数 字 逻 辑

丁 贤 庆

ahhfdxq@163.com

作业得分的说明：

作业得分采用扣分制：

1、满分100分。

2、少交（没有按时交）一次　　扣5分。

3、作业不规范(步骤过分简化、卡诺图不规范)　扣5分

4、作业完成后需要进行检查和错误更正。

没有进行错误更正的　　扣5分

5、超额完成作业（课后习题多做）　　　加5-10分。

6、作业完成效果不好的或者作业抄袭的。按下表扣分

期末考试得分	作业扣分
60分以下	扣20分
70分以下	扣15分
80分以下	扣10分
90分以下	扣5分

Home work（P74）

- 2.3.1 (1)
- 2.3.5
- 2.4.3 (1) (2) (3) (4)
- 2.4.4 (1) (2)

第 二 章

逻辑代数与硬件描述语言基础

2.3.1 逻辑函数的最简形式

逻辑函数有不同形式，如与-或表达式、与非-与非表达式、或-与表达式、或非-或非表达式以及与-或-非表达式等。

将其中包含的与项数最少，且每个与项中变量数最少的与-或表达式称为最简与-或表达式。

取两次非运算

$$L = AC + \bar{C}D$$

“与-或” 表达式

$$= \overline{\overline{AC} \cdot \overline{\bar{C}D}}$$

“与非-与非” 表达式

$$= (A+\bar{C})(C+D)$$

“或-与” 表达式

$$= \overline{\overline{(A+\bar{C})} + \overline{(C+D)}}$$

“或非一或非” 表达式

$$= \overline{\bar{A}C + \bar{C}\bar{D}}$$

“与-或-非” 表达式

从与或式变换为或与式，只要对与或式取两次反演或者两次对偶就可以了。

上页中，$L = AC + \overline{C}D = (A+\overline{C})(C+D)$ 推导过程

求两次反演运算

$$L = AC + \overline{C}D$$

$$\overline{L} = (\overline{A} + \overline{C}) * (C + \overline{D})$$

$$\overline{L} = (\overline{A}C) + (\overline{C}\,\overline{D}) + (\overline{A}\,\overline{D})$$

$$\overline{L} = (\overline{A}C) + (\overline{C}\,\overline{D})$$

$$L = \overline{\overline{L}} = (A+\overline{C})(C+D)$$

2.3.2 逻辑函数的代数化简法

1、逻辑函数的化简

化简的主要方法：

1．代数法（公式法）

2．卡诺图法（图解法）

代数化简法：

运用逻辑代数的基本定律和恒等式进行化简的方法。

并项法： $A+\overline{A}=1$

$$L=\overline{A}\,\overline{B}\,C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A}\,\overline{B}(C+\overline{C})=\overline{A}\,\overline{B}$$

吸收法： $A + AB = A$

$$L = \underline{\bar{A}B} + \underline{\bar{A}B}CD(E+F) = \bar{A}B$$

消去法： $A + \bar{A}B = A + B$

$$L = AB + \underline{\bar{A}C} + \underline{\bar{B}C} = AB + (\bar{A} + \bar{B})C$$

$\bar{A} + \bar{B} = \overline{AB}$

$$= AB + \overline{AB}C = AB + C$$

$A+\bar{A}B=A+B$

配项法： $A + \bar{A} = 1$

$$L = AB + \bar{A}\bar{C} + \underline{B\bar{C}} = AB + \bar{A}\bar{C} + \underline{(A+\bar{A})B\bar{C}}$$

$$= \underline{AB} + \underline{\bar{A}\bar{C}} + \underline{AB\bar{C}} + \underline{\bar{A}B\bar{C}}$$

$$= (\underline{AB + ABC}) + (\underline{AC + ACB})$$

$$= AB + \bar{A}\bar{C}$$

2、逻辑函数形式的变化

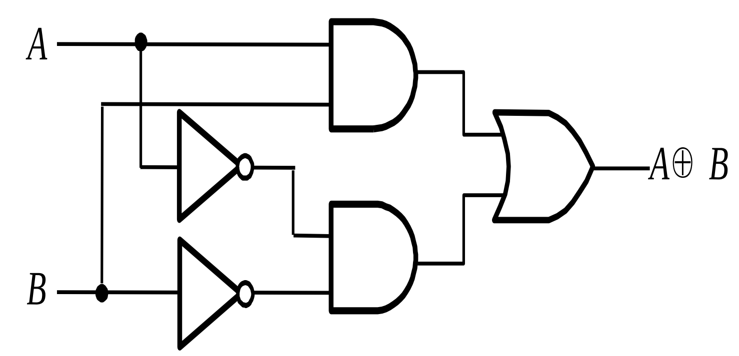
通常在一片集成电路芯片中只有一种门电路，为了减少门电路的种类，需要对逻辑函数表达式进行变换。

例：已知

$$L = AB\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D} + ABD + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}D + \bar{A}\,\bar{B}CD$$

（1）求最简的与-或式，并画出相应的逻辑图；

（2）画出仅用与非门实现的电路。



(a)

