

# 几何画板迭代全解

佛山市南海区石门中学 谢辅炬  
(唐家军 修订)

## 主要内容

- ✧ 迭代的基本概念以及迭代的基本操作
  - ◆ 迭代的概念
  - ◆ 迭代在代数、几何中的应用
  - ◆ 绘制正多边形
  - ◆ 数列的图像、前  $n$  项和与积
- ✧ 迭代与分形几何
  - ◆ Sierpinski 三角形
  - ◆ Sierpinski 地毯
  - ◆ 摇曳的 Pythagorean Tree (毕达哥拉斯树)
  - ◆ 分形树
  - ◆ KOCH 柯赫曲线
  - ◆ KOCH Snowflake 柯赫雪花
  - ◆ 数学之美
  - ◆ H 迭代
  - ◆ 蜂巢
  - ◆ 其它分形欣赏
- ✧ 函数迭代：函数映射，M 集，朱丽亚集
  - ◆ 迭代法求方程解
  - ◆ MIRA 米拉
  - ◆ Henon-Attractor 挨农吸引子
  - ◆ Mandelbrot Sets M 集合
  - ◆ Julia Sets 朱丽亚集合
  - ◆ 牛顿迭代法

## 第一章 迭代的概念和操作

迭代是数学中一个很有趣的功能，它相当于程序设计的递归算法。通俗的讲就是用自身的结构来描述自身。最典型的例子就是对阶乘运算可看作以下定义： $n! = n \times (n-1)!$ 、 $(n-1)! = (n-1)(n-2)!$ 。递归算法的特点是书写简单，容易理解，但是运算消耗内存较大。为了更好地理解几何画板中迭代的应用，先了解下面这几个迭代最基本的概念。

**迭代：**按一定的迭代规则，从原象到初象的反复映射过程。

**原象：**产生迭代序列的初始对象，通常称为“种子”。

**初象：**原象经过一定规则变换操作而得到的第一个象。与原象是相对概念。

更具体一点，在代数学中，如计算数列 1, 3, 5, 7, 9, …… 的第  $n$  项。我们知道  $A_n = A_{n-1} + 2$ ，所以迭代的规则就是后一项等于前一项加 2。以“1”作为原像，“3”作为初像，迭代一次后得到“5”，再迭代一次得到“7”，如此下去得到以下数值序列 7、9、11、13、15, …… 如图 1.1 所示。

$$a_1 = 1.00$$

$$a_1 + 2 = 3.00$$

n	$a_1 + 2$	$(a_1 + 2) \cdot 2$
0	3.00	1.00
1	5.00	3.00
2	7.00	5.00
3	9.00	7.00
4	11.00	9.00
5	13.00	11.00

图 1.1



图 1.2

在几何学中，迭代使一组对象产生一组新的对象。图 1.2 中 A、B、C、D、E、F、G，各点相距 1cm，那么怎么由 A 点和 B 点得到其它各点呢？我们可以发现其中的规律就是从左到右，每一个点相当于前面一个点向右平移了 1cm。所以我们以 A 点作为原像，B 点作为初像，迭代一次得到 B 点，二次为 C 点，以此类推。

所以，**迭代像**就是迭代操作产生的象的序列，而**迭代深度**是指迭代的次数，迭代的**终点**就是最后的那个像。那么下面我们通过例子来进一步地了解迭代以及相关的概念。

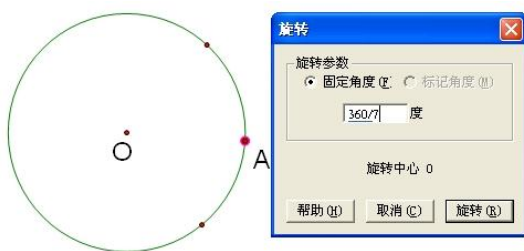
几何画板中迭代的控制方式分为两种，一种是没有参数的迭代，另一种是带参数的迭代，后者我们称之为深度迭代。两者没有本质的不同，但前者需要手动改变迭代的深度，后者可通过修改参数的值来改变迭代深度。我们先通过画圆内接正  $n$  边形这个例子来看一下它们的区别。

### 例 1.1 画圆的内接正七边形。

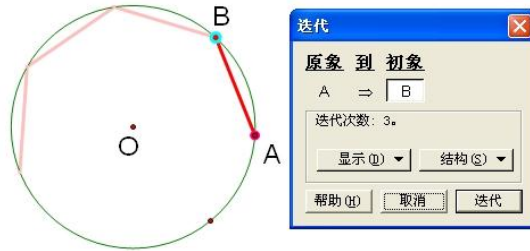
分析：由正七边形的特征，我们知道，每一个点都相当于前面的点逆时针旋转“ $360^\circ / 7$ ”，抓住这个规律，我们可以用迭代功能来解决。

步骤:

1. 新建圆 O，在圆 O 上任取一点 A。
2. 双击圆心 O 作为旋转中心。选中 A 点，单击菜单“变换”-“旋转”，旋转参数选为选择固定角度，然后在框中输入“ $360^\circ/7$ ”（单位必须标记出来），得到 B 点。连接线段 AB。



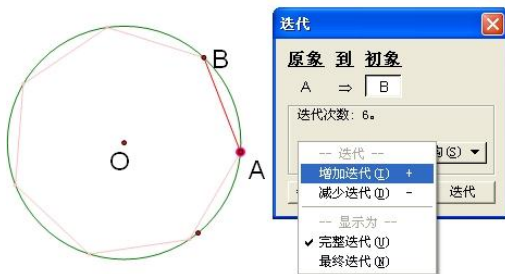
第 2 步



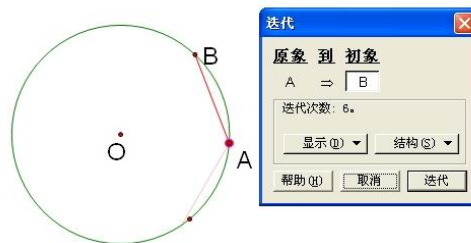
第 3 步

3. 选择 A 点，单击“变换”-“迭代”，点击 B 点作为初像。屏幕上显示出迭代的像是正七边形的 4 条边（因为系统默认普通迭代的迭代次数是 3 次）。

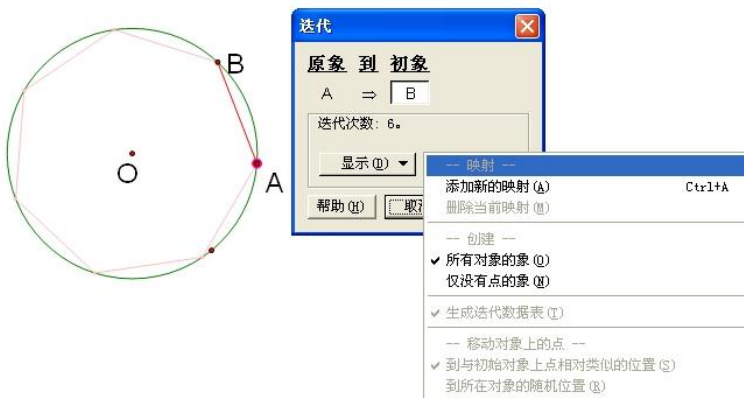
4. 单击迭代框的“显示”按钮，选择“增加迭代”。（或者按键盘的‘+’或‘-’）。增加三次迭代后，我们可以看到一个完整的正七边形。此时的迭代次数为 6 次，正七边形制作完成。



第 4 步



第 5 步



5. 单击迭代框的“显示”按钮，选“最终迭代”，得到的图像仅是最后一条边。

6. 点击迭代框“结构”按钮，我们可以设置创建的对象，选择“仅没有点的对象”则迭代的像只有正多边形的各条边，而没有顶点，反之则有顶点。

选择迭代像，我们可以修改他们的属性，比如颜色和粗细等，但是细心的你会发现，线段的迭代像是不能够度量其长度的，当然也就不能取中点之类的操作。迭代的点是不能够度量他们的横纵坐标，但是我们可以得到**迭代的终点**，方法是选择迭代的像点，然后单击“变换”-“终点”，可以发现最后的那个点变成实点了，此点可以被度量，此功能在函数映射里面会用到。

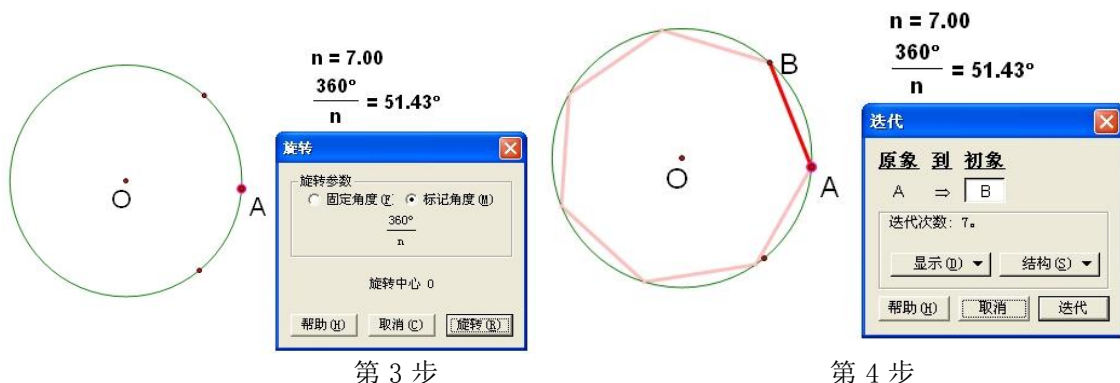
上述方法在增加后减少迭代次数时比较麻烦，而且迭代规则限定了，即每次都是旋转同样

的角度。迭代次数和迭代规则能不能用带参数来控制呢？可以的，这就是深度迭代。

## 例 1.2 画圆的任意内接正 $n$ 边形

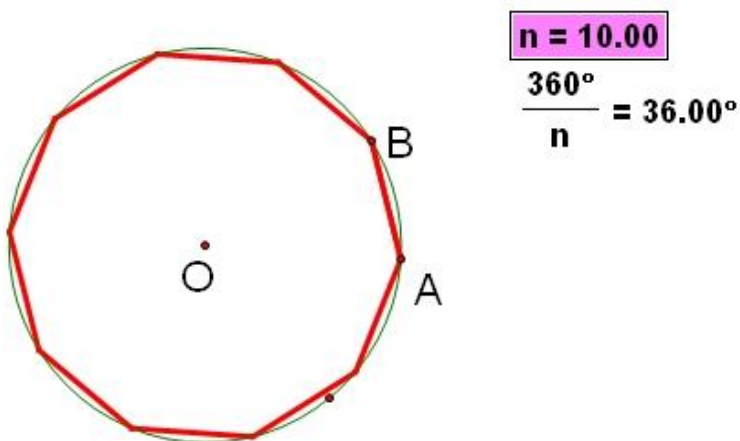
步骤：

1. 新建圆  $O$  并在圆上任取一点  $A$ 。双击圆心  $O$  作为旋转中心。
2. 新建参数  $n=7$ ，计算  $360^\circ/n$ ，注意这时要带单位“度”。
3. 选择  $A$  点，单击菜单“变换”-“旋转”，出现旋转对话框，单击计算结果  $360^\circ/n$  作为标记角度，得到  $B$  点。连接线段  $AB$ 。



