# **3.3. Các tính chất của biến đổi Fourier**

## 3.3.1. Tính chất tuyến tính

Giả sử ta có hai tín hiệu và và biến đổi Fourier của chúng ta là:

FT[)

FT[)

Chúng ta coi x(n) là tổ hợp tuyến tính của hai dãy và như sau:

x(n)= + (3.3.1.1)

Ở đây a và b là các hằng số.

Biến đổi Fourier của x(n) được cho bởi:

FT[) = = +

)= a (3.3.1.2)

Biểu thức (3.3.1.1) và (3.3.1.2) thể hiện tính tuyến tính của biến đổi Fourier

Ví dụ 3.3.1.1 : Hãy xác định biến đổi Forier của tín hiệu sau đây:

Với :

Giải : Áp dụng tính chất tuyến tính ở trên ta có:

)= 2

Vậy :

## 3.3.2 Tính chất trễ

Giả sử y(n) là phiên bản trễ của x(n), tức là:

y(n)=x(n- (3.3.2.1)

: số nguyên

Ta có:

FT[) = +

Đổi biến số l=n- ,ta có:

) = + X() (3.3.2.2)

Biểu thức (3.3..2.1) và (3.3.2..2) thể hiện tích chất trễ của biến đổi Fourier. Nên ta biểu diễn Y() ở dạng modul và argument, ta có:

= (3.3.2.3)

arg

Từ biểu thức (3.3.2.3) ta thấy rằng tín hiệu x(n) trễ đi mẫu trong miền biến số độc lập n, thì trong miền tần số phổ biên độ của nó giữ nguyên không đổi, còn phổ pha của nó sẽ tăng thêm một lượng -w

Ví dụ 3.3.2.1: cho

Hãy tìm

Hãy timg phổ biên độ pha và phổ pha của x(n)

Giải : Áp dụng tính chất trễ ta có:

Áp dụng kết quả ví dụ 3.2.1.1 ta có :

Vậy ta có phổ pha và phổ biên độ của x(n) như sau:

|

arg

## 3.3.3 Tính chất đối xứng

Trong trường hợp tổng quát tín hiệu x(n) là tín hiện phức,ta có thể viết:

x(n)= Re[x(n)]+jIm [x(n)] (3.3.3.1)

Vậy dãy liên hợp phức của x(n) là x\*(n) có dạng:

x\*(n) )= Re[x(n)]- jIm [x(n)] (3.3.3.2)

bây giờ ta tìm quan hệ giữa FT[x\*(n)] và FT[x(n)]:

FT[x(n)]=)=

FT[x\*(n)] = =)}\*=X\*

Vậy :

FT[x\*(n)]= X\* (3.3.3.3)

Nếu x(n) là thực thì:

X\*(n)=x(n) và FT[x\*(n)]= FT[x(n)]

Vậy đối với tín hiệu x(n) thực ta có quan hệ sau đây:

X\* = X (3.3.3.4)

Hay:

X\* = X (3.3.3.5)

Từ quan hệ (3.3.3.4) hay (3.3.3.5) ta có thể nói rằng phổ của tín hiệu thực có tính đối xứng Hermit

Từ đây ta thấy rằng đối với x(n) thực ta có:

Re[)] = Re[)]

Im[)]=- Im[)]

Tức là :

Re[)] là hàm chẵn của w

Im[)] là hàm lẻ của w

Tương tự đối với modun và argument ta cũng có:

= (3.3.3.8)

arg= (3.3.3.9)

vậy ta nói rằng là đối xứng (hoặc đối xứng chẵn) còn arglà phản đối xứng (hoặc đối xứng lẻ)

Ví dụ 3.3.3.1: cho x(n)=

Hãy tính ), Re[)], Im[)], | và arg

Giải :

FT[x(n)]=)= )= =

Vậy ta có:

