# 习题(31)

**31.1** 从总体 $N(240, 20^2)$ 中独立地进行两次抽样,容量分别为 36 和 49,那么这两个样本均值之差的绝对值不超过 10 的概率是多少?

**31.2** 在总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取容量为 16 的样本, $\mu, \sigma^2$ 均未知, $S^2$ 为样本方差.

1) 求 $P\{\frac{S^2}{\sigma^2} \le 2.0385\}$;

2) 求 $D(S^2)$.

**31.3** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本,则当常数 $c =$ ______ 时,使统计量 $\dfrac{c(X_1 + X_2)}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}}$ 服从 $t$-分布.

**31.4** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自总体 $N(0, 4^2)$ 的样本,记 $Y = \frac{1}{5}\sum_{i=5}^{9} X_i$ .若统计量

$$a X_1^2 + b(X_2 + X_3 + X_4)^2 + c\sum_{i=5}^{9}(X_i - Y)^2$$

服从自由度为 6 的 $\chi^2$-分布,则常数 $a, b, c$ 应满足的条件是 【 】

(A) $a = 16,\ b = 48,\ c = 16$. (B) $a = \frac{1}{16},\ b = \frac{1}{48},\ c = \frac{1}{16}$.

(C) $a = \frac{1}{16},\ b = \frac{1}{48},\ c = 0$. (D) $a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{12},\ c = \frac{1}{4}$.

# 习题(31)参考解答

**31.1 解:** 已知总体为 $N(240, 20^2)$,两组相互独立的样本记为

$$X_1, \cdots, X_{n_1},\ n_1 = 36,\ \overline{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i;\ Y_1, \cdots, Y_{n_2},\ n_2 = 49,\ \overline{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i.$$

则

$$\overline{X}\sim N(240\,,\frac{400}{36})\,,\ \overline{Y}\sim N(240\,,\frac{400}{49})\,,$$

且 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立.于是,有

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,(\frac{1}{36}+\frac{1}{49})\times 400)\qquad u\triangleq\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{10\times\sqrt{85}}{21}}\sim N(0\,,1)\,.$$

则所求概率为

$$P\{|\,\overline{X}-\overline{Y}\,|\le 10\,\}=P\{\frac{|\,\overline{X}-\overline{Y}\,|}{\frac{10\times\sqrt{85}}{21}}\le\frac{10}{\frac{10\times\sqrt{85}}{21}}\}=P\{|\,u\,|\le\frac{21}{\sqrt{85}}\}$$

$$=\Phi(\frac{21}{\sqrt{85}})-\Phi(-\frac{21}{\sqrt{85}})=2\cdot\Phi(\frac{21}{\sqrt{85}})-1$$

$$\approx 2\cdot\Phi(2.28)-1\ \text{(查表得:)}$$

$$\approx 2\times 0.9887-1=0.9774\,.$$ ♣

**31.2 解:** 1) 由 $\frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ ,已知 $n=16$ $\quad Y\triangleq\frac{15\cdot S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(15)$ .则

$$P\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.0385\,\}=P\{\frac{15\times S^2}{\sigma^2}\le 15\times 2.0385\,\}=P\{Y\le 30.5775\}=0.99\ .\text{(查表得)}$$

2) 由 $\frac{15\cdot S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(15)$ ,则

$$D(\frac{15\cdot S^2}{\sigma^2})=2\times 15\qquad \frac{15^2}{\sigma^4}\times D(S^2)=2\times 15\qquad D(S^2)=\frac{2}{15}\cdot\sigma^4\,.$$ ♣

**31.3 解:** 由 $X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2)$ , $\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)$, 且它们相互独立,则

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}=\frac{(X_1+X_2)/(\sqrt{2}\,\sigma)}{\sqrt{\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{\sigma^2}\Big/3}}\sim t(3)\,.$$

再注意到,若 $T\sim t(3)$ $\quad -T\sim t(3)$ .则 $c=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ . ♣

**31.4 解** 由

$$(\frac{X_1}{4})^2\sim\chi^2(1)\,,\ (\frac{X_2+X_3+X_4}{\sqrt{3}\times 4})^2\sim\chi^2(1)\,,\ \frac{1}{4^2}\cdot\sum_{i=5}^{9}(X_i-Y)^2\sim\chi^2(4)\,,$$

且以上三个随机变量相互独立,由 $\chi^2$-分布的独立可加性,则

$$\frac{1}{4^2}\cdot X_1^2+\frac{1}{3\times 4^2}\cdot(X_2+X_3+X_4)^2+\frac{1}{4^2}\cdot\sum_{i=5}^{9}(X_i-Y)^2\sim\chi^2(6)\,.$$

所以,常数 $a,b,c$ 应分别为

$$a=\frac{1}{16},\ b=\frac{1}{48},\ c=\frac{1}{16}.$$

故答案应为(B). ♣