Uebungsblatt 5
„Mustererkennung“

J. Cavojska, N. Lehmann, R. Toudic

08.06.2015

Inhaltsverzeichnis

1 Schnitte von zwei Gaußkurven

$$f_1(x, \mu_1, \sigma_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$
$$f_2(x, \mu_2, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

<u>Eigenschaften von Dichtfunktionen f_i für $\sigma_i > 0$ mit $i \in \mathbb{N}$:</u>

- f_i ist achsensymmeterisch um μ_i
- f_i hat zwei Wendepunkte: $\mu_i - \sigma_i$ und $\mu_i + \sigma_i$
- f_i hat genau ein Maximum bei μ_i
- f_i ist stetig / für jede reelle Zahl definiert
- $f_i(x, \mu_i, \sigma_i) > 0$

<u>Eigenschaften von Dichtfunktionen f_i für $\sigma_i = 0$ mit $i \in \mathbb{N}$:</u>

- f_i ist nicht definiert
- philosophische Betrachtung: f_i ist eine Konstante!?

<u>Eigenschaften von Dichtfunktionen f_i für $\sigma_i < 0$ mit $i \in \mathbb{N}$:</u>

- f_i ist nicht definiert in $\mathbb{R}$ (, aber in $\mathbb{C}$)

Schnittpunkte von f_1 und f_2 bestimmen durch Gleichsetzung:

Fall 1: $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$

$$\begin{aligned}
f_1(x,\mu_1,\sigma) &= f_2(x,\mu_2,\sigma) && \Leftrightarrow \\
\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}} && \Leftrightarrow \\
e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}} &= e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}} && \Leftrightarrow \\
log\left(e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}\right) &= log\left(e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}\right) && \Leftrightarrow \\
-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2} \cdot log(e) &= -\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2} \cdot log(e) && \Leftrightarrow \\
-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma^2} && \Leftrightarrow \\
(x-\mu_1)^2 &= (x-\mu_2)^2 && \Leftrightarrow \\
x^2 - 2x\mu_1 + \mu_1^2 &= x^2 - 2x\mu_2 + \mu_2^2 && \Leftrightarrow \\
2x\mu_1 - 2x\mu_2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 &= 0 && \Leftrightarrow \\
x(2\mu_1 - 2\mu_2) + \mu_2^2 - \mu_1^2 &= 0 && \Leftrightarrow \\
x(2\mu_1 - 2\mu_2) &= \mu_1^2 - \mu_2^2 && \Leftrightarrow \\
x &= \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{2\mu_1 - 2\mu_2} && \Leftrightarrow \\
x &= \frac{(\mu_1 + \mu_2) \cdot (\mu_1 - \mu_2)}{2(\mu_1 - \mu_2)} && \Leftrightarrow \\
x &= \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{2}
\end{aligned}$$

Fall 2: $\sigma_1 ! = \sigma_2$

$$f_1(x,\mu_1,\sigma_1) = f_2(x,\mu_2,\sigma_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} = e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} = e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}+\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}} = e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}+\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) = -\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) = -(x-\mu_2)^2 + \frac{2\sigma_2^2(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) = -(x-\mu_2)^2 + \frac{\sigma_2^2(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) = -\sigma_1^2(x-\mu_2)^2 + \sigma_2^2(x-\mu_1)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) = -\sigma_1^2(x^2-2x\mu_2+\mu_2^2) + \sigma_2^2(x-\mu_1)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) = -\sigma_1^2(x^2-2x\mu_2+\mu_2^2) + \sigma_2^2(x^2-2x\mu_1+\mu_1^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) = -\sigma_1^2x^2 + 2x\mu_2\sigma_1^2 - \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2(x^2-2x\mu_1+\mu_1^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) = -\sigma_1^2x^2 + 2x\mu_2\sigma_1^2 - \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2x^2 - 2x\mu_1\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 = -\sigma_1^2x^2 + 2x\mu_2\sigma_1^2 + \sigma_2^2x^2 - 2x\mu_1\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2 = -\sigma_1^2x^2 + 2x\mu_2\sigma_1^2 + \sigma_2^2x^2 - 2x\mu_1\sigma_2^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2 = x^2(\sigma_2^2-\sigma_1^2) + 2x\mu_2\sigma_1^2 - 2x\mu_1\sigma_2^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2 = x^2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + 2x(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} = x^2 + \frac{2x(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}$$

Ab hier gibt es zwei Möglichkeiten, die Gleichung zu lösen...

