数 字 逻 辑

丁 贤 庆

ahhfdxq@163.com

Home work（P74）

- 2.1.3 (1) (3)
- 2.2.1 (2) (3)
- 2.2.3 (2) (3)
- 2.2.7 (2)

3. 溢出(在设计运算器时，会遇到运算出错的情况，例如：溢出)

在设计运算器时，通常会设计一个状态寄存器**PSW**，通过状态寄存器**PSW**中的溢出位的值是**0**还是**1**，来推测运算是否出错。

例1.3.8 在4位系统里，试用4位二进制补码计算5+7。

解：因为$(5+7)_{补}=(5)_{补}+(7)_{补}$

=0101+0111

=1100

$$
\begin{array}{r}
0\ 1\ 0\ 1 \\
+\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
\hline
[1]\ 1\ 0\ 0
\end{array}
$$

解决溢出的办法：进行硬件位扩展。如果硬件不能进行扩展，就需要在状态寄存器里将溢出状态位标为**1**。

4. 溢出情况的判别（两加数符号相同，与和的符号不同）

如何判断是否产生溢出？

$$\begin{array}{rr} & +4 \\ +) & +3 \\ \hline & +7 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline [0] & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & -5 \\ +) & -3 \\ \hline & -8 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & +2 \\ +) & +6 \\ \hline & +8 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ + & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline [0] & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & -3 \\ +) & -6 \\ \hline & -9 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ + & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline [1] & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

判断溢出的方法：　如果两个加数的符号相同，而和的符号与它们不同，则运算结果是错误的，产生了溢出。

单选题 2分

设置

在6位的系统里，采用补码运算式如下右图所示，请问该补码运算对应的等式是：

A -6+7=1

B -6-7=-13

C 2+1=3

D -2-1=-3

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
+ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

提交

上题的解答：

在6位的系统里，采用补码运算式如下右图所示，
请问该补码运算对应的等式是：

解：因为$(-6-7)_{补}=(-6)_{补}+(-7)_{补}$

=111010+111001

=[1] 110011

=$(-13)_{补}$

```
      1  1  1  0  1  0      (-6)补
  +   1  1  1  0  0  1      (-7)补
 [1]  1  1  0  0  1  1      (-13)补
```

