编译原理

Compilers

极夜酱

目录

Chapter 1 有限状态自动机

1.1 字母表

1.1.1 字母表（Alphabet）

字母表是一个非空的有限集合，一般用 Σ 表示，集合中的元素被称为符号/字符 (symbol)。

例如：

- $\Sigma = \{0, 1\}$：二进制数集合。
- $\Sigma = \{a, b, \cdots, z\}$：小写字母集合。
- $\Sigma = \{(,), [,], \{, \}\}$：括号集合。

1.1.2 串（String）

串是一个由字母表中的字符组成的有限序列。

例如：

- 0011 和 11 是 $\Sigma = \{0, 1\}$ 上的串。
- abc 和 bbb 是 $\Sigma = \{a, b, \cdots, z\}$ 上的串。
- (()) 和 (() 是 $\Sigma = \{(,), [,], \{, \}\}$ 上的串。

空串

空串使用 ϵ 表示。

串的长度

- $|0010| = 4$
- $|aa| = 2$
- $|\epsilon| = 0$

前缀（prefix）

- aa 是 aaabc 的前缀
- aaab 是 aaabc 的前缀
- aaabc 是 aaabc 的前缀

后缀（suffix）

- bc 是 aaabc 的后缀
- abc 是 aaabc 的后缀
- aaabc 是 aaabc 的后缀

子串（substring）

- ab 是 aaabc 的子串
- aaa 是 aaabc 的子串
- aaabc 是 aaabc 的子串

连接（concatenation）

当 $\omega = abd$，$\alpha = ce$，那么 $\omega\alpha = abdce$。

指数（exponentiation）

当 $\omega = abd$，那么 $\omega^3 = abdabdabd$，$\omega^0 = \epsilon$。

反转（reversal）

当 $\omega = abd$，那么 $\omega^R = dba$。

1.1.3 克林闭包（Kleene Closure）

Σ^k 用于表示所有在字母表 Σ 上的长度为 k 的串的集合。

例如，$\Sigma = \{a, b\}$，那么 $\Sigma^2 = \{ab, ba, aa, bb\}$，$\Sigma^0 = \{\epsilon\}$。

克林闭包 Σ^* 用于表示所有在字母表 Σ 上能够组成的串的集合。

$$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \cdots = \bigcup_{k \geq 0} \Sigma^k \tag{1.1}$$

正闭包 Σ^+ 则是在 Σ^* 中除了空串以外的所有串的集合。

$$\Sigma^+ = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \cdots = \bigcup_{k > 0} \Sigma^k \tag{1.2}$$

1.2 语言

1.2.1 语言（Language）

语言是一个字母表中所构成串的集合。

例如，$\Sigma = \{a, b, c, \cdots, z\}$，那么所有英语单词所构成的集合 L 就是字母表 Σ 上的语言。

假设 $A = \{good, bad\}$ 和 $B = \{boy, girl\}$ 是两个语言，语言之间可以进行以下操作。

并集（union）

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\} \tag{1.3}$$

$A \cup B = \{good, bad, boy, girl\}$

连接（concatenation）

$$A \circ B = \{xy \mid x \in A \text{ or } y \in B\} \tag{1.4}$$

$A \circ B = \{goodboy, goodgirl, badboy, badgirl\}$

闭包

$$A^* = \{x_1, x_2, \cdots, x_k \mid k \geq 0 \text{ and each } x_i \in A\} \tag{1.5}$$

$A^* = \{\epsilon, good, bad, goodgood, goodbad, badgood, badbad, goodgoodgood, goodgoodbad, \cdots\}$

语法和语言与自动机理论密切相关，它们是许多软件实现的基础，例如编译器/解释器、文本编辑器、文本搜索、系统验证等。

在自动机理论中，要处理的问题就是判断一个给定的串是否属于某个语言。

例如：

- 0^*10^*：只包含一个 1 的串的集合。
- $\Sigma^*1\Sigma^*$：至少有一个 1 的串的集合。
- $\Sigma^*001\Sigma^*$：包含子串 001 的串的集合。
- $(\Sigma\Sigma)^*$：长度为偶数的串的集合。
- $(\Sigma\Sigma\Sigma)^*$：长度为 3 的倍数的串的集合。