解：

$$L = AB(\bar{D}+D) + \bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}D(\bar{C}+C)$$

$$= AB + \bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}D$$

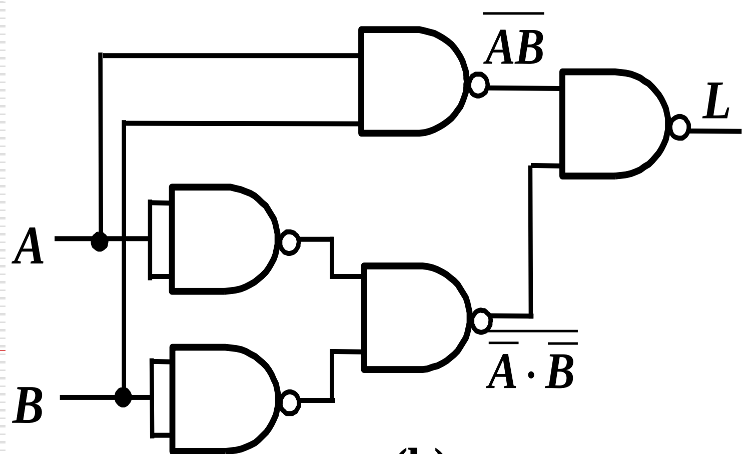
$$= AB + \bar{A}\bar{B}(D+\bar{D})$$

$$= AB + \bar{A}\bar{B}$$

取两次非运算

$$= \overline{\overline{AB + \bar{A}\bar{B}}}$$

$$= \overline{\overline{AB}\cdot\overline{\bar{A}\bar{B}}}$$



单选题 2分

设置

已知：$L = A\overline{C} + CD$，与之不等价的式子是（　）

A. $L = \overline{\overline{A\overline{C}} \cdot \overline{CD}}$

B. $L = (A+C)(\overline{C}+D)$

C. $L = \overline{\overline{A}C + \overline{C}\,\overline{D}}$

D. $L = \overline{\overline{(A+C)} + \overline{(\overline{C}+D)}}$

提交

2.4 逻辑函数的卡诺图化简法

2.4.1 用卡诺图表示逻辑函数

2.4.2 用卡诺图化简逻辑函数

2.4.1 用卡诺图表示逻辑函数

1、卡诺图的引出

卡诺图：将n变量的全部最小项都用小方块表示，并使具有逻辑相邻的最小项在几何位置上也相邻地排列起来，这样，所得到的图形叫n变量的卡诺图。

逻辑相邻的最小项：如果两个最小项只有一个变量互为反变量，那么，就称这两个最小项在逻辑上相邻。

如最小项 $m_6=AB\overline{C}$ $m_7=ABC$ 在逻辑上相邻

m_6	m_7

两变量卡诺图

A \ B	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

三变量卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

B C A

四变量卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

C B A D

2、卡诺图的特点:各小方格对应于各变量不同的组合，而且上下左右在几何上相邻的方格内只有一个因子有差别，这个重要特点成为卡诺图化简逻辑函数的主要依据。

➢ Karnaugh Maps (卡诺图)

三变量卡图

例如，*A*、*B*、*C*三个逻辑变量的最小项有（2^3＝）8个，即

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$、$\bar{A}\bar{B}C$、$\bar{A}B\bar{C}$、$\bar{A}BC$、$A\bar{B}\bar{C}$、$A\bar{B}C$、$AB\bar{C}$、ABC

变量组合 A	B	C	对应十进制	最小项	最小项代表符号 m_n
0	0	0	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	m_0
0	0	1	1	$\bar{A}\bar{B}C$	m_1
0	1	0	2	$\bar{A}B\bar{C}$	m_2
0	1	1	3	$\bar{A}BC$	m_3
1	0	0	4	$A\bar{B}\bar{C}$	m_4
1	0	1	5	$A\bar{B}C$	m_5
1	1	0	6	$AB\bar{C}$	m_6
1	1	1	7	ABC	m_7

三变量

每格对应一个最小项

A \ BC	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
A	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	ABC	$AB\bar{C}$

每格标变量取值

A \ BC	00	01	11	10
0	**000**	**001**	**011**	**010**
1	**100**	**101**	**111**	**110**

➢ Karnaugh Maps（卡诺图）

三变量卡图

例如，*A*、*B*、*C*三个逻辑变量的最小项有（2³＝）8个，即

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$、$\bar{A}\bar{B}C$、$\bar{A}B\bar{C}$、$\bar{A}BC$、$A\bar{B}\bar{C}$、$A\bar{B}C$、$AB\bar{C}$、ABC

每格标最小项编号

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

		$\bar{B}$		B	
	A \ BC	00	01	11	10
$\bar{A}$	0	0	1	3	2
A	1	4	5	7	6
		$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

$\bar{A}B\bar{C}$

三变量

每格对应一个最小项

A \ BC	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	$\bar{A}B\bar{C}$
A	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	ABC	$AB\bar{C}$

每格标变量取值

A \ BC	00	01	11	10
0	000	001	011	010
1	100	101	111	110

➢ Karnaugh Maps（卡诺图）

四变量卡诺图

		$\bar{C}$	$\bar{C}$	C	C	
	AB \ CD	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$	
$\bar{A}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{B}$
$\bar{A}$	$\bar{A}B$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$	B
A	AB	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$	B
A	$A\bar{B}$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{B}$
		$\bar{D}$	D	D	$\bar{D}$	

