**PHẦN TRANG 211-215**

**Ví dụ 4.2.2.1:**  Cho hai dãy tuần hoàn và cho chu kỳ N= 8 như trên hình 4.2.2.1.

Hãy tìm

Giải: Theo công thức (4.2.2.1) ta có:

Như vậy ta phải tiến hành tính từng giá trị của trong một chu kỳ , tức là tính đến . Chúng ta sẽ tiến hành bằng đồ thị cho trên hình 4.2.2.2

|  |
| --- |
| k0=ones(1,7);  k1=[k0 0];  k2=[k1 k1 k1];  x=-8:1:15;  subplot(131);  stem(x,k2);    a1=1:-0.25:0;  a2=zeros(1,3);  a3=[a1 a2];  a4=[a3 a3 a3];  subplot(132);  stem(x,a4); |
|  |

**Hình 4.2.2.1:**

Sau khi tính toán ta thu được kết quả sau:

Và đồ thị của như trên hình 4.2.2.3

|  |
| --- |
| x1=-9:1:14;  b0=3.\*ones(1,4);  b1=1.5:0.25:2.25;  b2=[b1 b0];  b3=[b2 b2 b2];  subplot(133);  stem(x1,b3); |
|  |

**Hình 4.2.2.3**

|  |
| --- |
| k0=ones(1,7);  k1=[k0 0];  k2=[k1 k1 k1];  x=-8:1:15;  subplot(231);  stem(x,k2);    a1=1:-0.25:0;  a2=zeros(1,3);  a3=[a1 a2];  a4=[a3 a3 a3];  subplot(232);  stem(x,a4);    x1=-7:1:16;  subplot(233);  stem(x1,a4);    x2=x1+3;  subplot(234);  stem(x2,a4);    x3=x1+5;  subplot(235);  stem(x3,a4);    x4=x1+6;  subplot(236);  stem(x4,a4); |
|  |

**Hình 4.2.2.2**

**e) Tích của hai dãy**

Nếu chúng ta coi tích của hai dãy tuần hoàn và có cùng chu kỳ N là một dãy tuần hoàn cũng có chu kỳ N như sau:

Và nếu chúng ta có:

Thì ta có :

Chứng minh:

Thay:

Ta có:

Hoặc là:

Như vậy ta thấy rằng trong miền n là tích đại số bình thường thì trong miền k (miền tần số rời rạc) sẽ là tích chập, điều đáng chú ý là tích chập trong miền k cũng là tích chập rời rạc, nó chỉ khác hệ só tỷ lệ

Mặt khác chúng ta nhớ lại rằng nếu chúng ta biểu diễn tín hiệu trong miền tần số liên tục , trong miền n là tích chập bình thường, thì trong miền sẽ là tích chập, nhưng tích chập này là tích chập liên tục được định nghĩa bởi một tích phân.

**f) Tương quan tuần hoàn**

Cho hai dãy tuần hoàn và có chu kỳ N , thì hàm tương quan chéo của hai dãy này sẽ được tính toán theo trên một chu kỳ và được cho bởi công thức sau:

Vậy ta thấy hàm tương quan chéo của hai dãy cùng chu kỳ N là một dãy tuân fhoafn cũng có chu kỳ N

Bây giờ ta xét trong miền k

Nên ta có:

Thì ta có:

Chứng minh:

Đổi biến *l=m-n*

Chú ý rằng:

Vậy nếu là thực thì ta có:

Và:

Quan hệ này cũng đúng đối với các dãy và phức, nếu tương quan chéo của chúng được định nghĩa như sau:

Chứng minh:

Đổi biến *l=m-n*

Mà:

Vậy:

**PHẦN CHƯƠNG 4.3.2**

**4.3.2. CÁC. TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC ĐỐI VỚI CÁC DÃY CÓ CHIỂU DÀI HỮU HẠN**

Trong mục này chúng ta sẽ nhìn lại các tính chất của *DFT* đối với các dãy tuần hoàn có chu kỳ *N* theo quan điểm của các dãy có chiều dài hữu hạn *N,* tức là trong khoảng 0 < n <N-1.

