合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A) 参 考 答 案

2020～2021 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3 课程性质:必修 考试形式: 闭卷

专业班级（教学班）＿＿＿＿ 考试日期 2021 年 1 月 14 日 10:20—12:20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿

一、填空题(每小题 3 分)

1. 0.6； 2. $\frac{1}{2}$； 3. $1-e^{-2}$； 4. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$； 5. $\Phi(\frac{1}{2})$.

二、选择题(每小题 3 分)

1. A； 2. C； 3. D； 4. B； 5. B.

三、(10 分)【解】(1) 记 A：顾客买下该箱玻璃杯，B_k：该箱含有 k 只次品，$k=0,1,2$，则有

$P(B_0)=0.8$，$P(B_1)=0.1$，$P(B_2)=0.1$，

(I) $P(A)=\sum_{k=0}^{2}P(B_k)P(A\mid B_k)=0.8+0.1\times\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}+0.1\times\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\frac{448}{475}=0.94$；

(II) $P(B_0\mid A)=\frac{P(AB_0)}{P(A)}=\frac{95}{112}=0.85$.

四、(12 分)【解】(I) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^3 kx^2dx=9k=1\Rightarrow k=\frac{1}{9}$；

(II) $P\{X\le Y\}=P\{X\le 1\}+P\{1<X<2\}=\int_0^2\frac{x^2}{9}dx=\frac{8}{27}$；

(III) $EY=\int_0^1 2\frac{1}{9}x^2dx+\int_1^2 x\frac{1}{9}x^2dx+\int_2^3 1\frac{1}{9}x^2dx=\frac{43}{36}$.

五、(14 分)【解】(I) 因为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y\le 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$

由 X 与 Y 相互独立，得 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(II) $P\{U=0\}=P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$，$P\{U=1\}=P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$，

所以 $U\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$P\{V=0\}=P\{X>Y\}=\iint\limits_{x>y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 2y\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$；

$P\{V=1\}=P\{X\le Y\}=1-P\{V=0\}=\frac{2}{3}$.

所以 $V\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

(III) $P\{U=0,\ V=0\}=P\left\{X\le\frac{1}{2},\ X>Y\right\}=\iint\limits_{x\le\frac{1}{2},\ x>y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x 2y\mathrm{d}y=\frac{1}{24}$，

$P\{U=0,\ V=1\}=P\left\{X\le\frac{1}{2},\ X\le Y\right\}=P\{U=0\}-P\{U=0,\ V=0\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}=\frac{11}{24}$，

$P\{U=1,\ V=0\}=P\left\{X>\frac{1}{2},\ X>Y\right\}=P\{V=0\}-P\{U=0,\ V=0\}=\frac{1}{3}-\frac{1}{24}=\frac{7}{24}$，

$P\{U=1,\ V=1\}=P\left\{X>\frac{1}{2},\ X\le Y\right\}=P\{V=1\}-P\{U=0,\ V=1\}=\frac{2}{3}-\frac{11}{24}=\frac{5}{24}$，

所以

U \ V	0	1	$p_{i\bullet}$
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{2}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

六、(12 分)【解】(I) (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

$=\begin{cases}\int_0^x 8xydy=4x^3, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(II) 当 $0<x<1$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$$=\begin{cases}\dfrac{2y}{x^2}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

七、**(12 分)【解】**(I) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}x\cdot\dfrac{\theta}{x^{\theta+1}}\mathrm{d}x=\theta\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{\theta}}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta}{\theta-1}$,

令 $E(X)=\overline{X}$, 解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

(II) 似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\theta}{x_i^{\theta+1}}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{-(\theta+1)}$, 当 $x_i>1, i=1,2,\cdots,n$ 时,

$\ln L(\theta)=n\ln\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$, $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$,

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$, 解得 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_L=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

八、**(10 分)【解】**(I) 由于 $X\sim N(1,1), Y\sim N(2,4)$, 且 X 与 Y 相互独立, 所以 Z 服从正态分布,

又 $EZ=-1, DZ=DX+DY=5$, 从而 $Z=X-Y\sim N(-1,5)$,

故 Z 的概率密度为 $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-\frac{(z+1)^2}{10}}$, $z\in(-\infty,+\infty)$.

(II) 由 $\dfrac{3X-3}{3}\sim N(0,1)$, $\dfrac{Y-2}{2}\sim N(0,1)$,

又 $\dfrac{3X-3}{3}$ 与 $\dfrac{Y-2}{2}$ 相互独立, 可得 $U=\dfrac{(3X-3)^2}{9}+\dfrac{(Y-2)^2}{4}\sim\chi^2(2)$,

所以 $a=\dfrac{1}{9}$, $b=\dfrac{1}{4}$.