1. quadratische Ergänzung mit dem Term $\left(\frac{2(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\right)^2$ und umformen nach x
2. Term umformen und die P-Q-Formel verwenden

Wir haben uns für die 2. Option entschieden:

$$x^2 + \frac{2x(\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2)}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} - \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x \cdot \underbrace{\frac{2\mu_2\sigma_1^2 - 2\mu_1\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}_{P} - \underbrace{\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}_{Q} = 0$$

Nun können wir die quadratische Gleichung mit der P-Q-Formel lösen.
Zur Erinnerung: Die P-Q-Formel lautet: $x_{1/2} = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - Q}$.

$$x_1 = \frac{\mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\right)^2 + \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}$$

$$x_2 = \frac{\mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} - \sqrt{\left(\frac{\mu_2\sigma_1^2 - \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\right)^2 + \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 \cdot ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) + \mu_2^2\sigma_1^2 - \mu_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}}$$

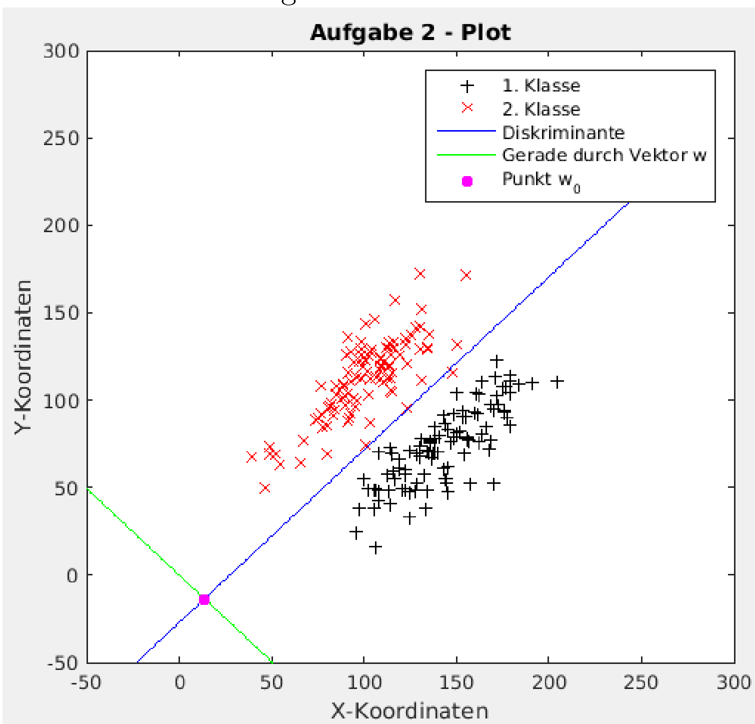
2 Klassifikation mit Fisher-Diskriminante

