2021-2022 学年第一学期概率论与数理统计期末考试 A 卷参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、0.6　　2、1　　3、$\frac{5}{9}$　　4、20　　5、$\frac{11}{16}$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B　　2、A　　3、A　　4、C　　5、D

三、（本题满分 10 分）

解：（1）设 $A_i=\{从甲盒中取出的3个元件中有i个正品\}$，$i=0,1,2,3$，

$B=\{从乙盒中取出一个元件中是正品\}$.

由全概率公式可得

-----3分

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\sum_{i=0}^{3}\frac{C_5^iC_3^{3-i}}{C_8^3}\frac{4+i}{10}=\frac{C_5^0C_3^3}{C_8^3}\frac{4}{10}+\frac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}\frac{5}{10}+\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}\frac{6}{10}+\frac{C_5^3C_3^0}{C_8^3}\frac{7}{10}$$

$$=\frac{329}{560}\approx 0.588$$ -------2分

（2）由贝叶斯公式可得

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{\frac{C_5^3C_3^0}{C_8^3}\frac{7}{10}}{\frac{329}{560}}=\frac{70}{329}\approx 0.213$$ -----2分

---3分

四、（本题满分 12 分）

解：（1）由 $P\{|X|=1\}=p\{X=0\}$ 可得 $a+\frac{1}{6}=b$，又 $a+b+\frac{1}{6}=1$，解得 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{2}$，

故 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$. ---------4分

（2）由 $Y=|X|+X$ 得

X	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\lvert X\rvert$	1	0	1
$Y=\lvert X\rvert+X$	0	0	2

所以Y的分布律为

Y	0	2
p	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

----------4分

所以$Y=|X|+X$的分布函数为$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{5}{6}, & 0\le y<2,\\ 1, & y\ge 2.\end{cases}$ ---------4分

五、（本题满分 14 分）

解：随机变量X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

Y的概率密度为$f_Y(x)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

由于X和Y相互独立，所以(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

（1）$P\{U=0,V=0\}=P\{X>2Y,2X>Y\}=P\{X>2Y\}=\frac{1}{4}$；

$P\{U=0,V=1\}=P\{X>2Y,2X\le Y\}=0$；

$P\{U=1,V=0\}=P\{X\le 2Y,2X>Y\}=P\left\{\frac{1}{2}X<Y\le 2X\right\}=\frac{1}{2}$；

$P\{U=1,V=1\}=P\{X\le 2Y,2X\le Y\}=P\{Y\ge 2X\}=\frac{1}{4}$；

(U,V) 的分布律为

(U,V)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
p	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

-----------5分

（2）$EU=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$EV=\frac{1}{4}$，$E(U^2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$E(V^2)=\frac{1}{4}$，$E(UV)=\frac{1}{4}$，

$DU=E(U^2)-(EU)^2=\frac{3}{16}$，$DV=E(V^2)-(EV)^2=\frac{3}{16}$，

$$\rho_{UV}=\frac{E(UV)-EUEV}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{3}{16}}}=\frac{1}{3}.$$ -------------5分

(3) $$P\left\{U+V\le\frac{3}{2}\middle|U=1\right\}=\frac{P\left\{U+V\le\frac{3}{2},U=1\right\}}{P\{U=1\}}=\frac{P\left\{V\le\frac{1}{2},U=1\right\}}{P\{U=1\}}$$

$$=\frac{P\{U=1,V=0\}}{P\{U=1\}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}.$$ ---------4分

六、（本题满分 14 分）

解：（1）$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{1-x}3(x+y)dy=\frac{3(1-x^2)}{2}, & 0<x<1, \quad \text{----1分}\\ 0, & \text{其他；} \quad \text{----1分}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{1-y}3(x+y)dx=\frac{3(1-y^2)}{2}, & 0<y<1, \quad \text{-------1分}\\ 0, & \text{其他；} \quad \text{-------1分}\end{cases}$$

（2）$P\{2X+Y\ge 1\}=\int_0^1 dy\int_{\frac{1-y}{2}}^{1-y}3(x+y)dx=\frac{5}{8}$； -------3分

（3）$Z=X+Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$， ------1分

当 $z \le 0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $z \ge 1$ 时，$F_Z(z)=1$；　　----1分

当 $0<z<1$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}3(x+y)dy=z^3$；　　----1分

所以 $Z=X+Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}0,\ z\le 0, & \text{-------2分}\\ z^3, 0<z<1, \\ 1,\ z\ge 1,\end{cases}$ 从而 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}3z^2, 0<z<1,\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$　　------2分

七、（本题满分 14 分）

解：（1）求 θ 的矩估计量 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)dx=\int_\theta^{+\infty}x\cdot\frac{2\theta^2}{x^3}dx=2\theta$，令 $EX=\bar{X}$，解得

θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_M=\frac{\bar{X}}{2}$；　-------------------7分

（2）求 θ 的极大似然估计量，取似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{2\theta^2}{x_i^3}=\frac{2^n\theta^{2n}}{\prod_{i=1}^n x_i^3},\quad x_i\ge\theta,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$lnL(\theta)=n\ln 2+2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^n\ln x_i$，令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2n}{\theta}>0$，所以 $\ln L(\theta)$ 为 θ 的单调增

函数，故 $L(\theta)$ 也为 θ 的单调增函数，θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}_L=\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$.　-------------7分

八、（本题满分 6 分）

解：记 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$，由于总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，　------2分

又 X_{n+1} 与 $\bar{X}$ 相互独立，且

$E(X_{n+1}-\overline{X})=EX_{n+1}-E\overline{X}=0$，$D(X_{n+1}-\overline{X})=DX_{n+1}+D\overline{X}=\sigma^2+\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$，

所以 $X_{n+1}-\overline{X}\sim N\left(0,\dfrac{n+1}{n}\sigma^2\right)$，标准化得 $\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}}\sim N(0,1)$ -----1分；又由于

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ -------1分，且 $X_{n+1}-\overline{X}$ 与 $\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2}$ 相互独立，所以有

$\dfrac{\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2}\cdot\dfrac{1}{n-1}}}=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S_n}\sim t(n-1)$，比较可得所求的常数 $c=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ ------1分，服从的 t 分布的自由度为 $n-1$．------1分