合 肥 工 业 大 学 试 卷 （A） 参 考 答 案

2021～2022 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3 课程性质:必修 考试形式: 闭卷

专业班级（教学班）________ 考试日期 2022 年 1 月 20 日 10:20—12:20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名________

一、填空题(每小题 3 分)

1\. 0.6； 2. 1； 3. $\frac{5}{9}$； 4. 20； 5. $\frac{11}{16}$.

二、选择题(每小题 3 分)

1\. B； 2. A； 3. A； 4. C； 5. D.

三、**(10 分)**【解】(1) 设 $A_i=\{$从甲盒中取出的3个元件中有i个正品$\}$，$i=0,1,2,3$，

$B=\{$从乙盒中取出一个元件中是正品$\}$.

由全概率公式可得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\sum_{i=0}^{3}\frac{C_5^iC_3^{3-i}}{C_8^3}\frac{4+i}{10}=\frac{C_5^0C_3^3}{C_8^3}\frac{4}{10}+\frac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}\frac{5}{10}+\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}\frac{6}{10}+\frac{C_5^3C_3^0}{C_8^3}\frac{7}{10}$$

$$=\frac{329}{560}\approx 0.588；$$

(2) 由贝叶斯公式可得

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{\frac{C_5^3C_3^0}{C_8^3}\frac{7}{10}}{\frac{329}{560}}=\frac{70}{329}\approx 0.213.$$

四、**(12 分)**【解】(1) 由 $P\{|X|=1\}=p\{X=0\}$ 可得 $a+\frac{1}{6}=b$，又 $a+b+\frac{1}{6}=1$，解得 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{2}$，

故 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

(2) 由 $Y=|X|+X$ 得

X	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\|X\|$	1	0	1
$Y=\|X\|+X$	0	0	2

所以 Y 的分布律为

Y	0	2
p	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

所以 $Y=|X|+X$ 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{5}{6}, & 0\le y<2,\\ 1, & y\ge 2.\end{cases}$

五、**(14 分)**【解】随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

Y 的概率密度为 $f_Y(x)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

由于 X 和 Y 相互独立，所以 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(1) $P\{U=0,V=0\}=P\{X>2Y,2X>Y\}=P\{X>2Y\}=\frac{1}{4}$；

$P\{U=0,V=1\}=P\{X>2Y,2X\le Y\}=0$；

$P\{U=1,V=0\}=P\{X\le 2Y,2X>Y\}=P\left\{\frac{1}{2}X<Y\le 2X\right\}=\frac{1}{2}$ ；

$P\{U=1,V=1\}=P\{X\le 2Y,2X\le Y\}=P\{Y\ge 2X\}=\frac{1}{4}$；

(U,V) 的分布律为

(U,V)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
p	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）参 考 答 案

2021～2022 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3 课程性质:必修 考试形式: 闭卷

专业班级（教学班）______ 考试日期 2022 年 1 月 20 日 10:20—12:20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名______

（2）$EU=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$EV=\frac{1}{4}$，$E(U^2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$E(V^2)=\frac{1}{4}$，$E(UV)=\frac{1}{4}$，

$DU=E(U^2)-(EU)^2=\frac{3}{16}$，$DV=E(V^2)-(EV)^2=\frac{3}{16}$，

$$\rho_{UV}=\frac{E(UV)-EUEV}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{3}{16}}}=\frac{1}{3}.$$

(3) $P\left\{U+V\le\frac{3}{2}\middle|U=1\right\}=\frac{P\left\{U+V\le\frac{3}{2},U=1\right\}}{P\{U=1\}}=\frac{P\left\{V\le\frac{1}{2},U=1\right\}}{P\{U=1\}}$

$$=\frac{P\{U=1,V=0\}}{P\{U=1\}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}.$$

六、(14 分)【解】（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{1-x}3(x+y)dy=\frac{3(1-x^2)}{2}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{1-y}3(x+y)dx=\frac{3(1-y^2)}{2}, & 0<y<1,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

（2）$P\{2X+Y\ge1\}=\int_0^1dy\int_{\frac{1-y}{2}}^{1-y}3(x+y)dx=\frac{5}{8}$；

（3）$Z=X+Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$，

当 $z\le0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $z\ge1$ 时，$F_Z(z)=1$；

当 $0<z<1$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}3(x+y)dy=z^3$；

所以 $Z=X+Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le0,\\ z^3, & 0<z<1,\\ 1, & z\ge1,\end{cases}$ 从而 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}3z^2, & 0<z<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

七、(14 分)【解】解:（1）求 θ 的矩估计量 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)dx=\int_\theta^{+\infty}x\cdot\frac{2\theta^2}{x^3}dx=2\theta$，令 $EX=\overline{X}$，解

得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_M=\frac{\overline{X}}{2}$；

（2）求 θ 的极大似然估计量，显然 $L(\theta)=0$ 不合题意；关于 θ 的似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{2\theta^2}{X_i^3}=\frac{2^n\theta^{2n}}{\prod_{i=1}^nX_i^3}$，

$X_i\ge\theta$，$i=1,2,\cdots,n$，$lnL(\theta)=n\ln2+2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^n\ln X_i$，令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2n}{\theta}>0$，所以 $\ln L(\theta)$ 为 θ

的单调增函数，故 $L(\theta)$ 也为 θ 的单调增函数，θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}_L=\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$.

八、(6 分)【解】解:记 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$，由于总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nX_i\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，

又 X_{n+1} 与 $\overline{X}$ 相互独立，且

$E(X_{n+1}-\overline{X})=EX_{n+1}-E\overline{X}=0$，$D(X_{n+1}-\overline{X})=DX_{n+1}+D\overline{X}=\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n+1}{n}\sigma^2$，

所以 $X_{n+1}-\overline{X}\sim N\left(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2\right)$，标准化得 $\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\sim N(0,1)$；又由于 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{nS_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，

且 $X_{n+1}-\overline{X}$ 与 $\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2}$ 相互独立，所以有 $\dfrac{\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2}\cdot\dfrac{1}{n-1}}}=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S_n}\sim t(n-1)$，比较可得所求的常数

$c=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$，服从的 t 分布的自由度为 $n-1$.

又若 $T\sim t(n-1)$，则 $-T\sim t(n-1)$，所以 $c=\pm\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$.