习题(22)

22.1 设随机变量 X 的分布律:

$$P\{X=k\}=\frac{1}{5},k=1,2,3,4,5.$$

试求 $E(X)$, $E(X^2)$ 及 $E[(X+2)^2]$.

22.2 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x\le 0\end{cases}$,试回答下列问题:

1) 令 $Y=2X$,求 $E(Y)$;

2) 令 $Y=e^{-2X}$,求 $E(Y)$.

22.3 一工厂生产的某种设备的寿命 X (以年计)服从指数分布,概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-x/4} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x\le 0\end{cases}.$$

为确保消费者的利益,工厂规定出售的设备若在一年之内损坏可以调换.若工厂出售一台设备赢利 100 元,而调换一台设备厂方损失 200 元.试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望.

22.4 一商店经销某种商品,每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是两个相互独立的随机变量,且都服从区间[10,20]上的均匀分布.商店每售出一单位商品可得利润 1000 元;若需求量超过了进货量,商店可从其它商店调剂供应,这时每单位商品获利润为 500 元.试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

习题(22)参考解答

22.1 解: $E(X)=\sum_{k=1}^{5}k\cdot\frac{1}{5}=3$;

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{5}k^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)=11;$$

$$E[(X+2)^2]=\sum_{k=1}^{5}(k+2)^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}(3^2+4^2+5^2+6^2+7^2)=27.$$ ♣

22.2 解: 1) $E(Y)=E(2X)=2\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=2\int_{0}^{+\infty}x\cdot e^{-x}dx=2$.

2) $E(Y)=E(e^{-2X})=\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}dx=\int_{0}^{+\infty}e^{-3x}dx=\frac{1}{3}$. ♣

22.3 解: 以Y表示净赢利,要求:$E(Y)$? 由题意知,Y是一个随机变量,且

$$Y=\begin{cases}100 & , X>1\\ -200 & , X\le 1\end{cases}.$$

则

$$E(Y)=100\times P\{Y=100\}+(-200)\times P\{Y=-200\}$$

$$=100\times P\{X>1\}-200\times P\{X\le 1\}$$

$$=100\times\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-x/4}dx-200\times\int_{0}^{1}\frac{1}{4}e^{-x/4}dx=300\times\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{4}e^{-x/4}dx-200$$

$$=300\times e^{-1/4}-200\approx 33.64\ (\text{元}).$$ ♣

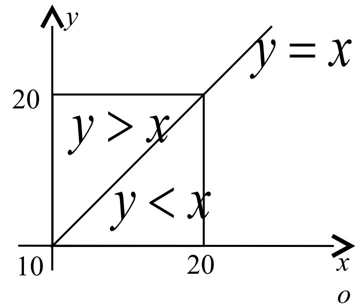
22.4 解: 商店经销该种商品每周所得利润为:

$$g(X,Y)=\begin{cases}1000\cdot Y & , X\ge Y\\ 1000\cdot X+500\cdot(Y-X) & , X<Y\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1000\cdot Y & , X\ge Y\\ 500\cdot(X+Y) & , X<Y\end{cases}.$$

由题意知,X与Y独立同分布,且$X\sim U(10,20)$,则(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{100} & , 10\le x,y\le 20\\ 0 & , \text{其他}\end{cases},$$



故利润的期望值为

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\cdot f(x,y)\,dxdy$$

$$=\iint_{\substack{10\le x\le 20\\ 10\le y\le 20}}g(x,y)\cdot\frac{1}{100}dxdy.$$

根据函数$g(x,y)$的表达式,且由图可知,则

$$E[g(X,Y)] = \iint\limits_{\substack{10\le x\le 20\\10\le y\le 20\\x<y}} 500(x+y)\cdot\frac{1}{100}dxdy + \iint\limits_{\substack{10\le x\le 20\\10\le y\le 20\\x\ge y}} 1000y\cdot\frac{1}{100}dxdy$$

$$=5\int_{10}^{20}[\int_{10}^{y}(x+y)dx]dy + 10\int_{10}^{20}[\int_{y}^{20}y\,dx]\,dy$$

$$=5\int_{10}^{20}(\frac{3}{2}y^2-10y-50)dy + 10\int_{10}^{20}(20y-y^2)dy$$

$$=\frac{42500}{3}\approx 14166.67(\text{元}).$$ ♣