5. Übungszettel zur Vorlesung „Computerorientierte Mathematik I“

Wintersemester 2012/13

Prof. Dr. Rupert Klein
Anna Hartkopf, Martin Götze

Abgabe in die Tutorenfächer oder im Tutorium bis spätestens Donnerstag, den 6. Dezember 2012, 18^{00}

Aufgabe 1. *Schleifend schneiden ist schlecht* [4 Punkte]
Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_\varepsilon - y_\varepsilon &= 2 \\ -x_\varepsilon + (1+\varepsilon)y_\varepsilon &= 3 \end{aligned}$$

Man bestimme die Lösung $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$. Dann definiert $\varepsilon \mapsto x_\varepsilon$ eine Abbildung $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Man bestimme ihre absolute Kondition.

Aufgabe 2. *Rekursiv oder nicht?* [12 Punkte]
Für gegebene $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ können wir rekursiv eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definieren, indem wir für $k \geq 2$

$$x_k := 2x_{k-1} - \frac{3}{4}x_{k-2} \qquad (1_{\text{rek}})$$

setzen.

(i) Man zeige, dass dann für $k \in \mathbb{N}$

$$x_k = \frac{1}{2^{k+1}}\big((3-3^k)x_0 - 2(1-3^k)x_1\big) \qquad (1_{\text{exp}})$$

gilt.

Bemerkung: Wer möchte, kann sich Lemma 6.23 im Skript durchlesen, verstehen und die Darstellung damit herleiten. Es genügt aber für diese Aufgabe, nachzuweisen, dass sie richtig ist.

(ii) Schreiben Sie in Octave oder Matlab zwei Funktionen, die bei Eingabe von x_0, x_1 und k den Vektor $(x_0, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ berechnen und zurückgeben. Eine soll dabei die Rekursionsvorschrift (1_{rek}) nutzen, die andere die explizite Darstellung (1_{exp}) auswerten.

Hinweis: Für die explizite Darstellung könnte es hilfreich sein, zu wissen, dass der punktweise `.^`-Operator auch funktioniert, wenn ein Operand ein Skalar ist, so liefert `2.^(0:3)` gerade `[0, 2, 4, 8]`.

(iii) Berechnen Sie mit Hilfe Ihrer Funktionen aus (ii) die Werte $(x_k)_{0\leq k\leq 100}$ für die Startwerte

(a) $x_0 = 1,\ x_1 = 0,$

(b) $x_0 = 1,\ x_1 = \frac{1}{2}.$

Untersuchen Sie, was jeweils passiert, wenn Sie x_1 um $0.000\,01$ stören, das heißt, rufen Sie Ihr Programm mit

(a) $\tilde{x}_0 = 1,\ \tilde{x}_1 = 0.000\,01,$

(b) $\tilde{x}_0 = 1,\ \tilde{x}_1 = 0.500\,01$

erneut auf.

Plotten Sie jeweils für (a) und (b) die relativen Fehler

$$\frac{|x_k - \tilde{x}_k|}{|x_k|}, \qquad 0 \leq k \leq 100$$

über k.

Was beobachten Sie?

Aufgabe 3. *Ganz schön stetig* [4 + 1 Punkte]
Finden Sie eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und vier Stellen $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, so dass gilt

(i) $\kappa_{\text{abs}}(f, x_1)$ klein, $\kappa_{\text{rel}}(f, x_1)$ klein,

(ii) $\kappa_{\text{abs}}(f, x_2)$ klein, $\kappa_{\text{rel}}(f, x_2)$ groß,

(iii) $\kappa_{\text{abs}}(f, x_3)$ groß, $\kappa_{\text{rel}}(f, x_3)$ klein,

(iv) $\kappa_{\text{abs}}(f, x_4)$ groß, $\kappa_{\text{rel}}(f, x_4)$ groß.

Wenn Ihre Funktion nicht abschnittsweise definiert ist, erhalten Sie den Zusatzpunkt.