**a) Tính tuyến tính**

*DFT* là một biến đổi tuyến tính, tức là nếu ta có hai dãy có chiều dài hữu hạn *x1*(n) và *x2(n)* và dãy *x3(n)* là tổ hợp tuyến tính của hai dãy này, tức là:

***x3(n)* = *ax1(n) + bx2(n)*** (4.3.2.1)

mà ta có:

***DFT[xl(n)]=X1(k)***

***DFT[x2(n)]=X2(k)***

***DFT[x3(n)]=X3(k)***

thì ta có:

***X3(k)* = *aX1 (k) + bX2(k)*** (4.3.2.2)

Chú ý rằng nếu chiều dài của x1(n) và *x2(n)* là khác nhau

L [x1(n)]=*N1*

*L* [x2(n)] = *N2*

thì ta phải chọn chiều dài của dãy *x3(n)* như sau:

*L* [x3(n)] *= N3 =* ma*x(N1 N2)*

và tất cả các *DFT[x1(n)], DFT[x2(n)]* và *DFT[x3(n)]* đểu phải tính trên *N3* mẫu. Giả sử nếu *N1 < N2* thì dãy X phải được kéo dài thêm *N2 – N1*mẫu không và *DFT* [x1(n)] phải được tính trên *N3* = *N2* mẫu và *DFT* [x2(n) ] , *DFT* [x3(n) ] cũng được tính trên *N3 + N2* mẫu . Cụ thể là:

Chú ý rằng để nhấn mạnh và chỉ rõ chỉ rõ chiều dài của các dãy trong miền n và miền k ta ghi thêm chiều dài vào ký hiêu dãy như là: 

**b) Trễ vòng**

Trước hết chúng ta nhìn lại trễ tuyến tính và trễ tuần hoàn có chu kỳ N để so sánh và rút ra kết luận của trễ vòng. Để thấy được một cách trực quan ta có các ví dụ sau:

**Ví dụ 4.3.2.1**: Cho dãy x(n) sau:

Hãy tìm trễ tuyến tính ***x(n-2)*** và ***x(n+2)***

Giả: Chúng ta giải bằng đồ thị cho bởi hình 4.3.2.1

|  |
| --- |
| x=zeros(1,5);  k=0:1:4;  for i=0:3;  y=i+1;  x(y)=1-i./4;  end  subplot(131);  stem(k,x);    k1=k+2;  subplot(132);  stem(k1,x);    k2=k-2;  subplot(133);  stem(k2,x); |
|  |

**Hình 4.3.2.1**

Chú ý rằng để phân biệt các loại trễ ta có các ký hiệu sau:

Nhận xét về hai ví dụ 4.3.2.1 và 4.3.2.2 ta thấy rằng, nếu ta trích ra một chu kỳ ( từ 0 đến N-1 ) của trễ tuần hoàn chu kỳ N thì ta sẽ được trễ vòng so sánh với trễ tuyến tính thì ta thấy rằng nếu các mẫu của trễ tuyến tính vượt ra ngoài khoảng từ 0 đến N-1 thì nó sẽ vòng vào bên trong khoảng đó để làm dao dãy có chiều dài hữu hạn xác định trong khoảng [0, N-1 ] thì trễ vòng của nó xác định trong khoảng [0, N-1] chứ không vượt ra ngoài khoảng đó.

Vậy ta có thể nói rằng trễ vòng tương ứng với việc hoán vị vòng các mẫu của dãy x(n)N trong khoảng [0, N-l] và ta có thể viết:

Do tính đối ngẫu nên trong miền *k* ta cũng có tương tự, tức là:

Bây giờ chúng ta xét tính chất trễ trong miền *n*thì trong miền k sẽ ra sao ?

Nếu ta có:

Thì

Chứng minh:

Chúng ta dựa vào cách chứng minh tính chất trễ của dãy tuần hoàn chu kỳ N. Ta đã có:

Nếu lấy cả hai vế ta đều lấy ra một chu kỳ [0,N-1], tức là:

Vậy ta có:

Tương tự ta cũng có tính chất trễ trong miền k.

Nêu ta có:

Thì:

Cách chứng minh cũng dựa vào cách chứng minh tính chất trễ của dãy tuần hoàn chu kỳ N trong miền k.