4. 顺次选择点  $A$  和参数  $n$ ，按住“shift”键不放，单击“变换”-“深度迭代 I”，出现迭代对话框。单击  $B$  点作为初像，屏幕上显示出完整的正七边形。按“迭代”完成操作。

5. 如何改变参数  $n$  呢？有多种方法，第一种是双击参数  $n$ ，然后在对话框中输入值。第二种是选定参数  $n$ ，按键盘的“+”、“-”，系统默认变化量为 1。右键参数-“属性”可以修改变化量的大小。当然，还可以通过动画和移动参数调整参数的大小，当参数有编辑框时，还可以直接输入数字。



**注意：**迭代时，作为迭代深度的参数  $n$  一定要在最后面选择，这是系统的规定。

上面讲的都是迭代在几何方面的应用，下面我们来看看用迭代在画数列图像和数列求和方面的应用。

### 例 1.3 求数列 $a_n=1+n/2(n=1,2,\dots)$ 的前 8 项，并在平面上画出散点 $(n, a_n)$

分析：由数列的表达式可知， $(n, a_n)$  是直线  $y=1+0.5x$  上面的点。我们要产生两个数列，一个是作为横坐标的数列  $1, 2, 3, \dots$ ，一个是作为纵坐标的满足上述通项公式的数列。

步骤：

1. 新建函数  $f(x)=1+0.5x$ 。

2. 新建参数  $a=1$ ，计算  $a+1, a+1-1, f(a), f(a+1)$ 。

（计算  $a+1-1$  是为了得到  $f(a)$  对应的横坐标  $a$ 。因为迭代次数为 0 的时候， $f(a)=1.5$ ， $a$  的值在迭代数据表中是不会显示出来的。）

3. 新建参数  $n=7$ ，作为迭代深度。

4. 选择  $a$  和  $n$ ，做深度迭代，原像是“ $a$ ”，初像是“ $a+1$ ”。

n	a+1	f(a)	f(a+1)	(a+1)-1
0	2.00	1.50	2.00	1.00
1	3.00	2.00	2.50	2.00
2	4.00	2.50	3.00	3.00
3	5.00	3.00	3.50	4.00
4	6.00	3.50	4.00	5.00
5	7.00	4.00	4.50	6.00
6	8.00	4.50	5.00	7.00
7	9.00	5.00	5.50	8.00
8	10.00	5.50	6.00	9.00

$$\begin{aligned}
 a &= 1.00 & f(a) &= 1.50 \\
 a+1 &= 2.00 & f(a+1) &= 2.00 \\
 (a+1)-1 &= 1.00 \\
 f(x) &= 0.5 \cdot x + 1 \\
 n &= 11.00
 \end{aligned}$$

5. 右键点击数据表，选择“绘制表中记录”，设置  $x$  列变量为  $(a+1)-1$ ， $y$  列为  $f(a)$ 。坐标系为直角坐标系。

n	a+1	f(a)	f(a+1)	(a+1)-1
0	2.00	1.50	2.00	1.00
1	3.00	2.00	2.50	2.00
2	4.00	2.50	3.00	3.00
3	5.00	3.00	3.50	4.00
4	6.00	3.50	4.00	5.00
5	7.00	4.00	4.50	6.00
6	8.00	4.50	5.00	7.00
7	9.00	5.00	5.50	8.00
8	10.00	5.50	6.00	9.00
9	11.00	6.00	6.50	10.00
10	12.00	6.50	7.00	11.00
11	13.00	7.00	7.50	12.00

#### 绘制表格数据图像

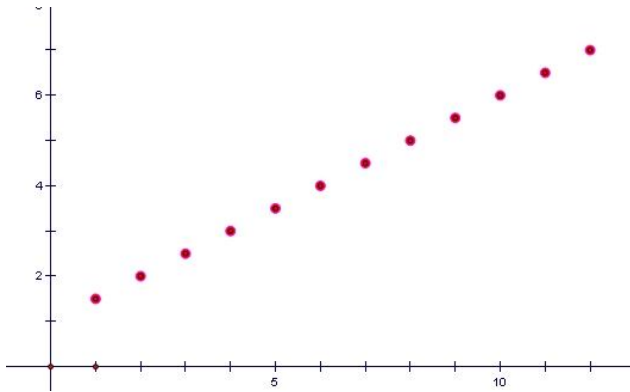
从表中绘制点

((a+1)-1, f(a))

选择列: x y

坐标系: ☒ 直角坐标 (T) ☐ 极坐标

取消 (C)
绘制 (F)



第 6 步

6. 点击绘图，得到散点。这些点是可以度量的。但是当参数  $n$  改变的时候，这些点不与数据表同步，所以是不会改变的。

### 例 1.4 求数列 1, 3, 5, 7, 9( $n=1,2,\dots$ )的前 $n$ 项的和。

分析：公差为  $d$ ，假设前  $n$  项和为  $S_n$ ， $S_n = S_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_1 + (n-1) \cdot d$ ，在平面上描出  $(n, S_n)$ 。

步骤：

1. 新建参数  $x=1$ ，计算  $x+1$ 。
2. 新建参数  $a=1$ ， $d=2$ ， $n=11$ 。分别表示数列首项、公差和迭代次数。
3. 新建参数  $s=1$ ，计算  $s+a \cdot x \cdot d$ 。
4. 选择  $x$ ， $S_1$  和  $n$  做深度迭代。绘制数据表。
5. 右键表格，绘制表中数据， $x$  的列为  $x+1$ ， $y$  的列为  $s+a \cdot x \cdot d$ 。

$x = 1.00$      $a = 1.00$      $d = 2.00$   
 $x+1 = 2.00$      $s_1 = 1.00$   
 $n = 11.00$      $s_1 + a \cdot x \cdot d = 4.00$

$n$	$x+1$	$s_1 + a \cdot x \cdot d$
0	2.00	4.00
1	3.00	9.00
2	4.00	16.00
3	5.00	25.00
4	6.00	36.00
5	7.00	49.00
6	8.00	64.00
7	9.00	81.00
8	10.00	100.00
9	11.00	121.00
10	12.00	144.00

第 4 步

迭代

原象 到 初象

$x \Rightarrow x+1$ 
 $s_1 \Rightarrow s_1 + a \cdot x \cdot d$

迭代次数: 11。

显示 (D)

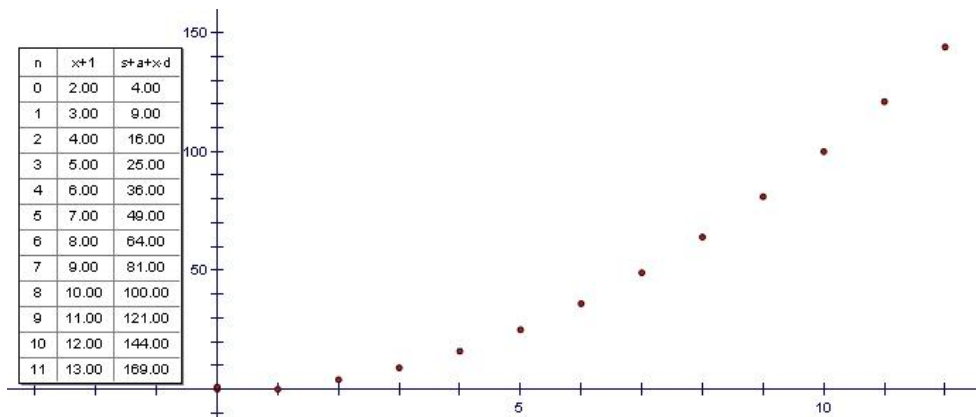
结构 (S)

帮助 (H)

取消

迭代





第 5 步

与此同理，等比数列的制作也是一样的。下面我们来看看通项公式不知道的数列怎么画出其图像。

### 例 1.5 画出斐波那契数列 $a_1=1$ , $a_2=1$ , $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ 。

分析：数列的前提条件是  $a_1=1$ ,  $a_2=1$ ，因为  $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ ；所以原像是  $a_1$ ,  $a_2$ ，初像是  $a_2$ ,  $a_3$ 。

步骤：

1. 新建参数  $f_1=1$ ,  $f_2=1$ , 计算  $f_1+f_2$ , 把计算结果的标签改为  $f_3$ 。
2. 新建参数  $a=1$ , 计算  $a+1$ ,。计算  $(a+1)+1$  (因为迭代 0 次的时候  $f_3=2$ , 而, 所以下标应是 3, 而  $a=1$ , 故计算  $a+1+1$ )
3. 新建参数  $n=8$ 。
4. 依次选择  $f_1, f_2, a, n$ , 做深度迭代, 初像分别为  $f_2, f_3, a+1$ ,。

**迭代**

原象 到 初象

$a_1 \Rightarrow a_1+1$

$f_1 \Rightarrow f_2$

$f_2 \Rightarrow f_3$

迭代次数: 21。

显示 (D) 结构 (S)

帮助 (H) 取消 迭代

**$a_1 = 1.00$**

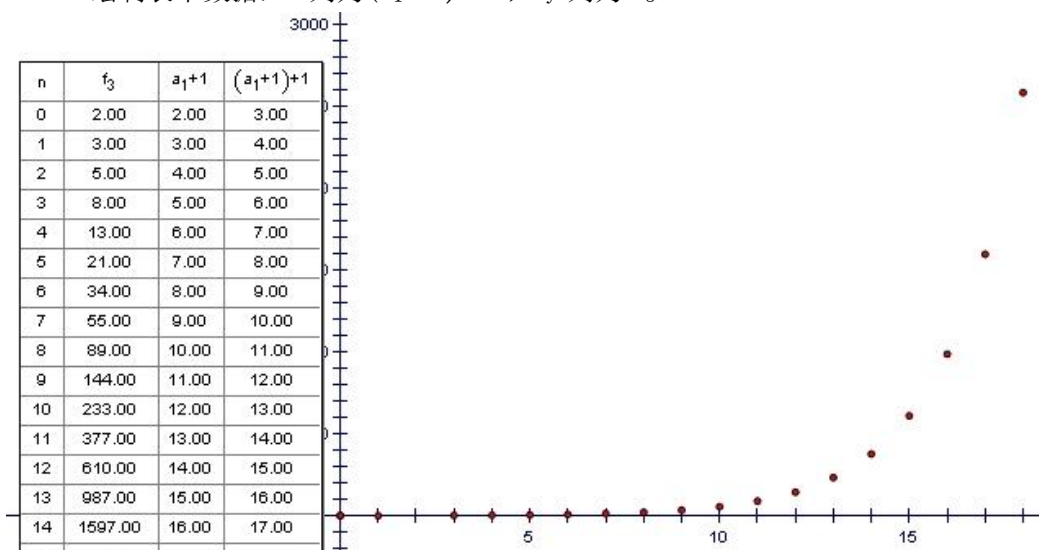
**$a_1+1 = 2.00$**

**$(a_1+1)+1 = 3.00$**

n	$f_3$	$a_1+1$	$(a_1+1)+1$
0	2.00	2.00	3.00
1	3.00	3.00	4.00
2	4.00	4.00	5.00
3	5.00	5.00	6.00
4	6.00	6.00	7.00
5	7.00	7.00	8.00
6	8.00	8.00	9.00
7	9.00	9.00	10.00
8	10.00	10.00	11.00