相邻两方格只有一个变量发生改变，符合格雷码规则。

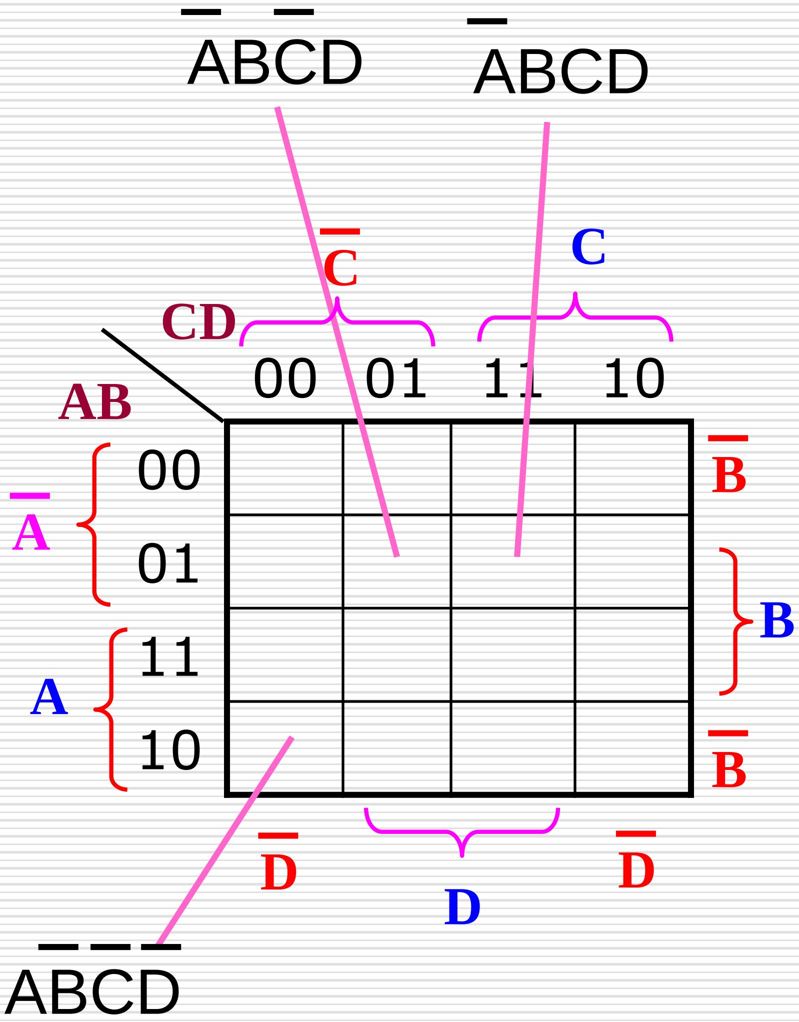
➢ Karnaugh Maps (卡诺图)

四变量卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$\overline{C}$: CD = 00, 01; C: CD = 11, 10; $\overline{D}$: CD = 00, 10; D: CD = 01, 11

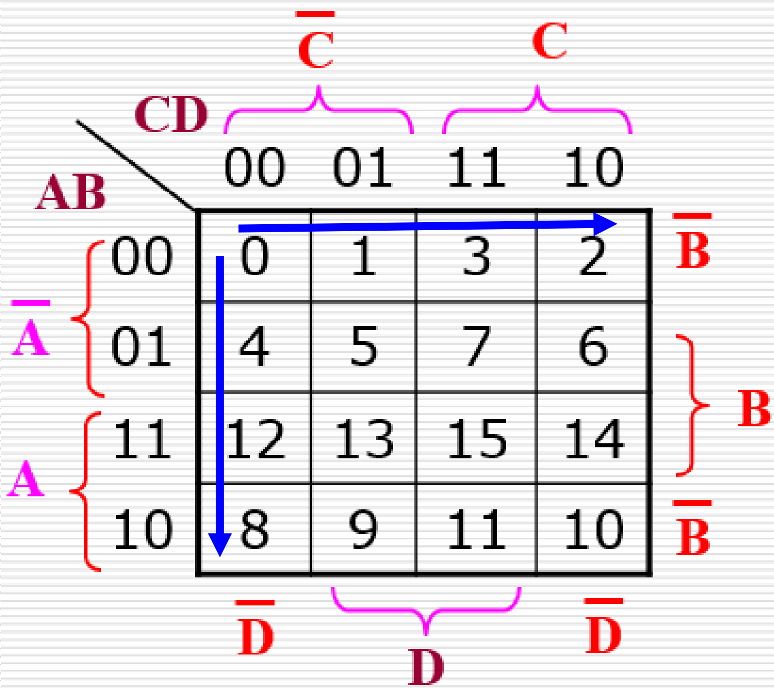
$\overline{A}$: AB = 00, 01; A: AB = 11, 10; $\overline{B}$: AB = 00, 10; B: AB = 01, 11