此处结果的符号，与两个加数的符号位都相同，同为**1**，所以不存在溢出出错的情况，也就是正常的补码运算。

1.6.2 逻辑函数表示方法之间的转换

逻辑函数的真值表、逻辑函数表达式、逻辑图、波形图、卡诺图及HDL描述之间可以相互转换。这里介绍两种转换。

1.真值表到逻辑图的转换

真值表如右表。

转换步骤：

(1)根据真值表写出逻辑表达式

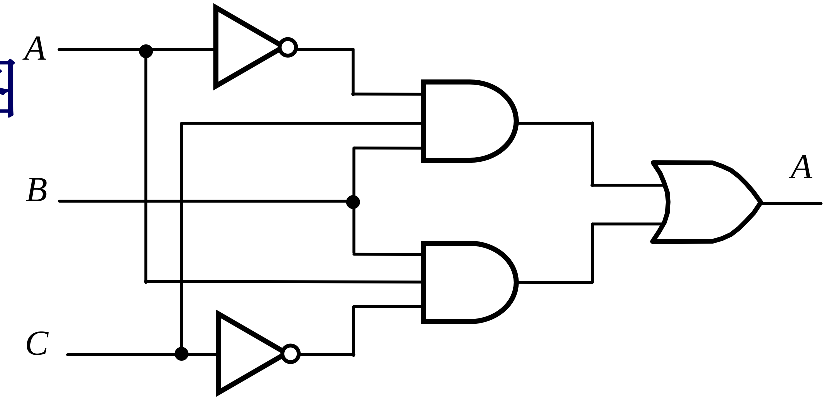
$$L = \overline{A}BC + AB\overline{C}$$

(2)化简逻辑表达式（第2章介绍）

上式不需要简化

A	*B*	*C*	*L*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

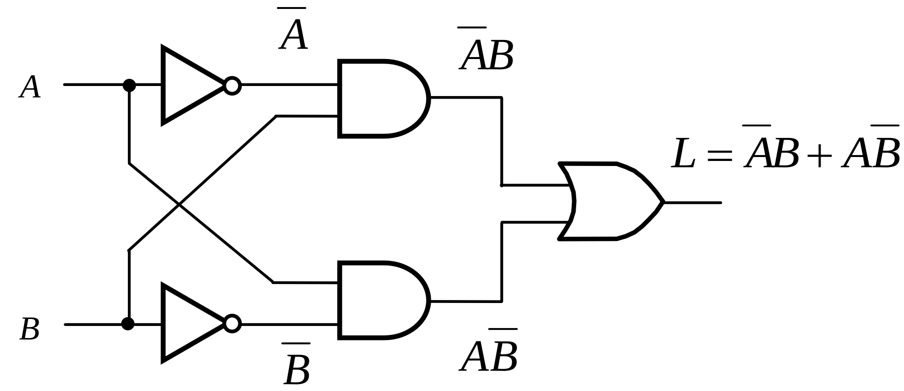
(3)根据与或逻辑表达式画逻辑图



$$L = \overline{A}BC + AB\overline{C}$$

用与、或、非符号代替相应的逻辑符号，注意运算次序。

2. 逻辑图到真值表的转换



转换步骤：

(1)根据逻辑图逐级写出表达式

(2)化简变换求最简与或式

(3)将输入变量的所有取值逐一代入表达式得真值表

A	B	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

第 二 章

逻辑代数与硬件描述语言基础

2.1　逻辑代数的基本定理和规则

2.1.1　逻辑代数的基本定律和恒等式

2.1.2　逻辑代数的基本规则

2.1.1 逻辑代数的基本定律和恒等式

1、基本公式

0、1律：$A + 0 = A$ $\quad A + 1 = 1$ $\quad A \cdot 1 = A$ $\quad A \cdot 0 = 0$

互补律：$A + \overline{A} = 1$ $\quad \overline{A} \cdot A = 0$

交换律：$A + B = B + A$ $\quad A \cdot B = B \cdot A$

结合律：$A + B + C = (A + B) + C$ $\quad A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$

分配律：$A(B + C) = AB + AC$ $\quad A + BC = (A + B)(A + C)$

重叠律： $A+A=A$ $A\cdot A=A$

反演律(摩根定理)： $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

吸收律 $A+A\cdot B=A$ $A\cdot(A+B)=A$

$A+\overline{A}\cdot B=A+B$ $(A+B)\cdot(A+C)=A+BC$

其它常用恒等式

$$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

$$AB+\overline{A}C+BCD=AB+\overline{A}C$$

2、基本公式的证明 （真值表证明法）

例 证明： $A+\overline{A}\cdot B=A+B$

列出等式、右边的函数值的真值表

A B	$\overline{A}$	$\overline{A}\cdot B$	$A+\overline{A}B$	A+B
0 0	1	0	0+0=0	0
0 1	1	1	0+1=1	1
1 0	0	0	1+0=1	1
1 1	0	0	1+0=1	1

例：试化简下列逻辑函数$L=(A+B)(\overline{A}+B)$

$$L=A\overline{A}+AB+B\overline{A}+BB(\text{分配律})$$

$$=0+AB+B\overline{A}+B \quad (A\cdot\overline{A}=0,\ A\cdot A=A)$$

$$=AB+B\overline{A}+B \quad (A+0=A)$$

$$=B(A+\overline{A}+1) \quad [AB+AC=A(B+C)]$$

$$=B\cdot 1=B \quad (A+1=A,\ \ A\cdot 1=A)$$

2.1.2 逻辑代数的基本规则

1. 代入规则：在包含变量A逻辑等式中，如果用另一个函数式代入式中所有A的位置，则等式仍然成立。这一规则称为代入规则。

例：$B(A+C)=BA+BC$，

用$A+D$代替A，得

$$B[(A+D)+C]=B(A+D)+BC=BA+BD+BC$$

代入规则可以扩展所有基本公式或定律的应用范围

2. 反演规则：

对于任意一个逻辑表达式L，若将其中所有的与（•）换成或（+），或（+）换成与（•）；原变量换为反变量，反变量换为原变量；将1换成0，0换成1；则得到的结果就是原函数的反函数 $\overline{L}$ 。