第 5 步

5. 绘制表中数据， $x$  列为  $(a_1+1)+1$ ， $y$  列为  $f_3$ 。



第 6 步

6. 画点  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$  两点，作为数列的前两项。从图像可以看出，数列前面增长的很缓慢，但是到了后面就非常的惊人了。

小结：

在开始下一章“迭代与分形”之前，先复习一下深度迭代的过程是：

1. 顺次选择原像和参数  $n$ 。（注意顺序）
2. 按住 shift 不放，单击菜单“变换”-“深度迭代”（出现对话框后可以松开 shift 键）。
3. 依次选定原像，选取初像。（注意顺序）。
4. 添加映射的方法是按键盘“Ctrl+A”。

## 第二章：迭代与分形几何

分形作为现代数学的一个分支，从诞生的那天起，就有着独特的魅力。分形特点是整体与部分之间存在某种自相似性，整体具有多种层次结构。分形图片具有无可争议的美学感召力，特别是对于从事分形研究的科学家来说。欣赏分形之美当然也要求具有一定的科学文化知识，但相对而言，分形美是通俗易懂的。分形就在我们身边，我们身体中的血液循环管道系统、肺脏气管分岔过程、大脑皮层、消化道小肠绒毛等等都是分形，参天大树、连绵的山脉、奔涌的河水、漂浮的云朵等等，也都是分形。人们对这些东西太熟悉了，当然熟悉不等于真正理解。分形的确贴近人们的生活，因而由分形而来的分形艺术也并不遥远，普通人也能体验分形之美。

因为分形几何的迭代的原像一般不止一个，而且均为多映射迭代，为了叙述的方便，我们先作以下两个约定。

1. 用  $(A, B, C)$  表示有顺序的三点  $A$ 、 $B$  和  $C$ 。
2.  $(A, B, C) \Rightarrow (D, E, F, )$ ,  $(G, H, I)$  表示  $A$  映射到  $D$ ,  $B$  映射到  $E$ ,  $C$  映射到  $F$ , 然后添加映射  $A$  映射到  $G$ ,  $B$  映射到  $H$ ,  $C$  映射到  $I$ , 以此类推。

### 例 2.1 Sierpinski 三角形

波兰著名数学家谢尔宾斯基在 1915-1916 年期间，为实变函数理论构造了几个典型的例子，这些怪物常称作“谢氏三角”、“谢氏地毯”、“谢氏海绵”、“谢氏墓塚”。如今，几乎任何一本讲

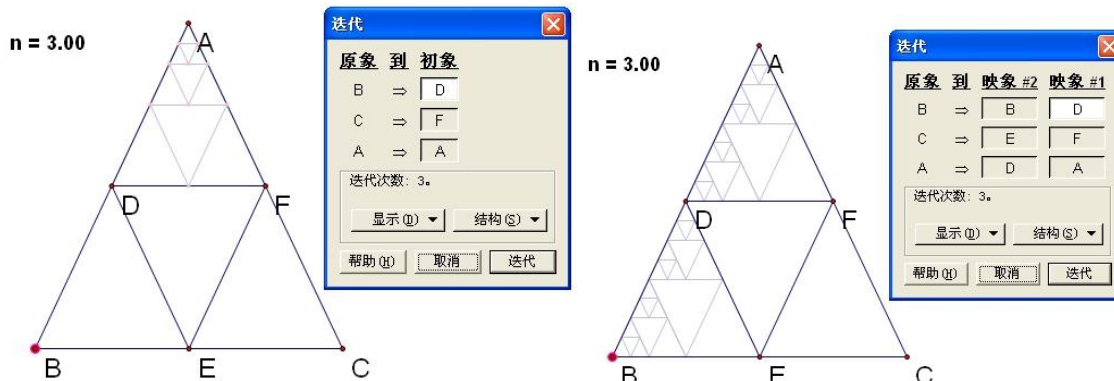


分形的书都要提到这些例子。它们不但有趣，而且有助于形象地理解分形。

著名的 Sierpinski 三角形，它是很有代表性的线性分形，具有严格的自相似特点。不断连接等边三角形的中点，挖去中间新的小三角形进行分割—随着分割不断进行 Sierpinski 三角形总面积趋于零，总边长趋于无穷。Sierpinski 三角形在力学上也有实用价值，Sierpinski 三角形结构节省材料，强度高，埃菲尔铁塔的结构与它就很相似。

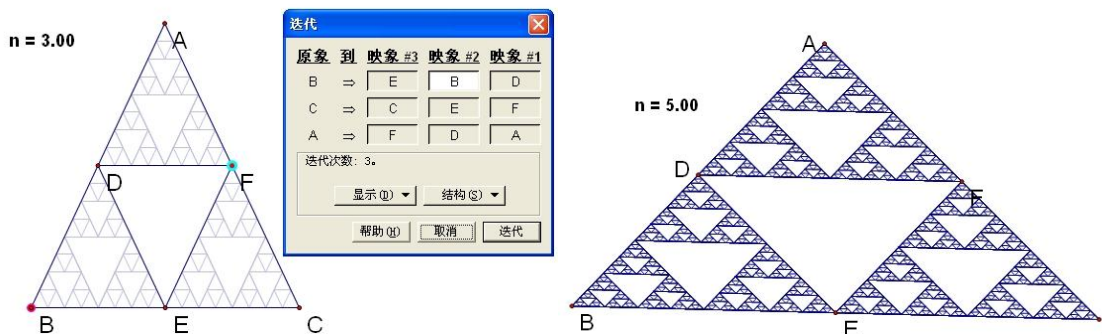
步骤：

1. 在平面上任意画一个三角形 ABC，取三边中点为 D、E、F，连接 D、E、F。
2. 新建参数  $n=3$ 。
3. 顺次选择 B, C, A 三点和参数  $n$ ，作深度迭代， $(B, C, A) \Rightarrow (D, F, A)$ 。
4. “ctrl-a”，添加新的映射， $(B, C, A) \Rightarrow (B, E, D)$ 。



第 3 步和第 4 步

5. 继续添加映射。 $(B, C, A) \Rightarrow (E, C, F)$ 。
6. 改变参数  $n$  可观察图形变化。



第 5 步和第 6 步

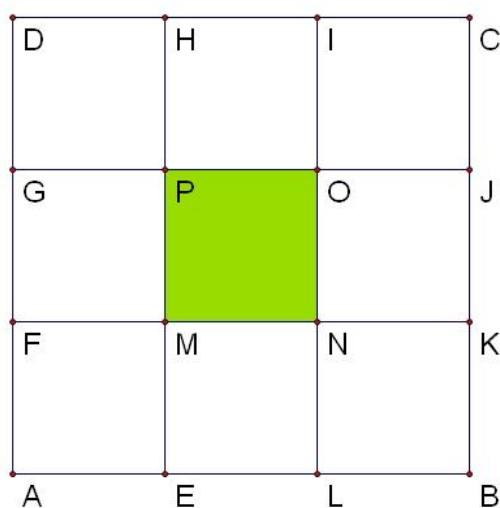
## 例 2.2 Sierpinski 地毯

和 Sierpinski 三角形相似，只是步骤多了一些。取正方形将其 9 等份，得到 9 个小正方形，舍去中央的小正方形，保留周围 8 个小正方形。然后对每个小正方形再 9 等份，并同样舍去中央正方形。按此规则不断细分与舍去，直至无穷。谢尔宾斯基地毯的极限图形面积趋于零，小正方形个数与其边的线段数目趋于无穷多，它是一个线集，图形具有严格的自相似性。

步骤：

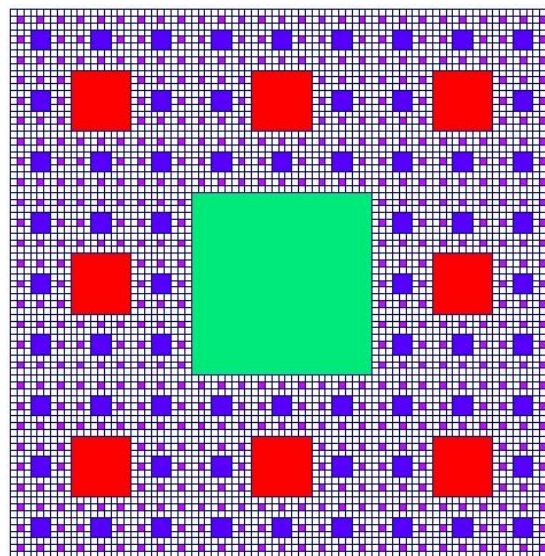
1. 平面上任取线段 AB，以线段 AB 构造正方形 ABCD。
2. 以 A 为缩放中心，将 B、D 缩放为  $1/3$ ，得到 E、F；以 D 为缩放中心，A、C 缩放为  $1/3$  得到 G、H。同理得到 I、J、K、L。连接各点，将正方形九等份；

3. 构造正方形 MNOP 内部，度量 MNOP 的面积，选择该度量结果和正方形内部，单击“显示”-“颜色”-“参数”，确定。则该 MNOP 的颜色随它的面积变化而变化。



面积 **PONM** = 5.40 厘米<sup>2</sup>

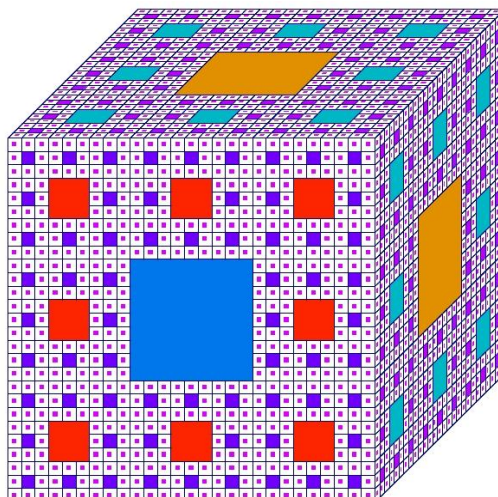
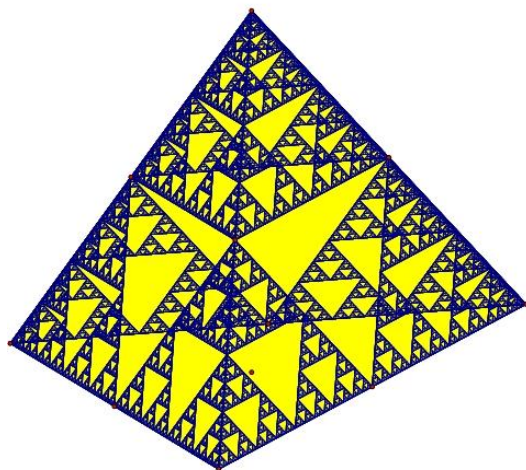
第 2 步



第 3 步

4. 新建参数  $n=4$ ，顺次选择 A、B 两点 and 参数  $n$ ，作深度迭代， $(A, B) \Rightarrow (G, P), (P, O), (O, J), (F, M), (M, N), (N, K), (A, E), (E, L), (L, B)$ 。注意迭代中点的对应，当迭代框遮住图像的时候可用鼠标选中拖动开。单击迭代，隐藏不必要的点。

如果我们制作任意三角形的 Sierpinski 三角形和任意四边形的 Sierpinski 地毯（即三角形和四边形的顶点都是自由点），然后按照多面体的侧面数将他们复制。利用画板合并点的功能，将它们“粘贴”到三棱锥和正方体的各个侧面上，（如下图）可以制作空间的 Sierpinski 三角形和地毯。是不是很漂亮呢？