1.3 DFA

1.3.1 DFA（Deterministic Finite Automata）

有限状态机（FSM, Finite State Machine）用于决定程序当前状态和状态间的切换，状态机最终只能指向一个结果。

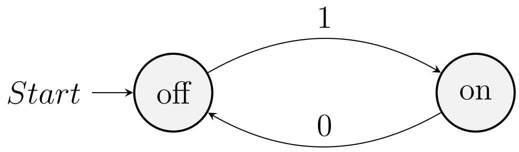


图 1.1: 有限状态机

确定性有限状态自动机 DFA 由一个五元组 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 表示，其中

- Q：状态集合
- Σ：字母表
- δ：状态转移函数（transition function）
- q_0：初始状态
- F：终结状态集合

例如 DFA 可以用来识别空串或者以 0 结尾的串：

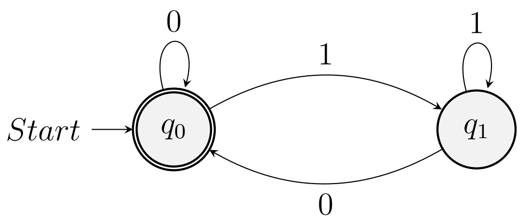


图 1.2: 识别空串或以 0 结尾的串的 DFA

其中 $Q = \{q_0, q_1\}$，$\Sigma = \{0, 1\}$，q_0 为初始状态，$F = \{q_0\}$，δ 为

<table>
<tr><td rowspan="2">状态</td><td colspan="2">输入</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>q_0</td><td>q_0</td><td>q_1</td></tr>
<tr><td>q_1</td><td>q_0</td><td>q_1</td></tr>
</table>

能够被有限自动机接受的语言被称为正则语言（regular language）。

例如，构建一个能够识别所有包含子串 001 的串的 DFA：

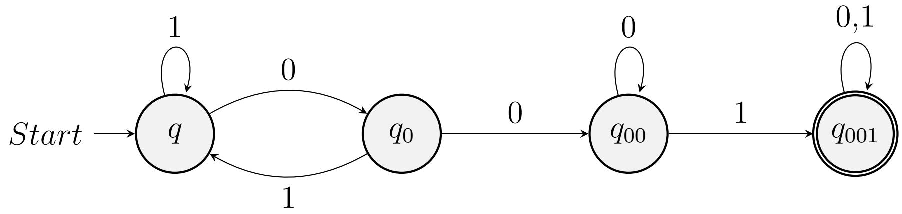
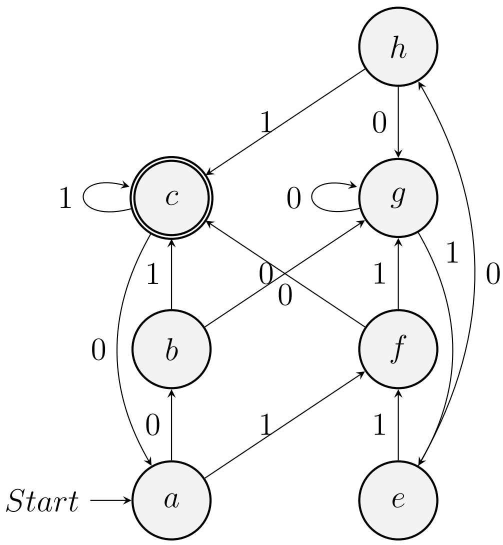


图 1.3: 识别包含子串 001 的串的 DFA

1.3.2 最小化 DFA

有限状态机的最小化，即将一个有限状态机转换为一个更小的有限状态机，使得状态的数目最少。

对于两个状态，如果它们之间的转移函数相同，则这两个状态可以合并为一个状态。



在这个 DFA 中，状态 b 和 h 是等价的，当接收 0 时都转移到状态 g，当接收 1 时都转移到状态 c。同时状态 a 和 e 也是等价的，状态 a 接收 0 转移到状态 b，状态 e 接收 0 转移到状态 h，状态 a 和 e 接收 1 时都转移到状态 f。

