Nachbesprechung (4. Zettel)

Lösung zur Aufgabe 1

a)
$f(x) = \frac{\pi}{2}$ ist differenzierbar. Also ist $\kappa_{abs} = |f'(x)| = 0$.

$f(x) = |x|^3 = g \circ h(x)$ mit $g(x) = x^3$ und $h(x) = |x|$. Dann gilt:
$\kappa_{abs_f}(x_0) \leq \kappa_{abs_g} \cdot \kappa_{abs_h} = |3x_0^2| \cdot 1 = |3x_0^2|$ (1 ist die obere Abschätzung von κ_{abs_h} mittels der Lipschitz-Konstanten $L = 1$).

b)
Sei $h(x) = \frac{5}{2}x^2$ in beiden Fällen. Dann ist $\kappa_{abs}(x_0) = |5x_0|$.
Für $x_0 = \frac{1}{10}$ ist $\kappa_{abs} = 0,5 \leq 1$, also klein.
Für $x_0 = 4$ ist $\kappa_{abs} = 20 \geq 1$, also groß.

Lösung zur Aufgabe 2

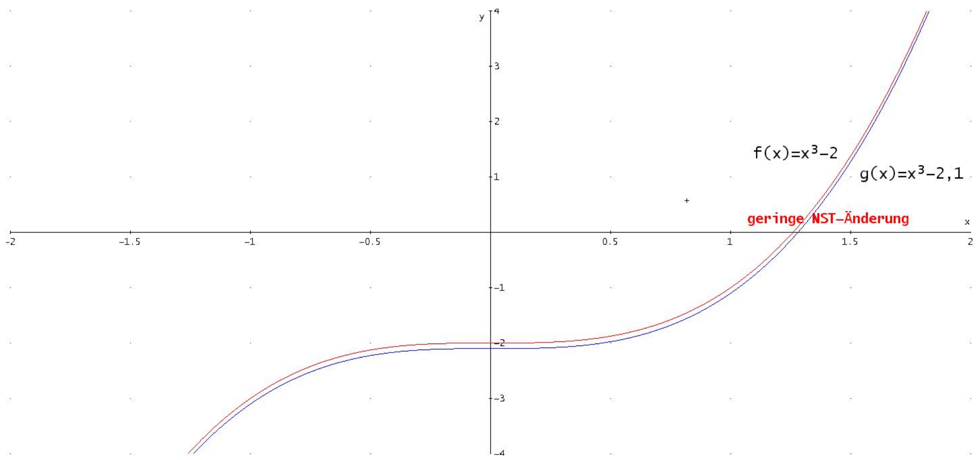
$f(x) = x^n - c$.

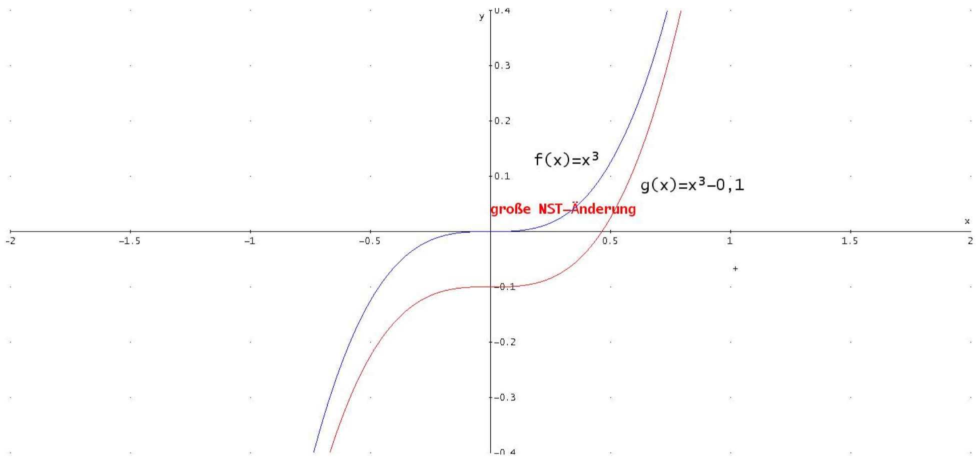
Zur Verbesserung der Veranschaulichkeit wurde exemplarisch $n = 3$ gewählt.
Bestimmung der Nullstelle: $0 = x^3 - c \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{c}$. Die Nullstellenfunktionen lautet somit $h(c) = \sqrt[3]{c}$.
Die Funktion h ist differenzierbar, also ist $\kappa_{abs} = |h'(c)| = |\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{c^2}}|$.
Somit ist κ_{abs} genau dann klein, wenn gilt:

$\kappa_{abs} \leq 1 \Leftrightarrow |\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{c^2}}| \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{c^2} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow |c^2| \geq \frac{1}{27} \Leftrightarrow |c| \geq \frac{1}{\sqrt{27}} \Leftrightarrow c \leq -\frac{1}{\sqrt{27}}$ oder $c \geq \frac{1}{\sqrt{27}}$.

Andernfalls, das heißt $c \in (-\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{1}{\sqrt{27}})$, ist κ_{abs} groß.

