

Computerorientierte Mathematik I

Übung 7

Gideon Schröder¹

Samanta Scharmacher²

Nicolas Lehmann³ (Dipl. Kfm., BSC)

¹ Freie Universität Berlin, FB Physik,
Institut für Physik, gideon.2610@hotmail.de

² Freie Universität Berlin, FB Mathematik und Informatik,
Institut für Informatik, scharbrecht@zedat.fu-berlin.de

³ Freie Universität Berlin, FB Mathematik und Informatik,
Institut für Informatik, AG Datenbanksysteme, Raum 170,
mail@nicolaslehmann.de, <http://www.nicolaslehmann.de>



Lösungen zu den gestellten Aufgaben

Aufgabe 1

Teilaufgabe a)

$$g_1(x) = 2abx$$

$$g_2(y) = a^2 - y$$

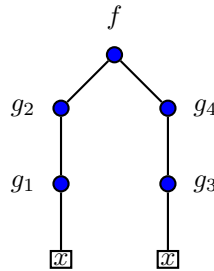
$$g_3(x) = x^2$$

$$g_4(y) = b^2y$$

$$f(x) = (g_2 \circ g_1)(x) + (g_4 \circ g_3)(x)$$

$$= g_a(x) + g_b(x)$$

$$\text{mit } g_a(x) = (g_2 \circ g_1)(x) \text{ und } g_b(x) = (g_4 \circ g_3)(x)$$



$$\sigma_{g_1} = \sigma_{g_2} = \sigma_{g_3} = \sigma_{g_4} = 1$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_{rel_{g_2}} &= \kappa_{abs_{g_2}} \cdot \frac{|y|}{|g_2(y)|} \\
 &= 1 \cdot \frac{|y|}{|a^2 - y|} \\
 &= \frac{|2abx_0|}{|a^2 - 2abx_0|} \quad // y = g_1(x_0) = 2abx_0 \\
 &= \frac{|2bx_0|}{|a - 2bx_0|}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{g_2 \circ g_1} &\leq 1 + \kappa_{rel_{g_2}} \cdot \sigma_{g_1} \\
 &\leq 1 + \frac{|2bx_0|}{|a - 2bx_0|} \cdot 1 \\
 &\leq 1 + \frac{|2bx_0|}{|a - 2bx_0|}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rel_{g_4}} &= \kappa_{abs_{g_4}} \cdot \frac{|y|}{|g_4(y)|} \\
&= |b^2| \cdot \frac{|y|}{|b^2 \cdot y|} \\
&= \frac{|b^2 \cdot y|}{|b^2 \cdot y|} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{g_4 \circ g_3} &\leq 1 + \kappa_{rel_{g_4}} \cdot \sigma_{g_3} \\
&\leq 1 + 1 \cdot 1 \\
&\leq 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_f &\leq 1 + \max(\sigma_{g_2 \circ g_1}, \sigma_{g_4 \circ g_3}) \\
&\leq 1 + \max(1 + \frac{|2bx_0|}{|a - 2bx_0|}, 2)
\end{aligned}$$

Teilaufgabe b)

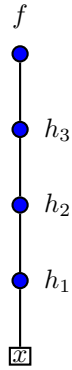
$$h_1(x) = bx$$

$$h_2(y) = a - y$$

$$h_3(z) = z^2$$

$$h_0(x) = h_2 \circ h_1(x)$$

$$f(x) = h_3 \circ h_2 \circ h_1(x) = h_3 \circ h_0(x)$$



$$\sigma_{h_1} = \sigma_{h_2} = \sigma_{h_3} = 1$$

$$\kappa_{abs_{h_2}} = |h_2'(y)| = 1$$

$$\begin{aligned} \kappa_{rel_{h_2}} &= \kappa_{abs_{h_2}} \cdot \frac{|y|}{|h_2(y)|} \\ &= 1 \cdot \frac{|y|}{|a - y|} \\ &= \frac{|bx_0|}{|a - bx_0|} \quad // y = h_1(x_0) = bx_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{h_0} = \sigma_{h_2 \circ h_1} &\leq 1 + \kappa_{rel_{h_2}} \cdot \sigma_{h_1} \\ &\leq 1 + \frac{|bx_0|}{|a - bx_0|} \cdot 1 \\ &\leq 1 + \frac{|bx_0|}{|a - bx_0|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{rel_{h_3}} &= \kappa_{abs_{h_3}} \cdot \frac{|z|}{|h_3(z)|} \\
&= |2 \cdot z| \cdot \frac{|z|}{|z^2|} \\
&= 2 \cdot |z| \cdot \frac{1}{|z|} \\
&= \frac{2 \cdot |z|}{|z|} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_f = \sigma_{h_3 \circ h_0} &\leq 1 + \kappa_{rel_{h_3}} \cdot \sigma_{h_0} \\
&\leq 1 + 2 \cdot \left(1 + \frac{|bx_0|}{|a - bx_0|}\right) \\
&\leq 1 + 2 + 2 \cdot \frac{|bx_0|}{|a - bx_0|} \\
&\leq 3 + 2 \cdot \frac{|bx_0|}{|a - bx_0|}
\end{aligned}$$

