习题(18)

18.1 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则 【 】

(A) $P\{X+Y\le 0\}=0.5$． (B) $P\{X+Y\le 1\}=0.5$．

(C) $P\{X-Y\le 0\}=0.5$． (D) $P\{X-Y\le 1\}=0.5$．

18.2 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，Y 服从 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布，试求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数(计算结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 表示.)

18.3 设随机变量 X,Y 相互独立，均服从区间(0,3)上的均匀分布，令 $Z=\frac{X}{Y}$，试求随机变量 Z 的密度函数 $f_Z(z)$ 和分布函数 $F_Z(z)$．

18.4 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} x\cdot e^{-y}, & 0<x<y<+\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

令 $W=\frac{X}{Y}$，求随机变量 W 的密度函数 $f_W(z)$．

习题(18)参考解答

18.1 解： 由 $X+Y\sim N(1,2)$，$X-Y\sim N(-1,2)$，则

$$P\{X+Y\le 1\}=0.5,\ P\{X-Y\le -1\}=0.5.$$

所以答案应为(B). ♣

18.2 解： 已知 X 与 Y 相互独立，且

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & -\pi<y<\pi \\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

由卷积公式,则 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\cdot f_Y(y)dy=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy \ (\text{令 } t=\frac{z-y-\mu}{\sigma},\text{得:})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\times(-1)\,dt=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot[\Phi(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma})],\quad -\infty<z<+\infty.$$ ♣

18.3 解法1: 由题意知 X,Y 相互独立,且密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0<x<3 \\ 0, & \text{其他}\end{cases};\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0<y<3 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

则随机变量 Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(zy)\cdot f_Y(y)\cdot|y|\,dy=\int_0^3 f_X(zy)\cdot\frac{1}{3}\cdot y\,dy.$$

当 $z\le 0$ 时,则 $f_Z(z)=0$;

当 $0<z\le 1$ 时,则 $f_Z(z)=\int_0^3\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot y\,dy=\frac{1}{2}$;

当 $z>1$ 时,则 $f_Z(z)=\int_0^{3/z}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot y\,dy=\frac{1}{2z^2}$.

所以,随机变量 Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0 \\ \dfrac{1}{2}, & 0<z\le 1 \\ \dfrac{1}{2z^2}, & z>1\end{cases}.$$

由 $F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} f_Z(y)dy$,则当 $z\le 0$ 时,有 $F_Z(z)=0$;

当 $0<z\le 1$ 时,有 $F_Z(z)=\int_0^z\frac{1}{2}dy=\frac{z}{2}$;

当 $z>1$ 时,有 $F_Z(z)=\int_0^1 \frac{1}{2}dy+\int_1^z \frac{1}{2y^2}dy=1-\frac{1}{2z}$.

综上所述,得 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{z}{2}, & 0<z\le 1\\ 1-\frac{1}{2z}, & z>1\end{cases}.$$

解法 2: 由题意知, X,Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{9}, & 0<x<3,0<y<3\\ 0, & 其他\end{cases},$$

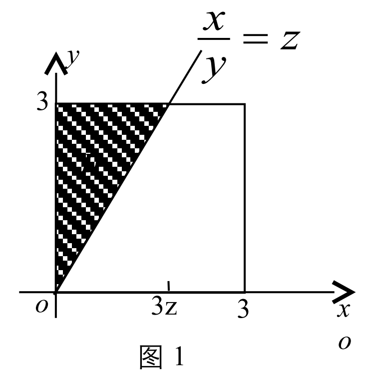

图 1

随机变量 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\frac{X}{Y}\le z\}=\iint_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)dxdy.$$

当 $z\le 0$ 时, $F_Z(z)=0$; 当 $0<z\le 1$ 时(见图 1),有

$$F_Z(z)=\iint_D \frac{1}{9}dxdy=\frac{1}{9}\cdot(\frac{1}{2}\times 3\times 3z)=\frac{z}{2};$$

当 $z>1$ 时(见图 2),则

$$F_Z(z)=1-\iint_{\frac{x}{y}>z} f(x,y)dxdy=1-\iint_D \frac{1}{9}dxdy$$

$$=1-\frac{1}{9}\cdot(\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{z})=1-\frac{1}{2z}.$$

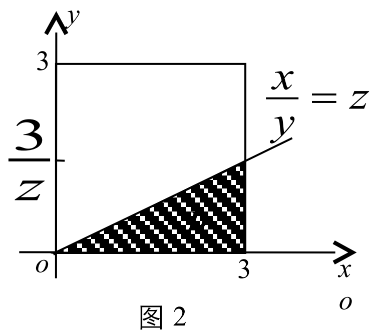

图 2

所以,得 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{z}{2}, & 0<z\le 1\\ 1-\frac{1}{2z}, & z>1\end{cases}.$$

再由 $f_Z(z)=(F_Z(z))'_z$,则得 Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{1}{2}, & 0<z\le 1\\ \frac{1}{2z^2}, & z>1\end{cases}.$$

♣

18.4 解: 由 $f_W(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(yz,y)\cdot|y|\,dy=\int_{0}^{+\infty} f(yz,y)\cdot y dy$,注意到,当 $z\le 0$,或 $z\ge 1$ 时,有

$$f_W(z)=0.$$

而当 $0<z<1$ 时,

$$f_W(z)=\int_0^{+\infty} z\,y\cdot e^{-y}\cdot y\,dy=z\int_0^{+\infty} y^2\cdot e^{-y}\,dy=2z.$$

则 W 的密度函数

$$f_W(z)=\begin{cases}2z\ , & 0<z<1\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}.$$

♣