2.11.2015

$\boxed{\mathbb{Q}}$ Darstellung: erweitere Potenzzerlegung zur Basis q um negative Potenzen.

$\rightsquigarrow$ q-adische Brüche

$$z_n \cdots z_0 , z_{-1} \cdots z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i q^i , \quad z_i \in \{0, \dots, q-1\}$$

erweitere um periodische Brüche

<u>Bsp:</u> $0,\overline{42} = 0{,}42\,(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + \dots) = 0{,}42 \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-2i}$

$$= 0{,}42 \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{42}{99}$$

geom. Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} = \frac{1}{1-q^{-1}}$

$0{,}1 \rightsquigarrow$ 2-adischer Bruch

$\frac{1}{10} : \frac{1}{2} = 0$ Rest $\frac{1}{10}$

$\frac{1}{10} : \frac{1}{4} = 0$ Rest $\frac{1}{10}$

$\frac{1}{10} : \frac{1}{8} = 0$ Rest $\frac{1}{10}$

$\frac{1}{10} : \frac{1}{16} = 1$ Rest $\frac{1}{10} - \frac{1}{16} = \frac{3}{80}$

$\frac{3}{80} : \frac{1}{32} = 1$ Rest $\frac{3}{80} - \frac{1}{32} = \frac{2}{320}$

$0{,}1 : 2^{-1} = 0(,2)$ Rest: $0{,}2 \cdot 2^{-1}$

$0{,}1 : 2^{-2} = 0{,}2 : 2^{-1} = 0(,4)$ Rest: $0{,}4 \cdot 2^{-2}$

$0{,}1 : 2^{-3} = 0{,}4 : 2^{-1} = 0(,8)$ Rest: $0{,}8 \cdot 2^{-3}$

$0{,}1 : 2^{-4} = 0{,}8 : 2^{-1} = 1(,6)$ Rest: $0{,}6 \cdot 2^{-4}$

$0{,}6 : 2^{-1} = 1(,2)$

<u>Satz:</u> Jede rationale Zahl ist ein periodischer Bruch und umgekehrt

$\boxed{\mathbb{R}}$ $\rightsquigarrow$ unendliche q-adische Brüche

$$\mathbb{R} = \{ z_n \dots z_0 , z_{-1} z_{-2} \dots \mid z_i \in \{0, \dots, q-1\} \}$$

endliche Ziffernmenge Z

$\mathcal{D}(Z)$ Menge aller Zifferfolgen

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{D}(Z)$ bijektiv

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar, $\mathcal{D}(Z)$ ist abzählbar

$\Rightarrow$ Ziffernsystem zur Darstellung von $\mathbb{R}$ existiert nicht!

Ausweg? Verwende Approximation $\check{x}$ von $x \in \mathbb{R}$

<u>Fehler:</u>

absoluter Fehler $|x - \check{x}|$

relativer Fehler $\frac{|x - \check{x}|}{|x|}$

<u>Festkommazahlen:</u> $\check{x} = \sum_{i=-m}^{n} z_i q^i$ $\quad \ell = m+n \quad m,n \in \mathbb{N}$ fest

$\ell = 4, \; n = 3, \; m = 1$

<u>Gleitkommazahlen:</u> $\check{x} = (-1)^s \, a \, q^e$

$e \in \mathbb{Z}$ Exponent, a Mantisse

$a = 0,\boxed{a_1 \cdots a_\ell}$