- **Swapping + and ·** (与或交换)
- **Complementing all variables** (变量取反)
- 遵循原来的运算优先（**Priority**）次序
- 不属于单个变量上的反号应保留不变，即多个变量上的反号保留不变。

例2.1.1 试求 $L = \overline{A}\overline{B} + CD + 0$ 的非函数

解：按照反演规则，得

$$\overline{L} = (A + B)\cdot(\overline{C} + \overline{D})\cdot 1 = (A + B)(\overline{C} + \overline{D})$$

Complement Rules (反演规则)

Example 1： **Write the Complement function for each of the following logic functions.（写出下面函数的反函数）**

$$F1 = A \cdot (B + C) + C \cdot D$$

$$\overline{F1} = ?$$

$$= (\bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{C}) \cdot (\bar{C} + \bar{D})$$

$$F2 = \overline{A \cdot B} + C \cdot D \cdot \overline{E}$$

$$\overline{F2} = ?$$

$$= \overline{(\bar{A} + \bar{B})} \cdot (\bar{C} + \bar{D} + E)$$

$$= A \cdot B \cdot (\bar{C} + \bar{D} + E)$$

3. 对偶规则：

对于任何逻辑函数式，若将其中的与（•）换成或（+），或（+）换成与（•）；并将1换成0，0换成1；那么，所得的新的函数式就是L的对偶式，记作 L' 。

- 对偶规则

$\cdot \Leftrightarrow +$ 　　　$0 \Leftrightarrow 1$ 　　所有变量不变，所有运算符变化

变换时不能破坏原来的运算顺序（优先级）。也就是说，为了保持运算的先后顺序不变，需要增加括号。

例: 逻辑函数 $L=(A+\overline{B})(A+C)$ 的对偶式为

$$L' = A\overline{B} + AC$$

- 对偶原理 (Principle of Duality)

若两逻辑式相等，则它们的对偶式也相等.

4. 香农展开定理:

任何一个逻辑函数都可以重新表示为

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \overline{x_i} \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) + x_i \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

例:利用香农展开定理将3变量函数变为2变量函数，将变量*A*分解出来。 $L(A,B,C) = AB+BC+AC$

$$\begin{aligned} L(A,B,C) &= \overline{A}\cdot L(0,B,C)+ A\cdot L(1,B,C) \\ &= \overline{A}\cdot(0\cdot B+BC+0\cdot B)+ A\cdot(1\cdot B+BC+1\cdot C) \\ &= \overline{A}\cdot(BC)+ A\cdot(B+C) \\ &= \overline{A}\cdot L_0+ A\cdot L_1 \end{aligned}$$

式中，$L_0=BC$，$L_1=B+C$

$$AB+BC+AC = \overline{A}\cdot(BC)+ A\cdot(B+C)$$

可以减少函数自变量的数目，降低函数的复杂度。

2.2 逻辑函数表达式的形式

2.2.1 逻辑函数表达式的形式

2.2.2 最小项与最小项表达式

2.2.3 最大项与最大项表达式

2.2 逻辑函数表达式的形式

2.2.1 逻辑函数表达式的基本形式

1、与-或表达式

若干与项进行或逻辑运算构成的表达式。由与运算符和或运算符连接起来。

$$L = A\cdot C + \overline{C}\cdot D$$

2、或-与表达式

若干或项进行与逻辑运算构成的表达式。由或运算符和与运算符连接起来。

$$L = (A+C)\cdot(B+\overline{C})\cdot D$$

通常表达式为混合形式

$$L = A\cdot(B\cdot C+\overline{B}\cdot\overline{C}) + A\cdot(B\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot C)$$

经过变换可转换为上述两种基本形式

2.2 .2 最小项与最小项表达式

1. 最小项的定义和性质

n个变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$的最小项是n个因子的乘积，每个变量都以它的原变量或非变量的形式在乘积项中出现，且仅出现一次。一般n个变量的最小项应有2^n个。

例如，A、B、C三个逻辑变量的最小项有（2^3＝）8个，即

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$、$\bar{A}\bar{B}C$、$\bar{A}B\bar{C}$、$\bar{A}BC$、$A\bar{B}\bar{C}$、$A\bar{B}C$、$AB\bar{C}$、ABC

