

Aufgabe 1)

a)

$$\forall Z \exists Y \forall X (f(X, Y) \Leftrightarrow (f(X, Z) \wedge \neg f(X, X)))$$

$$\equiv \forall Z \exists Y \forall X (f(X, Y) \vee \neg(f(X, Z) \wedge \neg f(X, X))) \wedge (\neg f(X, Y) \vee (f(X, Z) \wedge \neg f(X, X)))$$

$$\equiv \forall Z \exists Y \forall X (f(X, Y) \vee \neg f(X, Z) \vee f(X, X)) \wedge (\neg f(X, Y) \vee (f(X, Z) \wedge \neg f(X, X)))$$

$$\equiv \forall Z \exists Y \forall X (f(X, Y) \vee \neg f(X, Z) \vee f(X, X)) \wedge (\neg f(X, Y) \vee f(X, Z)) \wedge (\neg f(X, Y) \vee \neg f(X, X))$$

$$\equiv \forall Z \forall X (f(X, g(Z)) \vee \neg f(X, Z) \vee f(X, X)) \wedge (\neg f(X, g(Z)) \vee f(X, Z)) \wedge (\neg f(X, g(Z)) \vee \neg f(X, X))$$

$$\{\{f(X, g(Z)) \vee \neg f(X, Z) \vee f(X, X)\}, \{\neg f(X, g(Z)) \vee f(X, Z)\}, \{\neg f(X, g(Z)) \vee \neg f(X, X)\}\}$$

Die Lösung stimmt mit der Vergleichslösung überein, wobei nur die Benennung und die Reihenfolge in der Klausel selbst anders ist:

$$g(Z) = \text{skA}(B), X = A, Z = B$$

b)

$$\forall X \forall Y (q(X, Y) \Leftrightarrow \forall Z (f(Z, X) \Leftrightarrow f(Z, Y)))$$

$$\equiv \forall X \forall Y (q(X, Y) \Leftrightarrow \forall Z ((f(Z, X) \vee \neg f(Z, Y)) \wedge (\neg f(Z, X) \vee f(Z, Y))))$$

$$\equiv \forall X \forall Y (q(X, Y) \vee \neg \forall Z ((f(Z, X) \vee \neg f(Z, Y)) \wedge (\neg f(Z, X) \vee f(Z, Y)))) \wedge (\neg q(X, Y) \vee \forall Z ((f(Z, X) \vee \neg f(Z, Y)) \wedge (\neg f(Z, X) \vee f(Z, Y))))$$

$$\equiv \forall X \forall Y (q(X, Y) \vee \exists Z (\neg(f(Z, X) \vee \neg f(Z, Y)) \vee \neg(\neg f(Z, X) \vee f(Z, Y)))) \wedge (\neg q(X, Y) \vee \forall Z ((f(Z, X) \vee \neg f(Z, Y)) \wedge (\neg f(Z, X) \vee f(Z, Y))))$$

$$\equiv \forall X \forall Y (q(X, Y) \vee \exists Z ((\neg f(Z, X) \wedge f(Z, Y)) \vee (f(Z, X) \wedge \neg f(Z, Y)))) \wedge (\neg q(X, Y) \vee \forall Z ((f(Z, X) \vee \neg f(Z, Y)) \wedge (\neg f(Z, X) \vee f(Z, Y))))$$

$$\equiv \forall X \forall Y \exists V \forall Z (q(X, Y) \vee (\neg f(V, X) \wedge f(V, Y)) \vee (f(V, X) \wedge \neg f(V, Y))) \wedge (\neg q(X, Y) \vee ((f(Z, X) \vee \neg f(Z, Y)) \wedge (\neg f(Z, X) \vee f(Z, Y))))$$

$$\equiv \forall X \forall Y \forall Z (q(X, Y) \vee (\neg f(g(X, Y), X) \wedge f(g(X, Y), Y)) \vee (f(g(X, Y), X) \wedge \neg f(g(X, Y), Y))) \wedge (\neg q(X, Y) \vee ((f(Z, X) \vee \neg f(Z, Y)) \wedge (\neg f(Z, X) \vee f(Z, Y))))$$

$$\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Y \mathbf{V} Z (q(X, Y) \vee (\neg f(g(X, Y), X) \wedge f(g(X, Y), Y))) \vee (f(g(X, Y), X) \wedge \neg f(g(X, Y), Y))) \wedge \dots$$

$$\dots \wedge (\neg q(X, Y) \vee f(Z, X) \vee \neg f(Z, Y)) \wedge (\neg q(X, Y) \vee \neg f(Z, X) \vee f(Z, Y))$$

