习题(14)

14．1 已知随机变量X,Y的联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy & , \ 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & , \qquad \text{其他}\end{cases},$$

试求X,Y的联合分布函数$F(x,y)$.

14．2 设二维随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6x & , \ 0\le x\le y\le 1\\ 0 & , \qquad \text{其他}\end{cases},$$

试求$P\{X+Y\le 1\}$的值.

14．3 设随机向量(X,Y,Z) 的分布函数为

$$F(x,y,z)=\begin{cases}(1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cz}) & , \ x,y,z\ge 0\\ 0 & , \quad \text{其他}\end{cases}$$

其中$a>0,b>0,c>0$均为常数.试求(X,Y,Z) 的联合概率密度函数$f(x,y,z)$.

14．4 设随机向量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & , \ 0\le x\le 1,0\le y\le 2\\ 0 & , \qquad \text{其他}\end{cases}$.求$X,Y$中至少有一个小于$\frac{1}{2}$的概率.

习题(14)参考解答

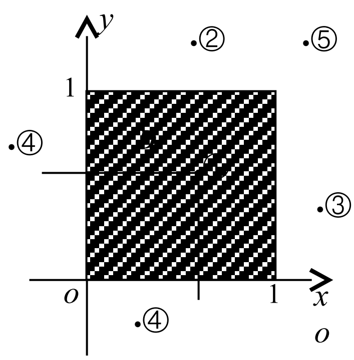
14．1 分析: 根据密度函数$f(x,y)\ne 0$的区域

$$D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$$

及分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\iint\limits_{u\le x,v\le y}f(u,v)dudv,$$

由图可知,应分五种情形:



① $0<x\le 1, 0<y\le 1$； ② $0<x\le 1, y>1$；

③ $x>1, 0<y\le 1$； ④ $x\le 0$,或 $y\le 0$；

⑤ $x>1, y>1$,

化简积分 $\iint\limits_{u\le x,v\le y} f(u,v)dudv$,才能得到 $F(x,y)$.

解 当 $0<x\le 1, 0<y\le 1$ 时,

$$F(x,y)=\iint\limits_{u\le x,v\le y} f(u,v)dudv=\int_0^x\int_0^y 4uv\,dudv=x^2y^2;$$

当 $0<x\le 1, y>1$ 时, $F(x,y)=\int_0^x\int_0^1 4uv\,dudv=x^2$;

当 $x>1, 0<y\le 1$ 时, $F(x,y)=\int_0^1\int_0^y 4uv\,dudv=y^2$;

当 $x\le 0$,或 $y\le 0$ 时, $F(x,y)=0$;

当 $x>1, y>1$ 时, $F(x,y)=\int_0^1\int_0^1 4uv\,dudv=1$.

则得 X,Y 的联合分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases} x^2y^2, & 0<x\le 1, 0<y\le 1 \\ x^2, & 0<x\le 1, y>1 \\ y^2, & x>1, 0<y\le 1 \\ 0, & x\le 0,\ \text{或}\ y\le 0 \\ 1, & x>1, y>1 \end{cases}.$$ ♣

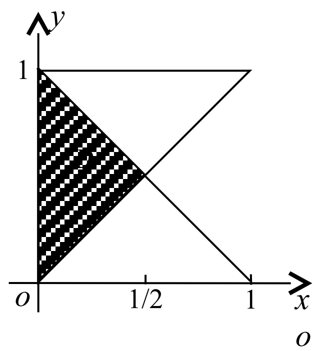
14.2 解: 由图可知

$$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\iint\limits_D 6x\,dxdy=\int_0^{1/2}(\int_x^{1-x}6xdy)dx$$

$$=6\int_0^{1/2}x(1-2x)dx$$

$$=\frac{1}{4}.$$ ♣



14.3 解：由 $f(x,y,z)=[F(x,y,z)]'''_{x,y,z}$ ，则

$$f(x,y,z)=\begin{cases} abc\cdot e^{-(ax+by+cz)}, & x,y,z\geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$ ♣

14.4 解：所求概率为

$$P\{X<\frac{1}{2},\text{或}\ Y<\frac{1}{2}\}=1-P\{X\geq\frac{1}{2},\ Y\geq\frac{1}{2}\}=1-\iint\limits_{x\geq\frac{1}{2},y\geq\frac{1}{2}} f(x,y)dxdy$$

$$=1-\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})\times(2-\frac{1}{2})=\frac{5}{8}.$$ ♣