6. Übungszettel zur Vorlesung „Computerorientierte Mathematik I“

Wintersemester 2012/13

Prof. Dr. Rupert Klein
Anna Hartkopf, Martin Götze

Abgabe in die Tutorenfächer oder im Tutorium bis spätestens Donnerstag, den 12. Dezember 2012, 18^{00}

Aufgabe 1. *Stabiles Rechnen* [8 Punkte]
Wir betrachten für $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (a - bx)^2$$

und wollen sie an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ auswerten. Dazu betrachten wir zwei Algorithmen, einmal (i) wird obige Darstellung von f benutzt, das andere Mal (ii) schreiben wir für $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a^2 - 2abx + b^2x^2.$$

Wir betrachten zur Auswertung von f also die Algorithmen

(i) $f = h_3 \circ h_2 \circ h_1$ mit
- $h_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto bx$,
- $h_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a - x$,
- $h_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

(ii) $f = g_2 \circ g_1 + g_4 \circ g_3$ mit
- $g_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2abx$,
- $g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^2 - x$,
- $g_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$,
- $g_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto b^2x$.

Bestimmen Sie jeweils die relative Stabilität des Algorithmus zur Auswertung von f in x_0. Welchen Algorithmus würden Sie bevorzugen?

Aufgabe 2. *Exponentiell* [4 Punkte]
Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch die Potenzreihe

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sie hat die Eigenschaft[1]

$$\exp(x)\exp(-x) = 1, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Um sie zu approximieren, betrachten wir für $N \in \mathbb{N}$ die Approximation

$$f_N\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}.$$

(i) Welche Schwierigkeiten erwarten Sie bei Auswertung von f_N für negative x?

(ii) Geben Sie einen Algorithmus zur Approximation von exp für negative x an, der die Schwierigkeiten aus (i) vermeidet.

Aufgabe 3. *Die Identität mal anders* [8 Punkte]
Wir betrachten die Funktion $f\colon [-1,\infty) \to [-1,\infty)$, $x \mapsto x(x+2)$ und ihre Inverse $f^{-1}\colon [-1,\infty) \to [-1,\infty)$, $x \mapsto \sqrt{x+1} - 1$. Offensichtlich ist $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{[-1,\infty)}$.

(i) Schreiben Sie in Octave oder Matlab ein Programm, dass $\mathrm{id} - f \circ f^{-1}$ und $\mathrm{id} - f^{-1} \circ f$ an den Stellen $-1 + 10^{-e}$ für $e \in \{4, 6, 8, 12\}$ auswertet.

(ii) Berechnen Sie jeweils die relativen Ein- und Ausgabefehler.

(iii) Was beobachten Sie? Erklären Sie Ihre Resultate!

Hinweis: Mit Hilfe von `format long e` können Sie die Ausgabe auf ein genaueres Format umstellen, sofern es nötig sein sollte.

[1] Diese Eigenschaft dürfen Sie ohne sie zu beweisen, in dieser Aufgabe benutzen. Für Interessierte: Der Beweis besteht darin, die Potenzreihen zu multiplizieren.