithmusfunktionen	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
${}^a\log x$	$\frac{1}{x \ln a}$