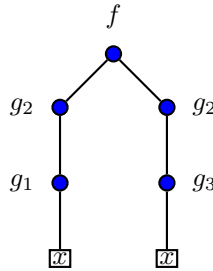
Aufgabe 2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{x^8 - 1}{x^4 - 1} = \frac{g_2(g_1(x))}{g_2(g_3(x))}, \quad g_1(x) = x^8, \quad g_2(y) = y - 1, \quad g_3(x) = x^4$$

Teilaufgabe a)

Sei $g_a(x) = g_2(g_1(x))$ und $g_b(x) = g_2(g_3(x)) \implies$ es folgt: $f(x) = \frac{g_a(x)}{g_b(x)}$



$$\sigma_{g_1} = \sigma_{g_2} = \sigma_{g_3} = 1$$

$$\begin{aligned} \kappa_{rel_{g_2}} &= \kappa_{abs_{g_2}} \cdot \frac{|y|}{|g_2(y)|} \\ &= 1 \cdot \frac{|y|}{|y-1|} \quad // y = g_1(x_0) = x_0^8 \text{ bzw. } y = g_1(x_0) = x_0^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{g_2 \circ g_1} &\leq 1 + \kappa_{rel_{g_2}} \cdot \sigma_{g_1} \\ &\leq 1 + \frac{|y|}{|y-1|} \cdot 1 \quad // y = g_1(x_0) = x_0^8 \\ &\leq 1 + \frac{|x_0^8|}{|x_0^8 - 1|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{g_2 \circ g_3} &\leq 1 + \kappa_{rel_{g_2}} \cdot \sigma_{g_3} \\ &\leq 1 + \frac{|y|}{|y-1|} \cdot 1 \quad // y = g_1(x_0) = x_0^4 \\ &\leq 1 + \frac{|x_0^4|}{|x_0^4 - 1|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_f &\leq 1 + \kappa_{DIV} \max(\sigma_{g_2 \circ g_1}, \sigma_{g_2 \circ g_3}) \\
&\leq 1 + 2 \cdot \max\left(1 + \frac{|x_0^8|}{|x_0^8 - 1|}, 1 + \frac{|x_0^4|}{|x_0^4 - 1|}\right) \\
&\leq 1 + \max\left(2 + 2 \cdot \frac{|x_0^8|}{|x_0^8 - 1|}, 2 + 2 \cdot \frac{|x_0^4|}{|x_0^4 - 1|}\right) \\
&\leq 1 + 2 + \max\left(\frac{2 \cdot |x_0^8|}{|x_0^8 - 1|}, \frac{2 \cdot |x_0^4|}{|x_0^4 - 1|}\right) \\
&\leq 3 + \max\left(\frac{2 \cdot |x_0^8|}{|x_0^8 - 1|}, \frac{2 \cdot |x_0^4|}{|x_0^4 - 1|}\right)
\end{aligned}$$

Die letzten Umformungen sind gültig, da es sich um lineare Umformungen handelt. Die Ordnung der Werte werden linear verändert, d.h. $\max(x+1, y+1)$ und $x+1$ ist das Maximum, dann ist es auch x in $\max(x, y) + 1$. Analog auch bei der Multiplikation mit einer Konstante a .

Teilaufgabe b)

Bei der Grenzwertbildung mit $x \rightarrow 1$ müsste der Grenzwert über $\frac{0}{0}$ gebildet werden!

Deswegen: Verwende Satz von L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 1} f = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^8 - 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8 \cdot x^7}{4 \cdot x^3} = 2$$

Für die Stabilität ergibt sich aber:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \sigma_f &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(3 + \max\left(\frac{2 \cdot |x^8|}{|x^8 - 1|}, \frac{2 \cdot |x^4|}{|x^4 - 1|}\right)\right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} 3 + \lim_{x \rightarrow 1} \max\left(\frac{2 \cdot |x^8|}{|x^8 - 1|}, \frac{2 \cdot |x^4|}{|x^4 - 1|}\right) \\
&= 3 + \lim_{x \rightarrow 1} \max\left(\frac{2 \cdot |1^8|}{|1^8 - 1|}, \frac{2 \cdot |1^4|}{|1^4 - 1|}\right) \\
&= 3 + \lim_{x \rightarrow 1} \max\left(\frac{2 \cdot |1^8|}{|0|}, \frac{2 \cdot |1^4|}{|0|}\right) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Teilaufgabe c)

Die Schwäche des obigen Terms ist die Definitionslücke bei $|x| = 1$. Denn in diesem Fall würde man durch 0 dividieren, was nicht definiert ist! (mit Ausnahmen $\frac{0}{0} = 1$, wenn man das definieren will)

Somit ist unser Ziel nun einen äquivalenten Term zu finden, der für den gesamten

Wertebereich gilt.

