习题(17)

17. 1 设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律如下表:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	1/6	b	1/18
y_2	1/3	a	b

且X与Y相互独立,试确定常数a,b的值.

17. 2 设X_1和X_2是任意两个相互独立的连续型随机变量,它们的概率密度分别为$f_1(x)$和$f_2(x)$,

分布函数分别为$F_1(x)$和$F_2(x)$,则 【 】

(A) $f_1(x)+f_2(x)$必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)\cdot f_2(x)$必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)\cdot F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数.

17. 3 设随机向量(X,Y,Z) 的联合密度函数为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}(x+y)\cdot e^{-z} & , \quad 0<x,y<1, z>0 \\ 0 & , \quad \text{其他}\end{cases}$$

证明:X,Z相互独立,但X与(Y,Z) 不独立.

17. 4 设随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & , \quad 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & , \quad \text{其他}\end{cases}.$$

试求: 在$0<X<\dfrac{1}{n}$的条件下,Y的分布函数与密度函数.

习题(17)参考解答

17.1 解: 先将联合分布律及边缘分布律列如下表:

X Y	x_1	x_2	x_3	$P\{Y=y_j\}$
y_1	1/6	b	1/18	$\frac{2}{9}+b$
y_2	1/3	a	b	$\frac{1}{3}+a+b$
$P\{X=x_i\}$	$\frac{1}{2}$	$a+b$	$\frac{1}{18}+b$	

因为 X 与 Y 相互独立,则有

$$P\{X=x_1,Y=y_1\}=P\{X=x_1\}\cdot P\{Y=y_1\}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times(\frac{2}{9}+b) \qquad b=\frac{1}{9}.$$

又由 $\frac{1}{2}+a+b+\frac{1}{18}+b=1 \qquad a=\frac{2}{9}$. ♣

17.2 解: 显然(A),(C)均不对;对于(B),取

$$f_i(x)=\begin{cases}2x\ , & 0<x<1\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases},$$

则知(B)不对.

对于(D),当 $x_1<x_2$ 时,有

$$F_1(x_1)\cdot F_2(x_1)\le F_1(x_2)\cdot F_2(x_1)\le F_1(x_2)\cdot F_2(x_2),$$

说明 $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 是单调不减函数;又由于函数 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 均是连续函数,则 $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 连续,当然是右连续;再注意到,$0\le F_1(x)\cdot F_2(x)\le 1$,且

$$F_1(-\infty)\cdot F_2(-\infty)=0,\ F_1(+\infty)\cdot F_2(+\infty)=1.$$

所以函数 $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 满足分布函数的三个特征,则 $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.故答案应为(D). ♣

注: 本题是2002年数学(一、四)考研试题,是单项选择题.只要说明(A),(B),(C)均不对,则正确答案一定是(D). ♣

17.3 证： 由 $f_{X,Z}(x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y,z)dy=\int_{0}^{1}f(x,y,z)dy$，则当 $0<x<1,z>0$ 时，

$$f_{X,Z}(x,z)=\int_0^1(x+y)\cdot e^{-z}dy=(x+\frac{1}{2})\cdot e^{-z}$$

$$f_{X,Z}(x,z)=\begin{cases}(x+\frac{1}{2})\cdot e^{-z} & ,\quad 0<x<1,\ z>0\\ 0 & ,\quad \text{其他}\end{cases},$$

且可得

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Z}(x,z)dz=\begin{cases}x+\frac{1}{2} & ,\quad 0<x<1\\ 0 & ,\quad \text{其他}\end{cases},$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Z}(x,z)dx=\begin{cases}e^{-z} & ,\quad z>0\\ 0 & ,\quad z\le 0\end{cases}.$$

由于 X 与 Y 在题中的地位相同，则

$$f_{Y,Z}(y,z)=\begin{cases}(y+\frac{1}{2})\cdot e^{-z} & ,\quad 0<y<1,\ z>0\\ 0 & ,\quad \text{其他}\end{cases}.$$

于是，有

$$f_{X,Z}(x,z)=f_X(x)\cdot f_Z(z),\ \forall x,z\in R.$$

故 X,Z 相互独立.而当 $0<x,y<1,\ z>0$ 时，

$$f_X(x)\cdot f_{Y,Z}(y,z)=(x+\frac{1}{2})\cdot(y+\frac{1}{2})e^{-z}\neq(x+y)\cdot e^{-z}=f(x,y,z),$$

所以 X 与 (Y,Z) 不相互独立. ♣

17.4 解： 在 $0<X<\frac{1}{n}$ 的条件下，随机变量 Y 的分布函数记为

$$F(y\,|\,0<X<\frac{1}{n})=P\{Y\le y\,|\,0<X<\frac{1}{n}\}=\frac{P\{Y\le y,0<X<\frac{1}{n}\}}{P\{0<X<\frac{1}{n}\}},$$

而

$$P\{0<X<\frac{1}{n}\}=\iint\limits_{0<x<\frac{1}{n}}f(x,y)dxdy=\int_0^{1/n}[\int_0^1(x+y)dy]dx=\frac{n+1}{2n^2},$$

$$P\{Y \le y, 0 < X < \frac{1}{n}\} = \iint\limits_{0<x<\frac{1}{n},\, v\le y} f(x,v)dxdv = \begin{cases} 0 & , \quad y \le 0 \\ \int_0^{1/n}[\int_0^y (x+v)dv]dx & , \quad 0 < y < 1 \\ \int_0^{1/n}[\int_0^1 (x+v)dv]dx & , \quad y \ge 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad y \le 0 \\ \dfrac{y(ny+1)}{2n^2} & , \quad 0 < y < 1, \\ \dfrac{n+1}{2n^2} & , \quad y \ge 1 \end{cases}$$

所以在$0 < X < \frac{1}{n}$的条件下，Y的分布函数为

$$F(y \mid 0 < X < \frac{1}{n}) = \begin{cases} 0 & , \quad y \le 0 \\ \dfrac{y(ny+1)}{n+1} & , \quad 0 < y < 1. \\ 1 & , \quad y \ge 1 \end{cases}$$

则在$0 < X < \frac{1}{n}$的条件下，Y的密度函数为

$$f(y \mid 0 < X < \frac{1}{n}) = [F(y \mid 0 < X < \frac{1}{n})]'_y = \begin{cases} \dfrac{2ny+1}{n+1} & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{其他} \end{cases}. \qquad ♣$$