因此，状态 b 和 h 以及状态 a 和 e 可以进行合并。

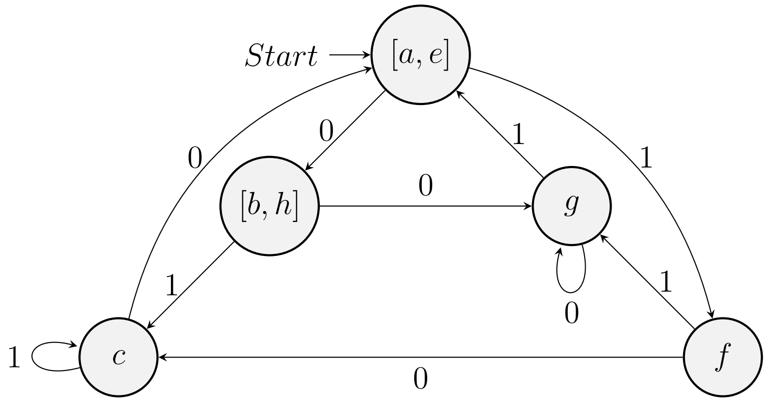


图 1.4: 最小化 DFA

1.4 NFA

1.4.1 NFA（Non-deterministic Finite Automata）

在 DFA 中，每个状态的下一个状态都是唯一确定的，但是非确定性有限状态自动机 NFA 可能会存在多个下一状态。

例如在这个 NFA 中，状态 q_0 存在两个接收 1 的箭头，而状态 q_1 没有接收 1 的箭头。

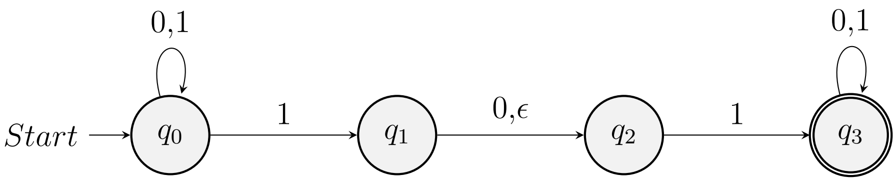


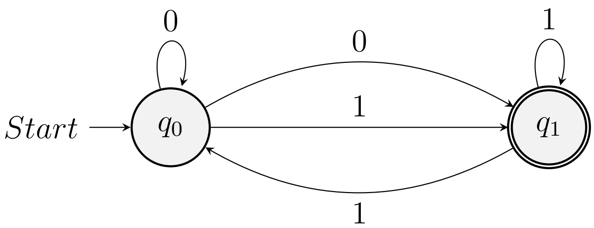
图 1.5: NFA

因此，在 NFA 中，每个状态允许对相同输入存在 0 个、1 个或多个转移的状态。如果存在一条能够到达终结状态的路径，那么就称当前的输入是被 NFA 接受的。

1.4.2 DFA 与 NFA 的转换

NFA 并不比 DFA 更加强大，理论证明 NFA 与 DFA 是等价的。

例如将一个 NFA 转换为 DFA：



构建一个与 NFA 等价的 DFA，只需将 NFA 中转换到的状态集合作为 DFA 中的一个状态即可。

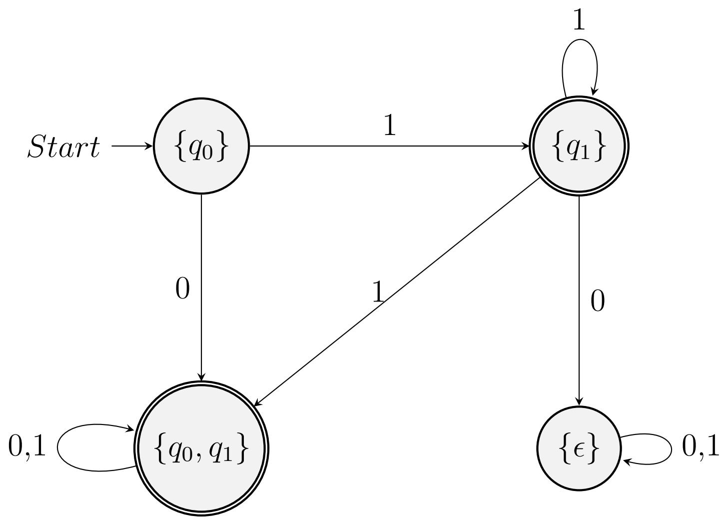


图 1.6: NFA 转换 DFA

1.4.3 ϵ-NFA

ϵ-NFA 允许不消耗输入字符在状态之间转移。

例如以下 ϵ-NFA 能够接受小数，如 +3.14、-0.12、.71、2. 等。

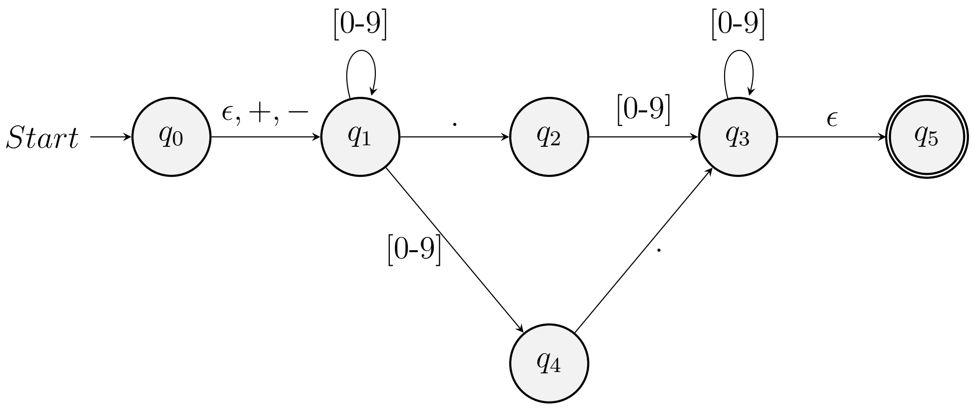


图 1.7: 接受小数的 ϵ-NFA

1.5 正则表达式

1.5.1 编译器（Compiler）

编译器是一种特殊的程序，可以将一种编程语言的源代码翻译成机器码、字节码或另一种编程语言。

编译器包含以下阶段：

1. 词法分析器（lexical analyzer）
2. 语法分析器（syntex analyzer）
3. 语义分析器（semantic analyzer）
4. 中间代码生成器（intermediate code generator）
5. 代码优化器（code optimizer）
6. 代码生成器（code generator）

1.5.2 词法分析

词法分析是编译器的第一步，它的主要任务是读取源代码，并生成能够被解析器（parser）进行语法分析的 tokens 和语法书（syntex tree）。