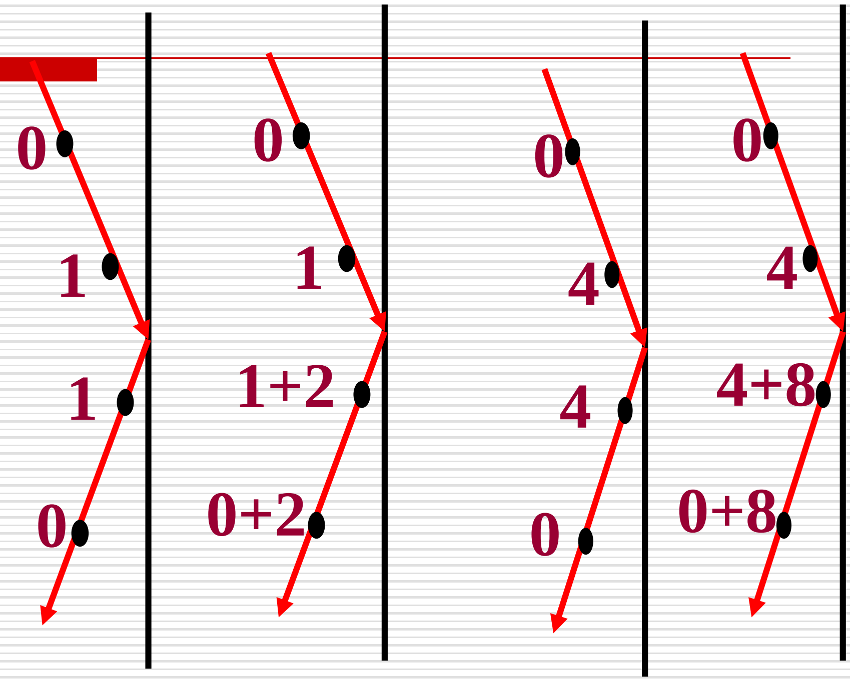


相邻的小方格具有逻辑相邻性
(对应的最小项只有1位不同)

➢ Karnaugh Maps (卡诺图)

四变量卡诺图





镜面反射对称。

Reflected

也可以称为：折叠展开特性

➢ Karnaugh Maps (卡诺图)

五变量卡诺图

将最小项以二维表格形式排列

$\bar{C}$ C

E $\bar{E}$ E

	AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100	
$\bar{A}$	00	0	1	3	2	6	7	5	4	$\bar{B}$
	01	8	9	11	10	14	15	13	12	B
A	11	24	25	27	26	30	31	29	28	
	10	16	17	19	18	22	23	21	20	$\bar{B}$

$\bar{D}$ D $\bar{D}$

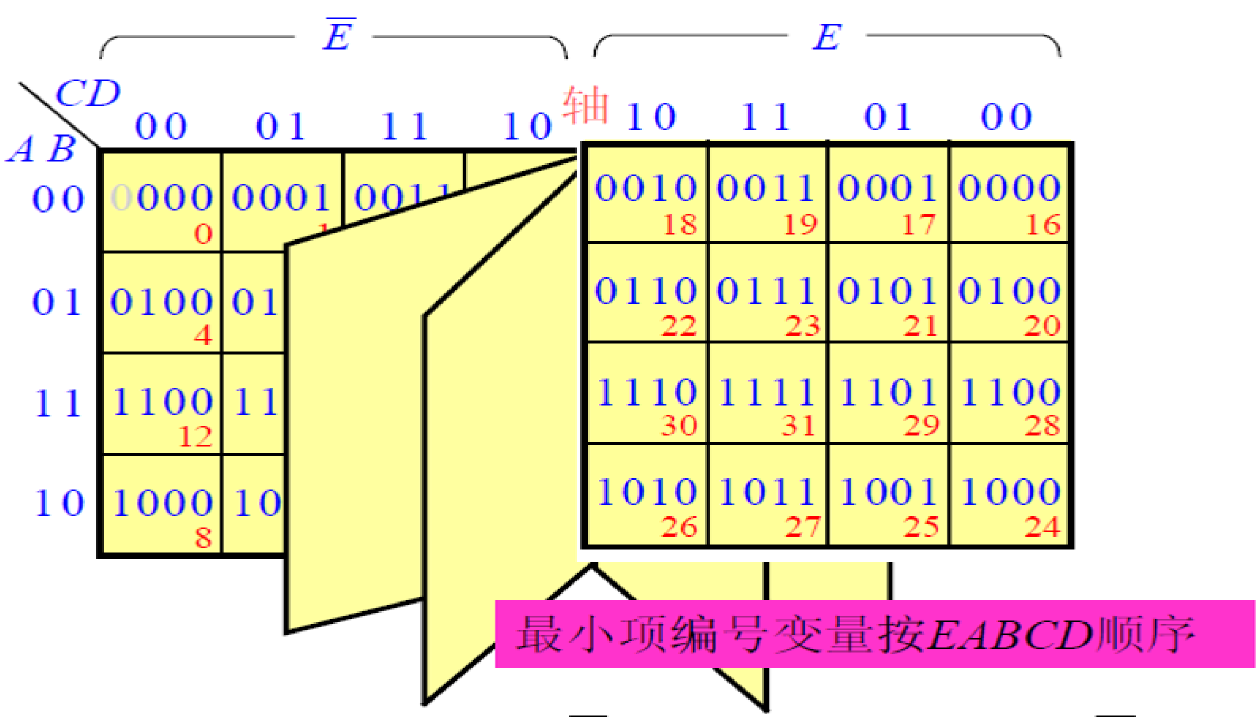
任意几何相邻的小方格所代表的最小项具有逻辑相邻性

相邻两方格只有一个变量发生改变，符合格雷码规则。

➢ Karnaugh Maps (卡诺图)

