习题(21)

21.1 有 3 个球,4 个盒子,盒子的编号为 $1, 2, 3, 4$.将球逐个独立地,随机地放入 4 个盒子中去,以 X 表示其中至少有一个球的盒子的最小号码(例如: $X=3$ 表示第 1 号、第 2 号盒子是空的,第 3 号盒子至少有一个球.).试求 $E(X)$.

21.2 设随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases} x & , \ 0 \le x < 1 \\ 2-x & , \ 1 \le x < 2 \\ 0 & , \quad \text{其他} \end{cases}$,试求 $E(X)$.

21.3 某工厂生产线上产品的合格率为 0.85,不合格的产品中有 4/5 的产品可进行再加工,且再加工的合格率为 0.6,其余均为废品.已知一件合格产品可获利 100 元,一件废品亏损 50 元,则该工厂生产一件产品的平均利润是 【 】

(A) 100 元. (B) 50 元. (C) 92.5 元. (D) 88.3 元.

21.4 用天平称某种物品的重量(砝码仅允许放在一个秤盘中),物品的重量为 1,2,⋯,10 克的概率是相同的.现在有三组砝码:

甲组: 1,2,2,5,10 克; 乙组: 1,2,3,4,10 克; 丙组: 1,1,2,5,10 克.

称重时只能使用一组砝码.问用哪组砝码称重所用的平均砝码个数最少?

习题(21)参考解答

21.1 解: 由题意知,随机变量 X 的可能取值为: $1, 2, 3, 4$,且

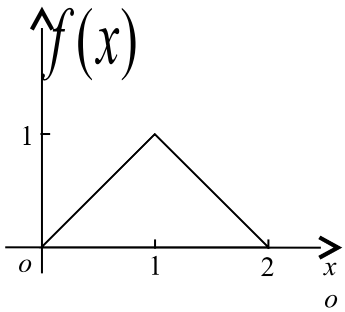
$$P\{X=4\}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}, \qquad P\{X=3\}=\frac{2^3-1}{4^3}=\frac{7}{64},$$

$$P\{X=2\}=\frac{3^3-2^3}{4^3}=\frac{19}{64}, \quad P\{X=1\}=\frac{4^3-3^3}{4^3}=\frac{37}{64}.$$

则

$$E(X)=\sum_{k=1}^{4} k\cdot P\{X=k\}=1\times\frac{37}{64}+2\times\frac{19}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{25}{16}. \qquad ♣$$

21.2 解: 由于 $f(x)$ 是分段表达式(如图),则



$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$$

$$=\int_0^1 x\cdot x dx+\int_1^2 x\cdot(2-x)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+(x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_1^2$$

$$=1\,.$$ ♣

21.3 解：进行再加工后,一件产品合格的概率为

$$p=0.85+0.15\times\frac{4}{5}\times 0.6=0.922\,.$$

则一件产品的平均利润为

$$100\times 0.922-50\times(1-0.922)=88.3\,(元).$$

所以答案应为(D). ♣

21.4 解：以W表示物品的重量,则

$$P\{W=k\}=\frac{1}{10},\ k=1,2,\cdots,10\,.$$

用各组砝码称物品重量所用砝码如下表:

物品的重量W	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲组所用砝码	1	2	1,2	2,2	5	1,5	2,5	1,2,5	2,2,5	10
乙组所用砝码	1	2	3	4	1,4	2,4	3,4	1,3,4	2,3,4	10
丙组所用砝码	1	2	1,2	1,1,2	5	1,5	2,5	1,2,5	1,1,2,5	10

用甲组、乙组、丙组砝码称物品重量所使用的砝码个数分别记为X,Y,Z,则分别得随机变量X,Y,Z的分布律为

X	1	2	3
p_k	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$

Y	1	2	3
q_k	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

Z	1	2	3	4
r_k	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

且有

$$E(X)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{4}{10}+3\times\frac{2}{10}=1.8\,(个),$$

$$E(Y)=1\times\frac{5}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}=1.7\,(个),$$

$$E(Z)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=2.0\text{ (个)}.$$

由上得 $E(Y)$ 最小,即得用乙组砝码称物品重量所用的平均砝码个数最少. ♣