习题(25)

25.1 设随机变量 X 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布,Y 在 $[1,3]$ 上服从均匀分布,且相互独立,试求 $E(XY)$ 和 $D(XY)$.

25.2 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,Y 服从 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布.令 $Z = X + Y$,试计算 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

25.3 设用火箭弹对某目标进行独立地连续射击,直到命中 n 次为止.每次射击的命中率为 p,求火箭弹消耗量 X 的数学期望和方差.

25.4 已知正常男性成人血液中,每一毫升白细胞数平均是 7300,均方差是 700.利用切比雪夫不等式估计每一毫升含白细胞数在 5200 至 9400 之间的概率.

习题(25)参考解答

25.1 解: 已知 $X \sim U(0,1)$,$Y \sim U(1,3)$,则

$$E(X)=\frac{1}{2},\ D(X)=\frac{1}{12};\quad E(Y)=2,\ D(Y)=\frac{(3-1)^2}{12}=\frac{1}{3}.$$

又由 X,Y 相互独立,则

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{1}{2}\times 2=1;$$

$$D(XY)=E[(XY)^2]-[E(XY)]^2=E(X^2)\cdot E(Y^2)-[E(X)\cdot E(Y)]^2$$

$$=[D(X)+(E(X))^2]\cdot[D(Y)+(E(Y))^2]-1$$

$$=[\frac{1}{12}+(\frac{1}{2})^2]\cdot[\frac{1}{3}+2^2]-1=\frac{4}{9}.$$ ♣

25.2 解: 由 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,Y 服从 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布,则

$$E(X)=\mu,\ D(X)=\sigma^2,$$

$$E(Y)=0,\ D(Y)=\frac{[\pi-(-\pi)]^2}{12}=\frac{\pi^2}{3}.$$

$$E(Z)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\mu .$$

又因为 X 与 Y 相互独立,则

$$D(Z)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)=\sigma^2+\frac{\pi^2}{3}. \qquad ♣$$

25.3 分析：本题中 X 服从巴斯卡分布,即有分布律

$$P\{X=k\}=\binom{k-1}{n-1}p^n\cdot(1-p)^{k-n},\ k=n,n+1,\cdots.$$

而由巴斯卡分布律求数学期望和方差有难度.但注意到火箭弹消耗量 X 可以表示为 n 个随机变量之和,即

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n,$$

其中 X_i 表示第 $i-1$ 次命中后到第 i 次命中的之间所消耗的火箭弹数,$i=1,2,\cdots,n$,且相互独立同服从几何分布.再由期望和方差的性质及几何分布的期望与方差的结论可得本题解.

解：以 X_i 表示第 $i-1$ 次命中后到第 i 次命中的之间所消耗的火箭弹数,$i=1,2,\cdots,n$,则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 均为随机变量,相互独立同分布,且有

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n.$$

又由 X_i 服从几何分布,即有

$$P\{X_i=k\}=p\cdot(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\cdots.$$

根据24.3题(上讲习题)的结论知

$$E(X_i)=\frac{1}{p},\ D(X_i)=\frac{1-p}{p^2},\ i=1,2,\cdots,n.$$

则 $$E(X)=E(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n E(X_i)=\frac{n}{p},$$

$$D(X)=D(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n D(X_i)=\frac{n(1-p)}{p^2}. \qquad ♣$$

25.4 解：每一毫升血液含白细胞数记为 X,则 $E(X)=7300$,$D(X)=700^2$.故所求概率为

$$P\{5200\le X\le 9400\}=P\{5200-7300\le X-7300\le 9400-7300\}$$

$$=P\{|X-7300|\le 2100\}=P\{|X-E(X)|\le 2100\}$$

$$\geq 1-\frac{D(X)}{2100^2}=1-\frac{700^2}{2100^2}=\frac{8}{9}.$$

即每一毫升血液中含白细胞数在 5200 至 9400 之间的概率不低于 $\frac{8}{9}$.   ♣