8. Übungszettel Mustererkennung SS15

Prof. Raúl Rojas, Daniel Göhring, Fritz Ulbrich
Institut für Informatik, Freie Universität Berlin
Abgabe Online bis Dienstag, 30.06.15, 23.59 Uhr

1. Aufgabe (10 Punkte): Repräsentierbarkeit Boolescher Funktionen durch ein Perzeptron

Gegeben sei ein Perzeptron mit zwei Eingängen für die logischen Variablen x_1, x_2 mit Wertebereich 0 oder 1 sowie dem Biaseingang mit Wert 1. Die Eingänge werden mit den Gewichten w_1, w_2 gewichtet sowie dem Biasgewicht w_3. Die Aktivierungsfunktion im Perzeptron soll für einen negativen Eingangswert 0 ergeben und sonst 1.

Jede boolesche Funktion (AND, OR, …, insgesamt 16) ist definiert über vier 2-Tupeln (0,0), (0,1), (1,0), (1,1).

Bei drei gegebenen Gewichten w_1, w_2, w_3 , kann man nun überprüfen, welche logische Funktion repräsentiert wird. Aus den vier 2-Tupeln (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) können vier Halbräume aufgespannt werden, z.B. gilt beim logischen AND:

$0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + w_3 < 0$ (AND(0,0) = 0)
$0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + w_3 < 0$ (AND(0,1) = 0)
$1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + w_3 < 0$ (AND(1,0) = 0)
$1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + w_3 >= 0$ (AND(1,1) = 1)

a. (3 Punkte) Schreiben Sie eine Funktion, die einem gegebenen Gewichtsvektor $v=(w_1, w_2, w_3)$ eine der 16 booleschen Funktionen zuordnet. Die Nummerierung der booleschen Funktion f erfolgt nach dem Schema: f(0,0) * 2^0 + f(0,1)*2^1 + f(1,0)*2^2 + f(1,1)*2^3 . So entspräche die boolesche Funktion AND der Zahl 8 bzw. der Funktion f_8.
Wenden Sie die Funktion auf die Vektoren $v_1=(0.3, 0.5, -0.4)$, $v_2=(-0.8, -0.6, 0.5)$ und $v_3=(0.7,0.6,-1)$ an und geben Sie an, welchen booleschen Funktionen (f_0, f_1, …, f_{15}) sie entsprechen.

b. (3 Punkte) Schreiben Sie eine Funktion, die zufällig Punkte (normierte Gewichtsvektoren) auf einer dreidimensionalen Einheitskugel erzeugt, sodass die Punkte **gleichverteilt** auf der Kugeloberfläche vorliegen. Visualisieren Sie eine Kugeloberfläche mit 10000 Punkten.

c. (2 Punkte) Erzeugen Sie ein Histogramm über den 16 booleschen Funktionen, indem Sie 10000 von in Aufgabe b) zufällig erzeugten Gewichtsvektoren mit der in Aufgabe a) geschriebenen Funktion verwenden. Stellen Sie die 16 Werte des Histograms als relative Häufigkeiten dar. Wie lautet das Verhältnis von größten zum kleinsten (von null verschiedenen) Wert des Histogramms?

d. (2 Punkte) Modifizieren Sie nun Aufgabe a), indem Sie als Werte der 2-Tupel für jede 0 eine -1 einsetzen. Man erhält nun für die vier 2-Tupel: (-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1) und folgende Halbräume im Gewichtsraum:

$(-1) \cdot w_1 + (-1) \cdot w_2 + w_3 < 0$ (AND(-1,-1) = 0)
$(-1) \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + w_3 < 0$ (AND(-1,1) = 0)
$1 \cdot w_1 + (-1) \cdot w_2 + w_3 < 0$ (AND(1,-1) = 0)
$1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + w_3 >= 0$ (AND(1,1) = 1)

Erzeugen Sie analog zu Aufgabe c) ein neues Histogramm und stellen Sie die 16 Werte des Histograms als relative Häufigkeiten dar. Wie lautet das Verhältnis von größten zum kleinsten (von null verschiedenen) Wert des Histogramms?