Computerorientierte Mathematik I
Übung 9

Gideon Schröder[1]
Samanta Scharmacher[2]
Nicolas Lehmann[3] (Dipl. Kfm., BSC)

[1] Freie Universität Berlin, FB Physik,
Institut für Physik, gideon.2610@hotmail.de
[2] Freie Universität Berlin, FB Mathematik und Informatik,
Institut für Informatik, scharbrecht@zedat.fu-berlin.de
[3] Freie Universität Berlin, FB Mathematik und Informatik,
Institut für Informatik, AG Datenbanksysteme, Raum 170,
mail@nicolaslehmann.de, http://www.nicolaslehmann.de

Lösungen zu den gestellten Aufgaben

Aufgabe 1

(a)

Zu Zeigen:$p = 1$ ist eine Norme auf $\mathbb{R}^n$

Sei $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$
p-Norm: $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
$\Rightarrow$ 1-Norm: $\|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^1\right)^{\frac{1}{1}} = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Bei $\| \cdot \|_1$ handelt es sich um die Summennorm, aus der die Manhattan-Metrik erzeugen kann.

[Beweis]
Es ist nun zu zeigen, dass die Summennorm alle Eigenschaften einer Vektorraum-Norm erfüllt:

Sei $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

Eindeutigkeit der Nullstelle:

Zu zeigen:
$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = (0, 0, ..., 0)^T = 0_{\mathbb{R}^n}$

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 0$$
$$\Rightarrow x = (x_1, x_2, ...x_n)^T = (0, 0, ..., 0)^T = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Als einzige Möglichkeit um $\|x\|_1 = 0$ zu erhalten!
Es folgt somit:
$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = (0, 0, ..., 0)^T = 0_{\mathbb{R}^n}$ $\checkmark$

Homogenität:

Zu Zeigen:

$\|\alpha x\|_1 = |\alpha|\|x\|_1$

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\alpha||x_i| \qquad //\text{denn } |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\
&= |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad //\text{da } \alpha \text{ Konstante} \\
&= |\alpha|\|x\|_1
\end{aligned}$$

$\surd$

Dreiecksungleichung:

Zu Zeigen:
$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| \qquad //\text{Anwenden der Dreiecksungleichung} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \\
&= \|x\|_1 + \|y\|_1
\end{aligned}$$

$\surd$

Da nun gezeigt worden ist, dass alle 3 Norm-Eigenschaften auf der $p = 1$-Norm gelten, ist somit die Summennorm eine gültige Norm! $\square$

(b)

Zu Zeigen:$p = 2$ ist eine Norme auf $\mathbb{R}^n$

Sei $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$
p-Norm: $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
$\Rightarrow$ 2-Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

Bei $\|\cdot\|_2$ handelt es sich um die euklidische Norm.

[Beweis]
Es ist nun zu zeigen, dass die euklidische Norm alle Eigenschaften einer Vektorraum-Norm erfüllt:

Sei $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

Eindeutigkeit der Nullstelle:

Zu zeigen:
$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = (0, 0, ..., 0)^T = 0_{\mathbb{R}^n}$

$$\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = 0$$
$$\Rightarrow x = (x_1, x_2, ...x_n)^T = (0, 0, ..., 0)^T = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Als einzige Möglichkeit um $\|x\|_1 = 0$ zu erhalten!
Da 0 das einzige neutrale Element der der Addition (Summe)ist, muss x zur Erfüllung der oberen Gleichung der 0-Vektor sein. Da die Quadrierung von 0 wieder 0 und das Ziehen der Wurzel auch 0 ergibt, ist der Nullvektor der einzige Vektor der diese Eigenschaft erfüllt und (zufällig) auch das neutrale Element unseres Vektoraums $\mathbb{R}^n$ Es folgt somit:
$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = (0, 0, ..., 0)^T = 0_{\mathbb{R}^n} \qquad \checkmark$

Homogenität:

Zu Zeigen:

$\|\alpha x\|_2 = |\alpha| \|x\|_2$

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (|\alpha||x_i|)^2} \qquad //\text{denn } |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha|^2 |x_i|^2} \qquad //\text{denn } (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2 \\
&= \sqrt{|\alpha|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad //\text{da } \alpha \text{ Konstante} \\
&= \sqrt{|\alpha|^2} \sqrt{\cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad //\text{denn } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\
&= |\alpha| \sqrt{\cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \\
&= |\alpha| \|x\|_2
\end{aligned}$$