Berechnete Werte fuer die Fisher-Diskriminante:
$w = [0.0019 - 0.0019]$
$w0 = [13.6982 - 13.8648]$
Details siehe Code:

```matlab
% Clean up
clear all
close all
clc

% Datenaufbreitung
Data          = load('fisher.txt');
Data0         = Data((Data(:,3)==0),:);
Data1         = Data((Data(:,3)==1),:);
Koordinaten   = Data(:,1:2);
Koordinaten0  = Data((Data(:,3)==0),1:2);
Koordinaten1  = Data((Data(:,3)==1),1:2);
Klassen       = Data(:,3);

% Aufgabe 2

% Grafik erstellen
figure('NumberTitle','off','Name','Aufgabe 2 - Bildpunkte');

X = Koordinaten(:,1);
Y = Koordinaten(:,2);
min_x = -250;
max_x =  250;
li = min_x:max_x;

% Punkte plotten
gscatter(X,Y,Klassen,'krb','+x',[],'off');
hold on

% Diskriminante erzeugen
FDK    = fitcdiscr(Koordinaten,Klassen);
Konst  = FDK.Coeffs(1,2).Const;
Linear = FDK.Coeffs(1,2).Linear;
fd = @(x1,x2) Linear(1)*x1 + Linear(2)*x2 + Konst;

% Fisher-Diskriminante plotten
Diskriminante = ezplot(fd, [min_x,max_x]);
Diskriminante.Color = 'b';

% Scatter within berechnen
mean1 = mean(Koordinaten0);
mean2 = mean(Koordinaten1);
S1 = 0;
for i = 1:size(Koordinaten0, 1)
    S1 = S1 + (Koordinaten0(i,:) - mean1)' * (Koordinaten0(i,:) - mean1);
end
```

```
S2 = 0;
for i = 1:size(Koordinaten1, 1)
    S2 = S2 + (Koordinaten1(i,:) - mean2)' * (Koordinaten1(i,:) - mean2);
end
S_w = S1 + S2;

% Vektor w berechnen:
w = inv(S_w) * (mean1 - mean2)';
w_norm = w / norm(w)

% Gerade durch den Vektor w legen und plotten
w_gerade_x = w_norm(1) * li;
w_gerade_y = w_norm(2) * li;
plot(w_gerade_y, w_gerade_x, 'g');

% Daten auf Vektor w_norm projezieren
Koordinaten0_p = [];
for i = 1:size(Koordinaten0, 1)
    Koordinaten0_p = vertcat(Koordinaten0_p, Koordinaten0(i, :) * w_norm);
end
Koordinaten1_p = [];
for i = 1:size(Koordinaten1, 1)
    Koordinaten1_p = vertcat(Koordinaten1_p, Koordinaten1(i, :) * w_norm);
end
Koordinaten_p = vertcat(Koordinaten0_p, Koordinaten1_p);

% pdf der projizierten Daten aus Klasse 1 erzeugen
mean1_p = mean(Koordinaten0_p);
std1_p  = std(Koordinaten0_p);
pdf1_p  = pdf('Normal',li,mean1_p, std1_p);

% pdf der projizierten Daten aus Klasse 2 erzeugen
mean2_p = mean(Koordinaten1_p);
std2_p  = std(Koordinaten1_p);
pdf2_p  = pdf('Normal',li,mean2_p, std2_p);

% Schnittpunkt berechnen
[ispt_x,ispt_y] = intersections(li, pdf1_p, li, pdf2_p, 1);

% w0 berechnen und plotten
w0 = ispt_x * (w_norm')
plot(w0(1),w0(2),'m.','markersize',20);

% Titel, Bezeichner und Legende der Grafk
title('Aufgabe 2 - Plot');
xlabel('X-Koordinaten');
ylabel('Y-Koordinaten');
legend('1. Klasse','2. Klasse', 'Diskriminante', 'Gerade durch Vektor w', '↩
    Punkt w_0')
axis([-50 300 -50 300])
```

Grafische Darstellung der Fisher-Diskriminante:



2.1 Mehr als 2 Klassen klassifizieren mit Binärbaum

Unser Algorithmus:
Sei K die Menge der Klassen, die wir voneinander trennen wollen.

1. Für jede Klasse $K_i \in K$ whle eine zufällige Diskriminante d_j als Wurzelknoten eines neuen Baums und führe die Punkte 2. und 3. für diese Klasse aus.

2. Entscheide, ob die Klasse K_i links (-1) oder rechts (+1) von der Diskriminante d_j liegt. Falls K_i links von d_j liegt, fuege zum d_j-Knoten ein linkes Kind hinzu, falls rechts, ein rechtes Kind. Markiere d_j als bearbeitet.

3. Wähle eine Diskriminante d_{j+1}, die d_j schneidet (und nicht bearbeitet ist) und gehe zu 2. Wenn diese nicht existiert, haben wir einen Pfad durch unseren Baum gefunden, der beschreibt, auf welcher Seite einer jeden Diskriminante unsere Klasse liegt.

4. Da die Reihenfolge, in der wir den Pfad zu einer Klasse durchlaufen, keine Rolle spielt (sondern nur das richtige Abbiegen), vereinigen wir alle Pfade in einen einzigen Binärbaum (in 1. ist für jede Klasse ein eigener Binärbaum entstanden).

Jedes Blatt speichert eine Klasse K_i. Von dem Weg durch den Baum bis zu diesem Blatt ist für jede Diskriminante abzulesen, ob sie links von der Klasse K_i (wir sind im Pfad in den linken Teilbaum reingegangen, um dieses Blatt zu erreichen) oder rechts davon (in den rechten Teilbaum rein) liegt.