$\bar{A}B$、$A\bar{B}C\bar{A}$、$A(B+C)$ 等则不是最小项。

2、最小项的性质　　三个变量的所有最小项的真值表

A	B	C	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

- 对于任意一个最小项，只有一组变量取值使得它的值为1；
- 任意两个最小项的乘积为0；
- 全体最小项之和为1。

***m*: minterm**

3、最小项的编号

$m_0=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$　$m_1=\overline{A}\,\overline{B}C$　$m_2=\overline{A}B\overline{C}$　$m_3=\overline{A}BC$

$m_4=A\overline{B}\,\overline{C}$　$m_5=A\overline{B}C$　$m_6=AB\overline{C}$　$m_7=ABC$

三个变量的所有最小项的真值表

			m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
A	B	C	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

最小项的表示：通常用m_i表示最小项，m 表示**minterm**, 下标i为最小项号。 **反变量→ 0 原变量→ 1，就形成下标i的值。**

2. 最小项表达式

由若干最小项相或构成的表达式，也称为标准与-或式。

- 为“与或”逻辑表达式；
- 在“与或”式中的每个乘积项都是最小项。

例1 将 $L(A,B,C)=AB+\overline{A}C$ 化成最小项表达式

$$L(A,B,C)=AB(C+\overline{C})+\overline{A}(B+\overline{B})C$$
$$=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}\overline{B}C$$
$$=m_7+m_6+m_3+m_1$$
$$=\sum m(7,6,3,1)$$