$\surd$

Dreiecksungleichung:

Zu Zeigen:

$\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+2|x_i\cdot y_i|+|y_i|^2} x \text{ und } y \\
\|x+y\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+\sum_{i=1}^{n}2|x_i\cdot y_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2} \\
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+\sum_{i=1}^{n}2|x_i\cdot y_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+2\|x\|_2\cdot\|y\|_2+\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2 \qquad \text{Nach Chauchy-Schwarz Ungleichung} \\
&= \sum_{i=1}^{n}|x_i\cdot x_i|+2\|x\|_2\cdot\|y\|_2+\sum_{i=1}^{n}|y_i\cdot y_i| \\
&\leq \|x\|_2\cdot\|x\|_2+2\|x\|_2\cdot\|y\|_2+\|y\|_2\cdot\|y\|_2 \qquad \text{Nach Chauchy-Schwarz Ungleichung} \\
&= \|x\|_2^2+2\|x\|_2\cdot\|y\|_2+\|y\|_2^2 \\
\|x+y\|_2^2 &\leq (\|x\|_2+\|y\|_2)^2 \qquad \text{Binomische Formel} \\
\|x+y\|_2 &\leq \|x\|_2+\|y\|_2
\end{aligned}$$

$\surd$

Da nun gezeigt worden ist, dass alle 3 Norm-Eigenschaften auf der $p = 2$-Norm gelten, ist somit die Euklidsche Norm eine gültige Norm! $\square$

(c)

