合 肥 工 业 大 学 试 卷（A） 本页答题无效

2021～2022 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3 课程性质:必修 考试形式:闭卷

专业班级（教学班）________ 考试日期 2022.1.20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)=P(B)=0.4, P(A|\overline{B})=0.5$，则 $P(B-A)+P(A-B)=$________.

2. 设随机变量 $X\sim B(1,0.5)$，$Y\sim E(1)$，且 X,Y 相互独立，$Z=X+Y$，则 $P\{Z>0\}=$________.

3. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，$P\{X=k\}=\dfrac{k+1}{3}, k=0,1$，则 $P\{X=Y\}=$________.

4. 设随机变量 $X\sim N(1,4)$，则 $E[(X+3)^2]=$________.

5. 设随机变量 $X\sim P(5)$，由切比雪夫不等式得 $P\{1<X<9\}\ge$________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 (X_1,X_2,X_3) 是取自总体 $X\sim E(\frac{1}{\theta})$ 的简单随机样本，以下 θ 的点估计中，方差最小的的无偏估计是（　　）.

（A）$\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3$　　（B）$\frac{1}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3$

（C）$\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2+\frac{1}{4}X_3$　　（D）$\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3$

2. 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=i\}=\dfrac{k}{2^i}, i=1,2,\cdots$，则 X 取奇数的概率为（　　）.

（A）$\frac{2}{3}$　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{4}$

3. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，下列结论错误的是（　　）.

（A）若 $X\sim B(1,p), Y\sim B(1,q)$，则 $X+Y\sim B(1,p+q)$

（B）若 $X\sim P(\lambda_1), Y\sim P(\lambda_2)$，则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

（C）若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

（D）若 $X\sim \chi^2(m), Y\sim\chi^2(n)$，则 $X+Y\sim\chi^2(m+n)$

4. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 如果 μ 已知，则 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为（　　）.

（A）$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$　　（B）$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

（C）$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$　　（D）$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

5. 在假设检验中，下列说法正确的是（　　）.

（A）一定会犯第一类错误　　（B）一定会犯第二类错误

（C）可能同时犯两类错误　　（D）不可能同时犯两类错误

三、（本题满分 10 分）设有两个盒子内装有同型号的电子元件. 已知甲盒中有 5 个正品和 3 个次品；乙盒中有 4 个正品和 3 个次品. 现从甲盒中任取 3 个元件放入乙盒中，然后再从乙盒中任取一个元件.（1）求从乙盒中所取出的一个元件是正品的概率；（2）已知从乙盒中所取出的元件是正品，求最先从甲盒中取出的 3 个元件都是正品的概率.

四、（本题满分 12 分）设随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ a & b & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$，且 $P\{|X|=1\}=P\{X=0\}$.

（1）求常数 a,b 的值；（2）记 $Y=|X|+X$，求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

五、（本题满分 14 分）设随机变量 X,Y 独立同分布，且 $X\sim U[0,1]$，令

$$U=\begin{cases}1, & X\le 2Y,\\ 0, & X>2Y,\end{cases}\quad V=\begin{cases}1, & 2X\le Y,\\ 0, & 2X>Y,\end{cases}$$

（1）求 (U,V) 的分布律；（2）求 U 和 V 的相关系数 ρ_{UV}；（3）求 $P\{U+V\le\frac{3}{2}|U=1\}$.

六、（本题满分 14 分）设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3(x+y), & x\ge0, y\ge0, x+y\le1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

（1）分别求关于 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；（2）求 $P\{2X+Y\ge1\}$；

（3）用分布函数法求 $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

七、（本题满分 14 分）设总体 X 的密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2\theta^2}{x^3}, & x\ge\theta,\\ 0, & x<\theta,\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$；（2）求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.

八、（本题满分 6 分）设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1})$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，$S_n^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$，试求常数 c，使得 $c\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S_n}$ 服从 t 分布，并指出分布的自由度.