例2 将 $L(A,B,C)=\overline{(AB+\bar{A}\bar{B}+\bar{C})\overline{AB}}$ 化成最小项表达式

a.去掉非号 $L(A,B,C)=\overline{(AB+\bar{A}\bar{B}+\bar{C})}+AB$

$$=(\overline{AB}\cdot\overline{\bar{A}\bar{B}}\cdot C)+AB$$

$$=(\bar{A}+\bar{B})(A+B)C+AB$$

b.去括号

$$=\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB$$

$$=\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB(C+\bar{C})$$

$$=\bar{A}BC+A\bar{B}C+ABC+AB\bar{C}$$

$$=m_3+m_5+m_7+m_6=\sum m(3,5,6,7)$$

单选题 2分

设置

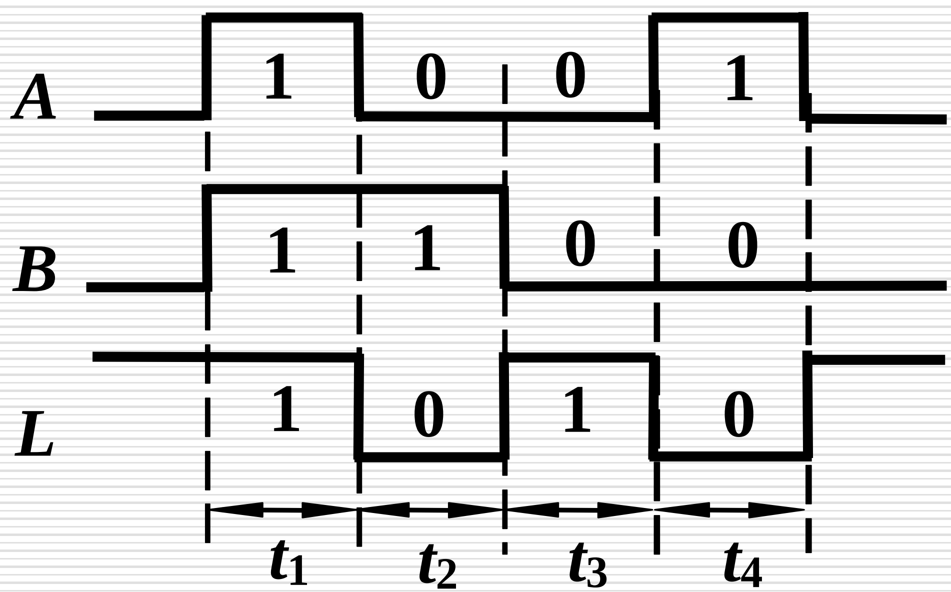
已知一个逻辑电路的波形图如下图所示，请问该图形对应的逻辑关系式正确的为（　　）

A $L = \overline{A \cdot B}$

B $L = A \cdot B$

C $L = A \oplus B$

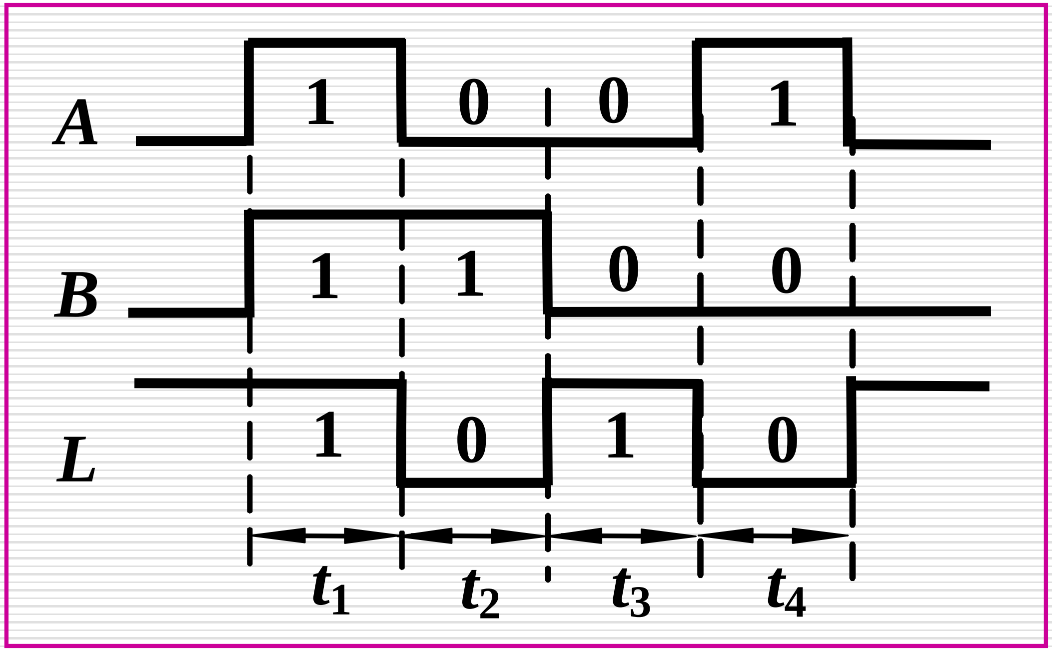
D $L = \overline{A}\,\overline{B} + AB$



提交

上页题目的解法

根据波形图，写出真值表。根据真值表，写出表达式。

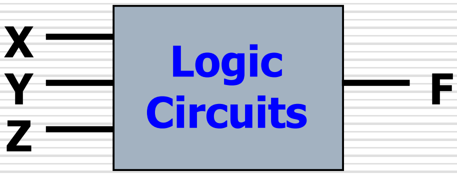


真值表

A	B	L
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Switching Algebra 逻辑代数

➢ Standard Representations of Logic Functions



How to obtian the logic expression from True Table?

Canonical Sum (标准和) :
A sum of the minterms corresponding to truth-table rows (input combinations) for which the function produces a 1 output.

$$F = \bar{X}\cdot\bar{Y}\cdot\bar{Z} + \bar{X}\cdot Y\cdot Z + X\cdot\bar{Y}\cdot\bar{Z} + X\cdot Y\cdot\bar{Z} + X\cdot Y\cdot Z$$

$$= \sum_{X,Y,Z}(0, 3, 4, 6, 7)$$

True Table

Row	X	Y	Z	F	*Minterm*
0	0	0	0	1	$\bar{X}\cdot\bar{Y}\cdot\bar{Z}$
1	0	0	1	0	$\bar{X}\cdot\bar{Y}\cdot Z$
2	0	1	0	0	$\bar{X}\cdot Y\cdot\bar{Z}$
3	0	1	1	1	$\bar{X}\cdot Y\cdot Z$
4	1	0	0	1	$X\cdot\bar{Y}\cdot\bar{Z}$
5	1	0	1	0	$X\cdot\bar{Y}\cdot Z$
6	1	1	0	1	$X\cdot Y\cdot\bar{Z}$
7	1	1	1	1	$X\cdot Y\cdot Z$

1 →原变量　　0 →反变量

2.2.2 最大项与最大项表达式

1. 最大项的定义和性质

n个变量$X_{1},X_{2},\ldots,X_{n}$的最大项是n个因子或运算，每个变量都以它的原变量或非变量的形式在或项中出现，且仅出现一次。一般n个变量的最大项应有2^n个。

