习题(26)

26.1 已知二维离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布:

X \ Y	-1	0	1
0	1/4	1/12	1/4
1	1/8	1/6	1/8

则下面结论正确的是 【 】

(A) $E(X)=E(Y)$. (B) $\operatorname{cov}(X,Y)\neq 0$. (C) X与Y不相关. (D) X与Y相互独立.

26.2 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$,且相互独立.令$\xi=\alpha X+\beta Y$,$\eta=\alpha X-\beta Y$,其中α,β为非零常数.求ξ与η的相关系数.

26.3 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y<+\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

1) 求$E(X)$,$D(X)$及$E(Y)$,$D(Y)$;

2) 计算协方差和相关系数.

26.4 设二维随机变量(X,Y)在圆盘$\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$内服从均匀分布,即有密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\le R^2 \\ 0, & x^2+y^2>R^2 \end{cases},$$

试证: X与Y不相关,但X与Y不是相互独立的.

习题(26)参考解答

26.1 解: 由(X,Y)的联合概率分布$\{p_{ij}\}$算出边缘分布律$\{p_{i\cdot}\}$和$\{p_{\cdot j}\}$,并列如下表:

X \ Y	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
0	1/4	1/12	1/4	7/12
1	1/8	1/6	1/8	5/12
$p_{i\cdot}$	3/8	1/4	3/8	

则有 $E(X)=0$, $E(Y)=5/12$,故

$$E(X)\neq E(Y).$$

由 $\frac{1}{4}\neq\frac{3}{8}\times\frac{7}{12}$,则 X 与 Y 不相互独立.又由

$$E(XY)=\sum_i\sum_j x_i y_j\cdot p_{ij}=(-1)\times1\times\frac{1}{8}+1\times1\times\frac{1}{8}=0,$$

则

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0,$$

即 X 与 Y 不相关.故答案应为(C). ♣

26.2 解: 由 $\rho_{\xi\eta}=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)\cdot D(\eta)}}$,而

$$D(\xi)=D(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2\cdot D(X)+\beta^2\cdot D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\cdot\sigma^2,$$

$$D(\eta)=D(\alpha X-\beta Y)=\alpha^2\cdot D(X)+\beta^2\cdot D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\cdot\sigma^2,$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi,\eta)&=\operatorname{cov}(\alpha X+\beta Y,\ \alpha X-\beta Y)\\&=\alpha^2\cdot D(X)+\alpha\beta\cdot\operatorname{cov}(Y,X)-\alpha\beta\cdot\operatorname{cov}(X,Y)-\beta^2\cdot D(Y)\\&=(\alpha^2-\beta^2)\cdot\sigma^2\end{aligned}$$

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\cdot\sigma^2}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2\cdot(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$ ♣

26.3 解: 1) 利用 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx$,且 $\Gamma(n)=(n-1)!$,则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}x\,[\int_x^{+\infty}e^{-y}dy]dx=\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-x}dx=\Gamma(2)=1,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}x^2\,[\int_x^{+\infty}e^{-y}dy]dx=\int_0^{+\infty}x^2\cdot e^{-x}dx=\Gamma(3)=2$$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2-1^2=1$;

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}ye^{-y}\,[\int_0^{y}1dx]dy=\int_0^{+\infty}y^2\cdot e^{-y}dy=\Gamma(3)=2\,,$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}y^2e^{-y}\,[\int_0^{y}1dx]dy=\int_0^{+\infty}y^3\cdot e^{-y}dy=\Gamma(4)=6$$

$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=6-2^2=2$.

2) 由

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}y\cdot e^{-y}[\int_0^{y}xdx]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}y^3\cdot e^{-y}dy=\frac{1}{2}\cdot\Gamma(4)=3$$

$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=3-1\times 2=1$,

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{1}{\sqrt{1}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

注：关于 1),也可先求出边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$,再计算 $E(X)$, $D(X)$, $E(Y)$, $D(Y)$.♣

26.4 证:由 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$,而

$$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}xy\cdot\frac{1}{\pi R^2}dxdy=\int_{-R}^{R}\frac{x}{\pi R^2}\cdot(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}y\,dy)\,dx=0\,,$$

$$E(X)=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}x\cdot\frac{1}{\pi R^2}dxdy=\int_{-R}^{R}\frac{1}{\pi R^2}\cdot(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}x\,dx)\,dy=0\,,$$

同理,得 $E(Y)=0$.

于是,有 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$,即 X 与 Y 不相关.又由

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}dy & ,\ |x|\le R\\ 0 & ,\ |x|>R\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} & , \quad |x| \le R \\ 0 & , \quad |x| > R \end{cases},$$

同理得

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2} \cdot \sqrt{R^2 - y^2} & , \quad |y| \le R \\ 0 & , \quad |y| > R \end{cases}$$

$$f(x, y) \ne f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

故 X 与 Y 不相互独立. ♣