习题(19)

19.1 设随机变量U和V相互独立,且服从同一分布:

$$P\{U=i\}=P\{V=i\}=1/3,\ i=1,2,3.$$

令$X=\max(U,V)$,$Y=\min(U,V)$.

1) 求二维随机变量(X,Y)的联合分布律;

2) 求(X,Y)关于X和关于Y的边缘分布律;

3) 问X和Y是否相互独立?

19.2 设随机向量(X,Y)的分布律为

X \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

1) 求$P\{X=2\mid Y=2\}$,$P\{Y=3\mid X=0\}$;

2) 求$V=\max\{X,Y\}$的分布律;

3) 求$U=\min\{X,Y\}$的分布律;

4) 求$W=X+Y$的分布律.

19.3 已知二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	0	1	2	3
1	0	0.05	0.08	0.12
2	0.01	0.09	0.12	0.15
3	0.02	0.11	0.13	0.12

试求:随机变量$V=\dfrac{X}{Y}$的分布律.

19.4 设某种电子装置的输出是随机变量,它的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$.对它的输

出进行了 5 次独立测量,得到结果为 $X_1, X_2, \cdots, X_5$.

1) 求 $Z=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_5\}$ 的分布函数;

2) 求 $P\{Z>4\}$.

习题(19)参考解答

19.1 解: 1) 由 $X=\max(U,V)$, $Y=\min(U,V)$ 知, X 的可能取值:$1,2,3$; Y 的可能取值:$1,2,3$. 且

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=2,Y=3\}=0,$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U=1,V=1\}=P\{U=1\}\cdot P\{V=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=2,Y=1\}=P\{U=2,V=1\}+P\{U=1,V=2\}$$

$$=P\{U=2\}\cdot P\{V=1\}+P\{U=1\}\cdot P\{V=2\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9},$$

依次类推,可得

$$P\{X=3,Y=1\}=\frac{2}{9}, P\{X=2,Y=2\}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=3,Y=2\}=\frac{2}{9}, P\{X=3,Y=3\}=\frac{1}{9}.$$

则得(X,Y)的联合分布律表:

X / Y	1	2	3	$p_{\cdot j}$
1	1/9	2/9	2/9	5/9
2	0	1/9	2/9	3/9
3	0	0	1/9	1/9
$p_{i\cdot}$	1/9	3/9	5/9	1

2) 由 $P\{X=i\}=\sum_j P\{X=i,Y=j\}$ 与 $P\{Y=j\}=\sum_i P\{X=i,Y=j\}$,可分别得关于 X 和关于 Y 的边缘分布律 $\{p_{i\cdot}\}$ 和 $\{p_{\cdot j}\}$ 也列于上表中.

3) 由

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{9},\ P\{X=1\}=\frac{1}{9},\ P\{Y=1\}=\frac{5}{9}$$

$$P\{X=1,Y=1\}\neq P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}.$$

所以,X 与 Y 不相互独立. ♣

19.2 解: 1) 由(X,Y)的联合分布律$\{p_{ij}\}$及$p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}$ 与 $p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$,得边缘分布律分别为

X	0	1	2	3	Y	0	1	2	3	4	5
p_k	0.25	0.26	0.25	0.24	q_j	0.03	0.08	0.16	0.21	0.24	0.28

则

$$P\{X=2\mid Y=2\}=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{0.05}{0.16}=\frac{5}{16};$$

$$P\{Y=3\mid X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=3\}}{P\{X=0\}}=\frac{0.05}{0.25}=0.2.$$

2) $V=\max\{X,Y\}$ 的分布律:

V	1	2	3	4	5
p_k	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

3) $U=\min\{X,Y\}$ 的分布律:

U	0	1	2	3
p_k	0.28	0.30	0.25	0.17

4) $W=X+Y$ 的分布律:

W	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

♣

19.3 解: 由$V=\dfrac{X}{Y}$,得V 的可能取值见下表:

Y \ X	0	1	2	3
1	0	1	2	3
2	0	$1/2$	1	$3/2$
3	0	$1/3$	$2/3$	1

由此知随机变量V 的可能取值:$0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},1,\frac{3}{2},2,3$.又由

$$P\{V=v_k\}=P\{\frac{X}{Y}=v_k\}=\sum_{\substack{i,j:\\ i/j=v_k}}P\{X=i,Y=j\},$$

得随机变量$V=\dfrac{X}{Y}$的分布律:

V	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
r_k	0.03	0.11	0.09	0.13	0.29	0.15	0.08	0.12

如: $P\{V=1\}=P\{\frac{X}{Y}=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}+P\{X=3,Y=3\}$

$$=0.05+0.12+0.12=0.29.$$ ♣

19.4 解: 1) 由

$$F_Z(z)=P\{\,Z\le z\,\}=P\{\,\max\{X_1,X_2,\cdots,X_5\}\le z\,\}$$

$$=P\{X_1\le z,X_2\le z,\cdots,X_5\le z\,\}$$

$$=\prod_{i=1}^{5}P\{\,X_i\le z\}=[P\{X_1\le z\}]^5=[F(z)]^5,$$

而$F(z)=\int_{-\infty}^{z}f(x)dx$,则当$z\le 0$时,$F(z)=0$;而当$z>0$时,

$$F(z)=\int_0^z\frac{x}{4}\cdot e^{-\frac{x^2}{8}}dx=1-e^{-\frac{z^2}{8}}\quad\Rightarrow\quad F(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{z^2}{8}}&,\ z>0\\ 0&,\ z\le 0\end{cases}.$$

所以,随机变量Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}(1-e^{-\frac{z^2}{8}})^5&,\ z>0\\ 0&,\ z\le 0\end{cases}.$$

2) $P\{Z>4\}=1-P\{Z\le 4\}=1-F_Z(4)=1-(1-e^{-2})^5=0.5167$. ♣