例如 time = hour * 60 + minute，经过词法分析后，将会得到：

- id(time)
- assignment(=)
- id(hour)
- op(*)
- num(60)
- op(+)

- id(minute)

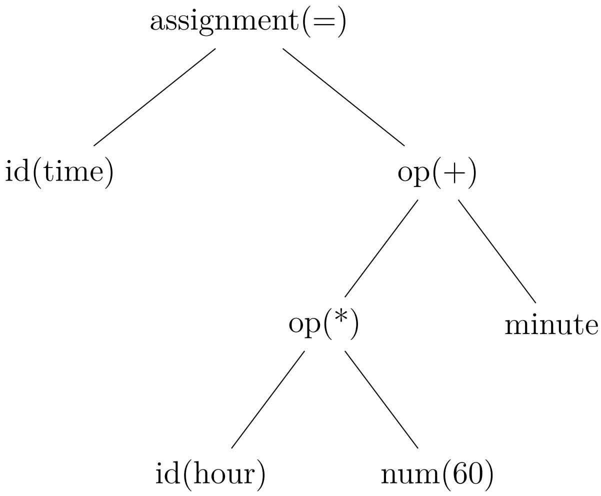


图 1.8: 语法树

1.5.3 正则表达式（Regex, Regular Expression）

正则表达式描述了字符串匹配的模式（pattern），可以用来检查一个串是否包含某个子串、替换子串、或提取符合条件的子串。像 grep、vi、python、lex 等工具都支持正则表达式的使用。

例如用于匹配一个合法的变量名的正则表达式为 [a-zA-Z_][a-zA-Z0-9_]*。即变量名只能由字母或下划线开头，后面可以是任意多个字母、数字或下划线。

正则表达式支持以下操作：

- 连接：ab 或 $a \cdot b$
- 选择：$a \mid b$
- 克林闭包：$a^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \cdots\}$
- 匹配至少 1 次：$a^+ = aa^*$
- 匹配 0 次或 1 次：$a? = a \mid \epsilon$
- 匹配任意字符：.

- 补集：$(a \mid b)$

其中克林闭包运算的优先级最高，其次是连接，最后是选择。

例如 $(a \mid b)^*aa(a \mid b)^*$ 用于匹配包含连续的 a 的串，$b^*(abb^*)^*(a \mid \epsilon)$ 用于匹配没有连续的 a 的串。

然而 $\{a^nb^n \mid n \geq 0\}$ 却不是正则语言，因为它无法用有限个状态来验证 a 和 b 的出现次数是相等的。

Chapter 2 上下文无关语言

2.1 上下文无关文法

2.1.1 上下文无关文法（CFG, Context Free Grammar）

CFG 能够描述某些具有递归结构的特征，它有足够强的语言表达力来表示大多数编程语言的语法。

CFG 由一个四元组 (V, T, P, S) 表示：

- V：变元（variable）/非终结符（non-terminal）集合，用大写字母表示。
- T：终结符（terminal）集合，用小写字母表示。
- P：产生式（production）集合。
- S：开始符号。