例如，*A*、*B*、*C*三个逻辑变量的最大项有（2^3＝）8个，即

$$(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})、(\bar{A}+\bar{B}+C)、(\bar{A}+B+\bar{C})、(\bar{A}+B+C)、$$

$$(A+\bar{B}+\bar{C})、(A+\bar{B}+C)、(A+B+\bar{C})、(A+B+C)$$

1. 最大项的定义和性质

最大项的表示：通常用M_j表示最大项，M 表示**maxterm**, 下标j为最大项号。 **原变量→ 0，反变量 →1，就形成下标j的值。**

最大项的性质：

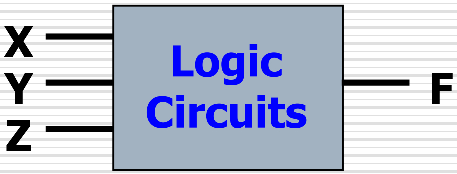
- 对于任意一个最大项，只有一组变量取值使得它的值为0；
- The sum of any two different maxterms is 1
  （ 任意两个不同最大项的和为1 ）
- Product of all maxterms is 0
  （ 全体最大项之积为0 ）

2. 最小项和最大项的关系

两者之间为互补关系： $m_i = \overline{M_i}$ ，或者$M_i = \overline{m_i}$

Switching Algebra 逻辑代数

➢ Standard Representations of Logic Functions



F is either 0 or 1

How to define the Maxterms (最大项)?

A **Maxterm** can be defined as **a sum term** that is **0** in exactly one row （行）.

Why?

Easy to get the product-of-sums

0 →原变量　　1 →反变量

Row	X	Y	Z	Maxterm
0	0	0	0	$X+Y+Z$
1	0	0	1	$X+Y+\bar{Z}$
2	0	1	0	$X+\bar{Y}+Z$
3	0	1	1	$X+\bar{Y}+\bar{Z}$
4	1	0	0	$\bar{X}+Y+Z$
5	1	0	1	$\bar{X}+Y+\bar{Z}$
6	1	1	0	$\bar{X}+\bar{Y}+Z$
7	1	1	1	$\bar{X}+\bar{Y}+\bar{Z}$

0 →原变量　　1 →反变量

例：逻辑电路的真值表如右，写出最小项和最大项表达式。

$L=\overline{A}BC$ 将A=0, B=1, C=1代入左式，⇨ L=1

将L＝1的各个最小项相加，只要其中的一项为1，则必有L=1成立。

所以：L等于所有能使L=1的最小项的加运算。

最小项表达式：

将L＝1的各个最小项相加

$$L(A,B,C)=m_3+m_5+m_6$$

$$=\sum m(3,5,6)$$

$$=\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$$

A	B	C	L	
0	0	0	0	M_0
0	0	1	0	M_1
0	1	0	0	M_2
0	1	1	1	$\rightarrow m_3$
1	0	0	0	M_4
1	0	1	1	$\rightarrow m_5$
1	1	0	1	$\rightarrow m_6$
1	1	1	0	M_7

根据真值表中L=1的情况，可以写出最小项的表达式。

例：逻辑电路的真值表如右，写出最小项和最大项表达式。

L=A+B+C 将A=0, B=0, C=0代入左式，⇨ L=0

将$L=0$的各个最大项相乘，只要其中的一项为0，则必有L=0成立。

所以：L等于所有能使L=0的最大项的乘积。

最大项表达式：

将$L=0$的各个最大项相乘

A	B	C	L	
0	0	0	0	M_0
0	0	1	0	M_1
0	1	0	0	M_2
0	1	1	1	$\rightarrow m_3$
1	0	0	0	M_4
1	0	1	1	$\rightarrow m_5$
1	1	0	1	$\rightarrow m_6$
1	1	1	0	M_7

$$L(A,B,C)=M_0\cdot M_1\cdot M_2\cdot M_4\cdot M_7$$

$$=\prod M(0,1,2,4,7)$$

$$=(A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

根据真值表中L=0的情况，可以写出最大项的表达式。

Switching Algebra 逻辑代数

➢ Standard Representations of Logic Functions

Relationship of Minterm and Maxterm

$\overline{m_i} = M_i$

$\overline{M_i} = m_i$

Row	A B C	F
0	0 0 0	0
1	0 0 1	0
2	0 1 0	0
3	0 1 1	1
4	1 0 0	0
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	0