五变量卡诺图

五变量卡诺图的画法：五变量卡诺图是在四变量卡诺图的基础上翻转构成的。



我们将逻辑函数中带有$\overline{E}$的与项填入轴左侧的$\overline{E}$四变量卡诺图中；将带有E的与项填入轴右侧的E四变量卡诺图中；不带变量E的与项填入以轴为对称的二个四变量卡诺图中。

3. 已知逻辑函数画卡诺图

当逻辑函数为最小项表达式时，在卡诺图中找出和表达式中最小项对应的小方格填上1，其余的小方格填上0（有时也可用空格表示），就可以得到相应的卡诺图。任何逻辑函数都等于其卡诺图中为1的方格所对应的最小项之和。

例1：画出逻辑函数

$L(A, B, C, D)=\sum m(0, 1, 2, 3, 4, 8, 10, 11, 14, 15)$的卡诺图

L CD / AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

例2 画出下式的卡诺图

$$L(A,B,C,D)=(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+B+\overline{C}+D)$$

$$(A+\overline{B}+\overline{C}+D)(A+B+C+D)$$

解 1. 将逻辑函数化为最小项表达式

$$\overline{L}=ABCD+AB\overline{C}D+A\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$

$$=\sum m(0,6,10,13,15)$$

2. 填写卡诺图

L: AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

2.4.2 用卡诺图化简逻辑函数

1、化简的依据

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD = \overline{A}\,\overline{B}D$$

$$\overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD = \overline{A}BD$$

$$\overline{A}\,\overline{B}D + \overline{A}BD = \overline{A}D$$

$$A\overline{B}D + ABD = AD$$

$$\overline{A}D + AD = D$$

卡诺图中小方块的相邻

- **小方块的相邻**
  (可以是大块相邻)

相邻 – 有共同的边界

相对 – 同行(或列)两端

以上相邻的小方块只有一个变量不同的最小项，称为逻辑相邻。对于n个变量函数，每个小方块有n个相邻的小方块。

* 四个相邻小方格合并

最小项为1的四个小方格合并成一项，就可消去两个变量。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15 1	14 1
10	8	9	11 1	10 1

AC

用代数式验证

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1 1	3	2
01	4	5 1	7	6
11	12	13 1	15	14
10	8	9 1	11	10

$\overline{C}D$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3 1	2 1
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11 1	10 1

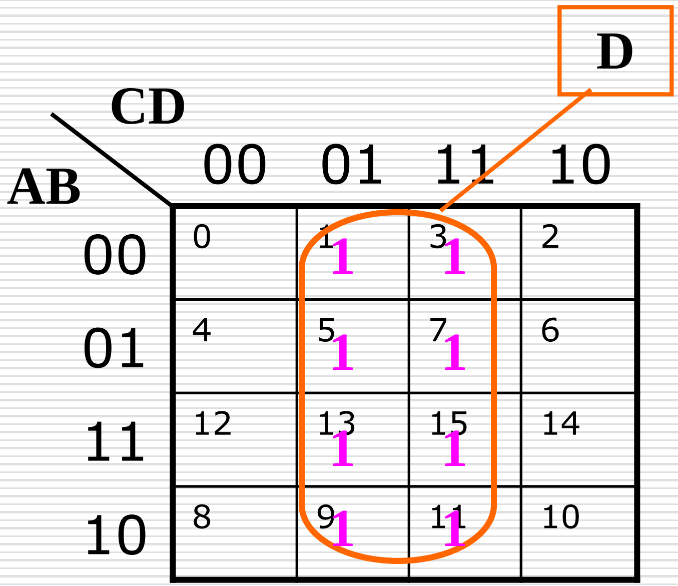
$\overline{B}\,C$

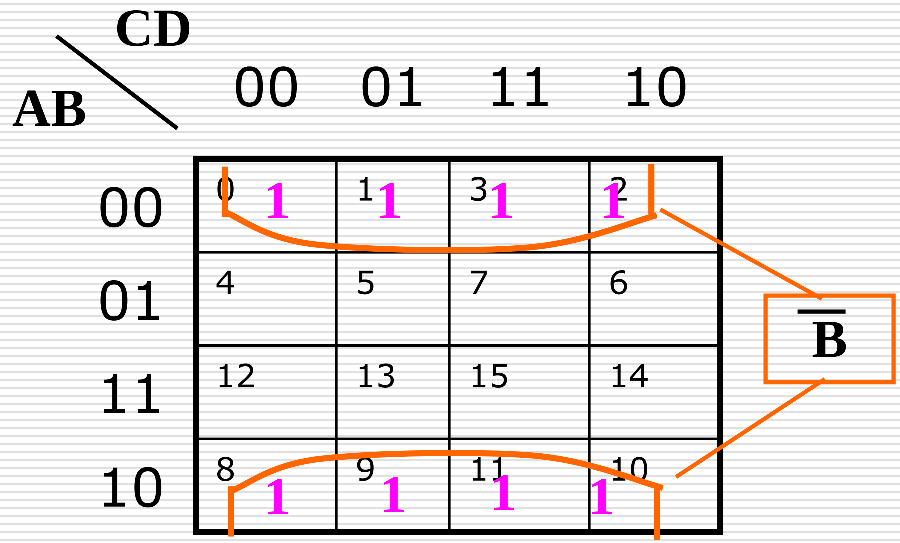
AB \ CD	00	01	11	10
00	0 1	1	3	2 1
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8 1	9	11	10 1

