ROBOTICS

ASSIGNMENT 12

BY

TOM BULLMANN AND NICOLAS LEHMANN

25TH JANUARY 2016

LECTURER:
PROF. DR. DANIEL GÖHRING

FREE UNIVERTIY OF BERLIN
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
INSTITUTE OF COMPUTER SCIENCE

Table of Contents

1 Assignment 12

1.1 Task 1

1.1.1 a)

Gesucht sind die Parameter a, b, c, d, h, i, j, k für zwei Splines $f[0,1] \to \mathbb{R}, g[1,2] \to \mathbb{R}$. Die gesuchten Funktionen mit ihren Ableitungen sind

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d && (1.1)\\
f'(x) &= 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c && (1.2)\\
f''(x) &= 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b && (1.3)\\
g(x) &= h \cdot x^3 + i \cdot x^2 + j \cdot x + k && (1.4)\\
g'(x) &= 3 \cdot h \cdot x^2 + 2 \cdot i \cdot x + j && (1.5)\\
g''(x) &= 6 \cdot h \cdot x + 2 \cdot i && (1.6)\\
& && (1.7)
\end{aligned}
$$

Aus der Beschreibung sind direkt die folgenden Eigenschaften abzulesen

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 0 && (1.8)\\
f'(0) &= 0 && (1.9)\\
g(2) &= 8 && (1.10)\\
g'(2) &= 8 && (1.11)\\
f''(1) &= 0 && (1.12)\\
g''(1) &= 0 && (1.13)\\
& && (1.14)
\end{aligned}
$$

Um das soweit unterbestimmte Gleichungssystem lösen zu können, verwenden wir als zusätzliche Eigenschaft die Tatsache, dass sich f und g an der Grenze ihrer Definitionsbereiche bei $x = 1$ schneiden müssen. Es gilt also zusätzlich

$$
\begin{aligned}
f(1) &= g(1) && (1.15)\\
f'(1) &= g'(1) && (1.16)
\end{aligned}
$$

Ausformuliert erhält man somit ein lineares Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
d &= 0 && (1.17)\\
k &= 0 && (1.18)\\
8 \cdot h + 4 \cdot i + 2 \cdot j &= 8 && (1.19)\\
12 \cdot h + 4 \cdot i + j &= 8 && (1.20)\\
6 \cdot a + 2 \cdot b &= 0 && (1.21)\\
6 \cdot h + 2 \cdot i &= 0 && (1.22)\\
a + b + c &= h + i + j && (1.23)\\
3 \cdot a + 2 \cdot b + c &= 3 \cdot h + 2 \cdot i + j && (1.24)\\
& && (1.25)
\end{aligned}
$$

d, k sind also an dieser Stelle bereits bekannt. Für die übrigen Parameter lösen wir mittels Gaussschem Eliminierungsverfahren:

a	b	c	h	i	j	$=$
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8
6	2	0	0	0	0	0
0	0	0	6	2	0	0
1	1	1	-1	-1	-1	0
3	2	1	-3	-2	-1	0

Zuerst etwas umsortieren

a	b	c	h	i	j	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
3	2	1	-3	-2	-1	0
6	2	0	0	0	0	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8

a-Spalte eliminieren

a	b	c	h	i	j	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
0	-1	-2	0	1	2	0
0	-4	-6	6	6	6	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8

b-Spalte eliminieren

a	b	c	h	i	j	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
0	1	2	0	-1	-2	0
0	0	2	6	2	-2	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	8	4	2	8
0	0	0	12	4	1	8

c-Spalte sieht schon gut aus, deshalb weiter mit h

a	b	c	h	i	j	$=$
1	1	1	-1	-1	-1	0
0	1	2	0	-1	-2	0
0	0	1	3	1	-1	0
0	0	0	6	2	0	0
0	0	0	0	4	6	24
0	0	0	0	0	1	8

So ein Glück i, j ergeben sich direkt! Von unten nach oben können nun alle Parameter ausgerechnet werden, zu

$$a = 2, b = -6, c = 8, \tag{1.26}$$

$$h = 2, i = -6, j = 8 \tag{1.27}$$

Free Univertiy of Berlin
Department of Mathematics and Computer Science
Institute of Computer Science

Eine partielle Interpolation war hier also gar nicht nötig - ein einziges Polynom $e[0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ genügt, um alle Eigenschaften zu erfüllen.

Ergebnis:

$$e(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2 \cdot x$$

1.1.2 b)

Auch wenn $f = g = e$ sind hier unabhängig von einander f in blau und g in rot geplottet (Abbildung 1.1).