$F = \sum_{A,B,C}(3, 5, 6)$

标号互缺

$F = \prod_{A,B,C}(0, 1, 2, 4, 7)$

$\overline{\bar{A} \cdot B \cdot C} = A + \bar{B} + \bar{C}$

$\overline{A \cdot \bar{B} \cdot C} = \bar{A} + B + \bar{C}$

$\overline{A \cdot B \cdot \bar{C}} = \bar{A} + \bar{B} + C$

根据F=1的情况写出：

$F = m3+m5+m6$

根据 $\overline{F}$ =1的情况写出：

$\overline{F} = m0+m1+m2+m4+m7$

上式两边同时取反，得：

$F = M0*M1*M2*M4*M7$

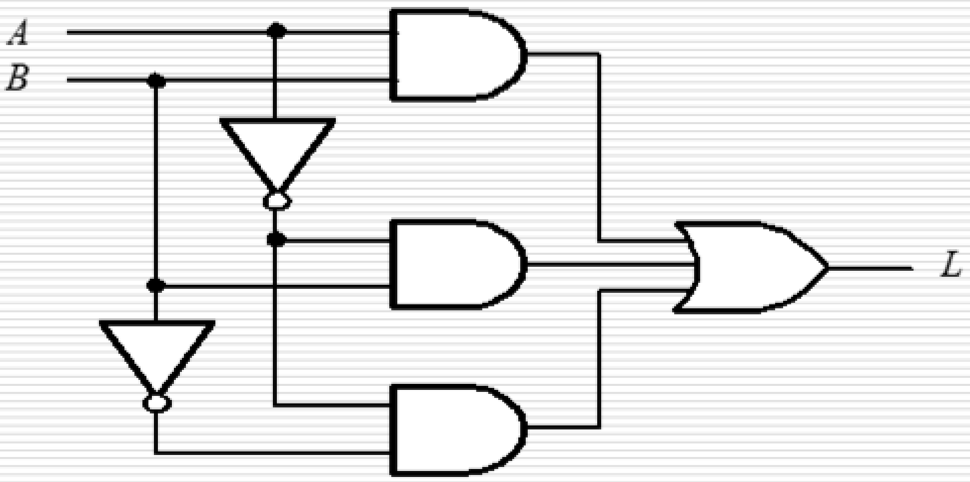
2.3 逻辑函数的代数化简法

2.3.1 逻辑函数的最简形式

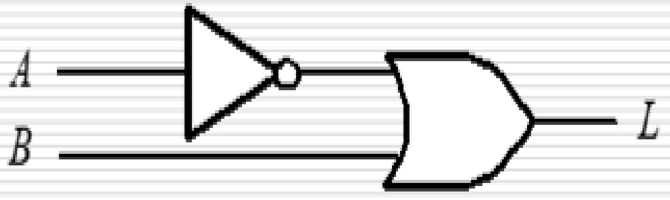
2.3.2 逻辑函数的代数化简法

2.3 逻辑函数的代数法化简

化简的目的：降低电路实现的成本，以较少的门实现电路。



（a）标准积之和的电路



（b）成本最低的电路

图（a）和图（b）的电路逻辑功能相同，但图 （b）电路简单可靠性高，成本低。

2.3.1 逻辑函数的最简形式

逻辑函数有不同形式，如与-或表达式、与非-与非表达式、或-与表达式、或非-或非表达式以及与-或-非表达式等。

将其中包含的与项数最少，且每个与项中变量数最少的与-或表达式称为最简与-或表达式。

$$L = AC + \bar{C}D$$ “与-或” 表达式

$$= \overline{\overline{AC} \cdot \overline{\bar{C}D}}$$ “与非-与非” 表达式

$$= (A+\bar{C})(C+D)$$ “或-与” 表达式

$$= \overline{\overline{(A+\bar{C})} + \overline{(C+D)}}$$ “或非—或非” 表达式

$$= \overline{\bar{A}C + \bar{C}\bar{D}}$$ “与-或-非” 表达式