7. Übungszettel zur Vorlesung „Computerorientierte Mathematik I“

Wintersemester 2012/13

Prof. Dr. Rupert Klein
Anna Hartkopf, Martin Götze

Abgabe in die Tutorenfächer oder im Tutorium
bis spätestens Donnerstag, den 10. Januar 2013, 18^{00}

Aufgabe 1. *Bäume* [6 Punkte]
Wir betrachten die Funktion $q\colon (0,\infty)^d \to \mathbb{R}$, die durch

$$q(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i^2, \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

gegeben ist. Geben Sie einen Auswertungsbaum für q an (zeichnen Sie ihn etwa für ein konkretes $d \geq 4$) und schätzen Sie den Stabilitätsindikator ab. Implementieren Sie die Auswertung der Funktion, die Sie in Ihrem Baum entworfen haben, in Matlab und werten Sie sie für einige Stellen $x \in \mathbb{R}^d$ aus, für die sie $q(x)$ explizit berechnen können und vergleichen Sie den Fehler mit Ihrer Abschätzung.

Aufgabe 2. *Was passiert hier? Und wie lange?* [8 Punkte]
Betrachten Sie das folgende OCTAVE-Programm. Leider hat der Autor es nicht gut kommentiert

```
function x = f(x)

n       = length(x);
for i   = 2:n
    k   = x(i);
    j   = i-1;
    while (j > 0) && (x(j) > k)
        x(j+1)  = x(j);
        j       = j-1;
    end;
    x(j+1)  = k;
end;
```

(i) Was tut das Programm? Vollziehen Sie auf dem Papier nach, welche Schritte das Programm nach dem Aufruf `f ([4,3,1,2])` vollzieht und was es zurückgibt.

(ii) Formulieren Sie eine Vermutung, was das Programm im allgemeinen tut und beweisen Sie sie.

(iii) Geben Sie eine obere Schranke für die Anzahl der Vergleiche zwischen Einträgen von `x` an, die das Programm ausführt (Vergleiche werden nur in Zeile 7 durchgeführt, wo `x[j]` mit `k` verglichen wird.

Aufgabe 3. *Auslöschung ist zu verhindern!* [6 Punkte]
Geben Sie eine Methode zur Bestimmung der Nullstellen des Polynoms

$$x^2 + px + q, \qquad \frac{p^2}{4} \gg q$$

an, die die Auslöschung der p-q-Formel vermeidet. Implementieren Sie Ihre Methode in MATLAB oder OCTAVE.

Hinweis: Das Problem ist doch, dass in der p-q-Formel die Nullstellen via

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

berechnet werden. Wenn q hier (so wie in unserem Fall) klein gegen $\frac{p^2}{4}$ ist, sind $-\frac{p}{2}$ und die Wurzel $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \approx \frac{p}{2}$ betragsmäßig in etwa gleich groß. Das heißt, je nach Vorzeichen von p kann es bei x_1 oder x_2 zur Auslöschung kommen. Die jeweils andere Nullstelle kann und soll mit der p-q-Formel berechnet werden.

Um dann die "gefährliche" Nullstelle zu bestimmen, kann man sich beispielsweise die Tatsache zu nutze machen, dass

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

geht,