$\overline{B}\,\overline{D}$

*** 八个相邻小方格合并**

最小项为1的八个小方格合并成一项，就可消去三个变量。





➢ Karnaugh Maps（卡诺图）

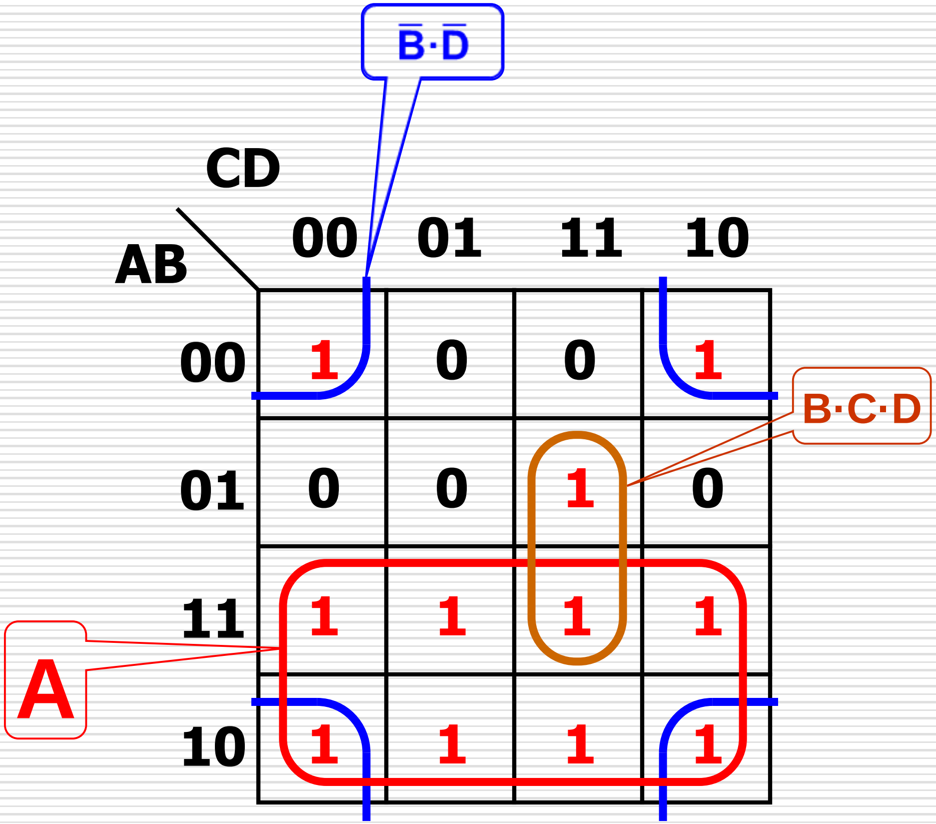
两个相邻项，可消去一个变量

四个相邻项，可消去两个变量

八个相邻项，可消去三个变量

2^n个相邻项，可消去n个变量

只能是2^n个相邻项可以合并。
不能3个，5个，6个，7个
相邻项合并。



➢ Karnaugh Maps (卡诺图)

卡诺图化简步骤

- 填写卡诺图

  可由真值表、标准和或标准积等来填写

  按最小项表达式填卡诺图，凡式中包含了的最小项，其对应方格填1，其余方格填0。

可以圈6个吗

- 圈组：找出相邻的1或0 (1: 最小项；0: 最大项)

