# 习题(30)

**30.1** 从总体 $X \sim N(12, 4)$ 中抽取容量为 5 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_5$，求：

1）样本均值 $\overline{X}$ 大于 13 的概率；

2）样本极小值小于 10 的概率；

3）样本极大值大于 15 的概率.

**30.2** 查 $\alpha-$ 分位数：$u_{0.10}$，$\chi^2_{0.01}(20)$，$t_{0.025}(16)$，$F_{0.99}(10,15)$，$F_{0.05}(5,9)$.

**30.3** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为 $N(0, 0.3^2)$ 的一个样本, 试求常数 $C$，使得 $P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \le C\} = 0.95$.

**30.4** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_6$ 是取自总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的样本, 则统计量

$$\frac{(X_1+X_2+X_3)^2}{(X_4-X_5-X_6)^2} \sim \underline{\qquad\qquad}.$$

# 习题(30)参考解答

**30.1 解：** 已知总体 $X \sim N(12, 4)$，则

$$u \triangleq \frac{X-12}{2} \sim N(0,1),\quad \overline{X} \sim N(12, \frac{4}{5}) \Rightarrow \frac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{5}} \sim N(0,1).$$

1） $P(\overline{X} > 13) = P(\frac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{5}} > \frac{13-12}{2/\sqrt{5}}) = 1-\Phi(\frac{\sqrt{5}}{2}) \approx 1-\Phi(1.12) = 0.1314$.（查表得）

2） $P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_5\} < 10\}$

$= 1 - P\{\min\{X_1, X_2, \cdots, X_5\} \ge 10\} = 1 - P\{X_1 \ge 10, X_2 \ge 10, \cdots, X_5 \ge 10\}$

$= 1 - \prod_{i=1}^{5} P\{X_i \ge 10\}$ （用到独立性）

$= 1 - \prod_{i=1}^{5} [1 - P\{X_i < 10\}] = 1 - [1 - P\{X_1 < 10\}]^5$ （用到同分布）

$= 1 - [1 - P\{\frac{X_1-12}{2} < \frac{10-12}{2}\}]^5 = 1 - [1 - P\{u < -1\}]^5$

$= 1 - [1-\Phi(-1)]^5 = 1 - [\Phi(1)]^5$ （查表得:）

$$=1-0.8413^5=1-0.4215=0.5785.$$

3) $P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_5\}>15\}=1-P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_5\}\le 15\}$

$$=1-P\{X_1\le 15,X_2\le 15,\cdots,X_5\le 15\}$$

$$=1-\prod_{i=1}^{5}P\{X_i\le 15\}=1-[P\{X_1\le 15\}]^5$$

$$=1-[P\{\frac{X_1-12}{2}\le\frac{15-12}{2}\}]^5=1-[P\{u\le 1.5\}]^5$$

$$=1-[\Phi(1.5)]^5$$ （查表得:）

$$=1-0.9332^5=0.2923\cdot$$ ♣

**30.2 解:** 查表得:

$u_{0.10}=-u_{0.90}=-1.282$， $\chi^2_{0.01}(20)=8.260$, $t_{0.025}(16)=-t_{0.975}(16)=-2.120$,

$F_{0.99}(10,15)=3.80$, $F_{0.05}(5,9)=\dfrac{1}{F_{0.95}(9,5)}=\dfrac{1}{4.77}$. ♣

**30.3 解:** 由 $X_i\sim N(0,0.3^2)$, $i=1,2,\cdots,10$, 且相互独立, 则

$$\frac{X_i}{0.3}\sim N(0,1),\ i=1,2,\cdots,10,$$

且相互独立, 则

$$Y\triangleq\sum_{i=1}^{10}(\frac{X_i}{0.3})^2\sim\chi^2(10)$$

$$0.95=P\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2\le C\}=P\{Y\le\frac{C}{0.3^2}\}$$

$$\frac{C}{0.3^2}=\chi^2_{0.95}(10)=18.307\qquad C=1.64763.$$ ♣

**30.4 解:** 由

$$X_1+X_2+X_3\sim N(0,3\sigma^2),\quad X_4-X_5-X_6\sim N(0,3\sigma^2)$$

$$\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\sim N(0,1),\quad \frac{X_4-X_5-X_6}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\sim N(0,1),$$

且相互独立. 由 $F-$分布的定义知

$$\frac{\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\right)^2/1}{\left(\frac{X_4-X_5-X_6}{\sqrt{3}\cdot\sigma}\right)^2/1} \sim F(1,1) \qquad \frac{(X_1+X_2+X_3)^2}{(X_4-X_5-X_6)^2} \sim F(1,1).$$

所以答案应为 $F(1,1)$ . ♣