* Nếu ta trích ra một chu kỳ ( từ 0 đến N-1) của dãy tuân hoàn biến đảo thì ta sẽ có được dãy biến đảo vòng chiều dài hữu hạn tức là chiều dài của không được vượt ra ngoài khoảng [0, N-1] , vậy ta có thể viết:

Chúng ta luôn luôn có tính đối ngẫu giữa miền biến số rời rạc n và miền tần số rời rạc k, vì thế đối với dãy ta cũng có thể viết như sau:

|  |
| --- |
| x=zeros(1,4);  k=0:1:3;  for i=0:3;  y=i+1;  x(y)=1-i./4;  end  subplot(221);  stem(k,x);    k1=-4:1:7;  x1=[x x x];  subplot(222);  stem(k1,x1);    k2=-k1;  subplot(223);  stem(k2,x1); |
|  |

**Hình 4.3.2.5**

Hình 4.3.2.6 sẽ minh họa thêm cho chúng ta rõ bản chất của dãy biến đảo chiều dài hữu hạn.

Ví dụ 4.3.2.4: Cho dãy tuần hoàn có chu kỳ N=4 sau dãy:

Hãy tìm sau đó lấy ra một chu kỳ của dãy này.

Giải: Giải bằng đồ thị cho trên hình 4.3.2.5

|  |
| --- |
| x=zeros(1,4);  k=0:1:3;  for i=0:3;  y=i+1;  x(y)=1-i./4;  end  subplot(131);  stem(k,x);    k1=-k;  subplot(132);  stem(k1,x);    x1=[x(1) x(4) x(3) x(2)];  subplot(133);  stem(k,x1); |
|  |

*x’(1)=x(-3)*

*x(1)*

*3*

*1*

*2*

*x’(0)=x(-0)*

*2*

*0*

*0*

*x’(2)= x(-2)*

*x(0)*

*x(2)*

v

*1*

*x’(3)=x(-1)*

*3*

*x(3)*

***Hình 4.3.2.6***

Ta cũng có nhận xét rằng do tính tuần hoàn của , vậy:

Và ta cũng có:

Thì :

Tương tự trong miền k ta cũng có:

Ta cũng dễ dàng thấu rằng:

**c) Tính đỗi xứng**

Ta có dãy chiều dài hữu hạn N, và

Thì ta có:

dấu \* ở đây là liên hợp phức.

Tương tự ta cũng có :

Các tính chất đối xứng của DFT đối với dãy có chiều dài hữu hạn có thể suy ra từ các tính chất của DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N, hoặc các tính chất của FT trong chương 3.

Bây giờ ta xét chi tiết tính đối xứng đối với dãy phức có chiều dài hữu hạn N .Dãy có thể biểu diễn dưới dạng sau:

Và:

Do vậy ta có thể viết:

)

Bây giờ ta xét DFT của phần ảo của

)

Khi

Vậy :

Và nếu là thực ta có

Và

Tức là :

Lấy liên hợp phức hai vế ta có:

Với biển dảo -k ta có :

Theo (4.3.2.25) và (4.3.2.26) ta có :

Vậy với x(n) thực ta có :

Tương tự ta có:

Bây giờ ta xét Moodun và argument

Tương tự:

**d) Tích chập vòng**

*Định nghĩa:* Tích chập vòng của hai dãy không tuần hoàn và có chiều dài hữu hạn N là một dãy không tuần hoàn cũng có chiều dài hữu hạn N được cho bởi quan hệ sau:

là tích chập vòng chiều dài N.

Nếu trong miền n là tích chập vòng thì trong miền k ta dễ dàng chứng minh được tính chất sau đây:

Ở đây :

**Ví dụ 4.3.2.4**: Cho hai dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N=4 như sau:

Hãy tính tích chập vòng chiều dài N=4 của hai dãy này:

**Giải:**

Để có thể thấy rõ bản chất của tích chập vòng , chúng ta hãy xem quá trình tính toán và kết quả bằng đồ thị cho trên hình 4.3.2.7.