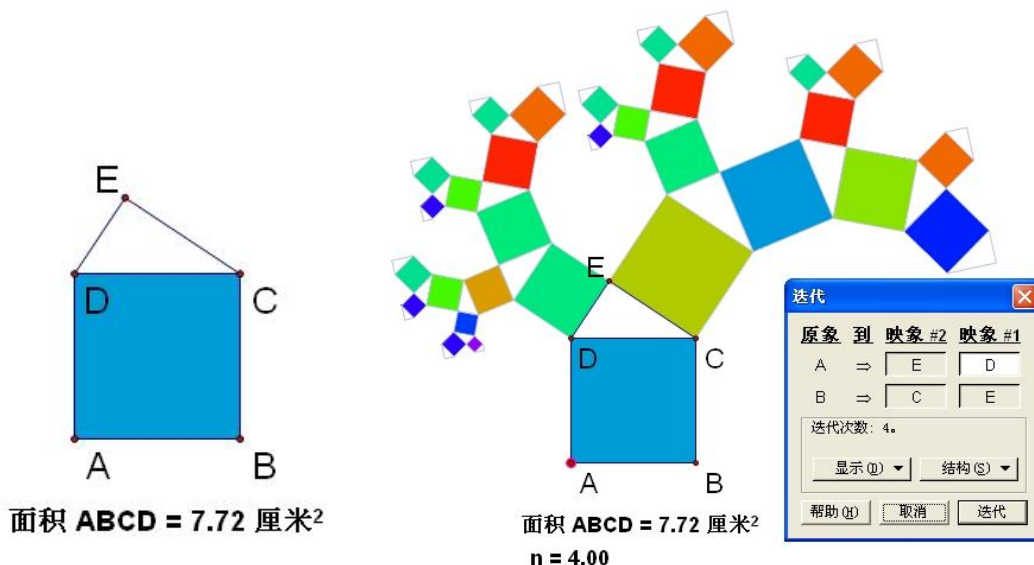
## 例 2.3 摇曳的 Pythagorean Tree(毕达哥拉斯树)

毕达哥拉斯学派发现勾股定理(西方叫做毕达哥拉斯定理)闻名于世，又由此导致不可通约

量<sup>①</sup>的发现。1988 年，劳威尔通过数值研究发现毕达哥拉斯树花是一迭代函数系的 J 集。

步骤：

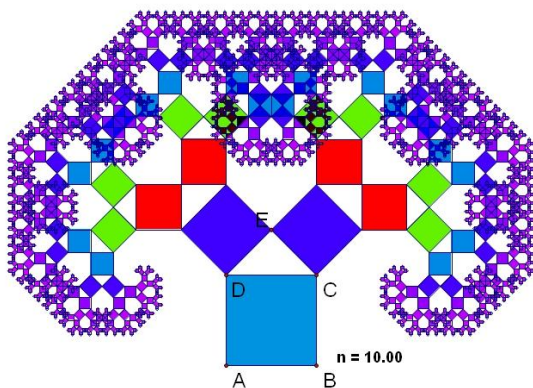
1. 在屏幕上任取两点 A 和 B，作正方形 ABCD，以 CD 为直径作圆 O，取半圆弧 OCD，在该弧上任取一点 E，连接 CE，DE。隐藏不必要的对象。
2. 构造四边形 ABCD 内部，度量 ABCD 的面积。选择四边形内部和度量结果，单击“显示”-“颜色”-“参数”。则四边形的颜色会随它的面积变化而变化。
3. 新建参数  $n=4$ ，选择 A、B 和 n，作深度迭代， $(A, B) \Rightarrow (D, E), (E, C)$ 。



第 2 步

第 3 步

4. 选择 E 点，单击“编辑”-“操作类按钮”-“动画”，E 点变动，很漂亮的效果。当 E 点在弧 OCD 的中点时，整个树显出对称美。



## 例 2.4 分形树

分析：和毕达哥拉斯树类似，树枝按一定的规律生长。

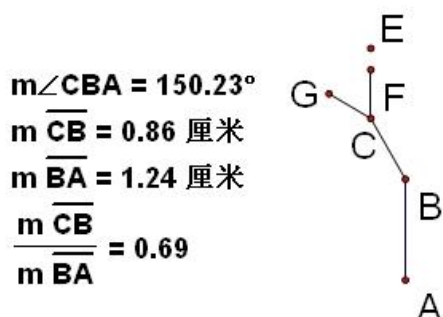
步骤：

1. 在垂直方向上画线段 AB，在 AB 左上区域任取一点 C。

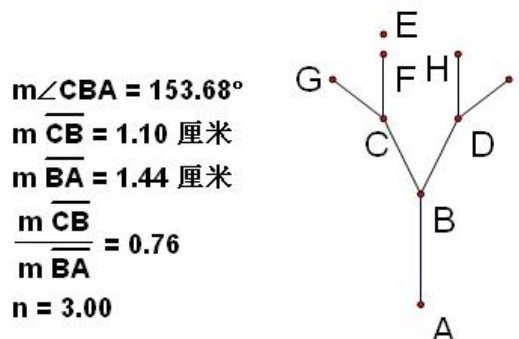
<sup>①</sup> 两个几何线段，如果存在一个第三线段能同时量尽它们，就称这两个线段是可通约的，否则称为不可通约的。



2. 度量 CB, BA 的长度, 计算 CB/BA; 度量  $\angle CBA$  的大小。
3. 双击 C 点作为旋转中心, 旋转角度为  $\angle CBA$ , 旋转 B 得到点 E; 继续以 CB/BA 为缩放比例, E 点缩为 F 点; 双击线段 CB 作为标记镜面, 得到 F 点关于线段 CB 的对称点 G。连接 GC, FC。
4. 双击线段 AB 作为标记镜面, 得到 C、F、G 关于线段 AB 的对称点 D、H、I, 连接 BD、HD、

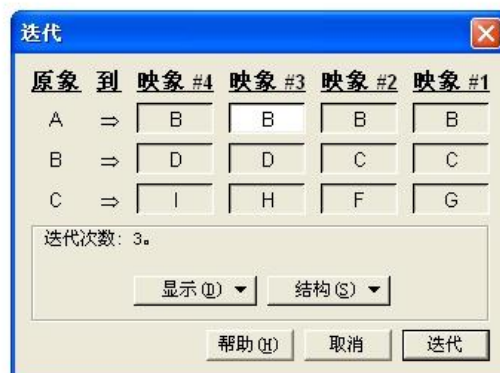
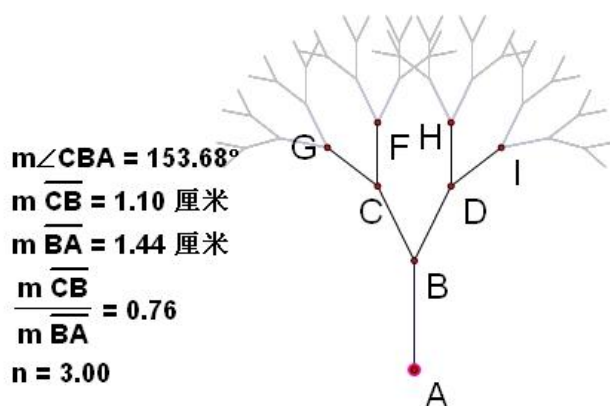


第 3 步

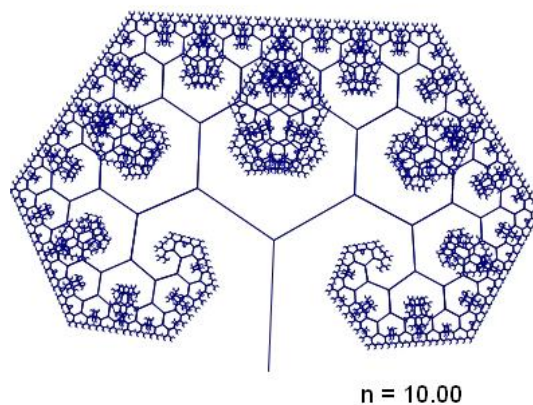
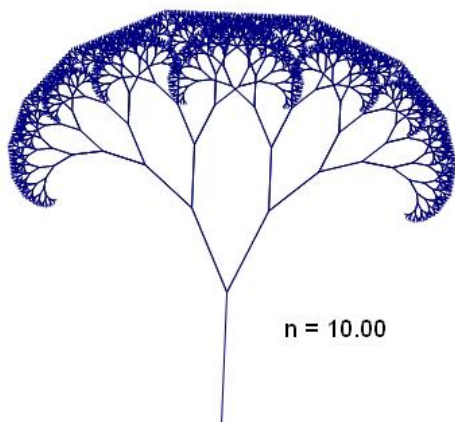


第 4 步

5. 新建参数  $n=3$ 。顺次选择 A、B、C 三点和参数  $n$  (参数必须最后选择), 作深度迭代,  $(A, B, C) \Rightarrow (B, C, G), (B, C, F), (B, D, H), (B, D, I)$ 。



6. 移动 C 点的位置, 改变树枝的形状。

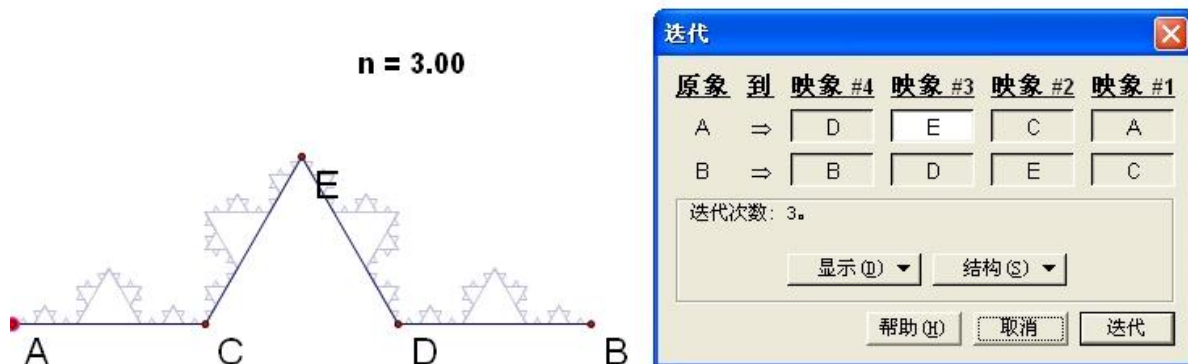


## 例 2.5 KOCH 曲线

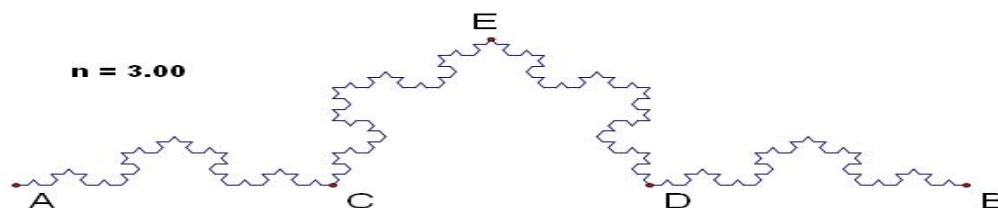
瑞典数学家柯赫于 1904 年构造了如今称之为“柯赫曲线”(Koch curve)的几何对象,这一年,他一共发表了两篇论文描述这种曲线,他画出了此曲线的图形,给出了生成步骤。它的构造过程如下:取一条长度为  $L$  的线段,那样先将它三等分,然后保留两侧的两段,将中间的一段改成夹角为  $60^\circ$  的两个等长的线段,每段长度均为  $L/3$ ,这是  $n=1$  的第一次操作。类似地,第二次操作是将上次所得的四段边长为  $L/3$  的线段都进行三等分,现在每段长度为  $L/9$ ,并将它们中间的一段改成夹角为  $60^\circ$  的两个长度为  $L/9$  的线段。如果将上述操作一直进行下去,最终得到一条具有自相似结构的曲线,称为三次柯赫曲线。