Da logisches ODER assoziativ ist bilden wir aus dem Rechten Teil die äquivalente KNF: $(\sim a \mid \sim b) \mid (a \& \sim b) \equiv (\sim a \mid \sim b) \& (a \mid b)$

$$\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Y \mathbf{V} Z (q(X, Y) \vee ((\neg f(g(X, Y), X) \vee \neg f(g(X, Y), Y)) \wedge (f(g(X, Y), X) \vee f(g(X, Y), Y)))) \wedge \dots$$

$$\dots \wedge (\neg q(X, Y) \vee f(Z, X) \vee \neg f(Z, Y)) \wedge (\neg q(X, Y) \vee \neg f(Z, X) \vee f(Z, Y))$$

$$\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Y \mathbf{V} Z (q(X, Y) \vee \neg f(g(X, Y), X) \vee \neg f(g(X, Y), Y)) \wedge ((q(X, Y) \vee f(g(X, Y), X) \vee f(g(X, Y), Y))) \wedge \dots$$

$$\dots \wedge (\neg q(X, Y) \vee f(Z, X) \vee \neg f(Z, Y)) \wedge (\neg q(X, Y) \vee \neg f(Z, X) \vee f(Z, Y))$$

$$\{\{q(X, Y) \vee \neg f(g(X, Y), X) \vee \neg f(g(X, Y), Y)\}, \{q(X, Y) \vee f(g(X, Y), X) \vee f(g(X, Y), Y)\},$$

$$\{\neg q(X, Y) \vee f(Z, X) \vee \neg f(Z, Y)\}, \{\neg q(X, Y) \vee \neg f(Z, X) \vee f(Z, Y)\}\}$$

Nur die letzten beiden Terme stimmen mit der gegebenen Lösung überein. Außerdem ist unklar wie aus $q(X, Y)$ plötzlich $q(Y, X)$ werden soll (siehe Musterlösung q(B,A)). Falls das ein Tippfehler ist, dann stimmen 4 von 6 Terme überein. Möglicher Weise ist irgendwo auch ein Fehler vorhanden und es fehlen dadurch zwei Terme.

c)

$$\mathbf{V} X \mathbf{\exists} Y ((p(X, Y) \Leftarrow \mathbf{V} X \mathbf{\exists} T q(Y, X, T)) \Rightarrow r(Y))$$

$$\equiv \mathbf{V} X \mathbf{\exists} Y ((p(X, Y) \Leftarrow \mathbf{V} Z \mathbf{\exists} T q(Y, Z, T)) \Rightarrow r(Y))$$

$$\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z \mathbf{\exists} Y ((p(X, Y) \Leftarrow \mathbf{\exists} T q(Y, Z, T)) \Rightarrow r(Y))$$

$$\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z \mathbf{\exists} Y (\mathbf{\exists} T q(Y, Z, T) \Rightarrow p(X, Y)) \Rightarrow r(Y)$$

$$\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z \mathbf{\exists} Y (\neg(\mathbf{\exists} T q(Y, Z, T)) \vee p(X, Y)) \Rightarrow r(Y)$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z \mathbf{E} Y ((\mathbf{V} T \neg q(Y, Z, T)) \vee p(X, Y)) \Rightarrow r(Y) \\
&\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z \mathbf{E} Y \neg((\mathbf{V} T \neg q(Y, Z, T)) \vee p(X, Y)) \vee r(Y) \\
&\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z \mathbf{E} Y (\neg(\mathbf{V} T \neg q(Y, Z, T)) \wedge \neg p(X, Y)) \vee r(Y) \\
&\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z \mathbf{E} Y (\mathbf{E} T q(Y, Z, T) \wedge \neg p(X, Y)) \vee r(Y) \\
&\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z \mathbf{E} T \mathbf{E} Y (q(Y, Z, T) \wedge \neg p(X, Y)) \vee r(Y) \\
&\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z \mathbf{E} T (q(g(X), Z, T) \vee r(g(X))) \wedge (\neg p(X, g(X)) \vee r(g(X))) \\
&\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z (q(g(X), Z, h(X, Z)) \vee r(g(X))) \wedge (\neg p(X, g(X)) \vee r(g(X))) \\
&\{\{q(g(X), Z, h(X, Z)) \vee r(g(X))\}, \{\neg p(X, g(X)) \vee r(g(X))\}\}
\end{aligned}$$

Die Lösung stimmt mit der gegebenen Lösung fast vollständig überein. Der Unterschied liegt bei der Reihenfolge der Parameter der 'skelton function' $h(X, Z)$, wobei $X = A$, $B = Z$, $sk1(A) = g(X)$, $sk2(B, A) = h(X, Z)$. Aber da Quantoren in der Normalform in beliebiger Reihenfolge stehen können, müsste das Ergebnis so auch richtig sein.

d)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V} X \mathbf{V} Z (p(X, Z) \Rightarrow \mathbf{E} Y \neg(q(X, Y) \vee \neg r(Y, Z))) \\
&\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z (p(X, Z) \Rightarrow \mathbf{E} Y (\neg q(X, Y) \wedge r(Y, Z))) \\
&\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z (\neg p(X, Z) \vee \mathbf{E} Y (\neg q(X, Y) \wedge r(Y, Z))) \\
&\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z \mathbf{E} Y (\neg p(X, Z) \vee (\neg q(X, Y) \wedge r(Y, Z))) \\
&\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z \mathbf{E} Y (\neg p(X, Z) \vee \neg q(X, Y)) \wedge (\neg p(X, Z) \vee r(Y, Z)) \\
&\equiv \mathbf{V} X \mathbf{V} Z (\neg p(X, Z) \vee \neg q(X, f(X, Z))) \wedge (\neg p(X, Z) \vee r(f(X, Z), Z))
\end{aligned}$$

$$\{\{\neg p(X,Z) \vee \neg q(X,f(X,Z))\}, \{\neg p(X,Z) \vee r(f(X,Z),Z)\}\}$$

Die Umformung für diese Aufgabenstellung war im Vergleich zu den anderen sehr einfach und da keine Vergleichslösung angegeben wurde, können wir nur annehmen, dass diese Lösung korrekt ist.