习题(42)

42.1 某香烟厂生产两种香烟,独立地随机抽取容量相同的烟叶标本测其尼古丁含量(单位:毫克),分别作了6次测定,数据记录如下:

甲种	25	28	23	26	29	22
乙种	28	23	30	25	21	27

假定两种香烟的尼古丁含量服从方差相等的正态分布.在显著性水平$\alpha = 0.10$下,试判断这两种香烟的尼古丁含量有无显著性差异?

42.2 设甲、乙两种零件彼此可以代替,但乙种零件比甲种零件制造简单,造价也低,经试验获得它们的抗拉强度分别为(单位:kg/cm^2):

甲: 88 87 92 90 91;

乙: 89 89 90 84 88.

假定两种零件的抗拉强度都服从正态分布且方差相等.问甲种零件的抗拉强度是否比乙种零件高(α=0.05)?

42.3 甲、乙两车床生产同一种零件,现从这两车床生产的零件中分别抽取5个和6个,测得其外径(单位: mm):

甲	15.0	14.5	15.2	15.5	14.8	
乙	15.2	15.0	14.8	15.2	15.0	15.0

假定其外径服从正态分布.在显著性水平α=0.05下,问乙车床加工精度是否比甲的高?

42.4 从城市的某区中抽取16名学生测其智商,平均值为107,样本标准差为10,而从该城市的另一区抽取的16名学生的智商平均值为112,标准差为8,试问在显著性水平$\alpha = 0.05$下,这两组学生的智商有无差异?假定学生的智商服从正态分布.

习题(42)参考解答

42.1 解: 甲、乙两种香烟的尼古丁含量分别记为X, Y,由题意知,

$$X \sim N(\mu_1, \sigma^2),\ Y \sim N(\mu_2, \sigma^2).$$

要检验假设

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2; \qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

用检验统计量

$$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\overset{H_0\text{真}}{\sim}t(m+n-2),$$

其中 $S_w^2=\dfrac{(m-1)\cdot S_1^2+(n-1)\cdot S_2^2}{m+n-2}$.在显著性水平 α 下,拒绝 H_0 的拒绝域: $|t|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$.

由 $\alpha=0.10$, $m=n=6$,查表: $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)=t_{0.95}(10)=1.8125$.经计算得

$$\overline{X}=25.5,\ S_1^2=7.5,\ \overline{Y}=25.667,\ S_2^2=11.067,$$

$$S_w=\sqrt{\frac{7.5+11.067}{2}}\approx 3.047,$$

$$|t|=\left|\frac{25.5-25.667}{3.047\times\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}}\right|\approx 0.095<1.8125=t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2),$$

则接受 H_0,即认为两种香烟的尼古丁含量无显著差异. ♣

42.2 解: 甲、乙两种零件的抗拉强度分别记为 X,Y,由题意知,

$$X\sim N(\mu_1,\sigma^2),\ Y\sim N(\mu_2,\sigma^2).$$

要检验

$$H_0:\mu_1\le\mu_2;\qquad H_1:\mu_1>\mu_2$$

用检验统计量

$$t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\overset{\mu_1=\mu_2}{\sim}t(m+n-2),$$

其中 $S_w^2=\dfrac{(m-1)\cdot S_1^2+(n-1)\cdot S_2^2}{m+n-2}$.

在显著性水平 α 下,拒绝 H_0 的拒绝域: $t>t_{1-\alpha}(m+n-2)$.

由已知数据及 $m=n=5$,经计算得

$$\overline{X}=89.6,\ S_1^2=4.3,\ \overline{Y}=88,\ S_2^2=5.5,\ S_w=2.2136,$$

由 $\alpha=0.05$,查表: $t_{1-\alpha}(m+n-2)=t_{0.95}(8)=1.860$.计算

$$t=\frac{89.6-88}{2.2136\times\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}}=1.1429<1.860=t_{1-\alpha}(m+n-2),$$

所以接受H_0,即认为甲比乙,其零件的抗拉强度无明显高. ♣

42.3 解: 总体(甲生产的零件外径)$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,$X_1, X_2, \cdots, X_m$为$X$的样本,$S_1^2$为样本方差,$m = 5$;总体(乙生产的零件外径)$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$为$Y$的样本,$S_2^2$为样本方差,$n = 6$. 要检验

$$H_0 : \sigma_1^2 \le \sigma_2^2; \qquad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

用检验统计量$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ ($\overset{\sigma_1^2=\sigma_2^2}{\sim}$ $F(m-1, n-1)$).

在给定显著性水平α下,拒绝H_0的拒绝域: $F > F_{1-\alpha}(m-1, n-1)$.

已知$\alpha = 0.05$,$m = 5$,$n = 6$,查表:$F_{1-\alpha}(m-1, n-1) = F_{0.95}(4,5) = 5.19$. 经计算得

$$S_1^2 = 0.145, \ S_2^2 = 2.267 \times 10^{-2},$$

则

$$F = \frac{0.145}{2.267 \times 10^{-2}} = 6.396 > 5.19.$$

所以拒绝H_0,即认为乙车床加工精度明显地高于甲的加工精度. ♣

42.4 解: 已知一组学生智商$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,样本容量$m = 16$,$\overline{X} = 107$,$S_1 = 10$;二组学生智商$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,样本容量$n = 16$,$\overline{Y} = 112$,$S_2 = 8$.

1) 要检验假设

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2; \qquad H_1 : \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$$

用检验统计量$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \overset{H_0\text{真}}{\sim} F(m-1, n-1)$; 在显著性水平$\alpha$下,拒绝$H_0$的拒绝域:

$$F < F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1), \text{ 或: } F > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1).$$

查表:

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) = F_{0.975}(15,15) = 2.86,$$

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) = F_{0.025}(15,15) = \frac{1}{F_{0.975}(15,15)} = \frac{1}{2.86}.$$

计算

$$F=\frac{10^2}{8^2}=1.5625 \qquad \frac{1}{2.86}<F<2.86,$$

则接受 H_0,即认为两组学生智商的方差相等.为此,再检验如下假设问题:

2) 要检验假设

$$H_0':\ \mu_1=\mu_2;\qquad H_1':\ \mu_1\neq\mu_2$$

用检验统计量 $t=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$ ($\overset{H_0真}{\sim}$ $t(m+n-2)$).

在显著性水平 α 下,拒绝 H_0' 的拒绝域: $|t|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$.

查表: $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)=t_{0.975}(30)=2.0423$.计算:

$$S_w^2=\frac{(m-1)\cdot S_1^2+(n-1)\cdot S_2^2}{m+n-2}=82 \qquad S_w=9.0554,$$

$$|t|=\left|\frac{107-112}{9.0554\times\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}}\right|=1.5617<2.0423,$$

则接受 H_0',即认为两组学生平均智商相等. 综上所述,这两组学生的智商无显著差异. ♣