Re[)] =

Im[

Áp dụng quan hệ (3.2.1.5) và (3.2.1.6) ta có;

|

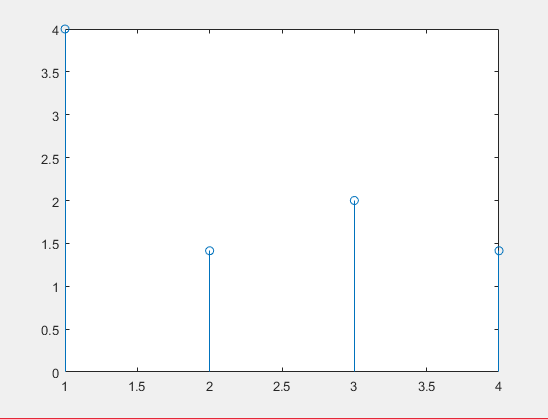
arg=

Và hình vẽ đồ thị:

xn=[1 0 2 1];

N=4;

Xk=DFS(xn,N)



## 3.3.4 tính chất biến số n đảo

Giả sử ta có tín hiệu x(n) và biến đổi Fourier của nó là :

FT[)] =

Bây giờ ta tính biến đổi Fourier của tín hiệu x(-n):

FT[

Đổi biến số l=-n ta có:

FT[ = )

Vậy:

FT[)] (3.3.4.1)

Nếu x(-n) là thực thì từ tính đối xứng Hermit (3.3.3.4) và (3.3.3.5) ta có:

FT[) = X\* ) = = =

Vậy với tín hiệu thực x(n) ta có thể nói rằng: nếu tín hiệu bị đảo biến số n ngược lại quanh gốc tọa độ thì phổ biên độ của nó giữ nguyên không đổi,còn phổ pha của nó bị đổi dấu.

Ví dụ 3.3.4.1: giải sử tín hiệu x(-n) là phức , hãy tính biến đổi Fourier của liên hợp phức của x(-n) theo hàm của )

Giải :

FT[

Đổi biến số l=-n

FT[== X\*

## 3.3.5 Tích chập của hai tín hiệu

Giả sử ta có hai tín hiệu và và biến đổi Fourier của chúng ta là:

FT[)

FT[)

Ta có dãy như sau:

= \*

Bây giờ ta tìm biến đổi Fourier của theo ) và )

Áp dụng tính chất trễ (3.3.2.2) ta có:

) =

Vậy:

) =.

Ví dụ 3.3.5.1: Giả sử có hai tín hiệu và như sau:

= =

Hãy tính tích chập = \* thông qua tính chất của biến đổi Fourier

Giải :

Theo định nghĩa biến đổi Fourier ta có:

)=)== +=2

Vậy ) =.= 4 =( + ++2

Áp dụng biến đổi Fourier ngược ta có:

## 3.3.6 tích của hai dây

Nếu ta có:

FT[] = )

FT[] = )

Thì:  
FT[).] = FT [] = ) = ’

Chứng minh:

) = = )

=

Vậy ta có:

) = ( 3.3.6.1)

= )\*) ( 3.3.6.2)

= )\* )

Quan hệ ( 3.3.6.1) và ( 3.3.6.2) được gọi là tích chập liên tục và tuần hoàn với chu kỳ 2.

Nhận xét:

Tích chập: thường được dung trong trường hợp chúng ta nghiên cứu có chiều dài rất dài, để giới hạn chiều dài ta sẽ nhân nó với có chiều dài hữu hạn gọi là cửa sổ như là ta có thể dung cửa sổ chữ nhật = rectN (*n*). Sau đó ta sẽ dung rất nhiều kỹ thuật cửa sổ này để tổng hợp bộ lọc số FIR.

