习题(32)

32. 1 使用一测量仪器对同一值进行了 12 次独立测量,其结果为(单位:mm)

232.50 232.48 232.15 232.52 232.53 232.30

232.48 232.05 232.45 232.60 232.47 232.30

用矩估计法估计测量的真值和方差(设仪器无系统误差).

32. 2 从一大批产品中随机抽取 50 件,经检测得合格品 48 件,求该批产品合格品率 p 的矩估计值.

32. 3 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}\cdot(\theta-x) & , \quad 0<x<\theta \\ 0 & , \quad \text{其他}\end{cases},$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 X 的样本,试求未知参数 θ 的矩估计量.

32. 4 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ ($0<\theta<\dfrac{1}{2}$)是未知参数,利用总体 X 的如下样本值:

3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3.

试求 θ 的矩估计值.

习题(32)参考解答

32. 1 解: 设 μ 为待测量的真值,则测量值 X_i 与 μ 有以下关系式:

$$X_i=\mu+\varepsilon_i\,,E(\varepsilon_i)=0\,,D(\varepsilon_i)=\sigma^2\,,i=1,2,\cdots,12\,,$$

且 $X_1,X_2,\cdots,X_{12}$ 相互独立.故 μ 和 σ^2 的矩估计值分别为

$$\hat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}X_i=232.4025\,,$$

$$\hat{\sigma}^2=S_n^2=\frac{1}{12}\cdot\sum_{i=1}^{12}(X_i-\overline{X})^2=0.02554\,.$$ ♣

32. 2 解: 注意到,事件发生的频率是事件发生的概率的矩估计.则合格品率 p 的矩估计值为

$$\hat{p}=\frac{48}{50}=0.96\,.$$ ♣

注： 此问题是看成对总体 $X\sim b(1,p)$ (两点分布)抽取容量为 50 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{50}$，则合格品率 p 的矩估计 $\hat{p}=\overline{X}=\dfrac{48}{50}=0.96$. ♣

32.3 解： 由

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x\,;\theta)dx=\int_0^{\theta}x\cdot\frac{2}{\theta^2}(\theta-x)\,dx=\frac{2}{\theta^2}(\frac{\theta}{2}x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^{\theta}=\frac{\theta}{3},$$

根据矩估计方法，令

$$\overline{X}=E(X)\qquad \overline{X}=\frac{\theta}{3}.$$

解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=3\overline{X}$. ♣

32.4 解： 由

$$E(X)=\sum_i x_i\cdot p_i=0\times\theta^2+1\times 2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta,$$

令

$$E(X)=\overline{X}\qquad 3-4\theta=\overline{X},$$

解得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}(3-\overline{X})$.而

$$\overline{X}=\frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2,$$

则得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}$. ♣