习题(24)

24.1 设随机变量 X 在区间[-1,2]上服从均匀分布;随机变量 $Y=\begin{cases}1 & ,\text{若}X>0\\ 0 & ,\text{若}X=0\\ -1 & ,\text{若}X<0\end{cases}$,试求方差 $D(Y)$.

24.2 设一次试验成功的概率为 p,进行 100 次独立重复试验,当 p 为何值时,成功次数的标准差最大? 并计算最大值.

24.3 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p\ (0<p<1)$,各产品合格与否相互独立,当出现一个不合格产品时即停机检修.开机后第一次停机时所生产的产品个数记为 X.试求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

24.4 设随机变量 X 服从 $\Gamma(r,\lambda)$ 分布,其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\cdot x^{r-1}e^{-\lambda x} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x\le 0\end{cases}$$

其中 $r>0$,$\lambda>0$ 为常数,试求: $E(X)$,$D(X)$ 和 $E(X^3)$.

习题(24)参考解答

24.1 解: 由

$$E(Y)=1\cdot P\{Y=1\}+(-1)\cdot P\{Y=-1\}=P\{X>0\}-P\{X<0\}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

$$E(Y^2)=1^2\cdot P\{Y=1\}+(-1)^2\cdot P\{Y=-1\}=P\{Y=1\}+P\{Y=-1\}$$

$$=P\{X>0\}+P\{X<0\}=1,$$

则 $$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=1-(\frac{1}{3})^2=\frac{8}{9}.$$ ♣

24.2 解: 以 X 表示成功次数,则 $X\sim b(100,p)$,X 的标准差为

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{100p(1-p)}\ .$$

由于函数 $p(1-p)$ 的最大值点在 $p=0.5$ 处,则当 $p=0.5$ 时, $\sqrt{D(X)}$ 达最大,且最大值为

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{100\times0.5(1-0.5)}=5\ .$$ ♣

24.3 解: 由题意知, X 服从几何分布,即

$$P\{X=k\}=p\cdot(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\cdots.$$

则

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p(1-p)^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)+1]\cdot p(1-p)^{k-1}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\cdot p(1-p)^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\ p(1-p)^{k-1}$$

$$=(1-p)\sum_{l=1}^{\infty}l\cdot p(1-p)^{l-1}+1$$

$$=(1-p)\cdot E(X)+1$$

$$E(X)=\frac{1}{p}\ .$$

同理 $E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot p(1-p)^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)+1]^2\cdot p(1-p)^{k-1}$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)^2\cdot p(1-p)^{k-1}+2\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\cdot p(1-p)^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}$$

$$=(1-p)\cdot\sum_{l=1}^{\infty}l^2\cdot p(1-p)^{l-1}+2(1-p)\cdot E(X)+1$$

$$=(1-p)\cdot E(X^2)+\frac{2(1-p)}{p}+1\ \Rightarrow\ E(X^2)=\frac{2-p}{p^2}\ .$$

则

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-(\frac{1}{p})^2=\frac{1-p}{p^2}\ .$$ ♣

24.4 解: $E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\cdot x^{r-1}e^{-\lambda x}dx$ (令 $t=\lambda x$,得:)

$$= \frac{1}{\lambda \cdot \Gamma(r)} \cdot \int_0^{+\infty} t^{r+1-1} e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda \cdot \Gamma(r)} \cdot \Gamma(r+1) = \frac{r}{\lambda};$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \cdot x^{r-1} e^{-\lambda x} dx$$ (令 $t = \lambda x$,得:)

$$= \frac{1}{\lambda^2 \cdot \Gamma(r)} \cdot \int_0^{+\infty} t^{r+2-1} e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda^2 \cdot \Gamma(r)} \cdot \Gamma(r+2) = \frac{(r+1)r}{\lambda^2}.$$

则

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(r+1)r}{\lambda^2} - (\frac{r}{\lambda})^2 = \frac{r}{\lambda^2}.$$ ♣