习题(10)

10.1 某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件,其寿命(单位:小时)都服从同一指数分布,密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{600}\cdot e^{-\frac{x}{600}} & , \ x>0\\ \quad 0 & , \ x\le 0\end{cases}$$

试求:在仪器使用的最初200小时内,至少有一只电子元件损坏的概率.

10.2 设随机变量 X 具有对称的密度函数 $f(x)$,即 $f(-x)=f(x)$,$F(x)$ 为分布函数.对于任意的 $a>0$,求证:

1) $F(-a)=1-F(a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a f(x)\,dx$;

2) $P\{|X|<a\}=2\cdot F(a)-1$;

3) $P\{|X|>a\}=2[1-F(a)]$.

10.3 若随机变量 X 的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}A\cdot x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{b}} & , \ x>0\\ 0 & , \ x\le 0\end{cases},$$

其中 $b>0$ 已知,试确定常数 A.

10.4 设随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}kx & , \ 0\le x<3\\ 2-\dfrac{x}{2} & , \ 3\le x\le 4\\ \ 0 & , \quad \text{其他}\end{cases}$,试回答如下问题:

1) 确定系数 k 的值,并画出密度函数 $f(x)$ 的图形;

2) 求 X 的分布函数 $F(x)$,并画出 $F(x)$ 的图形;

3) 计算 $P\{2<X<\dfrac{7}{2}\}$.

习题(10)参考解答

10.1 解: 设一个电子元件的寿命为 X,则

$$p=P\{X<200\}=\int_{-\infty}^{200} f(x)\,dx=\int_{0}^{200}\frac{1}{600}\cdot e^{-\frac{x}{600}}\,dx=1-e^{-\frac{1}{3}}.$$

以Y表示三只电子元件在使用的最初200小时内,损坏的只数,有$Y\sim b(3,p)$.则所求概率为

$$P\{Y\geq 1\}=1-P\{Y=0\}=1-\binom{3}{0}\times p^{0}\times(1-p)^{3}=1-(1-p)^{3}=1-e^{-1}.\qquad ♣$$

10.2 证: 1) $F(-a)=\int_{-\infty}^{-a} f(x)\,dx=\int_{+\infty}^{a} f(-t)\cdot(-1)dt=\int_{a}^{+\infty} f(t)\,dt=1-\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt=1-F(a)$.

又由 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx=\frac{1}{2}$,则

$$F(-a)=1-F(a)=1-\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx=1-\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx-\int_{0}^{a} f(x)\,dx=\frac{1}{2}-\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

2) $P\{|X|<a\}=P\{-a<X<a\}=P\{-a<X\leq a\}=F(a)-F(-a)=2\cdot F(a)-1$.

3) $P\{|X|>a\}=P\{X<-a\}+P\{X>a\}=P\{X\leq -a\}+(1-P\{X\leq a\})$

$$=F(-a)+[1-F(a)]=2[1-F(a)].\qquad ♣$$

10.3 解: 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} A\cdot x^{2}e^{-x^{2}/b}dx=A\cdot b^{\frac{3}{2}}\int_{0}^{+\infty} t^{2}e^{-t^{2}}dt$ (令$t=\frac{x}{\sqrt{b}}$得), 而

$$\int_{0}^{+\infty} t^{2}e^{-t^{2}}dt=-\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} t\cdot e^{-t^{2}}d(-t^{2})=-\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} t\,d(e^{-t^{2}})$$

$$=-\frac{1}{2}t\cdot e^{-t^{2}}\Big|_{0}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-t^{2}}\,dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-t^{2}}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$, (用到 $\int_{0}^{+\infty} e^{-t^{2}}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

$$A\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}=1\qquad A=\frac{4}{b\sqrt{b\pi}}.\qquad ♣$$

10.4 解: 1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{0}^{3} kx\,dx+\int_{3}^{4}(2-\frac{x}{2})\,dx\qquad k=\frac{1}{6}$.

则X的密度函数为(见图1)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{6}, & 0\le x<3\\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x\le 4\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

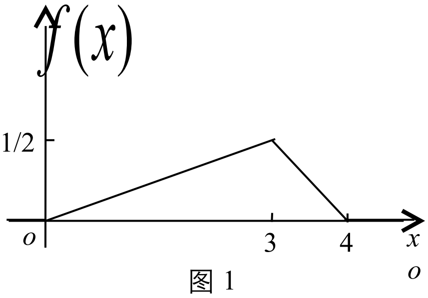

图 1

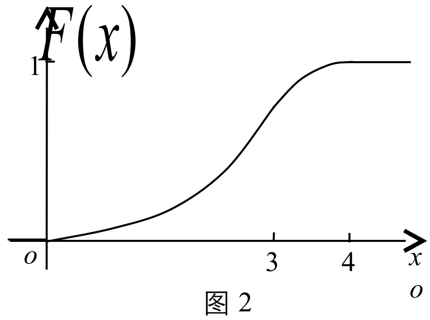

图 2

2) 由 $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，则当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；

当 $0\le x<3$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{0}^{x}\frac{t}{6}dt=\frac{x^2}{12};$$

当 $3\le x\le 4$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{0}^{3}\frac{t}{6}dt+\int_{3}^{x}(2-\frac{t}{2})dt=-\frac{x^2}{4}+2x-3;$$

当 $x>4$ 时，$F(x)=1$.综上所述，得 X 的分布函数(见图 2)为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ \dfrac{x^2}{12} & , \quad 0\le x<3 \\ -\dfrac{x^2}{4}+2x-3 & , \quad 3\le x\le 4 \\ 1 & , \quad x>4 \end{cases}.$$

3) $P\{2<X<\frac{7}{2}\}=F(\frac{7}{2})-F(2)=-\frac{1}{4}\times(\frac{7}{2})^2+2\times\frac{7}{2}-3-\frac{2^2}{12}=\frac{29}{48}$. ♣