习题(11)

11.1 设随机变量 $X \sim N(\mu, 4^2)$, $Y \sim N(\mu, 5^2)$,记

$$p_1 = P\{X \le \mu - 4\}, \ p_2 = P\{Y \ge \mu + 5\}.$$

则下列结论正确的是 【 】

(A) 对任何实数 μ,都有 $p_1 = p_2$.　　(B) 对任何实数 μ,都有 $p_1 < p_2$.

(C) 只对 μ 的个别值,才有 $p_1 = p_2$.　　(D) 对任何实数 μ,都有 $p_1 > p_2$.

11.2 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,则随 σ 的增大,概率 $P\{|X - \mu| < \sigma\}$ 是 【 】

(A)单调增大.　(B)单调减小.　(C)保持不变.　(D)非单调变化.

11.3 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 且二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 0.5,则常数 $\mu =$ ______.

11.4 设随机变量 X 服从正态分布 $N(108, 9)$,试回答下列问题:

1) 求 $P\{101.1 < X < 117.6\}$;

2) 求常数 a,使得 $P\{X < a\} = 0.90$;

3) 求常数 a,使得 $P\{|X - a| > a\} = 0.01$.

习题(11)参考解答

11.1 解: 由 $\dfrac{X-\mu}{4} \sim N(0,1)$, $\dfrac{Y-\mu}{5} \sim N(0,1)$,则

$$p_1 = P\{\frac{X-\mu}{4} \le -1\} = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1), \quad p_2 = P\{\frac{Y-\mu}{5} \ge 1\} = 1 - \Phi(1).$$

所以,对任何实数 μ,有 $p_1 = p_2$.故答案应为(A). ♣

11.2 解: 记 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$,由 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$　　$Y \sim N(0,1)$.则

$$P\{|X-\mu| < \sigma\} = P\{|\frac{X-\mu}{\sigma}| < 1\} = P\{|Y| < 1\},$$

由此可知,概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ 是一个确定的常数,不随 σ 的增大而变化.所以答案应为(C). ♣

11.3 解: 由 $0.5=P\{\text{方程无实根}\}=P\{\text{判别式}<0\}=P\{4^2-4\times1\times X<0\}$

$$=P\{X>4\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{4-\mu}{\sigma}\},$$

及 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$, $P\{\frac{X-\mu}{\sigma}>0\}=0.5 \Rightarrow \frac{4-\mu}{\sigma}=0$, 即 $\mu=4$. ♣

11.4 解: 令 $U=\frac{X-108}{3}$,则 $U\sim N(0,1)$,且

1) $P\{101.1<X<117.6\}=P\{\frac{101.1-108}{3}<\frac{X-108}{3}<\frac{117.6-108}{3}\}$

$$=P\{-2.3<U<3.2\}=\Phi(3.2)-\Phi(-2.3)$$

$$=\Phi(3.2)+\Phi(2.3)-1$$

$=0.9993+0.9893-1$ (查标准正态分布表得)
$=0.9886$.

2) 由

$$0.90=P\{X<a\}=P\{\frac{X-108}{3}<\frac{a-108}{3}\}=\Phi(\frac{a-108}{3}),$$

查标准正态分布表得:

$$\frac{a-108}{3}=u_{0.90}=1.28 \qquad a=111.84.$$

3) 由 $0.01=P\{|X-a|>a\}=P\{X-a>a\}+P\{X-a<-a\}=P\{X>2a\}+P\{X<0\}$

$$=P\{\frac{X-108}{3}>\frac{2a-108}{3}\}+P\{\frac{X-108}{3}<\frac{0-108}{3}\}$$

$$=1-\Phi(\frac{2a-108}{3})+\Phi(-\frac{108}{3})$$

$$\approx1-\Phi(\frac{2a-108}{3}) \qquad \Phi(\frac{2a-108}{3})\approx0.99.$$

查标准正态分布表得:

$$\frac{2a-108}{3}=u_{0.99}\approx2.33 \qquad a\approx57.50.$$ ♣