习题(20)

20.1 设平面区域D由曲线$y=\dfrac{1}{x}$及直线$y=0,x=1,x=e^2$所围成,二维随机变量(X,Y)在区域D上服从均匀分布,则(X,Y)关于X的边缘概率密度在$x=2$处的值为______.

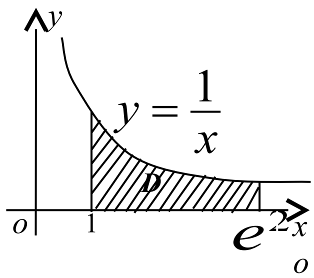
20.2 设随机向量(X,Y)在由曲线:$y=x^2$, $y=x$所围成的区域D内服从均匀分布,试写出(X,Y)的联合密度函数与边缘密度函数.

20.3 设随机向量$(X,Y)\sim N(0,1,4,1,\dfrac{1}{2})$,试求条件密度函数$f_{Y|X}(y\mid x)$.

习题(20)参考解答

20.1 解: 如图,由区域D的面积为$\int_1^{e^2}\dfrac{1}{x}dx=2$,则$(X,Y)$的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1/2\ , & (x,y)\in D\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}.$$



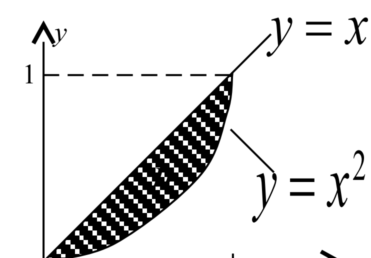
由$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$,则关于$X$的边缘概率密度在$x=2$处的值

$$f_X(2)=\int_0^{1/2}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{4}.$$

所以,答案应为$\dfrac{1}{4}$. ♣

20.2 解: 由区域D(见图):$x^2<y<x$,且区域D的面积为

$$s=\int_0^1(x-x^2)\,dx=\frac{1}{6}.$$



已知(X,Y)在区域D内服从均匀分布, 则(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6 \ , & x^2<y<x<1 \\ 0 \ , & \text{其他}\end{cases}.$$

边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6\,dy \ , & 0<x<1 \\ 0 \ , & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}6\,(x-x^2) \ , & 0<x<1 \\ 0 \ , & \text{其他}\end{cases}.$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,dx \ , & 0<y<1 \\ 0 \ , & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}6\,(\sqrt{y}-y) \ , & 0<y<1 \\ 0 \ , & \text{其他}\end{cases}. \quad ♣$$

20.3 解: 对于$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,r)$,则在$X=x$的条件下,$Y$的条件分布为正态分布:

$$N(\ \mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot r\cdot(x-\mu_1)\ ,\sigma_2^2(1-r^2)\ ).$$

由$\mu_1=0$, $\mu_2=1$, $\sigma_1^2=4$, $\sigma_2^2=1$, $r=\frac{1}{2}$,则

$$\mu_2+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\cdot r\cdot(x-\mu_1)=1+\frac{x}{4},\ \sigma_2^2(1-r^2)=\frac{3}{4}.$$

故在$X=x$的条件下,Y的条件分布为正态分布$N(1+\frac{x}{4},\frac{3}{4})$,则

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{3/4}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\times(3/4)}\cdot[y-(1+\frac{x}{4})]^2\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\cdot\exp\left\{-\frac{2}{3}\cdot(y-\frac{x}{4}-1)^2\right\},\quad -\infty<y<+\infty.$$

注: 也可由$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$直接计算化简得. ♣