步骤:

1. 画线段  $AB$ , 以  $A$  为缩放中心,  $B$  缩放为  $1/3$ , 得到  $C$  点; 同理以  $B$  为缩放中心,  $A$  缩放为  $1/3$ , 得到  $D$  点。以  $C$  点为旋转中心,  $D$  点顺时针旋转  $60$  度, 得到  $E$  点。
2. 隐藏线段  $AB$ , 连接线段  $AC$ 、 $CE$ 、 $ED$ 、 $DB$ 。
3. 新建参数  $n=3$ , 顺次选择  $A$ 、 $B$  两点 and  $n$ , 作深度迭代。(A, B)  $\Rightarrow$  (A, C), (C, E), (E, D), (D, B) (如下图所示)。



4. 单击迭代框的“显示”按钮, 选择“显示最终迭代”。隐藏线段  $AC$ 、 $CE$ 、 $ED$ 、 $DB$  (如下图所示)。



5. 改变参数  $n$ , 观察图形变化。

## 例 2.6 KOCH 雪花

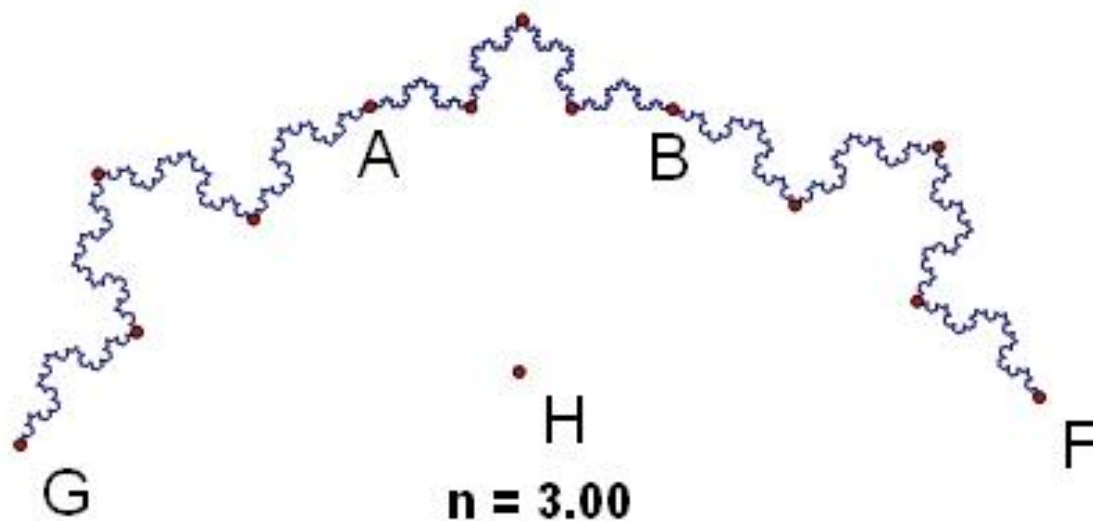
因为它酷似雪花, 所以叫“雪花曲线”(snowflake curve), 也很像海岸线。柯赫曲线的生成过程很简单, 以一个三角形作为源多边形, 即初始元, 将三角形的每一边做三等分, 舍去中间的  $1/3$ , 然后按科赫曲线的规则产生生成元。从源多边形开始, 第一步形成一个六角星形, 第二步将六角星形的 12 条边, 按科赫曲线的生成规则进行同样的操作得 48 条边星形。以后依此进行同样得操作, 直至无穷, 生成称为科赫雪花的图形。在极限的情况下, 科赫雪花的上的

折线演变成为曲线。由于科赫曲线生成中的每一步操作都会使折线的长度增加，所以在极限的情况下，科赫雪花边的总长度将趋于无穷。

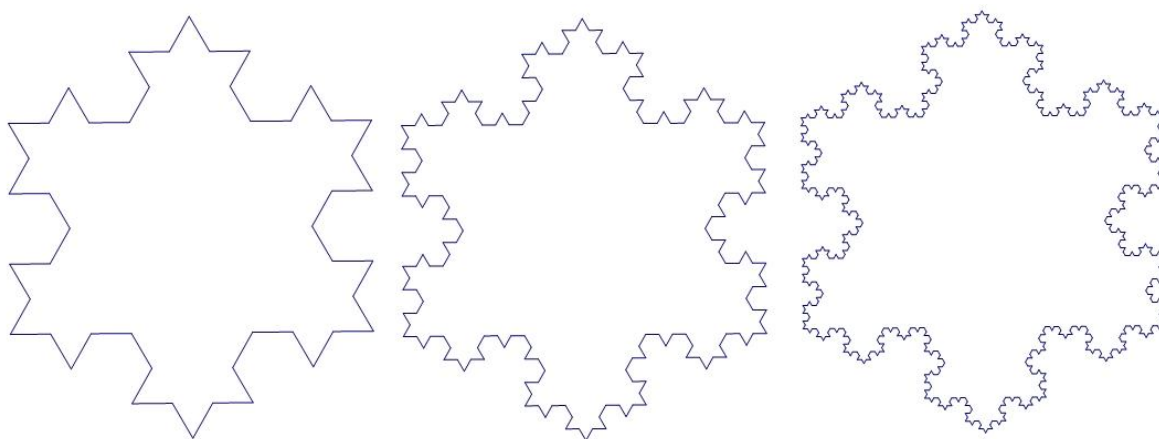
柯赫曲线是很复杂的，首先它有许多折点，到处都是“尖端”，用数学的语言讲，曲线虽然连续，但处处不可微，即没有切线。

步骤：

1. 在平面上取 AB 做一个 KOCH 曲线，然后在 A 的左端任取一点 G，在 B 的右边任取一点 F，分别在 AG 和 BF 上做 KOCH 曲线，注意三个迭代深度都必须为 n。



2. 以 B 点为旋转中心，A 顺时针旋转 60 度得到 H 点。选择 G, H 两点，单击“编辑”-“合并点”，则 G 点与 H 点合并。同理，再合并 F、H 两点。Koch 雪花完成了。



## 例 2.7 数学之美

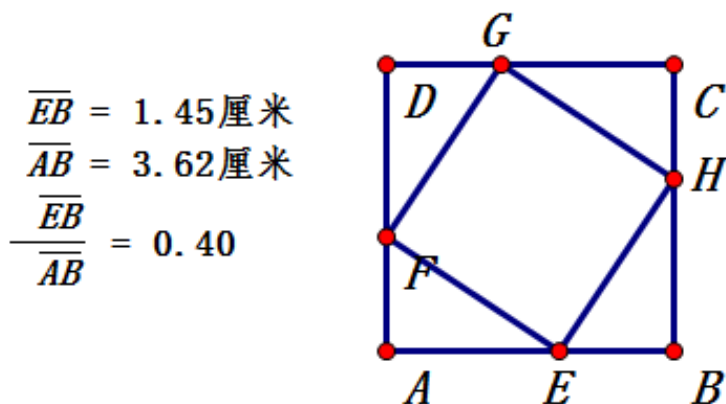
步骤：

1. 任取两点 A、B，并作正方形 ABCD。

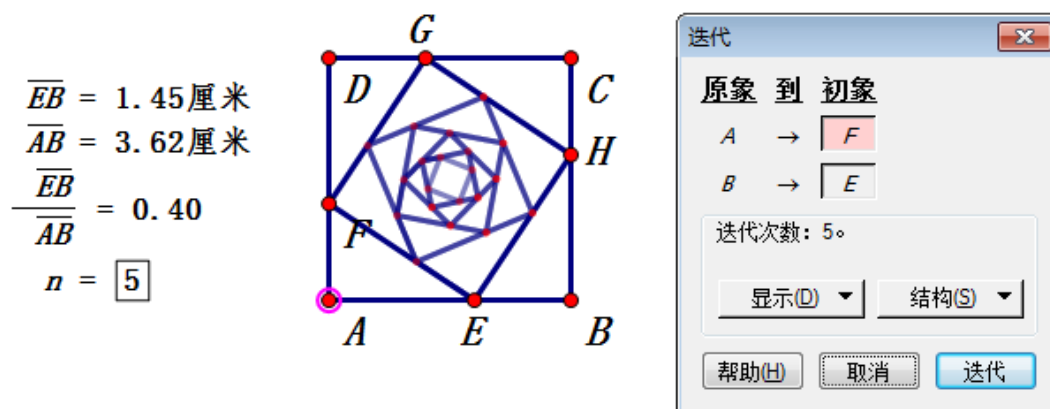
2. 在 AB 上任取一点 E，连接 BE，度量线段 BE 的长度并计算  $BE/AB$ 。

3. 双击 A 点作为缩放中心，选择 D 点，单击“变换”-“缩放”以计算结果‘ $BE/AB$ ’为比例缩放，得到点 F；同理以 D 点为中心，缩放 C 点得到点 G；以 C 点为缩放中心，缩放 B 点得到点 H。连接正方形 EFGH。

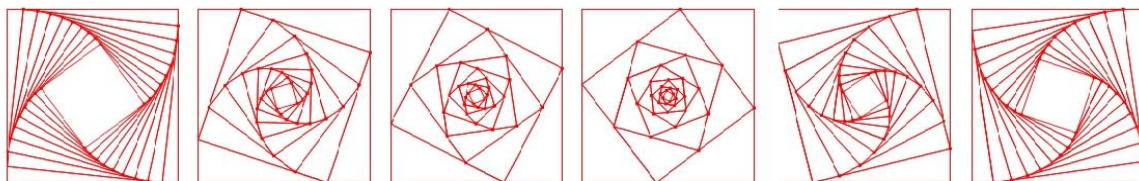




4. 新建参数  $n=5$ ，顺次选择 A、B 两点，和参数  $n$ ，按下 shift 键不放， $(A, B) \Rightarrow (F, E)$ 。如下图所示：



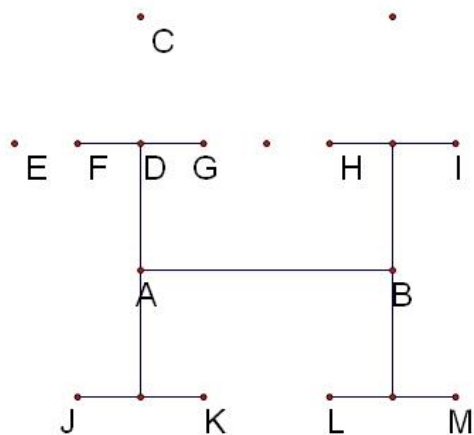
5. 选择 E 点，点击“编辑”-“操作类按钮”-“动画”。E 点变动，产生梦幻般的效果。



