习题(33)

33.1 设总体X的密度函数为$f(x;\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为X的样本.求下列情况下θ的极大似然估计.

1) $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta\alpha x^{\alpha-1}e^{-\theta x^{\alpha}} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x\le 0\end{cases}$ （$\alpha>0$且已知）;

2) $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^r}{\Gamma(r)}\cdot x^{r-1}e^{-\theta x} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x\le 0\end{cases}$ （$r>0$且已知）.

33.2 设总体X的分布律为

$$P\{X=k\}=(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2},\ k=2,3,4,\cdots,$$

其中$0<\theta<1$为参数.$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的样本,求未知参数θ的矩估计量和极大似然估计量.

33.3 设总体$X\sim U(\theta,2\theta)$，$\theta>0$是未知参数.$X_1,X_2,\cdots,X_n$为X的样本,试求θ的矩估计量和极大似然估计量.

33.4 设总体X的概率分布为

X	0	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中θ（$0<\theta<\dfrac{1}{2}$）是未知参数,利用总体X的如下样本值:

3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3.

试求θ的极大似然估计值.

习题(33)参考解答

33.1 解：1) 由似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta\alpha X_i^{\alpha-1}e^{-\theta X_i^{\alpha}})=\theta^n\alpha^n(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{\alpha-1}\cdot e^{-\theta\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i^{\alpha}}$$

$$\ln L(\theta)=n\cdot\ln\theta+n\cdot\ln\alpha+(\alpha-1)\cdot\ln(\prod_{i=1}^{n}X_i)-\theta\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i^{\alpha}\ .$$

令

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=0 \qquad \frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}X_i^{\alpha}=0,$$

解得θ的极大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^{\alpha}}$.

2) 由似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}[\frac{\theta^r}{\Gamma(r)}\cdot X_i^{r-1}e^{-\theta X_i}]=(\frac{1}{\Gamma(r)})^n\cdot(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{r-1}\cdot\theta^{nr}\cdot e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}X_i}$$

$$\ln L(\theta)=-n\cdot\ln\Gamma(r)+(r-1)\cdot\ln(\prod_{i=1}^{n}X_i)+nr\cdot\ln\theta-\theta\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

令 $\quad\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=0 \qquad \dfrac{nr}{\theta}-\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=0 \qquad \dfrac{nr}{\theta}-n\overline{X}=0$.

解得θ的极大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{r}{\overline{X}}$. ♣

33.2 解: 1) 由

$$E(X)=\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot P\{X=k\}=\sum_{k=2}^{\infty}k\cdot(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}[(k-2)+2]\cdot(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}(k-1)\cdot(k-2)\theta^2(1-\theta)^{k-2}+2\cdot\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}$$

$$=(1-\theta)\sum_{l=2}^{\infty}l\cdot(l-1)\theta^2(1-\theta)^{l-2}+2$$

$$=(1-\theta)\cdot E(X)+2 \qquad E(X)=\frac{2}{\theta}.$$

根据矩估计方法,令 $\dfrac{2}{\theta}=\overline{X}$, 解得$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{2}{\overline{X}}$.

2) 关于θ的似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}[(x_i-1)\theta^2(1-\theta)^{x_i-2}]=[\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)]\cdot\theta^{2n}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-2n}$$

$$\ln L(\theta)=\ln[\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)]+2n\cdot\ln\theta+(\sum_{i=1}^{n}x_i-2n)\cdot\ln(1-\theta),$$

令 $\quad\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=0 \qquad \dfrac{2n}{\theta}-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-2n}{1-\theta}=0$,

解得$\hat{\theta}=\dfrac{2}{\bar{x}}$.则得$\theta$的极大似然估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{2}{\overline{X}}$(与矩估计量相同). ♣

33.3 解：由总体$X\sim U(\theta,2\theta)$,则$E(X)=\dfrac{\theta+2\theta}{2}=\dfrac{3}{2}\theta$.根据矩估计法,令

$$\overline{X}=E(X) \qquad \overline{X}=\frac{3}{2}\theta .$$

解得θ的矩估计量为$\hat{\theta}_1=\dfrac{2}{3}\overline{X}$.

由X的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & \theta\le x\le 2\theta\\ 0, & 其他\end{cases},$$

则似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{1}{\theta^n},\ \theta\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le 2\theta$$

$$=\frac{1}{\theta^n},\ \theta\le x_{(1)},x_{(n)}\le 2\theta$$

$$=\frac{1}{\theta^n},\ \frac{1}{2}x_{(n)}\le\theta\le x_{(1)}, \qquad (*)$$

其中$x_{(1)}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$x_{(n)}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

对于确定的样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$,由(*)式可知,只有当$\theta=\dfrac{1}{2}x_{(n)}$时,$L(\theta)$达最大.则$\theta$的极大似然估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{1}{2}\cdot\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.所以,$\theta$的极大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}\cdot\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}. \qquad ♣$$

33.4 解：由样本值$x_1,x_2,\cdots,x_8$,得

样本值	0 1 2 3
频数	1 2 1 4

则似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{8}p(x_i,\theta)=\theta^2\times[2\theta(1-\theta)]^2\times\theta^2\times(1-2\theta)^4$$

$$=4\cdot\theta^6\cdot(1-\theta)^2\cdot(1-2\theta)^4$$

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\cdot\ln\theta+2\cdot\ln(1-\theta)+4\cdot\ln(1-2\theta).$$

令

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=0 \qquad \frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0,$$

化为

$$\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}=0 \qquad 12\theta^2-14\theta+3=0.$$

解得

$$\hat{\theta}_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{14^2-4\times12\times3}}{2\times12}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}.$$

又因为 $0<\theta<\frac{1}{2}$,故所求 θ 的极大似然估计值 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$. ♣