习题(23)

23. 1 某超市举办一种有奖销售活动:每个顾客的购买量达到一定总额时,有抽奖而获得奖金的机会.现有奖券 10 张,其中奖金 10 元的有 8 张,奖金 80 元的有 2 张.一顾客从中无放回地随机抽取 3 张,所得奖金数记为 Y,求所得奖金的数学期望 $E(Y)$.

23. 2 设在时间 $(0,t)$ 内经搜索发现沉船的概率为 $p(t)=1-e^{-vt}$,其中 $v>0$ 为常数.求发现沉船所需的平均搜索时间.

23. 3 一台设备由三大部件组成,在设备运转中各部件需要调整的概率分别为 0.1, 0.2, 0.25.假定各个部件在运转中相互独立,以 X 表示需要调整的部件个数,试求 X 的数学期望.

23. 4 某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式.记使用寿命为 X (以年计),规定:$X\le 1$,则一台付款 1500 元;$1<X\le 2$,则一台付款 2000 元;$2<X\le 3$,则一台付款 2500 元;$X>3$,则一台付款 3000 元.设使用寿命 X 服从指数分布,密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}\times e^{-x/10} & , \ x>0\\ 0 & , \ x\le 0\end{cases}.$$

试求该商店销售一台家用电器的收费额 Y 的数学期望.

习题(23)参考解答

23. 1 解: 顾客无放回地随机抽取 3 张奖券,以 X 表示 10 元奖券的张数,则知 X 的可能取值为 1,2,3.且 X 服从超几何分布,即有分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\binom{8}{k}\cdot\binom{2}{3-k}}{\binom{10}{3}},\ k=1,2,3.$$

化简得 X 的分布律为

X	1	2	3
p_k	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

又由所得奖金数

$$Y=10X+80(3-X)=240-70X,$$

再化简得 Y 的分布律为

Y	170	100	30

q_k	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

则

$$E(Y)=170\times\frac{1}{15}+100\times\frac{7}{15}+30\times\frac{7}{15}=72\,. \qquad \clubsuit$$

注：也可用如下方法求$E(Y)$:由

$$E(X)=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{7}{15}+3\times\frac{7}{15}=\frac{12}{5}$$

$$E(Y)=E(240-70X)=240-70\times E(X)=240-70\times\frac{12}{5}=72\,. \qquad \clubsuit$$

23.2 解：设发现沉船所需搜索的时间为T,由题意知,T是随机变量,$T>0$,且

$$P\{0<T\le t\}=1-e^{-vt},$$

T的分布函数为

$$F_T(t)=P\{T\le t\}=\begin{cases}P\{0<T\le t\} & ,\ t>0\\ 0 & ,\ t\le 0\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-vt} & ,\ t>0\\ 0 & ,\ t\le 0\end{cases}.$$

则T的密度函数为

$$f_T(t)=[F_T(t)]'_t=\begin{cases}v\cdot e^{-vt} & ,\ t>0\\ 0 & ,\ t\le 0\end{cases},$$

所以,发现沉船所需的平均搜索时间为

$$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot f_T(t)dt=\int_{0}^{+\infty}t\cdot v\cdot e^{-vt}dt=\frac{1}{v}. \qquad \clubsuit$$

23.3 解：引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}1 & ,\ \text{第}i\text{个部件需要调整}\\ 0 & ,\ \text{第}i\text{个部件不需要调整}\end{cases},\ i=1,2,3,$$

则$X=X_1+X_2+X_3$,且有分布律分别为

$$X_1\sim b(1,0.1),\ X_2\sim b(1,0.2),\ X_3\sim b(1,0.25)$$

$$E(X_1)=0.1,\ E(X_2)=0.2,\ E(X_3)=0.25\,.$$

则

$$E(X)=E(X_1+X_2+X_3)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)$$
$$=0.1+0.2+0.25=0.55\,. \qquad \clubsuit$$

23.4 分析： 此题是一个应用题.收费额Y是使用寿命X的函数,且是离散型,故先指出Y的可能取值:1500, 2000, 2500, 3000,并求Y的分布律,再求收费额Y的数学期望$E(Y)$.

解： 由题意知,一台家用电器的收费额(随机变量)Y的可能取值为(单位:元): 1500, 2000, 2500, 3000.则

$$E(Y)=1500\times P\{Y=1500\}+2000\times P\{Y=2000\}$$

$$+2500\times P\{Y=2500\}+3000\times P\{Y=3000\}.$$

又已知使用寿命X的密度函数,则

$$P\{Y=1500\}=P\{X\le 1\}=\int_0^1 \frac{1}{10}\times e^{-x/10}\,dx=1-e^{-0.1}\approx 0.0952,$$

$$P\{Y=2000\}=P\{1<X\le 2\}=\int_1^2 \frac{1}{10}\times e^{-x/10}\,dx=e^{-0.1}-e^{-0.2}\approx 0.0861,$$

$$P\{Y=2500\}=P\{2<X\le 3\}=\int_2^3 \frac{1}{10}\times e^{-x/10}\,dx=e^{-0.2}-e^{-0.3}\approx 0.0779,$$

$$P\{Y=3000\}=P\{X>3\}=\int_3^{+\infty} \frac{1}{10}\times e^{-x/10}\,dx=e^{-0.3}\approx 0.7408.$$

所以

$$E(Y)=1500\times 0.0952+2000\times 0.0861+2500\times 0.0779+3000\times 0.7408$$

$$\approx 2732.15\ (\text{元}).$$ ♣