  将相邻的1方格或0方格圈成一组(包围圈)，每一组含2^n个方格

  组(圈)内1或0的个数尽量多，组(圈) 数尽量少，确保所有1或0都被圈过

  如果需要，1或0可被圈多次

- 读图：若圈1，写出合并后的乘积项；若圈0，写出合并后的求和项

  消掉有变化的变量；保留无变化的变量

- 写出化简后的积之和表达式（圈1）或和之积（圈0）表达式

圈1：将所有包围圈对应的乘积项相加；　　圈0：将所有包围圈对应的和项相乘。

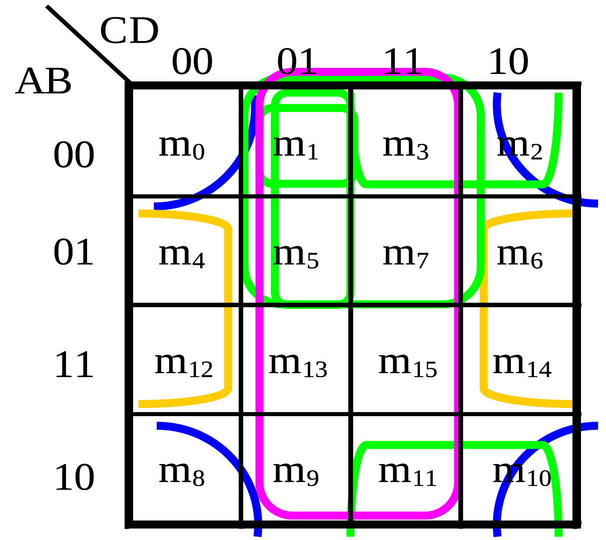
画包围圈时应遵循的原则：

（1）包围圈内的方格数一定是2^n个，且包围圈必须呈矩形。

（2）循环相邻特性包括上下底相邻，左右边相邻和四角相邻。

（3）同一方格可以被不同的包围圈重复包围多次，但新增的包围圈中一定要有原有包围圈未曾包围的方格。

（4） 一个包围圈的方格数要尽可能多，包围圈的数目要可能少。



单选题 2分

设置

已知：函数L对应的卡诺图如下图，请写出函数L的表达式（　　）

A $L(A,B,C,D)=\sum m(0,\ 2,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 13,\ 15)$

B $L(A,B,C,D)=\sum m(0,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 13,\ 15)$

C $L(A,B,C,D)=\sum m(0,\ 2,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 15)$

D $L(A,B,C,D)=\sum m(0,\ 2,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 13,\ 15)$

提交

L, C, B, A, D

1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1

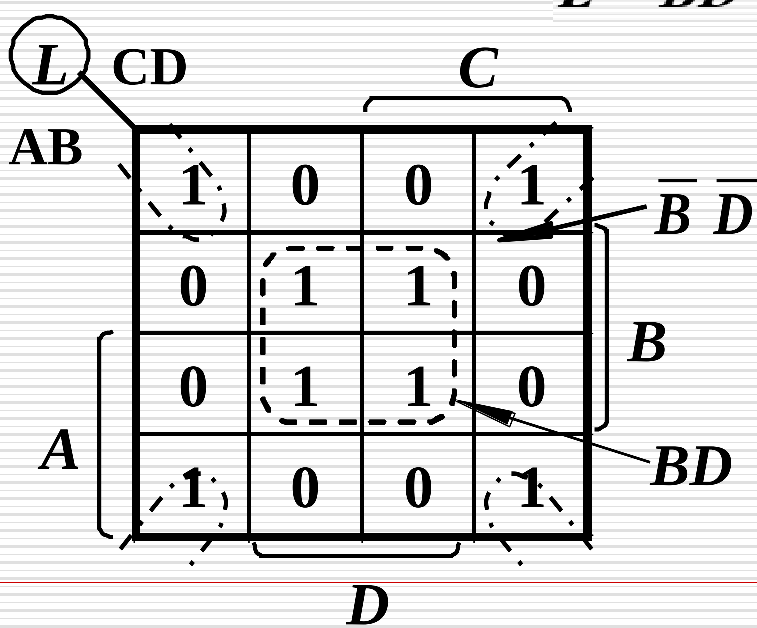
例 :用卡诺图法化简下列逻辑函数

$$L(A,B,C,D)=\sum m(0,2,5,7,8,10,13,15)$$

解：(1) 由L 画出卡诺图

（2）画包围圈合并最小项，得最简与-或表达式

$$L=BD+\overline{B}\,\overline{D}$$



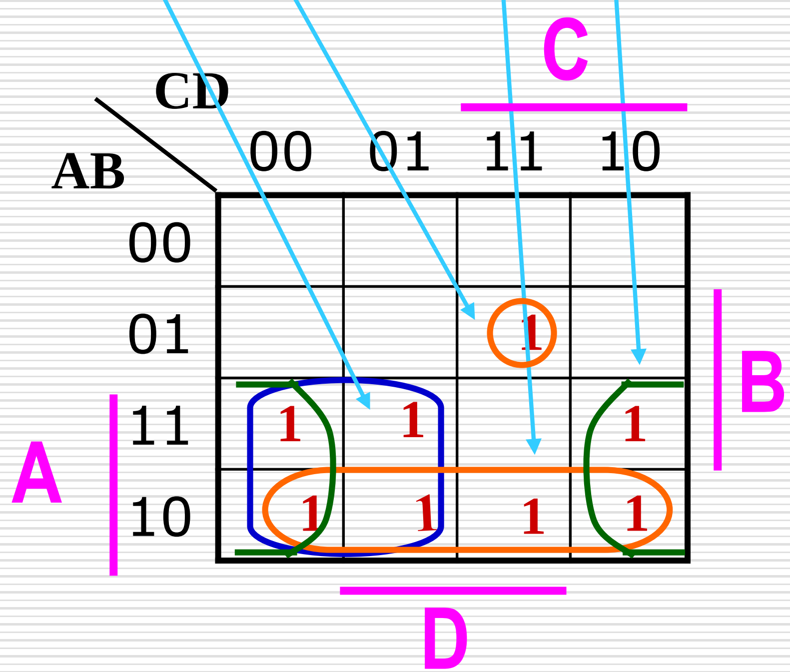
AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