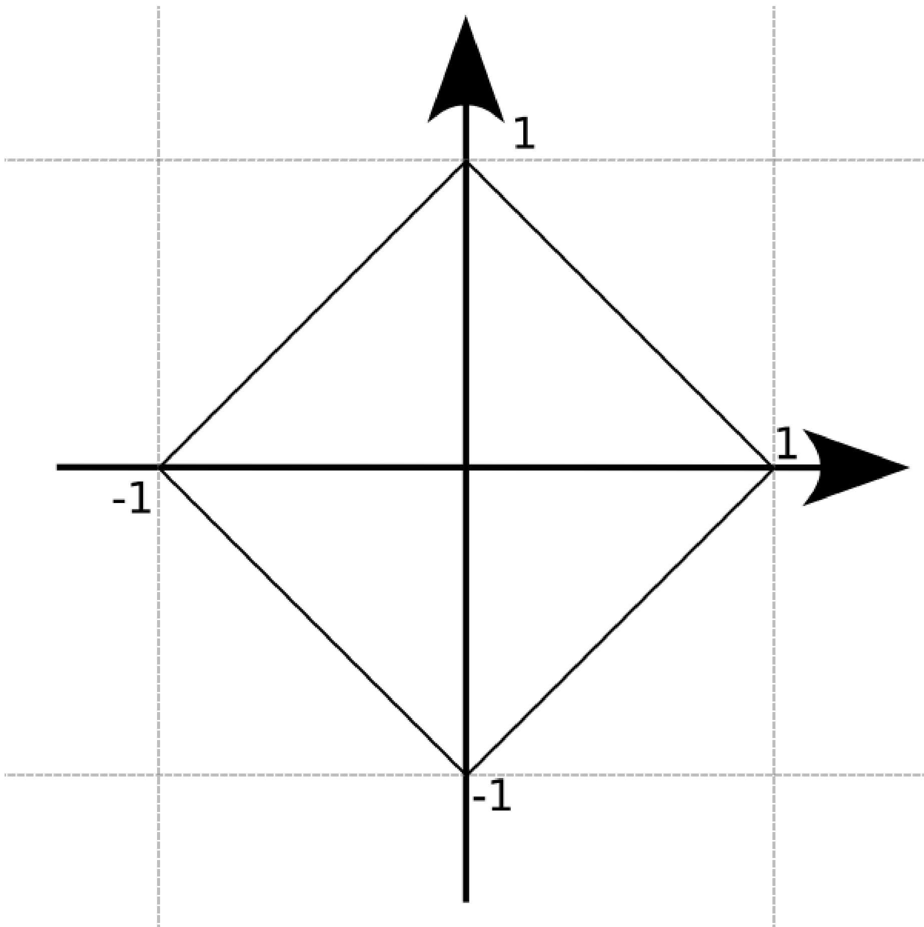

Abb. 1. $p = 1$

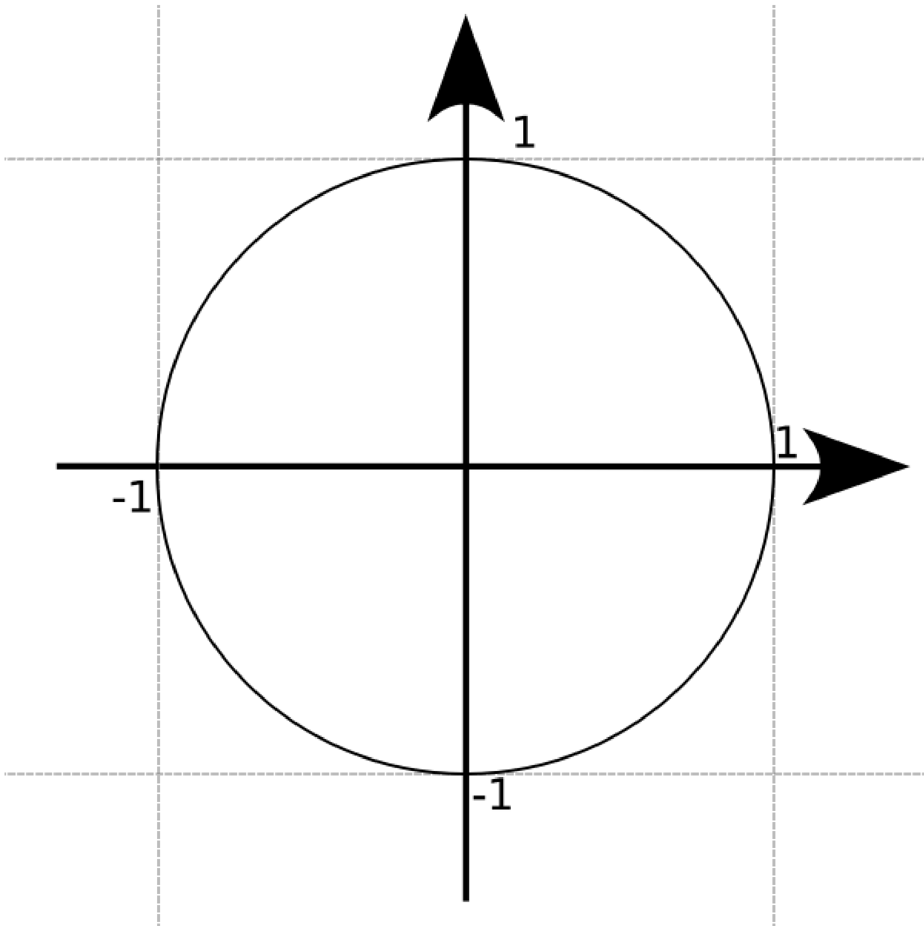

Abb. 2. $p = 2$

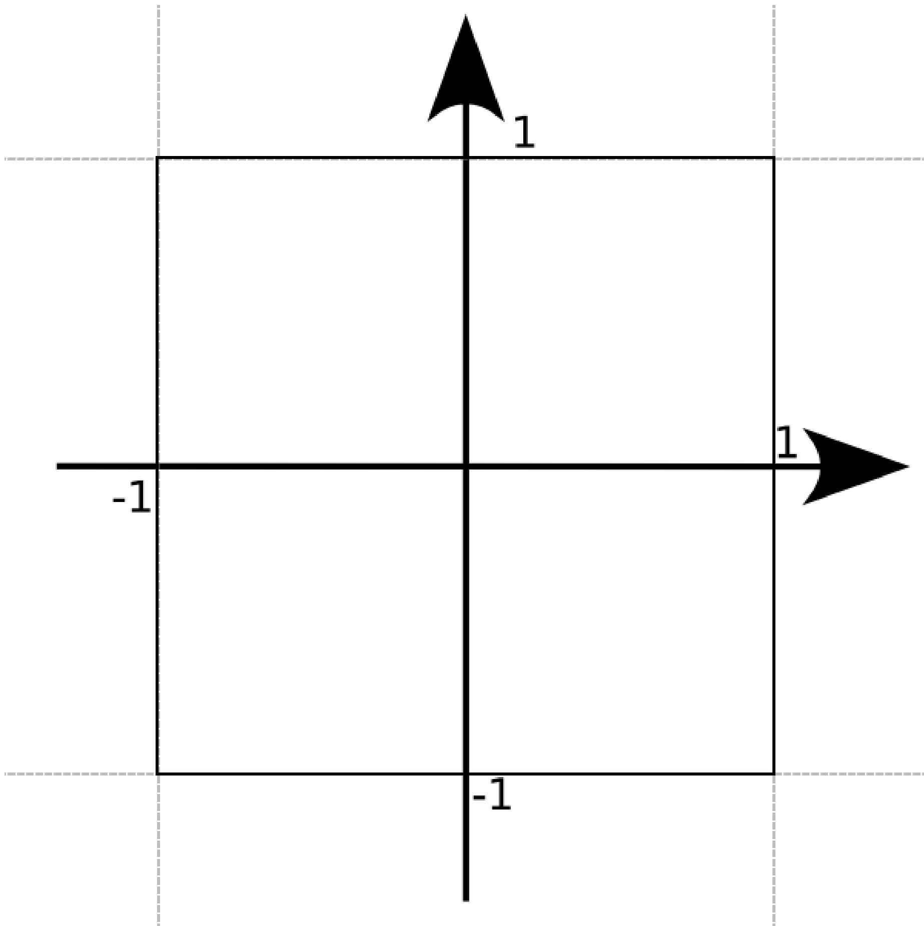

Abb. 3. $p = \infty$

Aufgabe 2

Zu zeigen:

$\lim p \to \infty \|x\|_p = \|x\|_\infty$
Für ein beliebiges aber festes $x \in \mathbb{R}^n$

Sei definiert:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \tag{1}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \tag{2}$$

Wir definieren:

Sei $|x_k| = \max |x_1|, ..., |x_n| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$
Wir erhalten folgende Ungleichungsbezihungen:

$$|x_k| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \leq n \cdot |x_k|$$

Diese Ungleichung gilt auch für eine Potenz p ≥ 1

$$|x_k|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \qquad \leq n \cdot |x_k|^p$$

auch für das Ziehen der p-ten Wurzel bleibt die Ungleichung gültig

$$\sqrt[p]{|x_k|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \quad \leq \sqrt[p]{n \cdot |x_k|^p}$$

Durch Vereinfachung erhalten wir:

$$|x_k| \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \quad \leq \sqrt[p]{n} \cdot |x_k|$$

Wir können nun den Grenzwert bilden.
Es folgt:

$$\lim_{p\to\infty} |x_k| \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \qquad \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{n} \cdot |x_k|$$