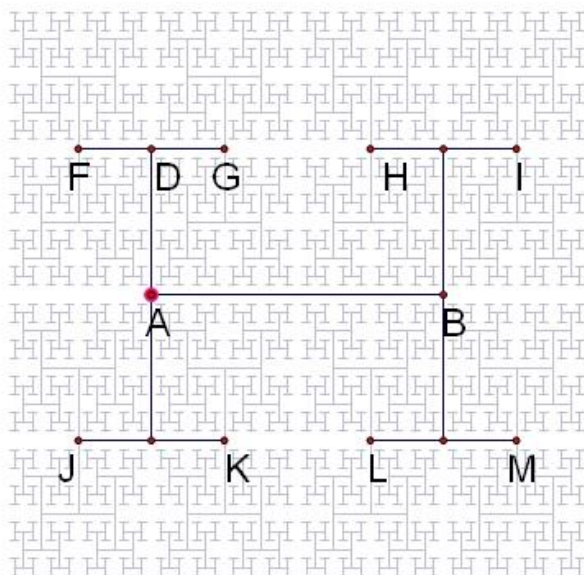
## 例 2.8 H 迭代

步骤：

1. 在水平直线上取两点 A 和 B，连接 AB。以 A 点为旋转中心，B 点顺时针旋转 90 度，得到 C 点，再取 AC 中点 D。
2. 以 D 为旋转中心，C 点逆时针旋转 90 度得到 E 点，取 DE 中点 F。以 D 为旋转中心，F 点再旋转 180 度得到 G 点。连接 FG。
3. 同理再画出 H、I 两点。以 AB 为标记镜面，得到 F、G、H、I 关于 AB 的对称点 J、K、L、M，连接线段 JK，LM。（如下图所示）



4. 隐藏不必要的点，新建参数  $n=4$ 。顺次选择 A、B 两点和参数  $n$ ，作深度迭代， $(A, B) \Rightarrow (F, G), (H, I), (J, K), (L, M)$



$n = 4.00$

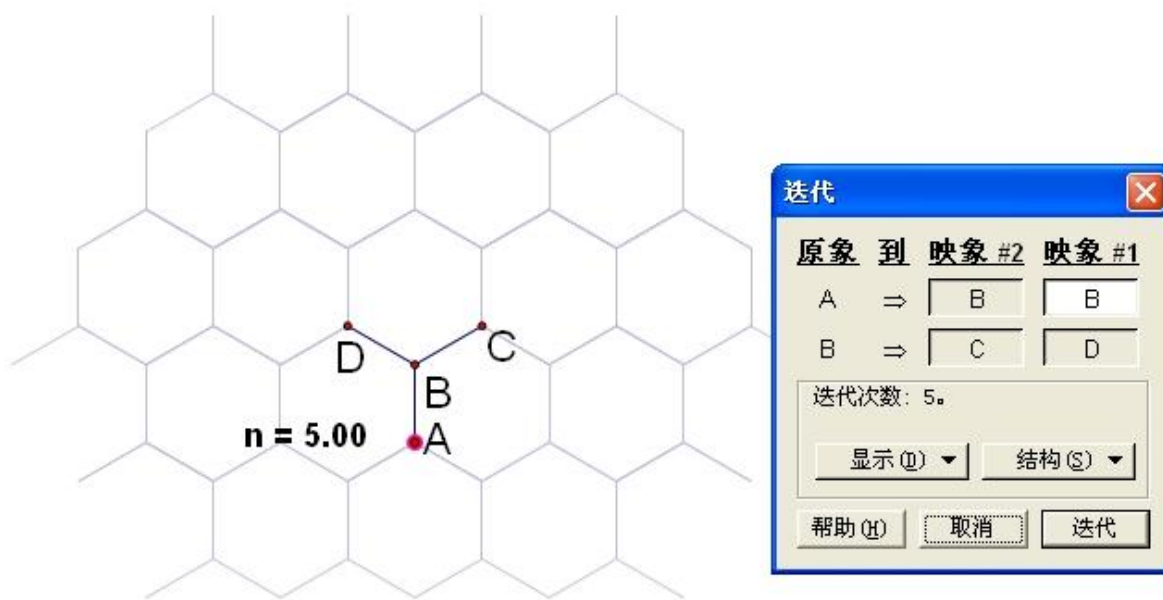
5. 单击迭代，隐藏各点的标签。

## 例 2.9 蜂巢

蜜蜂的巢你观察过没有？是什么形状呢？聪明的蜜蜂选择了正六边形，因为这样可以填充整个空间，而且正六边形是最省材料的一种结构。从蜂巢中我们也可以发现许多自相似的结构。由三条边迭代就可以得到蜂巢了，不信？请看。

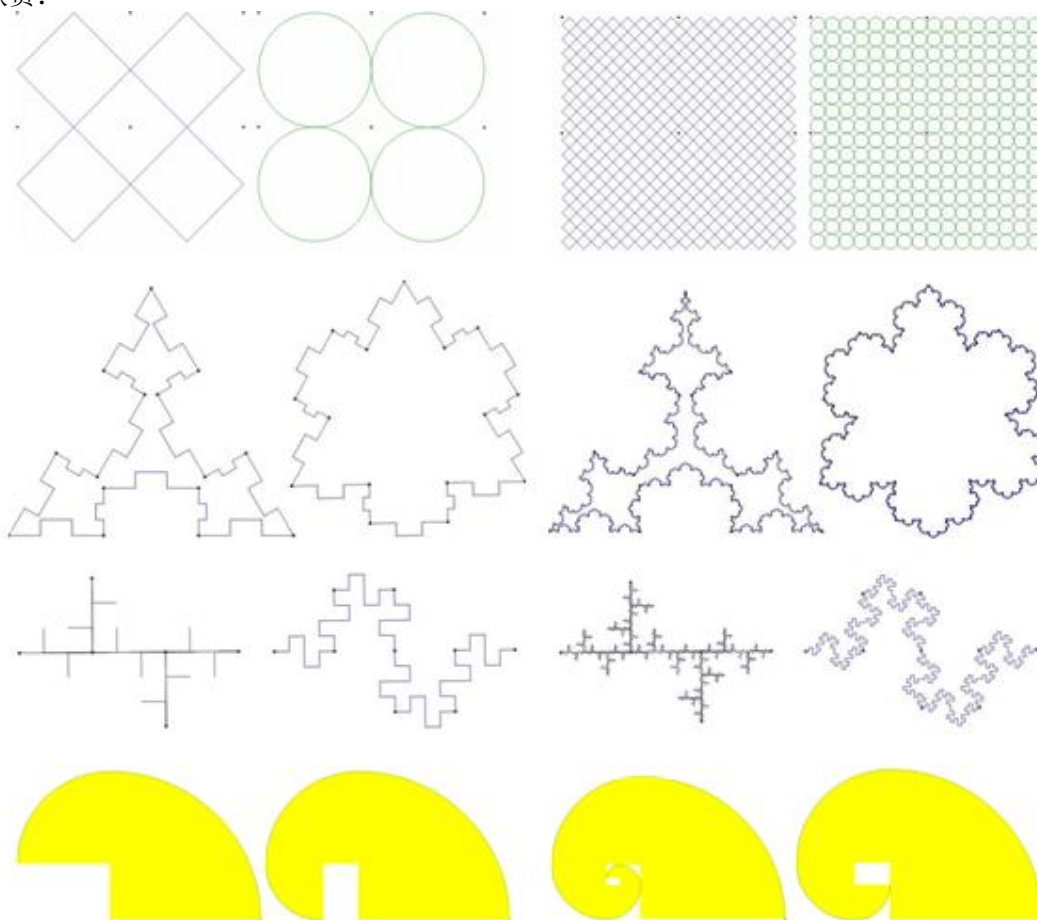
步骤：

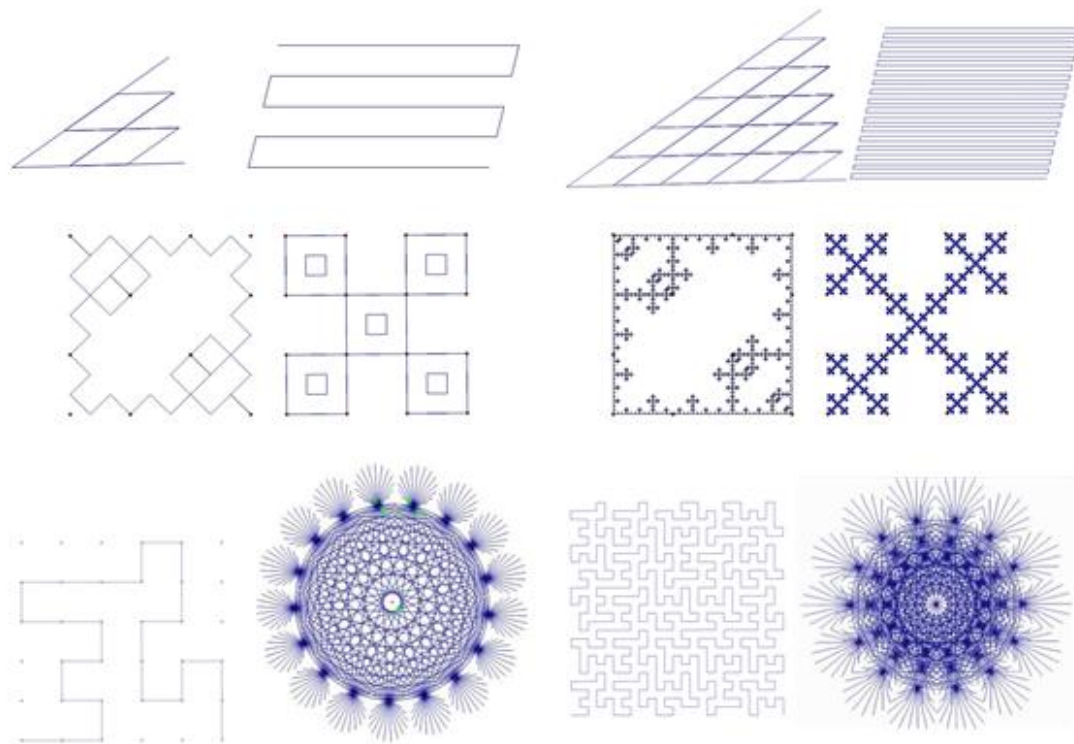
1. 屏幕上任取线段 AB，以 B 为旋转中心，A 点顺时针旋转  $120^\circ$  得到点 C，A 点逆时针旋转  $120^\circ$  得到点 D。
2. 新建参数  $n=5$ 。选择 A、B 和参数  $n$ ，作深度迭代， $(A, B) \Rightarrow (B, C), (B, D)$ 。



