习题(28)

28.1 设随机变量序列$\{X_n\}$相互独立且同分布,$E(X_n)=0$,$D(X_n)=\sigma^2$,$n=1,2,\cdots$.试证:

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}X_k^2 \xrightarrow{P} \sigma^2.$$

28.2 (马尔可夫大数定律)设$X_1,X_2,\cdots$为随机变量序列,满足马尔可夫条件:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=0.$$

求证:对于任给定的$\varepsilon>0$,有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-E(X_i))|>\varepsilon\}=0$.

28.3 设各零件的重量都是随机变量,且相互独立有相同分布,其数学期望为 0.5kg,均方差为 0.1kg.问 5000 只零件的总重量超过 2510kg 的概率是多少?

28.4 某电视机厂每月生产 10000 台电视机,但它的显像管车间的正品率为 0.8,为了以 0.997 的概率保证出厂的电视机都装上正品的显像管,该车间每月应生产多少只显像管?

习题(28)参考解答

28.1 证: 令 $Y_n=X_n^2$,$n=1,2,\cdots$.则随机变量序列$\{Y_n\}$相互独立,同分布,且

$$E(Y_n)=\sigma^2,n=1,2,\cdots.$$

由辛钦大数定律知

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}Y_k \xrightarrow{P} \sigma^2,$$

即 $$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}X_k^2 \xrightarrow{P} \sigma^2.$$ ♣

28.2 证: 对于任给定的$\varepsilon>0$,由切比雪夫不等式得

$$P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-E(X_i))|>\varepsilon\}=P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)|>\varepsilon\}$$

$$\le\frac{D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i),$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-E(X_i))|>\varepsilon\}=0.$$ ♣

28.3 解: 以 X_k 表示第 k 只零件的重量,则 $X_1,X_2,\cdots,X_{5000}$ 相互独立、同分布.且

$E(X_k)=0.5$, $D(X_k)=0.1^2$, $k=1,2,\cdots,5000$.

要求: $P\{\sum_{k=1}^{5000}X_k>2510\}$? 由独立同分布的中心极限定理知

$$P\{\frac{\sum_{k=1}^{5000}X_k-5000\times0.5}{\sqrt{5000}\times0.1}\le x\}\approx\Phi(x).$$

则

$$P\{\sum_{k=1}^{5000}X_k>2510\}=P\{\frac{\sum_{k=1}^{5000}X_k-2500}{\sqrt{5000}\times0.1}>\frac{2510-2500}{\sqrt{5000}\times0.1}\}\approx1-\Phi(\frac{2510-2500}{\sqrt{5000}\times0.1})$$

$$=1-\Phi(\frac{10}{5\times\sqrt{2}})=1-\Phi(\sqrt{2})\approx1-0.92=0.08.$$ ♣

28.4 解: 设该车间每月应生产 n 只显像管,令

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{第}k\text{只显像管是正品}\\ 0, & \text{否则}\end{cases},\quad k=1,2,\cdots,n$$

则 $X_k\sim b(1,0.8)$, $k=1,2,\cdots,n$,相互独立,且 $E(X_k)=0.8$, $D(X_k)=0.16$.

由题意知,要确定 n,使得

$$P\{\sum_{k=1}^{n}X_k\ge10000\}=0.997.$$

由独立同分布的中心极限定理,有

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - 0.8n}{\sqrt{0.16n}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1).$$

则

$$P\{\sum_{k=1}^{n} X_k \geq 10000\} = 1 - P\{\sum_{k=1}^{n} X_k < 10000\} = 1 - P\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - 0.8n}{\sqrt{0.16n}} < \frac{10000 - 0.8n}{\sqrt{0.16n}}\}$$

$$\approx 1 - \Phi(\frac{10000 - 0.8n}{\sqrt{0.16n}}) \overset{\text{要求}}{=} 0.997.$$

即 $\Phi(\frac{10000 - 0.8n}{\sqrt{0.16n}}) = 0.003$,查标准正态分布表可知

$$\frac{10000 - 0.8n}{\sqrt{0.16n}} = -2.745 \qquad n \approx 12655.$$

即该车间每月应生产12655只显像管. ♣