Zwei Grafiken sollen die Situation veranschaulichen (oben: κ_{abs} klein, unten: κ_{abs} groß):



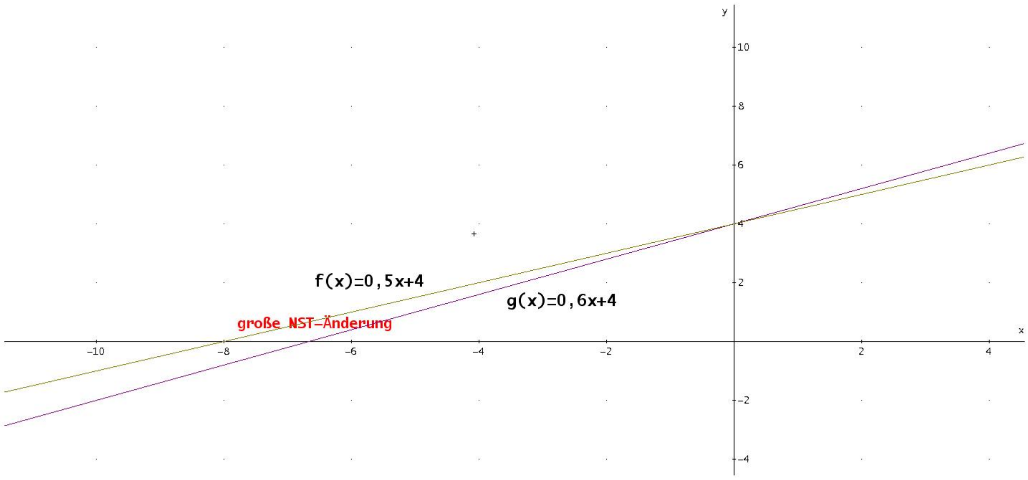


Untersuchung der anderen Funktion: $f(x) = mx + b$ mit konstantem b und $m \neq 0$.

Bestimmung der Nullstelle: $0 = mx + b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{m}$. Die Nullstellenfunktion lautet somit $n(m) = \frac{-b}{m}$. Die Funktion n ist differenzierbar, also ist $\kappa_{abs} = |\frac{b}{m^2}|$.
Somit ist κ_{abs} genau dann klein, wenn gilt:

$\kappa_{abs} \leq 1 \Leftrightarrow |\frac{b}{m^2}| \leq 1 \Leftrightarrow |b| \leq |m^2| \Leftrightarrow |m| \geq \sqrt{|b|}$. Andernfalls ist κ_{abs} groß.

Wähle zum Beispiel $b = 4$. Dann ist $\kappa_{abs} \leq 1 \Leftrightarrow |m| \geq 2$, also $m \leq -2$ oder $m \geq 2$. Ist hingegen $m \in (-2, 2)$, dann ist κ_{abs} groß.
Auch hier sollen zwei Grafiken den Sachverhalt verdeutlichen (oben: κ_{abs} klein, unten: κ_{abs} groß):



Lösung zur Aufgabe 3

a)
Ein Programm-Code dazu sieht so aus:

function erg = skalarprodukt(x)
y=1-x; %siehe Aufgabenstellung
v=[x^2 x^2 x^2 y^2 y^2]; %Initialisierung des Vektors v
w=[x^2; $4xy; 6y^2; 4xy; y^2$]; %Initialisierung des Vektors w^T
z=v*w %Multiplikation $\widehat{=}$ Skalarprodukt berechnen
end %Ende der Funktion

b)
skalarprodukt(\pi)=1
skalarprodukt(10\pi)=1
skalarprodukt(100\pi)=1
skalarprodukt(1000\pi)=1.1094
skalarprodukt(10000\pi)=-896
skalarprodukt(100000\pi)=2097152
skalarprodukt(1000000\pi)=1.0308 $\cdot 10^{11}$

Man stellt fest, dass der Rechner Rundungsfehler macht, die sich immer weiter/stärker fortpflanzen und ab einem gewissen Wert auf den Ausgabewert auswirken.

c)
Der wahre Wert $= v * w^T = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = (x+y)^4 = (x+(1-x))^4 = 1^4 = 1.$

Lösung zur Aufgabe 4

zz.: $\kappa_{abs} \le \kappa_{abs}(f_n, x_n) \cdot \kappa_{abs}(f_{n-1}, x_{n-1}) \cdot \ldots$

IA: $n=1 \Rightarrow f_1(x) = f(x) \Rightarrow \kappa_{abs} \le \kappa_{abs}(f_1, x_1)$ ✓

IV: Sei $g(x) := f_n \circ \ldots \circ f_1(x) \Rightarrow g(x_1) = x_{n+1}$ $\left(\begin{array}{l} f_1(x_1) = x_2 \\ f_2(x_2) = x_3 \end{array} \text{usw.}\right)$

$\Rightarrow \kappa_{abs}(g, x_1) \le \kappa_{abs}(f_n, x_n) \cdot \ldots \cdot \kappa_{abs}(f_1, x_1)$ (*)

IS: Für $f(x) = f_{n+1} \circ f_n \circ \ldots \circ f_1(x_1) = f_{n+1} \circ g(x)$ gilt in x_1:

$\kappa_{abs} \underset{\text{nach VL}}{\le} \kappa_{abs}(f_{n+1}, \underbrace{g(x_1)}_{=x_{n+1}}) \cdot \kappa_{abs}(g, x_1) \le \kappa_{abs}(f_{n+1}, g(x_1)) \cdot (*)$

$\Rightarrow \kappa_{abs} \le \kappa_{abs}(f_{n+1}, x_{n+1}) \cdot \kappa_{abs}(f_n, x_n) \cdot \ldots \cdot \kappa_{abs}(f_1, x_1)$

Alle f_i diff.-bar $\Rightarrow g$ diff.-bar, f_{n+1} diff.-bar $\xrightarrow[\text{regel}]{\text{Ketten-}}$ Gleichheit $\square$

Fragen/Probleme/Kritik/Anregung $\Rightarrow$ Mailt mir!!!

Andi