3. 单击迭代，得到蜂巢的图像。

上面的迭代只是分形几何的一部分，由于篇幅所限，下面给出其余一些分形几何的图片，以供欣赏：



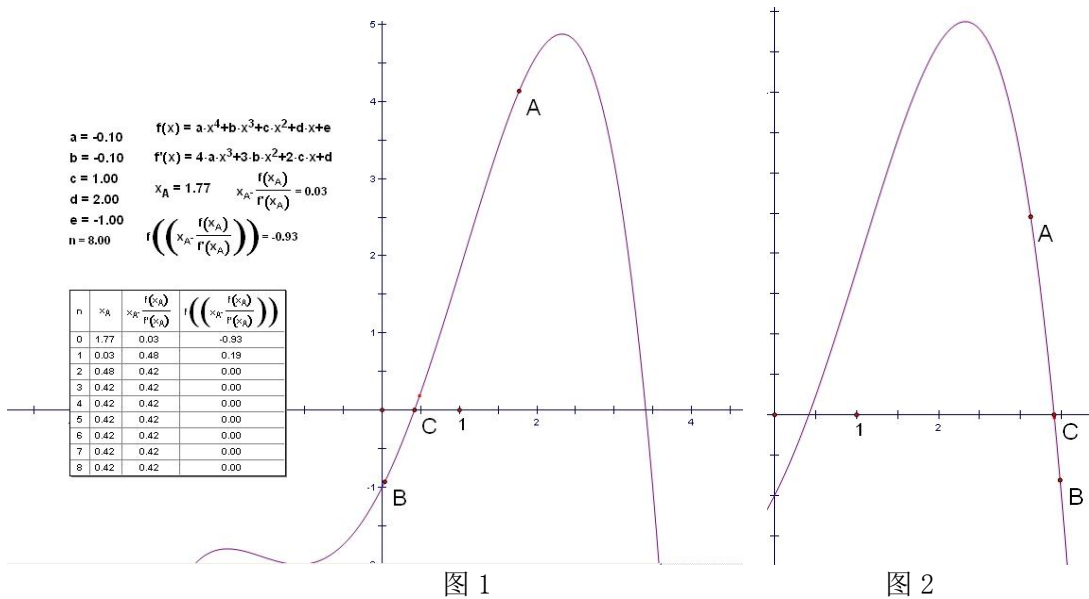


### 第三章：函数迭代

#### 例 3.1 多项式 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 求根

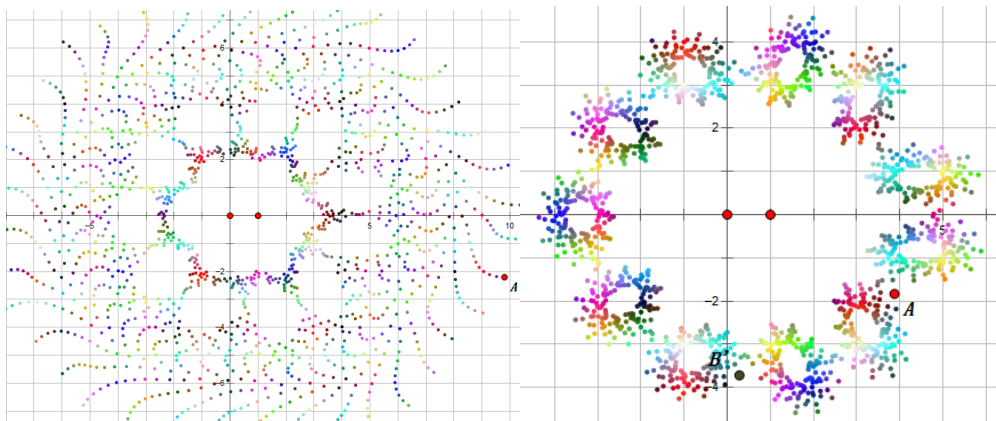
分析：多项式求根的迭代式是： $x_{n-1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$

1. 新建参数  $a=-0.1, b=-0.1, c=1, d=2, e=-1, n=5$ 。
2. 新建函数  $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ，绘制出它的图象。
3. 在图像上任取一点 A，度量 A 的横坐标  $x_A$ 。
4. 计算  $x_A-f(x_A)/f'(x_A)$ ；计算  $f(x_A-f(x_A)/f'(x_A))$ 。
5. 依次选择  $x_A-f(x_A)/f'(x_A)$ ， $f(x_A-f(x_A)/f'(x_A))$ ，单击“绘图”-“绘制点(x, y)”。得到点 B。
6. 度量点 B 的坐标  $x_B$ 。
7. 选中点 A，和参数 n，按住 Shift 键，单击“变换”菜单“深度迭代”，弹出迭代对话框，单击点 B。结果如图 1 所示。



8. 选择迭代像，单击“变换”菜单“终点”，得到迭代的终点 C，度量 C 点的横坐标  $x_C$ 。
  9. 观察表格可知，显示方程的一个近似根是 0.42。
  10. 拖动 A 点，改变它的位置。观察表格可知道方程的另外一个近似根是 3.41。如图 2。
- 如果度量函数图像与坐标轴交点的横坐标，得到的值会比较精确。

### 例 3.2 MIRA 米拉



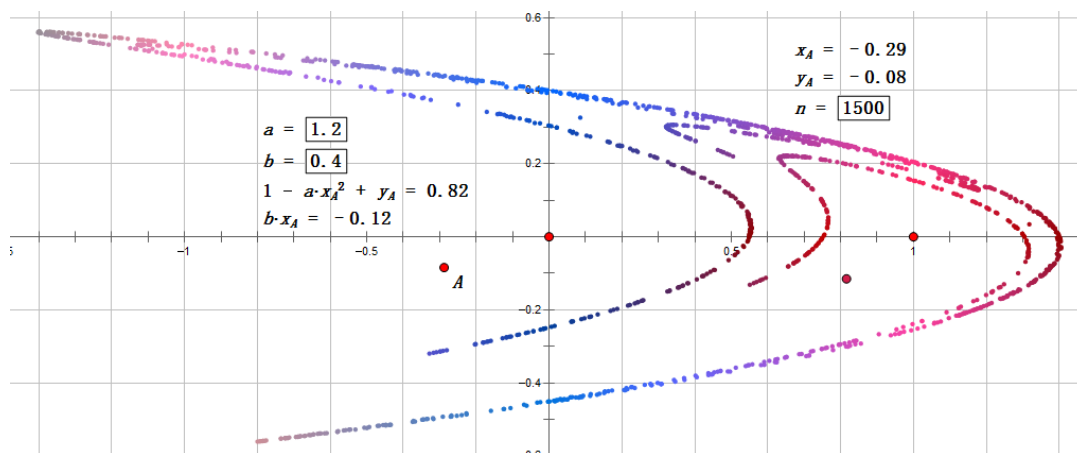
步骤：

1. 在平面上取一点 A，度量 A 的横坐标  $x_A$  和纵坐标  $y_A$ 。
2. 新建参数  $a=0.4$ ， $b=0.99875$ 。（b 取得尽量接近 1）
3. 新建函数  $f(x)=ax+(1-a)x^2/(1+x^2)$ 。
4. 计算  $f(x_A)+by_A$ ， $f(f(x_A)+by_A)-x_A$ 。注意这里用的是函数嵌套。顺次选择这两个结果，单击“绘图”-“绘制点(x, y)”。得到点 B。
5. 顺次选择点 B 和三个计算结果： $f(x_A)+by_A$ ， $f(f(x_A)+by_A)-x_A$ ， $x_A$ 。单击菜单“显示”-“颜色”-“参数”，单击确定。发现 B 点的颜色变了，其实 B 点已经隐藏起来，看到的是同一位置上的另外一个点 B'。



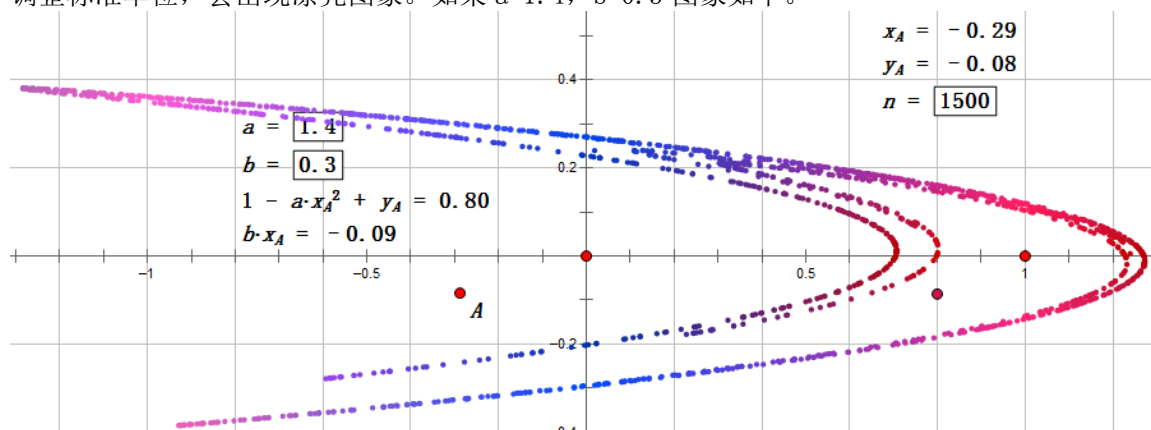
6. 新建参数  $n=1500$ ，选择 A 点和参数  $n$  作深度迭代。 $A \Rightarrow B'$ 。“迭代”，完成。  
如果选定点 A，“编辑”-“操作类按钮”-“动画”，会出现漂亮的动画。

### 例 3.3 Henon Map（埃农映射）



步骤：

1. 在平面上取一点 A，度量 A 的横坐标  $x_A$  和纵坐标  $y_A$ 。
2. 新建参数  $a=1.2, b=0.4$
3. 计算  $(1-ax_A^2)+y_A, bx_A$ 。顺次选择这两个计算结果，点击“绘图”-“绘制点”，得到点 B。
4. 选择点 B，并依次选择  $(1-ax_A^2)+y_A, bx_A$  和  $x_A$ ，单击菜单“显示”-“颜色”-“参数”，出现颜色参数对话框，单击确定。得到点  $B'$ 。
5. 新建参数  $n=1500$ ，选择点 A 和参数  $n$ ，作深度迭代， $A \Rightarrow B'$ 。  
调整标准单位，会出现漂亮图象。如果  $a=1.4, b=0.3$  图象如下。



因为 M 集和朱丽亚集其实是复数平面迭代，我们先来复习一下复平面的一些知识。

若  $Z_k = x_k + iy_k$ ,  $\mu = p + iq$ 。因为  $Z_k^2 = x_k^2 - y_k^2 + 2ix_ky_k$ ，所以  $Z_k^2 + \mu = (x_k^2 - y_k^2 + p) + (2x_ky_k + q)i$ 。

则  $x_{k+1} = x_k^2 - y_k^2 + p$ ,  $y_{k+1} = 2x_ky_k + q$ ，聪明的你应该知道怎么表示复平面上的点的平方了吧。