例 试用卡诺图化简法求逻辑表达式

$F(A, B, C, D) = AB\overline{C}D + \overline{A}BCD + A\overline{B} + A\overline{D}$ 的**最简**与或表达式

。

解：



化简的原则：用尽可能少的极大圈将所有的“1”圈掉

1、先用极大圈覆盖尽可能多的 “1”

（即先合并大的圈）

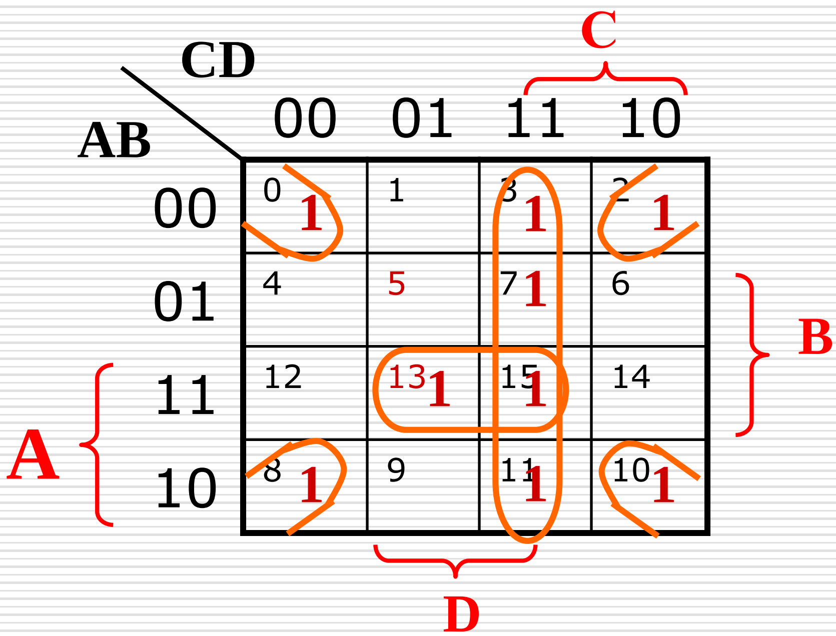
2、圈的个数尽可能少。

$$F(A, B, C, D) = \overline{A}BCD + A\overline{B} + A\overline{D} + A\overline{C}$$

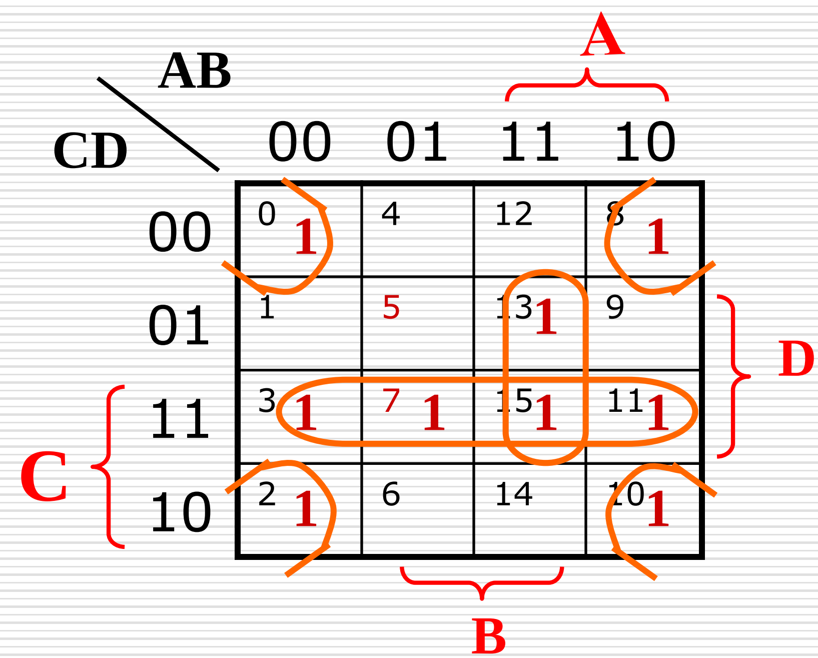
例

试用卡诺图化简法求逻辑表达式

$F(A,B,C,D)=\sum(0,2,3,7,8,10,11,13,15)$ 的最简与或表达式。



$F=ABD+CD+\overline{B}\,\overline{D}$



$F=ABD+CD+\overline{B}\,\overline{D}$

说明：左图中AB在下方。右图中AB在上方。注意每个变量的区域。两张卡诺图中，变量放置位置不同，但是化简结果是相同的。

例：　用卡诺图化简

$$L(A,B,C,D)=\sum m(0\sim 3,5\sim 7,8\sim 11,13\sim 15)$$

圈1

AB \ CD (L)	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1

$\overline{B}$

D

C

L=D+C+$\overline{B}$

圈0

AB \ CD (L)	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	1

$$\overline{L}=B\overline{C}\,\overline{D}$$

L=D+C+$\overline{B}$

➢ Karnaugh Maps (卡诺图)　Example

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	1
01		1	1	1
11		1		1
10		1	1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	1
01		1	1	1
11		1		1
10		1	1	1

化简结果不一定唯一，但代价相同