习题(13)

13.1 已知随机变量 X,Y 的联合分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases} x^2y^2 & , \quad 0<x\le 1, 0<y\le 1 \\ x^2 & , \quad 0<x\le 1, y>1 \\ y^2 & , \quad x>1, 0<y\le 1 \\ 0 & , \quad x\le 0, \text{ 或 } y\le 0 \\ 1 & , \quad x>1, y>1 \end{cases}$$

试计算 $P\{X\le 0.5, Y>0.6\}$.

13.2 在一箱子中装有 12 只开关,其中 2 只是次品.在其中取两次,每次任取一只,考虑两种方式:
1)放回抽样;　　2)不放回抽样.

现定义随机变量 X,Y 如下:

$$X=\begin{cases} 0 & , \text{ 第一次取出正品} \\ 1 & , \text{ 第一次取出次品} \end{cases}; \qquad Y=\begin{cases} 0 & , \text{ 第二次取出正品} \\ 1 & , \text{ 第二次取出次品} \end{cases}.$$

试分别写出 X,Y 的联合分布律.

13.3 有三个箱子,其中第一箱中有 2 个红球、4 个白球、2 个黄球,第二、三箱中均有 4 个红球、1 个白球、3 个黄球.现随机取一箱,然后从该箱中随机地取出两个球(不放回取球),记 X 为取出的红球个数,Y 为取出的白球个数.

1) 求随机变量 (X,Y) 的联合分布律;

2) 已知 $X=1$, $Y=1$ 的条件下,求所取两球来自第一箱的概率.

13.4 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 λ ($\lambda>0$)的泊松分布,每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$,且中途下车与否相互独立.以 Y 表示在中途下车的人数,求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下,中途有 m 个人下车的概率;

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

习题(13)参考解答

13.1 解: $P\{X\le 0.5, Y>0.6\}=P\{X\le 0.5\}-P\{X\le 0.5, Y\le 0.6\}$

$$=P\{X\le 0.5, Y<+\infty\}-P\{X\le 0.5, Y\le 0.6\}$$

$$= F(0.5, +\infty) - F(0.5, 0.6)$$

$$= 0.5^2 - 0.5^2 \times 0.6^2 = 0.16 .$$ ♣

13.2 解: 由古典概型的概率计算可分别得 X, Y 的联合分布律:

1)放回抽样情形:

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

2)不放回抽样情形:

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

♣

13.3 解: 1)由题意知, X 的可能取值为 $0,1,2$; Y 的可能取值为 $0,1,2$.且注意到,从 8 个球中随机取出 2 个球,所有不同取法有 $\binom{8}{2} = \frac{8\times 7}{2!} = 28$ 种.利用全概率公式,则

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{取出2个黄球\} = \frac{1}{3}\times\frac{\binom{2}{2}}{28} + \frac{2}{3}\times\frac{\binom{3}{2}}{28} = \frac{1}{12},$$

$$P\{X=0, Y=1\} = P\{取出1个白球, 1个黄球\} = \frac{1}{3}\times\frac{\binom{4}{1}\times\binom{2}{1}}{28} + \frac{2}{3}\times\frac{\binom{1}{1}\times\binom{3}{1}}{28} = \frac{1}{6},$$

$$P\{X=0, Y=2\} = P\{取出2个白球\} = \frac{1}{3}\times\frac{\binom{4}{2}}{28} + \frac{2}{3}\times 0 = \frac{1}{14},$$

$$P\{X=1, Y=0\} = P\{取出1个红球, 1个黄球\} = \frac{1}{3}\times\frac{\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}}{28} + \frac{2}{3}\times\frac{\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}}{28} = \frac{1}{3},$$

$$P\{X=1, Y=1\} = P\{取出1个红球, 1个白球\} = \frac{1}{3}\times\frac{\binom{2}{1}\times\binom{4}{1}}{28} + \frac{2}{3}\times\frac{\binom{4}{1}\times\binom{1}{1}}{28} = \frac{4}{21},$$

$$P\{X=2, Y=0\} = P\{取出2个红球\} = \frac{1}{3}\times\frac{\binom{2}{2}}{28} + \frac{2}{3}\times\frac{\binom{4}{2}}{28} = \frac{13}{84},$$

$$P\{X=1, Y=2\} = P\{X=2, Y=1\} = P\{X=2, Y=2\} = 0 .$$

由此得 (X,Y) 的联合分布律如下表:

$Y \backslash X$	0	1	2

0	1/12	1/3	13/84
1	1/6	4/21	0
2	1/14	0	0

2) 所求概率为

$$P\{所取球来自第一箱 \mid X=1, Y=1\} = \frac{P\{所取球来自第一箱, 且\ X=1, Y=1\}}{P\{X=1, Y=1\}}$$

$$= \frac{P\{所取球来自第一箱\} \times P\{X=1, Y=1 \mid 所取球来自第一箱\}}{P\{X=1, Y=1\}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{\binom{2}{1} \times \binom{4}{1}}{28}}{\frac{4}{21}} = \frac{1}{2} \cdot$$ ♣

13.4 解: 1) 对于 $n = 0,1,2,\cdots$, 所求概率为

$$P\{Y=m \mid X=n\} = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}, m = 0,1,2,\cdots,n.$$

2) 由 X 服从参数为 λ ($\lambda > 0$) 的泊松分布,即有分布律

$$P\{X=n\} = \frac{\lambda^n \cdot e^{-\lambda}}{n!}, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

则 (X,Y) 的联合概率分布为

$$P\{X=n, Y=m\} = P\{X=n\} \cdot P\{Y=m \mid X=n\} = \frac{\lambda^n \cdot e^{-\lambda}}{n!} \cdot \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$

$$= \frac{\lambda^n \cdot p^m (1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!} \cdot e^{-\lambda}, \quad m = 0,1,2,\cdots,n; \ n = 0,1,2,\cdots.$$ ♣