习题(16)

16. 1 将某一医药公司 9 月份和 8 月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为 X 和 Y .据以往积累的资料知 X 和 Y 的联合分布律为

X \ Y	51	52	53	54	55
51	0.06	0.05	0.05	0.01	0.01
52	0.07	0.05	0.01	0.01	0.01
53	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05
54	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03
55	0.05	0.06	0.05	0.01	0.03

1) 求边缘分布律;

2) 求 8 月份订货单数为 51 时, 9 月份的订货单数的条件分布律.

16. 2 以 X 表示某医院一天中出生婴儿的个数, Y 表示其中男婴的个数,设 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=n\ ,\ Y=m\}=\frac{e^{-14}\times 7.14^{m}\times 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!}\ ,\quad m=0,1,2,\cdots n\ ;\ n=0,1,2,\cdots .$$

1) 求边缘分布律;

2) 求条件分布律.

16. 3 设随机变量 Y 服从 $\Gamma(r,\lambda)$ 分布,其密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{r}}{\Gamma(r)}\cdot y^{r-1}\cdot e^{-\lambda y} & ,\ y>0\\ 0 & ,\ y\le 0\end{cases},$$

其中 $r>0$, $\lambda>0$ 为常数.而随机变量 X 关于 Y 的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}y\cdot e^{-xy} & ,\ x>0\\ 0 & ,\ x\le 0\end{cases}.$$

试求 X 的密度函数.

16. 4 设随机变量 $X\sim U(0,1)$,在 $X=x\ (0<x<1)$ 下,随机变量 $Y\sim U(0,x)$.试求:

1) X 与 Y 的联合密度;

2) Y 的概率密度;

3) $P\{X+Y>1\}$.

习题(16)参考解答

16.1 解: 1) 由 $P\{X=k\}=\sum_{j} P\{X=k, Y=j\}$,得 X 的边缘分布律:

X	51	52	53	54	55
p_k	0.18	0.15	0.35	0.12	0.20

由 $P\{Y=j\}=\sum_{k} P\{X=k, Y=j\}$,得 Y 的边缘分布律:

Y	51	52	53	54	55
q_j	0.28	0.28	0.22	0.09	0.13

2) 由 $P\{X=k \mid Y=51\}=\dfrac{P\{X=k, Y=51\}}{P\{Y=51\}}$,知条件分布律:

k	51	52	53	54	55
$P\{X=k \mid Y=51\}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$

♣

16.2 解: 1) 由 (X,Y) 的可能取值如下表:

X / Y	0	1	2	3	$\cdots$
0	*	*	*	*	$\cdots$
1		*	*	*	$\cdots$
2			*	*	$\cdots$
3				*	$\ddots$
$\vdots$					$\ddots$

则边缘分布律分别为

$$P\{X=n\}=\sum_{m=0}^{\infty} P\{X=n, Y=m\}=\sum_{m=0}^{n} P\{X=n, Y=m\}$$

$$=\sum_{m=0}^{n} \frac{e^{-14} \times 7.14^{m} \times 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!}=\frac{e^{-14}}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} \times 7.14^{m} \times 6.86^{n-m}$$

$$=\frac{14^{n}}{n!} \cdot e^{-14}, \ n=0,1,2, \cdots .$$

即得 $X \sim P(14)$.

$$P\{Y=m\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X=n,Y=m\}=\sum_{n=m}^{\infty}P\{X=n,Y=m\}$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{e^{-14}\times 7.14^m\times 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!}=\frac{e^{-14}\times 7.14^m}{m!}\cdot\sum_{n=m}^{\infty}\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}$$

$$=\frac{e^{-14}\times 7.14^m}{m!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{6.86^k}{k!}=\frac{e^{-14}\times 7.14^m}{m!}\cdot e^{6.86}$$

$$=\frac{7.14^m}{m!}\cdot e^{-7.14},\quad m=0,1,2,\cdots.$$

即得 $Y\sim P(7.14)$.