|  |
| --- |
| k=0:1:3;  x=zeros(1,4);  x(2)=1;  subplot(331);  stem(k,x);    x1=1:-0.25:0.25;  subplot(332);  stem(k,x1);    x20 = [x1(1) x1(4) x1(3) x1(2)];  subplot(333);  stem(k,x20);    x21 = circshift(x20,[1,1]);  subplot(334);  stem(k,x21);    x22 = circshift(x21,[1,1]);  subplot(335);  stem(k,x22);    x23 = circshift(x22,[1,1]);  subplot(336);  stem(k,x23);    x24 = circshift(x1,[1,1]);  subplot(338);  stem(k,x24); |
|  |

**Hình 4.3.2.7**

Nhận xét: Chúng ta có thể áp dụng tính chất của biểu thức (4.3.2.33) để tính tích chập vòng , đây là cách tính gián tiếp thông qua DFT, nhưng cho ta hiệu quả cao hơn. Để thấy rõ chúng ta hãy xét ví dụ dưới đây ( Ví dụ 4.3.2.5).

**Ví dụ 4.3.2.5**: Cho hai dãy chiều dài hữu hạn sau đây:

Hãy tính thông qua ***DFT.***

|  |
| --- |
| k = 0:1:3;  x1 = ones(1,4);  subplot(321);  stem(k,x1);    x2 = x1;  subplot(322);  stem(k,x2);    X1=fft(x1);  subplot(323);  stem(k,X1);    X2=fft(x2);  X3=X1.\*X2;  subplot(324);  stem(k,X3);    x3=ifft(X3);  subplot(325);  stem(k,x3); |
|  |

**Hình 4.3.2.8**

**Giải:**

Để tìm ta dùng công thức của IDFT

Minh họa bằng đồ thị cho trên hình 4.3.2.8 với N=4.

**Ví dụ 4.3.2.6 :**

Hãy tính tích chập tuyến tính

**Giải:**

Chúng ta giải bằng đồ thị cho trên hình 4.3.2.9.

|  |
| --- |
| k=-4:1:6;  x1=zeros(1,11);  x1(5:8)=1;  subplot(321);  stem(k,x1);    x2=x1;  subplot(322);  stem(k,x2);    x3=circshift(x1,[1,-3]);  subplot(323);  stem(k,x3);    x4=circshift(x3,[1,5]);  subplot(324);  stem(k,x4);    y=conv(x1,x2);  y1=y(5:15);  subplot(325);  stem(k,y1); |
|  |

**Hình 4.3.2.9**

Nhận xét:

Kết quả thu được từ các ví dụ 4.3.2.5, 4.3.2.6 cho ta thấy rằng tích chập vòng với chiều dài *2N* sẽ bằng tích chập tuyến tính, như vậy chúng ta có thể dùng tích chập vòng với chiều dài *2N* để tính tích chập tuyến tính của hai dãy bất kỳ có chiều dài hữu hạn *N*, và vì thế chúng ta có thể sử dụng *DFT* với chiều dài *2N* để tìm tích chập tuyến tính của hai dãy có chiều dài hữu hạn *N.*

Tổng quát ta có thể nói như sau: nếu chiều dài của là , chiều dài của là thì chiều dài của là và tích chập tuyến tính là:

Tích chập vòng là:

Vậy trong trường hợp này dãy được kéo dài thêm mẫu không để trở thành dãy , và dãy được kéo dài thêm mẫu thành dãy

Nếu ứng dụng DFT ta sẽ có:

Tức là ta có DFT được tính với chiều dài sau đó dùng IDFT để tính

Sơ đồ minh họa trên hình 4.3.2.7

DFT

IDFT

DFT

Trong đó:

DFT: là bộ biến đổi Fourier

IDFT: là bộ biến đổi Fourier ngược

: là bộ nhân

**Hình 4.3.2.7**

***Nhận xét:*** Ta có thể viết tích chập vòng dưới dạng ma trận như sau:

\*=



Ma trận được gọi là ma trận vòng

**e) Quan hệ Parseval**

Quan hệ Parseval phát biểu như sau: “ Năng lượng của tín hiệu bằng tổng năng lượng của các hài thành phần của nó” Tức là:

Chứng minh:

Bảng 4.3.2.1 Các tính chất quan trọng của DFT đối với dãy có chiều dài hữu hạn

|  |  |
| --- | --- |
| Dãy | DFT |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |