

合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2020~2021 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3 课程性质:必修 考试形式:闭卷

专业班级 (教学班) 考试日期 2021.1.14 命题教师 集体 系 (所或教研室) 主任审批签名

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 A 与 B 为两个随机事件, $P(A)=0.7$, $P(A-B)=0.3$, 则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=$ _____.
2. 设随机变量 $X\sim B(3,0.5)$, $Y=2X+1$, $F_Y(y)$ 为 Y 的分布函数, 则 $F_Y(3)=$ _____.
3. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, $Y=(X-EX)^2$, 则 $P\{Y<EY\}=$ _____.
4. 设随机变量 X 与 Y 的方差分别为 $DX=1, DY=4$, 相关系数 $\rho_{XY}=0.5$, 则 $U=X+Y$ 与 X 的相关系数 $\rho_{UX}=$ _____.
5. 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_{48} 相互独立, 且均服从区间 $[0,2]$ 上的均匀分布, $X=\sum_{i=1}^{48} X_i$, 利用中心极限定理计算 $P\{X\leq 50\}\approx$ _____ (结果用标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 表示).

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设随机事件 A, B, C 两两独立, 则 A, B, C 相互独立的一个充分必要条件是 ().
(A) A 与 BC 相互独立 (B) AB 与 $B\cup C$ 相互独立
(C) AB 与 BC 相互独立 (D) $A\cup B$ 与 $B\cup C$ 相互独立
2. 设随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z=\min\{X, Y\}$ 的分布函数为 ().
(A) $F^2(x)$ (B) $F(x)F(y)$ (C) $1-[1-F(x)]^2$ (D) $[1-F(x)][1-F(y)]$
3. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, $EX=\mu$, $DX=\sigma^2$, \overline{X}, S^2 分别为样本均值与样本方差, 则下列选项错误的是 ().
(A) $E(\overline{X}-\mu)=0$ (B) $D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ (C) $D(\overline{X}-\mu)=\frac{\sigma^2}{n}$ (D) $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$
4. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $X\sim N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 若置信度 $1-\alpha$ ($0<\alpha<1$) 不变, 则随着样本容量 n 的增大, 参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度 ().
(A) 增大 (B) 减少 (C) 不变 (D) 无法确定
5. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\sigma^2>0$ 未知, \overline{X}, S^2 分别为样本均值和样本方差. 对于假设检验问题 $H_0:\mu=1, H_1:\mu\neq 1$, 若取显著性水平 $\alpha=0.05$, 则拒绝域为 ().

- (A) $\left|\overline{X}-1\right|\geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}$ (B) $\left|\overline{X}-1\right|\geq \frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)$
(C) $\overline{X}\geq 1+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.05}$ (D) $\overline{X}\geq 1+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.05}(n-1)$

三、(本题满分 10 分) 玻璃杯成箱的出售, 每箱 20 只, 假设各箱含 0 个, 1 个, 2 个次品的概率相应的为 0.8, 0.1, 0.1, 一顾客欲买一箱玻璃杯, 售货员随意地抽取一箱, 顾客开箱后随意地查看 4 只, 若无次品则买下这箱玻璃杯, 否则退回, 试求: (I) 顾客买下该箱玻璃杯的概率; (II) 若一个顾客买下了一箱玻璃杯, 在顾客买下的这箱玻璃杯中确实无次品的概率.

四、(本题满分 12 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} kx^2, & 0<x<3, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ $Y=\begin{cases} 2, & X\leq 1, \\ X, & 1<X<2, \\ 1, & X\geq 2. \end{cases}$

(I) 求常数 k ; (II) 求 $P\{X\leq Y\}$; (III) 求 EY .

五、(本题满分 14 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} 2y, & 0\leq y\leq 1 \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad \text{令} \quad U=\begin{cases} 0, & X\leq \frac{1}{2}, \\ 1, & X>\frac{1}{2}, \end{cases} \quad V=\begin{cases} 0, & X>Y, \\ 1, & X\leq Y. \end{cases}$$

(I) 求 (X, Y) 概率密度 $f(x, y)$; (II) 分别求 U 和 V 的分布律; (III) 求 (U, V) 的联合分布律.

六、(本题满分 12 分) 设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)=\begin{cases} 8xy, & 0<x<1, 0<y<x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

(I) 求 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$; (II) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

七、(本题满分 12 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta)=\begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}}, & x>1, \\ 0, & x\leq 1, \end{cases}$ 其中未知参数 $\theta>1$,

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的一个简单随机样本. (I) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$; (II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.

八、(本题满分 10 分) 设随机变量 $X\sim N(1, 1), Y\sim N(2, 4)$, 且 X 与 Y 相互独立.

(I) 求 $Z=X-Y$ 的概率密度 $f(z)$; (II) 求常数 a, b , 使 $U=a(3X-3)^2+b(Y-2)^2\sim\chi^2(2)$.