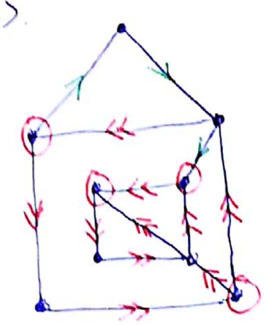
7-4 (4)

a)



边剖分为两条不重叠的迹.

总是可以的，因为 degree 为奇数的顶点 4个

两条如 ⟶ 和 ⟶⟶ 所示

b) Pf ① k 为偶数 (Thm 7-1.2).

② 从 G 中一个奇度数顶点出发，构造一条迹 γ_1，则其必终止于另一个奇度数顶点.

③ 考虑 $G-\gamma_1$，在 $G-\gamma_1$ 中重复上述步骤，直至所有奇度数顶点都在某一条迹中. ⇒ 一共 $\frac{k}{2}$ 条迹

④ $G-\gamma_1-\cdots-\gamma_k$：只有偶度数顶点. 若其有 M个 连通子图，则在每个连通子图都有一条 Euler 回路.

⑤ 由 G 的连通性，对于每个连通子图的 Euler 回路 C_j, $1\le j\le M$

必 $\exists\, i$ s.t. γ_i 与该连通子图 C_j 有公共顶点.

则可以延长 γ_i 使之包含 C_j，记新的迹亦为 γ_i.

⑥ 重复 ⑤ 直至所有的 C_j 都被加入到某条迹中

c) 略

d) 若奇度数顶点满足 ① 两两邻接，或 ② 两两跟某一偶度数顶点邻接.

7-7 (1) 证 $\forall e\in E$ 为割边 $\Leftrightarrow$ G 为树（连通，无圈）

Pf "⇒"：证 G 中无圈：若有圈 C，$\exists\, e\in E$ 在 C 上 $\Rightarrow$ 设 e 连接顶点 u,v，则 $C-e$ 为一条通路，连接 u,v。 $\forall\, w,w'\in V$，由 G 连通 $\Rightarrow$

$\exists$ 道路 γ 连接 w,w'：
- 若 γ 中不含 e：γ 在 $G-e$ 中 $\Rightarrow$ w,w' 在 $G-e$ 中连通
- 若 γ 中含 e：把 γ 中的 e 替换为 $C-e$，则得到一条新路连接 w,w'，且不含 e。

总之，w,w' 在 $G-e$ 中连通 $\Rightarrow$ $G-e$ 连通 $\Rightarrow$ e 不为割边。

"⇐" 逆否：若 $\exists\, e\in E$ 不为割边，则 $G-e$ 连通。$\Rightarrow$ 对于 e 的顶点 u,v，在 $G-e$ 中 $\exists$ 一条道路 γ 连接 u,v。$\Rightarrow$ 从 γ 中删掉所有的回路，得 γ' 为通路 $\Rightarrow$ $\gamma'+e$ 为 G 中的圈 $\Rightarrow$ G 非树。 矛。

(3) 化点总度数 $\sum_{v\in V}\deg(v) = 1\cdot n_1+2\cdot n_2+\cdots+k\cdot n_k=\sum_{i=1}^{k} i\cdot n_i$

设 k 为最大度。 $\deg$ 总和 $= 2|E|$。由 G 是树，

$$2|E| = 2(|V|-1) = 2\sum_{i=1}^{k} n_i - 2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} i\cdot n_i = 2\sum_{i=1}^{k} n_i-2 \Rightarrow n_1 = -\sum_{i=2}^{k}(2-i)n_i+2.$$

(4) 设 $T_1=(V_1,E_1,\delta_{T_1})$，$T_2=(V_2,E_2,\delta_{T_2})$，$V_1=V$，$V_2=V$

$a\in E_1$，$a\notin E_2$ $\Rightarrow$ T_2+a 中有圈，设为 C，则 a 在 C 中

由 T_1 为 G 的生成树，无圈，所以 C 中一定有一边 $b\neq a$，$b\notin E_1$，即 b 不在 T_1 中。

$(T_1-\{a\})\cup\{b\}$ 中无圈：T_1+b 中的圈一定含边 a，则

① T_1+b-a 中无圈 $\Rightarrow$ T_1-b+a 是树，（待证）
由定理 7-7.1，T_1-b+a 无圈且满足 "$e=v-1$"。

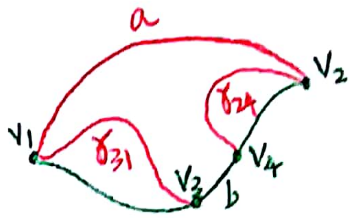
[又因 ~~T_2-b+a~~ ~~T_1-b+a~~ T_1-a+b 中顶点与 T_1 相同 ⇒ ~~T_1-b+a~~ T_1-a+b 是生成树.]

T_2-b+a 是生成树的证明：重复①[ ]的过程.

红色：T_1 中的道路
绿色：T_2 中的道路

待证部分：设 a 顶点为 v_1, v_2，b 顶点为 v_3, v_4. 在 T_1 中，v_3 必与 v_1 连通，设道路为 γ_{31}

v_2 …… v_4 —————— γ_{24}



则在 T_1 中有道路 $\gamma_{31}a\gamma_{24}$ 连接 v_3, v_4. 这条道路可以化简为一条通路 γ，则 γ 中一定包含 a（否则，在 T_1 中有 2 条通路从 v_3 到 v_4 ⇒ T_1 有圈，矛盾）.

⇒ $\gamma+b$ 即为 T_1+b 中的圈，所以一定包含 a. #

(5) 证：e 为割边 ⇔ e 在每个生成树中

证："⇒" 若 ∃ 生成树 T 不包含 e，则 T 亦是 $G-e$ 的生成树

但 e 为割边 ⇒ T 必不连通，矛盾.

"⇐" 若 e 不为割边，$G-e$ 连通，则必有生成树 T'，T' 不包含 e. 且由于 $G-e$ 与 G 顶点相同 ⇒ T' 亦为 G 的生成树. #

(6) 不讲了，自己做一下——请一定要做呀!