一个文法由一组替换规则产生。产生式集合

$$
\begin{gathered}
A \to \alpha_1 \\
A \to \alpha_2 \\
\cdots \\
A \to \alpha_k
\end{gathered}
$$

可以被写成 $A \to \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \mid \alpha_k$ 的形式。

2.1.2 推导（Derivation）

推导用于确定符合文法规则的串的集合，即用来确定一个语言。

推导从开始符号开始，通过产生式进行替换，得到最终结果。

例如 $E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid id$，由开始符号 E 可以推导出 $(id + id) * id$。

$$
\begin{aligned}
E &\Rightarrow E * E \\
&\Rightarrow (E) * E \\
&\Rightarrow (E) * id \\
&\Rightarrow (E + E) * id \\
&\Rightarrow (E + id) * id \\
&\Rightarrow (id + id) * id
\end{aligned}
$$

解析树（parse tree）是描述推导的一种直观方法。

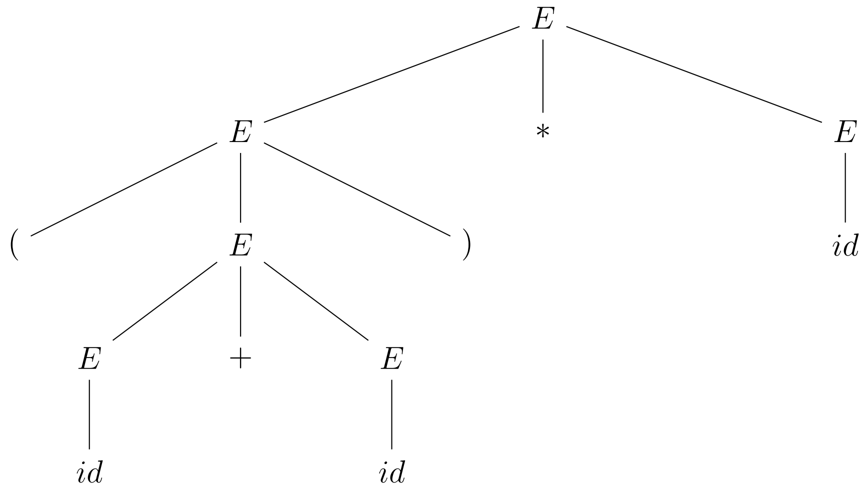


图 2.1: 分析树

如果只关注语义分析和代码生成所需的信息，可以将分析树简化为一棵抽象语法树（abstract syntex tree）。

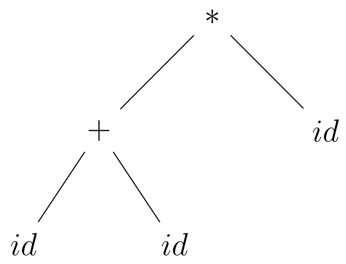


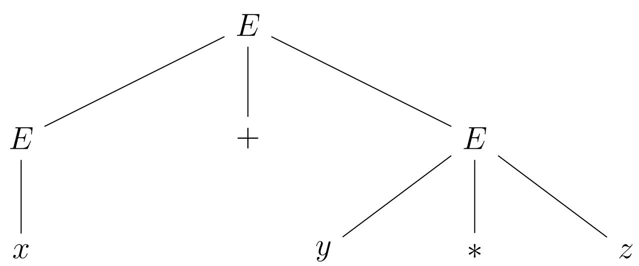
图 2.2: 抽象语法树

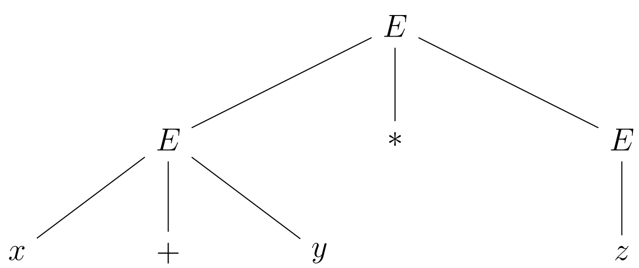
2.1.3 二义性（Ambiguity）

在推导的过程中涉及到同级别表达式的替换,因此按顺序可以分为最左推导(leftmost derivation）和最右推导（rightmost derivation)。