好了，那么什么是 Julia 集和 Mandelbrot 集合，他们之间的区别是什么呢？考虑  $Z_{k+1} = Z_k^2 +$



$\mu$ ，给定复数初值  $Z_0$ ， $\mu$ ，得到无穷复数序列  $\{Z_k\}$ 。

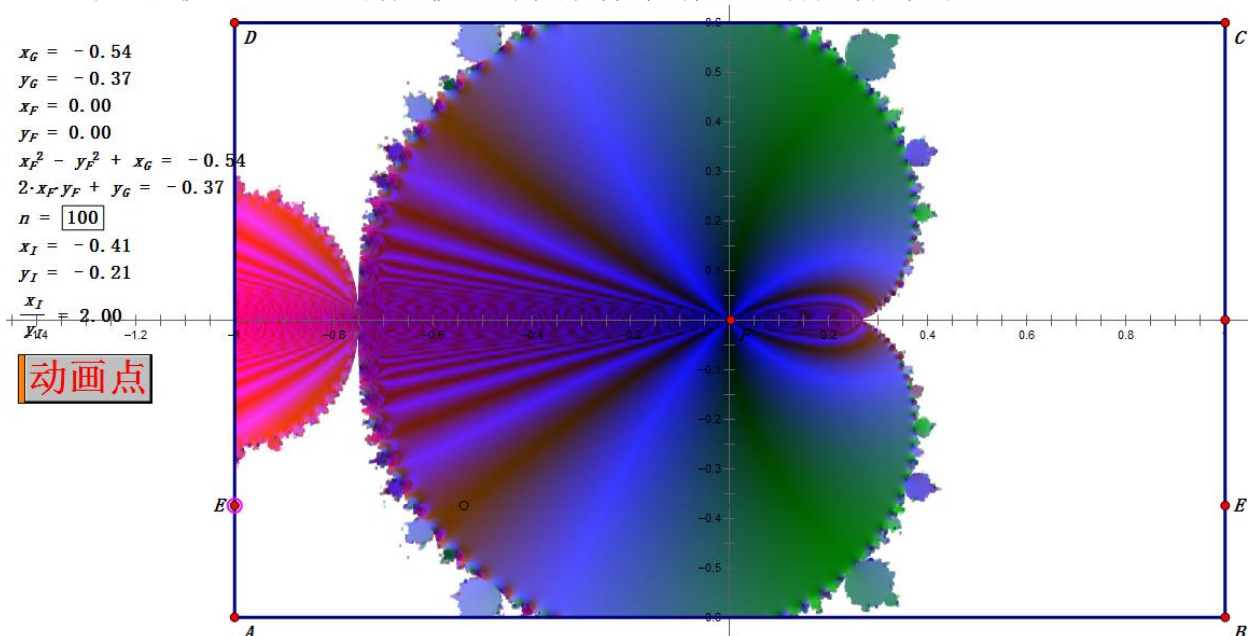
Julia 集：固定  $\mu$ ， $J_\mu = \{Z_0 \mid \text{序列 } \{Z_k\} \text{ 有界}\}$

Mandelbrot 集：固定  $Z_0$ ， $M_Z = \{\mu \mid \text{序列 } \{Z_k\} \text{ 有界}\}$

### 例 3.4 Mandelbrot sets 曼德布洛特集合

步骤：

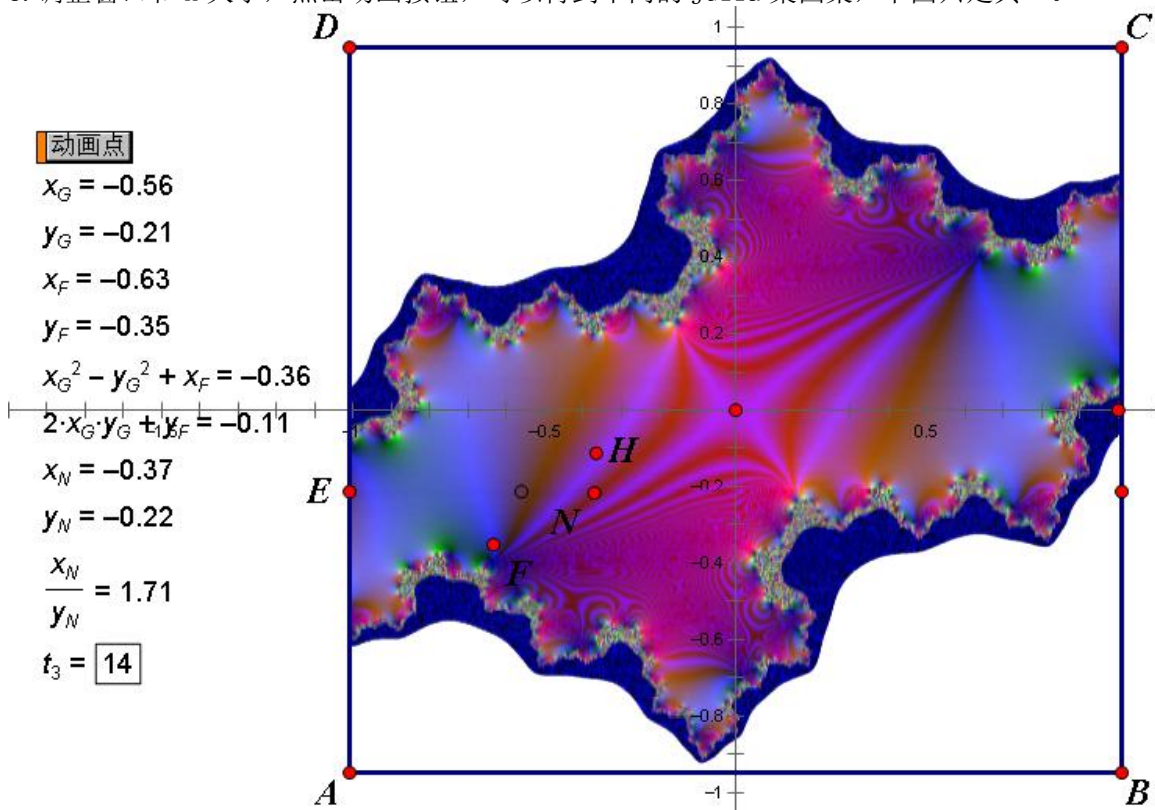
1. 在平面上以原点为中心，建立一个矩形 ABCD 作为观察区域（单位长度 1 以内）。
2. 在线段 AD 上取一点 E，点击“编辑”-“操作类按钮”-“动画”，使得 E 点能够在 AD 上运动。
3. 作 E 点关于 Y 轴的对称点 E'，然后连接 EE'。在 EE' 上取一点 G，度量  $X_G, Y_G$ 。
4. 在平面上取一点 F，度量  $X_F, Y_F$ 。计算  $X_F^2 - Y_F^2 + X_G$  和  $2X_F Y_F + Y_G$ ，顺次选择这两个度量结果，单击“绘图”-“绘制点(x, y)”。得到点 H。
5. 新建参数  $n=100$ ，选择点 F 和参数  $n$ ，作深度迭代， $F \Rightarrow H$ 。
6. 选择迭代像，单击“变换”-“终点”，得到迭代终点 I。度量 I 的横、纵坐标，并计算  $X_I/Y_I$ ，选择  $X_I, Y_I$  和  $X_I/Y_I$ ，这三个结果和点 G（注意是点 G），单击“显示”-“颜色”-“参数”，得到 G'。
7. 选定 G'，“构造”-“轨迹”。隐藏线段 EE'、迭代像、点 H、点 I，选择刚才的轨迹，按右键（或者“显示”），单击“追踪轨迹”。
8. 把 F 点移至原点。点击动画按钮，则可以得到 M 集，适当调整窗口大小。



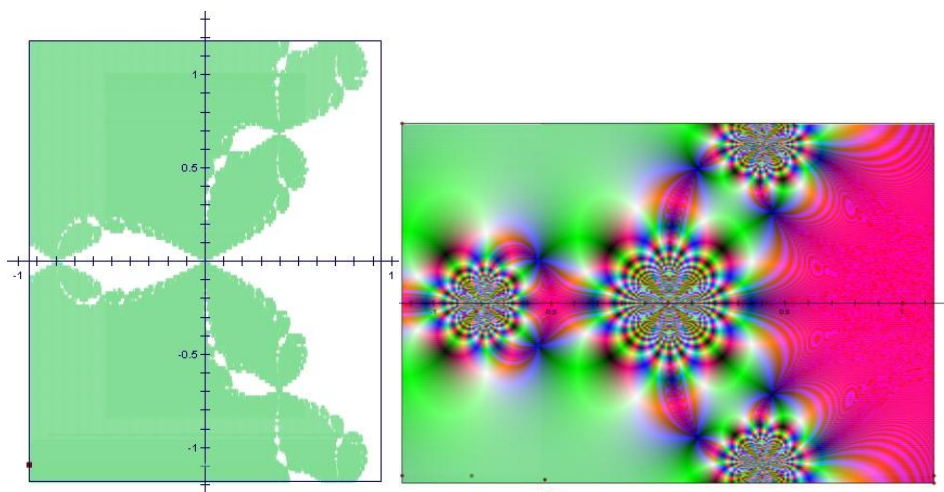
### 例 3.5 Julia Sets 朱丽亚集

步骤：

1. 在平面上以原点为中心，建立一个矩形 ABCD 作为观察区域。
2. 在线段 AD 上取一点 E，点击“编辑”-“操作类按钮”-“动画”，使得 E 点能够在 AD 上运动。
3. 作 E 点关于 Y 轴的对称点 E'，然后连接 EE'。在 EE' 上取一点 G，度量  $x_G, y_G$ 。
4. 在平面上取一点 F，度量  $x_F, y_F$ 。计算  $x_G^2 - y_G^2 + x_F$  和  $2x_G y_G + y_F$ ，顺次选择这两个度量结果，单击“绘图”-“绘制点(x, y)”。得到点 H。
5. 新建参数  $n=2$ ，选择点 G 和参数 n，作深度迭代， $G \Rightarrow H$ 。
6. 选择迭代像，单击“变换”-“终点”，得到迭代终点 N。度量 N 的横、纵坐标，并计算  $X_N/Y_N$ ，选定  $X_N, Y_N$  和  $X_N/Y_N$  这三个结果和点 G（注意是点 G），单击“显示”-“颜色”-“参数”，得到 G'。
7. 选定点 G'，“构造”-“轨迹”。隐藏线段 EE'，调整 n 的大小，选择刚才的轨迹，按右键，‘追踪轨迹’。
8. 调整窗口和 n 大小，点击动画按钮，可以得到不同的 Julia 集图案，下图只是其一。



### 例 3.6 牛顿迭代法



步骤:

1. 在平面上以原点为中心，建立一个矩形 ABCD 作为观察区域。
2. 在线段 AD 上取一点 E，点击“编辑”-“操作类按钮”-“动画”，使得 E 点能够在 AD 上运动。
3. 作 E 点关于 Y 轴的对称点 E'，然后连接 EE'。在 EE' 上取一点 G，度量  $X_G, Y_G$ 。
4. 在平面上取一点 F，度量  $X_F, Y_F$ 。计算  $(X_F^2 - Y_F^2)/3(X_F^2 + Y_F^2)^2 + 2X_G/3$  和  $2X_F Y_F / 3(X_F^2 + Y_F^2)^2 + 2Y_G/3$ ，顺次选择这两个度量结果，单击“绘图”-“绘制点(x, y)”。得到点 H。
5. 新建参数  $n=100$ ，选择点 F 和参数 n，作深度迭代， $F \Rightarrow H$ 。
6. 选择迭代像，单击“变换”-“终点”，得到迭代终点 I。度量 I 的横、纵坐标，并计算  $X_I/Y_I$ ，选择  $X_I, Y_I$  和  $X_I/Y_I$ ，这三个结果和点 G（注意是点 G），单击“显示”-“颜色”-“参数”，得到 G'。
7. 选定 G'，“构造”-“轨迹”。隐藏线段 EE'，选择刚才的轨迹，按右键，‘追踪轨迹’。
8. 把 F 点移至原点。点击动画按钮，则可以得到牛顿迭代图象。