Wende Produktregel an:

$$\lim_{p\to\infty} |x_k| \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \qquad \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{n} \cdot \lim_{p\to\infty} |x_k|$$

Da $|x_k|$ konstant ist folgt: $\lim_{p\to\infty} |x_k| = |x_k|$

$$|x_k| \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \qquad \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{n} \cdot |x_k|$$

Für eine Konstante c gilt: $\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{c} = 1$

$$|x_k| \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \qquad \leq |x_k|$$

Aus *(2) wissen wir, dass $|x_k| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = \|x\|_\infty$

$$\|x\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \qquad \leq \|x\|_\infty$$

Mit Hilfe des Einschnürungssatzes (Sandwichsatz) folgt:

$$\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} = \|x\|_\infty$$

□

Aufgabe 3

Sei $(x^k)_k \in \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$ eine Folge.

Sei $x_i = (-1)^i \cdot \frac{1}{\sqrt{i}}$,

dann ist:

$lim_{n\to\infty}(x_1)^1 = ||x||_1 = \sum x_i = lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{1}{\sqrt{i}} = 0$

$lim_{n\to\infty}(x_2)^2 = ||x||_2 = (\sum (x_i)^2)^{\frac{1}{2}} = lim_{n\to\infty} (\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{1}{i})^{\frac{1}{2}} = \infty$