$$f(x) = \frac{x^8 - 1}{x^4 - 1}$$

Sei die 3. Binomische Formel wie folgt gegeben: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
Wir können den obigen Term wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^8 - 1}{x^4 - 1} \\ &= \frac{x^{4 \cdot 2} - 1}{x^4 - 1} \\ &= \frac{(x^4)^2 - 1^2}{x^4 - 1} \\ &= \frac{(x^4 - 1) \cdot (x^4 + 1)}{x^4 - 1} \\ f(x) &= x^4 + 1 \end{aligned}$$

$f(x)$ kann dabei in folgende Elementarfunktionen zerlegt werden:

$$f(x) = x^4 + 1 = h_2 \circ h_1(x) \quad h_1(x) = x^4, \quad h_2(y) = y + 1$$

Die relative Stabilität dieses Terms kann wie folgt berechnet werden:

$$\sigma_{h_1} = \sigma_{h_2} = 1$$

$$\begin{aligned} \kappa_{rel_{h_2}} &= \kappa_{abs_{h_2}} \cdot \frac{|y|}{|h_2(y)|} \\ &= 1 \cdot \frac{|y|}{|y + 1|} \quad // y = h_1(x_0) = x_0^4 \\ &= 1 \cdot \frac{|x_0^4|}{|x_0^4 + 1|} \\ &= \frac{|x_0^4|}{|x_0^4 + 1|} \end{aligned}$$

$$\sigma_f \leq 1 + \kappa_{rel_{h_2}} \cdot \sigma_{h_1} = 1 + \frac{|x_0^4|}{|x_0^4 + 1|} \cdot 1 = 1 + \frac{|x_0^4|}{|x_0^4 + 1|} = 1 + \left| \frac{(x_0^4 + 1) - 1}{x_0^4 + 1} \right| \leq 1 + \left| \frac{x_0^4 + 1}{x_0^4 + 1} \right| + 1$$

Aufgabe 3

Teilaufgabe a)

```
stichprobe=randn(10000,1)+500;
```

Auf die Ausgabe des Vektors wird an dieser Stelle verzichtet (Papierverschwendung).

Teilaufgabe b)

```
% Mittelwert berechnen
function erg = mittelwert(x)

    n=size(x,1);
    erg = (1/n)*sum(x,1);

end

% Varianz mit Standardformel
function erg = stichprobenVarStandart(x)

    n=size(x,1);
    erg = sum((x-mittelwert(x)).^2,1)/(n-1);

end

% Varianz mit Verschiebungssatz bzw. Satz von Steiner
function erg = stichprobenVarSteiner(x)

    n=size(x,1);
    erg = (sum((x.^2),1)-(n*(mittelwert(x)^2)))/(n-1);

end
```

Ausgabe:

```
>>>S_1 = 1.0237
>>>S_2 = 1.0237
```

Teilaufgabe c)

Da beide Funktionen das selbe Ergebnis liefern (und auch die Octave-eigene Varianzfunktion das selbe Ergebnis erzeugt), scheinen beide Funktionen gleich gut zu sein.

Dennoch würde ich eher die 2. Variante mit dem Satz von Steiner empfehlen, da diese weniger stabilitätskritische Berechnungen und generell auch weniger Operationen durchführt.

Wir können folgende Elementarfunktionen definieren:

$$g_1(x) = \frac{x}{n-1}$$

$$g_2(x) = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$g_3(x, y) = x - y$$

$$g_4(x) = x^2$$

$$g_5(x) = n * x$$

Sei an dieser Stelle angenommen, dass \bar{x} eine von x abhängige, aber in der jeweiligen Ausführung konstante Variable ist, da sie nur einmal berechnet werden muss und danach nicht mehr verändert wird.



Es scheint nach der obigen Abbildung, dass Variante S_a^2 die bessere ist. Schließlich wird die schlecht konditionierte Subtraktion als erstes ausgeführt. Wenn man aber genauer hinschaut, erkennt man aber, dass die Summenbildung ein iterativer Prozess ist (es muss jedes Element der Summe mindestens ein Mal betrachtet werden; hier: $(x_i - \bar{x})^2$). Das bedeutet aber, dass in jedem Schritt der Summenbildung der Term $x_i - \bar{x}$ berechnet werden muss. Da nun \bar{x} ein zu x_i mehr oder weniger ähnlicher Wert ist, ist diese Subtraktion sehr schlecht konditioniert und der Fehler wird durch die Summenbildung aufsummiert.

Bei Variante S_b^2 muss zwar auch Subtrahiert werden, aber dafür nur ein einziges Mal! Außerdem ist die Wahrscheinlichkeit, dass nun $\sum_{i=1}^n x_i^2$ und $n\bar{x}^2$ verschiedener sind größer (aufgrund der Quadrierung!).

Dadurch verschlechtert sich die Kondition nicht so stark und der Algorithmus läuft stabiler.

Im Endeffekt ist es egal welche der beiden Methoden die Gusto AG verwendet, da es keine so genaue (und bezahlbaren) Messverfahren für die Messung der Spaghetti-Länge gibt, so dass sich eine der beiden Funktionen "verrechnet" (Messgenauigkeit).

Aber in anderen Anwendungsbeispielen, wie der Finanzmathematik, ist eine solche Betrachtung sinnvoll.