## 3.3.7 VI PHÂN TRONG MIỀN TẦN SỐ

Nếu: FT[] = *X*

Thì FT[] = j (3.3.7.1)

Chứng minh:

*X* =

## 3.3.8 TRỄ TẦN SỐ

Nếu ta có:

Thì

(3.3.8.1)

Chứng minh: Theo định nghĩa của biến đổi Fourier ta có:

Nhận xét:

Việc nhân dãy số với trong miền biến số n sẽ tương đương với việc dịch chuyển tần số của phổ đi một lượng *w0*. Hình 3.3.8.1 minh họa dịch đi một lượng 2.

Ví dụ 3.3.8.1: cho x(n) và FT[] = *X*

Hãy tìm phổ của

Hãy minh họa phổ của x(n) và y(n) với

Giải :

Ta biết rằng (

Vậy ta có: FT[]=+ (3.3.8.2)

Quan hệ (3.3.8.2) gọi là định lý điều chế, bởi vì là thực, vì vậy trong thực tế người ta hay dùng quan hệ này

## 3.3.9 QUAN HỆ PARSERVAL

Nếu ta có:

)

)

Thì:

Quan hệ (3.3.9.1) gọi là quan hệ Paserval

Chứng minh:

Trong tường hợp :

gọi là phổ mật độ năng lượng , nó thể hiện sự phân bố năng lượng theo hàm của tần số. Ta ký hiệu đó là.

Vậy ta có:

Ta biết rằng năng lượng của tín hiệu là *Ex* :

Như vậy quan hệ Paserval chính là quan hệ giữa năng lượng của tín hiệu và phổ mật độ năng lượng của tín hiệu đó.

Trong trường hợp là thực thì là đối xứng:

Vậy ta có thể nói rằng nếu là thực thì *Sxx*(w) cũng là đối xứng:

Ví dụ 3.3.9.1: cho

Hãy tính và vẽ phổ mật độ năng lượng của x(n)

Giải: trước hết ta phải xét xem nó có tồn tại hay không

Điều kiện để hội tụ là

Vậy tồn tại

Theo định nghĩa biến đổi Fourier ta có:

Phổ mật độ năng lượng được tính như sau:

## 3.3.10 ĐỊNH LÝ TƯƠNG QUAN VÀ ĐỊNH LÝ WEINER KHINTCHINE

Nếu

)

)

Thì:

)

Chứng minh:

Đổi biến : m - n = l

Nhận xét:  
Nếu là có thực ta có:

Nếu ta có hàm tương quan

Nếu hàm tự tương quan của thực ta có:

Vậy biến đổi Fourier của hàm tự tương quan sẽ bằng phổ mật độ năng lượng của tín hiệu.

Quan hệ ở trên gọi là định lý Weiner- Khintchine.

Đối với biến đổi Fourier của hàm tương tương quan chéo ta có là phổ mật độ năng lượng của và và ký hiệu là .

Ví dụ 3.3.10.1: Cho tín hiệu x(n) là thực. hãy tính giá trị của hàm tự tương quan của x(n) tại gốc tọa độ n=0 và hãy cho nhận xét về kết quả thu được.

Giải : Theo định nghĩa hàm tự tương quan ta có:

Tại n=0 ta có :

Theo công thức của biến đổi Forier ngược ta có:

Tại gốc tọa độ n=0 ta có:

Và nếu x(n) là thực ta có:

Kết quả cuối cùng:

Đây chính là quan hệ Parseval(3.3.9.2)

Ta có nhận xét rằng năng lượng của tín hiệu bằng giá trị của hàm tự tương quan lấy tại n=0

## 3.3.11 TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẬT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER VỚI TÍN HIỆU RỜI RẠC

Bảng 3.3.11.1 cho ta các tính chất cơ bản của biến đổi Fourier đối với tín hiệu rời rạc

Bảng 3.3.11.1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Tính chất | Miền biến số | Miền tần số liên tục |
| Ký hiệu |  |  |
|  |  |
|  |  |
| Cặp biến đổi Fourier |  |  |
| Tuyến tính |  |  |
| Trễ |  |  |
| Đối xứng |  |  |
| Liên hợp phức |  |  |
| Biến số đảo |  |  |
| Tích chập |  |  |
| Tích đại số |  |  |
| Vi phân trong miền w |  |  |
| Trễ tần số |  |  |
| Điều chế |  |  |
| Quan hệ Paserval |  |  |
| Tương quan |  |  |
| Định lý Weiner- Kintchine |  |  |