2) 条件分布律: 对于$n=0,1,2,\cdots$,有

$$P\{Y=m\mid X=n\}=\frac{P\{X=n,Y=m\}}{P\{X=n\}}=\left(\frac{e^{-14}\times 7.14^m\times 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!}\right)\Big/\left(\frac{14^n}{n!}\cdot e^{-14}\right)$$

$$=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\left(\frac{7.14}{14}\right)^m\cdot\left(\frac{6.86}{14}\right)^{n-m}$$

$$=\binom{n}{m}\times 0.51^m\times 0.49^{n-m},\ m=0,1,2,\cdots,n.$$

对于$m=0,1,2,\cdots$, 有

$$P\{X=n\mid Y=m\}=\frac{P\{X=n\,,Y=m\}}{P\{Y=m\}}=\left(\frac{e^{-14}\times 7.14^m\times 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!}\right)\Big/\left(\frac{7.14^m}{m!}\cdot e^{-7.14}\right)$$

$$=\frac{e^{-6.86}}{(n-m)!}\cdot 6.86^{n-m},\quad n=m,m+1,\cdots.$$ ♣

16.3 解: 由(X,Y)的联合密度函数

$$f(x,y)=f_Y(y)\cdot f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\cdot y^{r-1}e^{-\lambda y}\cdot y\cdot e^{-xy}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\cdot y^r\cdot e^{-(\lambda+x)y}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

由 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^{+\infty} f(x,y)dy$,则当 $x>0$ 时,有

$$f_X(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\cdot y^r\cdot e^{-(\lambda+x)y}dy=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\cdot\frac{1}{(\lambda+x)^{r+1}}\cdot\int_0^{+\infty}t^r e^{-t}dt\ (令\ t=(\lambda+x)y)$$

$$=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\cdot\frac{1}{(\lambda+x)^{r+1}}\cdot\Gamma(r+1)=\frac{r\cdot\lambda^r}{(\lambda+x)^{r+1}};$$

而当 $x\le 0$ 时,有 $f_X(x)=0$.所以 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{r\cdot\lambda^r}{(\lambda+x)^{r+1}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}.$$ ♣

16.4 解: 1) 由题意知,X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$. 而在 $X=x\ (0<x<1)$ 的条件下,Y 的条件密度为

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}1/x, & 0<y<x\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

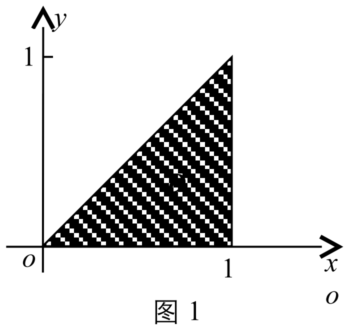
图 1

则随机变量 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y\,|\,x)$$

$$=\begin{cases}1/x, & 0<y<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

2) 记区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<y<x<1\}$ (见图 1),有

$$f(x,y)=\begin{cases}1/x, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

由图 1,则当 $0<y<1$ 时,Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1\frac{1}{x}dx=-\ln y;$$

而当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时, $f_Y(y)=0$.则

$$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}.$$

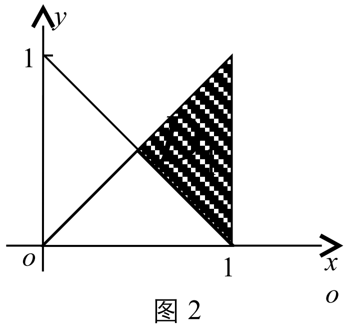
图 2

3) 由图 2,则所求概率为

$$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1}\frac{1}{x}dxdy$$

$$=\int_{1/2}^{1}dx\int_{1-x}^{x}\frac{1}{x}dy=\int_{1/2}^{1}(2-\frac{1}{x})dx=1-\ln 2.$$ ♣