习 题(43)

43.1 某工厂近五年来发生了63次事故,按星期几分类如下:

星期	一	二	三	四	五	六
次数 n_i	9	13	8	8	13	12

在显著性水平$\alpha = 0.10$下,判断事故的发生是否与星期几有关?

43.2 在某路口50分钟内,观察每15秒钟内通过的汽车数X,得下表:

通过汽车数	0	1	2	3	4	≥ 5
频数 n_i	92	68	28	11	1	0

能否认为X服从Poisson分布(取$\alpha = 0.05$)?

43.3 在某地区的人口调查中发现15729245个男人中有3497个是聋哑人,16799031个女人中有3072个是聋哑人.试检验“聋哑人与性别无关”的假设(取$\alpha = 0.05$).

43.4 下表为某种药治疗感冒效果的列联表:

年龄 / 疗效	儿童	成年	老年	$n_{i\cdot}$
显著	58	38	32	128
一般	28	44	45	117
较差	23	18	14	55
$n_{\cdot j}$	109	100	91	300

试在显著性水平$\alpha = 0.05$下,判断该药的疗效是否与年龄有关?

习 题(43)参考解答

43.1 解: 引入随机变量X:

事件$\{X = i\}$表示事故发生在一星期的第i天, $i = 1,2,\cdots,6$.

由题意知,要检验

$$H_0: P\{X = i\} = \frac{1}{6},\ i = 1,2,\cdots,6; \qquad (H_1: H_0\text{不真})$$

取$r = 6$,用统计量

$$\eta \triangleq \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i^2}{n \cdot p_i} - n.$$

其中$n = 63$, n_i为表中次数; $p_i = \frac{1}{6}$, $i = 1,2,\cdots,6$; 且p_i不含未知参数.

在显著性水平α下，拒绝H_0的拒绝域：$\eta > \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$.

已知$\alpha = 0.10$，查表：$\chi^2_{1-\alpha}(r-1) = \chi^2_{0.90}(5) = 9.236$. 计算

$$\eta = \frac{1}{63\times\frac{1}{6}}\cdot(9^2+13^2+8^2+8^2+13^2+12^2)-63 \approx 2.8095 < 9.236,$$

故接受H_0，即认为事故的发生与星期几无关. ♣

43.2 解：用Pearson χ^2-检验法. 要检验

$$H_0: X \sim P(\lambda)\ ; \qquad (H_1: H_0\text{不真})$$

其中参数λ未知，此题中样本容量$n = 50\times 60/15 = 200$，λ的的极大似然估计为

$$\hat{\lambda} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i} i\cdot n_i$$

$$= \frac{1}{200}[0\times 92 + 1\times 68 + 2\times 28 + 3\times 11 + 4\times 1] = 0.805.$$

用检验统计量 $\eta = \sum_{i=0}^{4}\frac{n_i^2}{n\hat{p}_i} - n$；在显著性水平$\alpha$下，拒绝$H_0$的拒绝域：

$$\eta > \chi^2_{1-\alpha}(r-1-1).$$

取$r=5$，其中n_i为频数，$i = 0,1,2,3,4$，且

$$n_0 = 92,\ n_1 = 68,\ n_2 = 28,\ n_3 = 11,\ n_4(=1+0) = 1;$$

$$\hat{p}_i = P\{X = i\} = \frac{\hat{\lambda}^i}{i!}\cdot e^{-\hat{\lambda}} = \frac{0.805^i}{i!}\cdot e^{-0.805},\quad i = 0,1,2,3,$$

$$\hat{p}_4 = P\{X \ge 4\} = 1 - P\{X < 4\} = 1 - \sum_{i=0}^{3}\hat{p}_i.$$

计算得 $\hat{p}_0 = 0.4471$，$\hat{p}_1 = 0.3599$，$\hat{p}_2 = 0.1449$，$\hat{p}_3 = 0.0389$，$\hat{p}_4 = 0.0092$.

则得

$$\eta = \frac{1}{200}\left[\frac{92^2}{0.4471} + \frac{68^2}{0.3599} + \frac{28^2}{0.1449} + \frac{11^2}{0.0389} + \frac{1^2}{0.0092}\right] - 200$$
$$\approx 2.0438.$$

由$\alpha = 0.05$，得

$$\chi^2_{1-\alpha}(3) = \chi^2_{0.95}(3) = 7.815 > 2.0438 = \eta,$$

因此接受H_0,即认为通过的汽车数X服从Poisson分布. ♣

43.3 解: 题中数据可归纳为下表:

	聋哑人	非聋哑人	合计
男人个数	$n_{11}=3497$	$n_{12}=15725748$	$n_{1\cdot}=15729245$
女人个数	$n_{21}=3072$	$n_{22}=16795959$	$n_{2\cdot}=16799031$
合计	$n_{\cdot 1}=6569$	$n_{\cdot 2}=32521707$	$n=32528276$

用独立性检验方法. 要检验假设

H_0: 聋哑人与性别无关;　　　($H_1:H_0$ 不真)

用统计量

$$\eta=n\cdot(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}-1).$$

在显著性水平α下,拒绝H_0的拒绝域: $\eta>\chi^2_{1-\alpha}(\,(r-1)(s-1)\,)$.

由题意知$r=2,s=2$,及$\alpha=0.05$,查表: $\chi^2_{1-\alpha}(\,(r-1)(s-1)\,)=\chi^2_{0.95}(1)=3.841$.

计算统计量

$$\eta=n\times[\frac{n_{11}^2}{n_{1\cdot}n_{\cdot 1}}+\frac{n_{12}^2}{n_{1\cdot}n_{\cdot 2}}+\frac{n_{21}^2}{n_{2\cdot}n_{\cdot 1}}+\frac{n_{22}^2}{n_{2\cdot}n_{\cdot 2}}-1]$$

$$=32528276\times[\frac{3497^2}{15729245\times 6569}+\frac{15725748^2}{15729245\times 32521707}$$

$$+\frac{3072^2}{16799031\times 6569}+\frac{16795959^2}{16799031\times 32521707}-1]$$

$$=62.636>3.841,$$

所以拒绝H_0,即认为聋哑人与性别有关. ♣

43.4 解: 用独立性检验方法.要检验

H_0: 该药的疗效与年龄无关 ;　　　($H_1:H_0$ 不真)

用统计量

$$\eta=n\cdot(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}-1).$$

在显著性水平α下,拒绝H_0的拒绝域: $\eta>\chi^2_{1-\alpha}(\,(r-1)(s-1)\,)$.

由题意知，取 $r=3, s=3$, 由 $\alpha=0.05$, 查表得

$$\chi_{1-\alpha}^{2}((r-1)(s-1))=\chi_{0.95}^{2}(4)=9.488.$$

由题中数据 n_{ij}，得

$$\begin{aligned}\eta=300\times[&\frac{58^2}{109\times128}+\frac{38^2}{100\times128}+\frac{32^2}{91\times128}+\frac{28^2}{109\times117}+\frac{44^2}{100\times117}\\&+\frac{45^2}{91\times117}+\frac{23^2}{109\times55}+\frac{18^2}{100\times55}+\frac{14^2}{91\times55}]-300\\=13.586>9.488&\end{aligned}$$

所以拒绝 H_0, 即认为该药的疗效与年龄有关. ♣