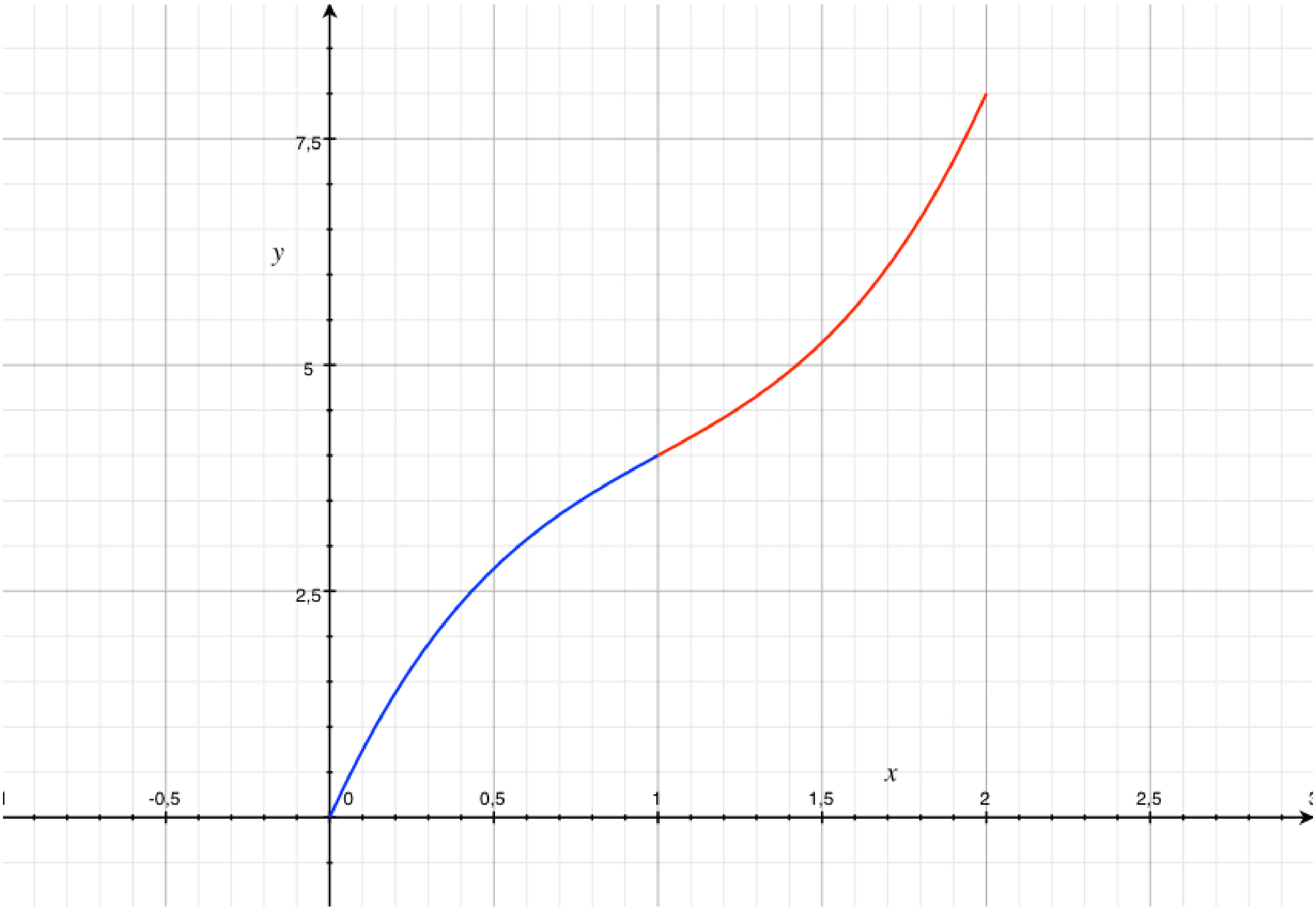

Figure 1.1: Spline

1.1.3 c)

Der Schnittpunkt (x_s, y_s) ist vorgegeben bei $x_s = 1$ mit $y_s = e(1) = a+b+c = 4$ Die Geschwindigkeit v ist dort $v = e'(1) = 3 \cdot a + 2 \cdot b + c = 2$

1.1.4 Task 3

1.1.5 a)

Wir definieren Ereignis A als "keine Enten sind zu sehen" und Ereignis B als "Krokodile sind zu sehen".

Wir wissen $P(\neg A) = (P(\neg A|B) + P(\neg A|\neg B)) = (0.1 + 0.5) = 0.6$.
Daraus folgt $P(A) = 1 - P(l \not A) = 0.4$
Außerdem wissen wir $P(B) = P(\neg A|B) + P(A|B)$.
Das stellen wir um nach $P(A|B) = P(B) - P(\neg A|B)$ und rechnen aus $P(A|B) = 0.2 - 0.03 = 0.17$.

Weil wir alle benötigten Variablen haben, setzen wir in den Satz von Bayes ein Es gilt der Satz von Bayes $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0.17 \cdot 0.2}{0.4} = 0.085$.

1.1.6 b)

Die Variablen $\neg A$ und B sind abhängig.

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen $\neg A$ und B sind unabhängig, dann gilt $P(\neg A|B) = P(\neg A)$.
$0.1 \neq 0.6$ Widerspruch $q.e.d.$

Free Univertiy of Berlin
Department of Mathematics and Computer Science
Institute of Computer Science