习题(15)

15.1 在一个袋中装有n个球,其中有n_1个红球,n_2个白球,且$n_1+n_2\le n$,现从中任意取出个球r($r\le n_1,n_2$)个球,以X表示取出的红球个数,Y表示取出的白球个数,求随机变量(X,Y)的联合分布律及边缘分布律.

15.2 设离散型随机向量(X,Y)的联合分布律为:

$$P\{X=n,Y=m\}=\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda},\ m=0,1,2,\cdots n;\ n=0,1,2,\cdots.$$

试求边缘分布律.

15.3 设随机向量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{c}{(1+x+y)^n}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\quad (\text{其中}\ n>2)$$

试确定常数c,并求边缘密度函数.

15.4 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}3y, & 0<x<2,\ 0<y<\dfrac{x}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

试求边缘密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$.

习题(15)参考解答

15.1 解: 根据古典概型求概率的公式,则(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=k,\ Y=l\}=\frac{\binom{n_1}{k}\cdot\binom{n_2}{l}\cdot\binom{n-n_1-n_2}{r-k-l}}{\binom{n}{r}},\quad \begin{matrix}k,l=0,1,\cdots,r,\\ r+n_1+n_2-n\le k+l\le r\end{matrix}.$$

边缘分布律(由超几何分布得)分别为

$$P\{X=k\}=\frac{\binom{n_1}{k}\cdot\binom{n-n_1}{r-k}}{\binom{n}{r}}，\ k=0,1,\cdots,r.$$

$$(\text{或}=\sum_{l=0}^{r-k}P\{X=k\ ,\ Y=l\}=\sum_{l=0}^{r-k}\frac{\binom{n_1}{k}\cdot\binom{n_2}{l}\cdot\binom{n-n_1-n_2}{r-k-l}}{\binom{n}{r}})$$

$$P\{Y=l\}=\frac{\binom{n_2}{l}\cdot\binom{n-n_2}{r-l}}{\binom{n}{r}}，\ l=0,1,\cdots,r.$$

♣

15.2 解：由 (X,Y) 的可能取值如下表:

X / Y	0	1	2	3	$\cdots$
0	*	*	*	*	$\cdots$
1		*	*	*	$\cdots$
2			*	*	$\cdots$
3				*	$\ddots$
$\vdots$					$\ddots$

则边缘分布律分别为

$$P\{X=n\}=\sum_{m=0}^{\infty}P\{X=n,Y=m\}=\sum_{m=0}^{n}P\{X=n,Y=m\}$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\cdot\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\times p^m\times(1-p)^{n-m}$$

$$=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}，\ n=0,1,2,\cdots.$$

即得 $X\sim P(\lambda)$.

$$P\{Y=m\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X=n,Y=m\}=\sum_{n=m}^{\infty}P\{X=n,Y=m\}$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}=\frac{(\lambda p)^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}\cdot\sum_{n=m}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{n-m}}{(n-m)!}$$

$$=\frac{(\lambda p)^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{l}}{l!}=\frac{(\lambda p)^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}\cdot e^{\lambda(1-p)}$$

$$= \frac{(\lambda p)^m}{m!} \cdot e^{-\lambda p},\ \ m = 0,1,2,\cdots.$$

即得 $Y \sim P(\lambda p)$.　　　　　　　　　　　　　　　　♣

15.3 解：由

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} \frac{c}{(1+x+y)^n}dxdy = \int_{0}^{+\infty}\left(\frac{c}{-n+1}\cdot\frac{1}{(1+x+y)^{n-1}}\Bigg|_{0}^{+\infty}\right)dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty}\frac{c}{n-1}\cdot\frac{1}{(1+x)^{n-1}}dx = \frac{c}{(n-1)(n-2)}$$

$c = (n-1)(n-2)$.

当 $x > 0$ 时,有

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{+\infty}\frac{(n-1)(n-2)}{(1+x+y)^n}dy = \frac{n-2}{(1+x)^{n-1}};$$

当 $x \le 0$ 时,有 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = 0$.

所以,得 X 的边缘密度函数为

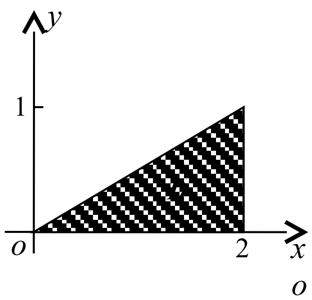
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{n-2}{(1+x)^{n-1}} & , & x > 0 \\ 0 & , & x \le 0 \end{cases}.$$

同理,得 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{n-2}{(1+y)^{n-1}} & , & y > 0 \\ 0 & , & y \le 0 \end{cases}.$$　　　　　　　　　　♣

15.4 解：记 $D = \{(x,y)\,|\,0 < x < 2\,,\,0 < y < \frac{x}{2}\}$ (如图),则

$$f(x,y) = \begin{cases} 3y & , & (x,y) \in D \\ 0 & , & \text{其他} \end{cases}.$$



由 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$,则

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{0}^{x/2} 3y\,dy & , & 0 < x < 2 \\ 0 & , & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad 其他 \end{cases};$$

同理,由 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$,则

$$f_Y(y)=\begin{cases} \int_{2y}^{2} 3y\,dx & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad 其他 \end{cases} = \begin{cases} 6y(1-y) & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad 其他 \end{cases}. \quad ♣$$