习题(7)

7.1 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ A\cdot\sin x & , \quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ 1 & , \quad x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$, 试确定常数 A 的值,并计算 $P\{|X|<\dfrac{\pi}{6}\}$.

7.2 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数,令

$$F(x)=aF_1(x)-bF_2(x),$$

为使 $F(x)$ 是某一随机变量的分布函数,在下列给定的各组数值中应取 【 】

(A) $a=\dfrac{3}{5}$, $b=-\dfrac{2}{5}$. (B) $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$.

(C) $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$. (D) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$.

7.3 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases} A+B\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x\le 0 \end{cases}$,且 $F(x)$ 是连续函数.

1) 求系数 A,B;

2) 求 $P\{1<X<2\}$.

7.4 设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 都是一元分布函数,常数 $a,b>0$,且 $a+b=1$,试验证:$a\cdot F_1(x)+b\cdot F_2(x)$ 也是分布函数.

习题(7)参考解答

7.1 解: 由于分布函数是右连续的,则

$$F(\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}}F(x) \qquad A\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1 \qquad A=1.$$

且

$$P\{|X|<\frac{\pi}{6}\}=P\{-\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{6}\}=F(\frac{\pi}{6}-0)-F(-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$ ♣

7.2 解: 由 $1=F(+\infty)=a\cdot F_1(+\infty)-b\cdot F_2(+\infty)=a-b$,故答案应为(A). ♣

7.3 解: 1) 由 $F(+\infty)=1$ $A=1$.又由 $F(x)$ 是连续函数,则有

$$0=F(0^-)=F(0^+)=A+B \qquad B=-1.$$

于是

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

2) $P\{1<X<2\}=F(2)-F(1)=1-e^{-\frac{2^2}{2}}-(1-e^{-\frac{1^2}{2}})=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2}=0.4712$. ♣

7.4 解: 记 $F(x)=a\cdot F_1(x)+b\cdot F_2(x)$,易知 $F(x)$ 满足分布函数的三条基本性质:

① $F(x)$ 是一个不减函数;

② $0\le F(x)\le 1$,且

$$F(+\infty)=a\cdot F_1(+\infty)+b\cdot F_2(+\infty)=a+b=1,$$

$$F(-\infty)=a\cdot F_1(-\infty)+b\cdot F_2(-\infty)=0;$$

③ $F(x)$ 右连续,即 $F(x^+)=F(x)$.

所以,$a\cdot F_1(x)+b\cdot F_2(x)$ 是一个分布函数. ♣