习题(12)

12.1 已知随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

试求随机变量 $Y = X^2 + X$ 的分布律.

12.2 设随机变量 $X \sim N(-3, 5^2)$,令 $Y = -2(X+3)$,试指出随机变量 Y 的分布.

12.3 设随机变量 X 的密度函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \le 0 \end{cases}$,试求 $Y = e^X$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

12.4 设随机变量 X 的密度函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\pi^2} & , \ 0 < x < \pi \\ 0 & , \ \text{其他} \end{cases}$,令 $Y = \sin X$,试求随机变量 Y 的密度函数.

习题(12)参考解答

12.1 解: 由 X 的分布律及随机变量 $Y = X^2 + X$,可列表如下:

X	-2	-1	0	1	2
X 的分布律 $\{p_k\}$	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3
$Y = X^2 + X$	2	0	0	2	6

则知随机变量 Y 的可能取值为:0,2,6,且有

$$P\{Y=0\} = P\{X^2 + X = 0\} = P\{X = -1\} + P\{X = 0\} = 0.1 + 0.1 = 0.2,$$

$$P\{Y=2\} = P\{X^2 + X = 2\} = P\{X = -2\} + P\{X = 1\} = 0.2 + 0.3 = 0.5,$$

$$P\{Y=6\} = P\{X^2 + X = 6\} = P\{X = 2\} = 0.3.$$

得随机变量 Y 的分布律为

Y	0	2	6
q_k	0.2	0.5	0.3

♣

12.2 解: 由 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b$, $a \neq 0 \Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

已知 $X \sim N(-3, 5^2)$, $Y = -2X - 6$,则

$$Y \sim N(-2 \times (-3) + (-6), (-2)^2 \times 5^2) ,$$

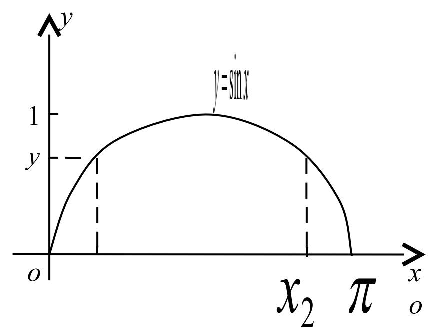
即得 $\quad Y \sim N(0, 100)$. ♣

12.3 解: 由于函数 $y = e^x$ 单调可导,反函数 $x = h(y) = \ln y$,当 $y > 1$ 时.则

$$f_Y(y) = f(h(y)) \cdot |h'(y)| = \begin{cases} \frac{1}{y} \times \frac{1}{y} & , \ y > 1 \\ 0 & , \ y \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & , \ y > 1 \\ 0 & , \ y \leq 1 \end{cases} .$$ ♣

12.4 解 由 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\sin X \leq y\}$,则

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \ y \leq 0 \\ 1 & , \ y \geq 1 \end{cases} .$$



而当 $0 < y < 1$ 时,如图,记

$$x_1 = \arcsin y , \quad x_2 = \pi - x_1 ,$$

则

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{\sin X \leq y\} \\ &= P\{X \leq x_1\} + P\{X \geq x_2\} \\ &= \int_0^{x_1} \frac{2x}{\pi^2} dx + \int_{x_2}^{\pi} \frac{2x}{\pi^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi^2}(x_1^2 + \pi^2 - x_2^2) = \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin y . \end{aligned}$$

由 $f_Y(y) = (F_Y(y))'_y$,则随机变量 Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} & , \ 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{其他} \end{cases} .$$ ♣