习题(36)

36.1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{25}$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, 3.6^2)$ 的样本, $\overline{X}$ 为样本均值. 若区间 $[\overline{X}-1.411, \overline{X}+1.411]$ 作为 μ 的置信区间,则置信水平等于______.

36.2 对方差 σ^2 已知的正态总体来说,问需要抽取样本容量 n 为多大的样本,才能使总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度不大于 2δ ?

36.3 在测量人对某事物反应时间的试验中,假设反应时间 $X \sim N(\mu, 0.05^2)$ (单位:秒). 为了以 0.95 的置信水平保证对平均反应时间的估计误差不超过 0.01 秒,问:

1) 若用点估计来估计平均反应时间,则样本容量至少要取多少?

2) 若用区间估计来估计平均反应时间,则样本容量至少要取多少?

36.4 设总体 X 的方差为 1,根据来自总体 X 的容量为 100 的简单随机样本,测得样本均值为 5.求 X 的数学期望的置信水平近似等于 0.95 的置信区间.

习题(36)参考解答

36.1 解: 由 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$[\overline{X}-\frac{3.6}{\sqrt{25}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{3.6}{\sqrt{25}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}]=[\overline{X}-1.411, \overline{X}+1.411]$$

$$\frac{3.6}{\sqrt{25}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.411 \qquad u_{1-\frac{\alpha}{2}}=\frac{5}{3.6}\times 1.411\approx 1.96$$

$$1-\frac{\alpha}{2}=0.975 \qquad 1-\alpha=0.95.$$

所以,这个置信区间的置信水平是 0.95. ♣

36.2 解: 由 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}].$$

区间长度为 $2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.由题意,要求:

$$2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}\le 2\delta \qquad n\ge\frac{\sigma^2}{\delta^2}\cdot(u_{1-\frac{\alpha}{2}})^2.$$ ♣

36.3 解：以 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 表示 n 次反应时间的测量值，$\overline{X}$ 为样本均值,则 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{0.05/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

1) 本小题应理解为关于平均反应时间 μ 的点估计 $\overline{X}$ 的精度问题.由题意知,要确定 n,使得

$$P\{|\overline{X}-\mu| \le 0.01\} \ge 0.95 \qquad P\{|\frac{\overline{X}-\mu}{0.05/\sqrt{n}}| \le \frac{0.01}{0.05/\sqrt{n}}\} \ge 0.95$$

$$\frac{0.01}{0.05/\sqrt{n}} \ge u_{0.975} = 1.96$$

$$n \ge (5 \times 1.96)^2 = 96.04.$$

故样本容量至少要为 97 .

2) 由 μ 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间是

$$[\overline{X} - \frac{0.05}{\sqrt{n}} \cdot u_{0.975}, \overline{X} + \frac{0.05}{\sqrt{n}} \cdot u_{0.975}],$$

区间长度为 $2 \times \dfrac{0.05}{\sqrt{n}} \times u_{0.975} = \dfrac{0.1 \times 1.96}{\sqrt{n}}$.由题意知,要确定 n,使得

$$\frac{0.1 \times 1.96}{\sqrt{n}} \le 0.01 \qquad n \ge (10 \times 1.96)^2 = 384.16.$$

故样本容量至少要取 385 . ♣

36.4 解：由于 $1-\alpha = 0.95$，$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96$，$\sigma = 1$，$n = 100$，$\overline{X} = 5$,则数学期望 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的近似置信区间为

$$[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}] = [5 - \frac{1}{\sqrt{100}} \times 1.96,\ 5 + \frac{1}{\sqrt{100}} \times 1.96]$$

$$= [4.804,\ 5.196].$$ ♣