2019-2020 概率 A 试卷参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 0.44； 2. $\frac{2}{3}$； 3. $\frac{(\mathrm{e}-1)^2}{e^2}$； 4. 0.8； 5. $\Phi(1)$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. D； 2. D； 3. B； 4. C； 5. A.

三、（10 分）解 （1）设 A_i 表示"报名表来自第 i 个地区"，$i=1,2,3$，B 表示"抽到的一份是男生表"．由题意知 $P(A_i)=\frac{1}{3}$，$i=1,2,3$.

根据全概率公式得 $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)=\frac{4}{10}\times\frac{1}{3}+\frac{8}{20}\times\frac{1}{3}+\frac{10}{30}\times\frac{1}{3}=\frac{17}{45}$.

（2） $P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{8/60}{17/45}=\frac{6}{17}$.

四、（12 分）解（1）由题意 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-1}^{1}kx^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}k=1$，解得 $k=\frac{3}{2}$；

所以
$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2, & -1<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（2） $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$.

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $0\le y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x=3\int_0^{\sqrt{y}}x^2\mathrm{d}x=y^{\frac{3}{2}},$$

故
$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y^{\frac{3}{2}}, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$$

所以
$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}\sqrt{y}, & 0<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

五、（14 分）解（1）由 $E(XY)=\frac{5}{9}$，得 $P\{X=1,Y=1\}=\frac{5}{9}$，并由

$$P\{X=0\}=\frac{1}{3},P\{X=1\}=\frac{2}{3},P\{Y=0\}=\frac{1}{3},P\{Y=1\}=\frac{2}{3},$$

由此计算得 (X,Y) 的分布律为

Y \ X	0	1
0	2/9	1/9
1	1/9	5/9

（2）$P\{X+Y\le 1\big|X-Y=0\}=\dfrac{P\{X+Y\le 1, X-Y=0\}}{P\{X-Y=0\}}$

$$=\frac{P\{X=0,Y=0\}}{P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}+\frac{5}{9}}=\frac{2}{7}.$$

（3）
$$Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix}.$$

六、（14分）解（1）$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}2, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（2）(X,Y) 关于 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 2dx, & 0<y<1,,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

（3）$P\{Y>2X\}=\iint\limits_{y>2x}f(x,y)\,dxdy=\dfrac{1}{2}.$

七、（14分）解（1）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=\int_0^{+\infty}x\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=-\int_0^{+\infty}\theta e^{-\frac{\theta}{x}}d\dfrac{\theta}{x}=\theta$，

令 $EX=\overline{X}$，得 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}_M=\overline{X}$.

（2）似然函数为 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}})=\theta^{2n}\cdot(\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^3})\cdot e^{-\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$，

$\ln L=2n\ln\theta+\ln(\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^3})-\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}$，令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{2n}{\theta}-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}=0$，解得 $\theta=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$，从而 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}_L=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$.

八、（6分）解　（1）由于 $ET=E(\overline{X}-S^2)=E(\overline{X})-E(S^2)=EX-DX=0-1=-1$；

（2）由于 $(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，且 $\overline{X}$ 与 S^2 独立，所以

$$DT=D(\overline{X}-S^2)=D(\overline{X})+D(S^2)=\frac{DX}{n}+\frac{2}{n-1}=\frac{1}{n}+\frac{2}{n-1}=\frac{3n-1}{n(n-1)}.$$