## 4.2.2 CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC ĐỐI VỚI CÁC DÃY TUẦN HOÀN CÓ CHU KỲ N

Để sử dụng hiệu quả DFT chúng ta cần nghiên cứu các tính chất của chúng

1. Tính tuyến tính

DFT là một biến đổi tuyến tính, tức là nếu ta có hai dãy và là hai dãy tuần hoàn có cùng chu kỳ N và nếu ta có dãy là tổ hợp tuyến tính của và :

= a + b

Ở đây a và b là các hằng số.

Thì nếu: DFT[]=

DFT[]=

Ta có:

DFT[]= = a + b

Ở đây tất cả các dãy đều là tuần hoàn có chu kỳ N

1. Tính chất trễ

Nếu là dãy tuần hoàn có chu kỳ N và:

DFT[

Thì nếu ta có dãy là dãy trễ của dãy cũng là tuần hoàn có chu kỳ N thì

DFT[ =

Chứng minh:

DFT[ =

Đổi biến số:

Ta có :

DFT[ =

Bới vì là tuần hoàn với chu kỳ N và cũng là tuần hoàn với chu kỳ N nên:

Vậy ta có :

DFT[ =

Cần lưu ý rằng nếu , thì do tính tuần hoàn ta có thể lập luận như sau:

Đặt

Ta có:

Tương tự đối với biến đổi Fourier rời rạc ngược ta cũng có:

(4.2.2.3)

Chứng minh:

=

Đổi biến :

Vậy :

=

Do và là tuần hoàn với chu kỳ N ta có:

Vậy ta có:

1. Tính đối xứng

Nếu ta có dãy tuần hoàn với chu kỳ N và cũng có:

Thì : (4.2.2.4)

Ở đây dấu \* là liên hợp phức.

Chứng minh:

Tương tự ta cũng có:

(4.2.2.5)

Chứng minh:

Đổi biến –n=m ta có:

Do tính tuần hoàn với chu kỳ N của và ,ta có:

Ta cũng có:

]

Chứng minh:

Vậy:

Tính DFT của phần tử ảo ta có:

Chứng minh:

Tổng kết lại các tính chất đối xứng của DFTđối với phức ta có:

Trong thực tế thường chúng ta hảy xử lý những tín hiệu thực , vậy bây giờ ta xét tính đối xứng của DFT với dãy thực

Nếu là thực thì:

Chứng minh:

Vậy:

Vì là thực nên , vậy:

Và theo tính chất (4.2.2.4) ta có:

Lấy liên hợp phức hai vế ta có:

Vậy ta có:

Vậy ta có:

Tương tự nếu x(n) là thực ta có:

(4.2.2.10)

(4.2.2.11)

1. Tích chập tuần hoàn

Trong chương 1 ta đã nghiên cứu tích chập tuyến tính:

Tích chập tuần hoàn có khác định nghĩa của tích chập tuyến tính một chút là do chiều dài của các dãy tuần hoàn là vô cùng nhưng các chu kỳ lại lặp lại giống nhau, vì thế tổng chỉ lấy trong một chu kỳ, vậy ta có định nghĩa của tích chập tuần hoàn như sau:

Tích chập tuần hoàn của hai dãy tuần hoàn và có chu kỳ N là một dãy tuần hoàn có chu kỳ N được định nghĩa như sau:

(4.2.2.12)

)

Bây giờ chúng ta xét trong miền k

Nếu :

Thì :

Chứng minh:

Đổi biến: l=n-m

n=l+m

và chú ý là dãy tuần hoàn có chu kỳ N,

ta có: