习题(38)

38.1 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的样本，$\overline{X}, S^2$ 分别为样本均值、样本方差.给定置信水平 $1-\alpha$，试导出:

1) μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限;

2) σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限.

38.2 从一批某种型号的电子管中抽出 10 只做寿命试验，得样本平均寿命 $\overline{X}=1200$ 小时，样本标准差 $S=45$ 小时.设电子管寿命服从正态分布，给定置信水平为 0.95，求这批电子管的期望寿命的单侧置信下限以及标准差的单侧置信上限.

习题(38)参考解答

38.1 解: 1) 由 $\sqrt{n}\cdot\dfrac{\overline{X}-\mu}{S} \sim t(n-1)$，按枢轴变量法，对于给定的置信水平 $1-\alpha$，取

$$P\left\{\sqrt{n}\cdot\frac{\overline{X}-\mu}{S} \le t_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{1-\alpha}(n-1) \le \mu\right\}=1-\alpha .$$

则 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限为 $\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{1-\alpha}(n-1)$，对应的单侧置信区间为

$$[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{1-\alpha}(n-1),\ +\infty) .$$

2) 由 $\dfrac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，对于给定的置信水平 $1-\alpha$，取

$$P\left\{\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2} \ge \chi^2_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\sigma^2 \le \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}\right\}=1-\alpha .$$

所以，得 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限、单侧置信区间分别为

$$\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)},\quad (0,\ \frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}].$$

♣

38.2 解: 设 X 为电子管的使用寿命，则 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.由 38.1 题(上一题)知期望寿命 μ 的置信

水平为$1-\alpha$的单侧置信下限: $\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{1-\alpha}(n-1)$.

又由 $\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,取

$$P\left\{\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2}\geq\chi_\alpha^2(n-1)\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\sigma^2\leq\frac{(n-1)\cdot S^2}{\chi_\alpha^2(n-1)}\right\}=1-\alpha\Rightarrow P\left\{\sigma\leq\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\sqrt{\chi_\alpha^2(n-1)}}\right\}=1-\alpha.$$

则得标准差σ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限: $\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\sqrt{\chi_\alpha^2(n-1)}}$.

已知$\overline{X}=1200$, $S=45$, $n=10$, $1-\alpha=0.95$,查表:

$$t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(9)=1.8331,\ \chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(9)=3.325.$$

计算得

$$\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{1-\alpha}(n-1)=1200-\frac{45}{\sqrt{10}}\times1.8331=1173.91,$$

$$\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\sqrt{\chi_\alpha^2(n-1)}}=\frac{\sqrt{9}\times45}{\sqrt{3.325}}=74.035.$$

即得这批电子管期望寿命的单侧置信下限为1173.91,标准差的单侧置信上限为74.035. ♣