文法的二义性，是指对于符合文法规则的同一个句子，存在两种可能的分析树。

例如 $E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid x \mid y \mid z$，使用最左推导会对 $x + y * z$ 产生两个不同的分析树。



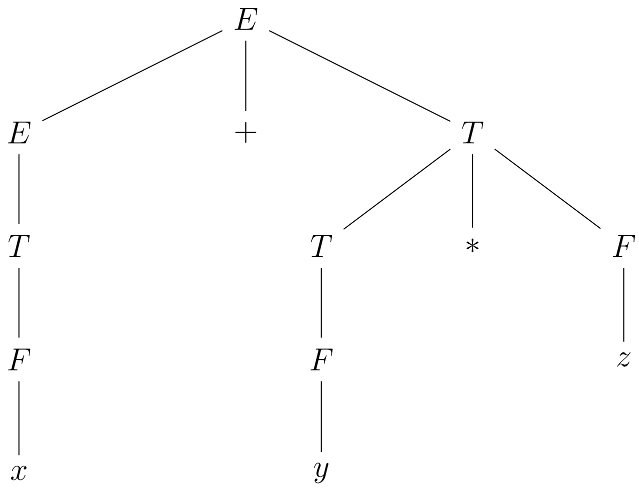


产生二义性的原因在于运算符之间的优先级在文法中并没有体现。消除二义性的办法就是在文法中引入一个中间量。

$$E \to E + T \mid T$$

$$T \to T * F \mid F$$

$$F \to id \mid (E)$$



2.2 CNF

2.2.1 上下文无关语言

CFG 可以用来表示语言 $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$：

$$S \rightarrow aSb$$
$$S \rightarrow ab$$

例如根据 S 可以生成生成 aaabbb：

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSb \\ &\Rightarrow aaSbb \\ &\Rightarrow aaabbb \end{aligned}$$

CFG 好还可以用于表示 a 和 b 出现相等次数的语言，例如 babaab：

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aB \mid bA \\ A &\rightarrow a \mid aS \mid bAA \\ B &\rightarrow b \mid bS \mid aBB \end{aligned}$$

设计 CFG 需要一定的创造力，大部分复杂的 CFG 可以由多个简单的 CFG 并集组成。

例如设计一个能够表示语言 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\} \cup \{1^n 0^n \mid n \geq 0\}$ 的 CFG。

这两个部分可以分别表示为：

$$S_1 \rightarrow 0S_1 1 \mid \epsilon$$
$$S_2 \rightarrow 1S_2 0 \mid \epsilon$$

只需合并这两个部分，即可得到最终的 CFG：

$$S \to S_1 \mid S_2$$
$$S_1 \to 0S_11 \mid \epsilon$$
$$S_2 \to 1S_20 \mid \epsilon$$

2.2.2 乔姆斯基范式（CNF, Chomsky Normal Form）

CNF 在保留相同语言的同时对语法规则施加了一些限制，好处是可以避免解析过程中的歧义问题，另一个好处就是为解析的复杂度提供了一个上限。

CNF 规定每条 CFG 的每一条规则都必须满足：

1. $S \to \epsilon$：开始变元 S 可以为空。
2. $A \to BC$：单个变元可以推导出两个变元，其中 B、C 不能为开始变元。
3. $A \to a$：单个变元可以被终结符替换。
4. 不能出现单个变元推导出单个变元。

将 CFG 转换为 CNF 的步骤为：

1. 添加新的开始变元：确保开始变元始终在规则的左侧。
2. 消除所有 ϵ 规则：消除从变元到空字符的规则。
3. 消除所有 $A \to B$ 规则：消除单个变元到单个变元的规则。
4. 添加变元：为了满足 $A \to BC$ 的规则，需要将 $A \to BCD$ 替换为 $A \to ED$，即添加变元 $E \to BC$。

例如将 CFG 转换为 CNF：

$$S \to ABA$$
$$A \to aA \mid \epsilon$$
$$B \to bB \mid \epsilon$$

消除所有 ϵ 规则

将 $A \to \epsilon$ 的规则，替换到出现 A 的规则中：

$$S \to ABA \mid BA \mid AB \mid B$$
$$A \to aA \mid a$$
$$B \to bB \mid \epsilon$$

将 $B \to \epsilon$ 的规则，替换到出现 B 的规则中：

$$S \to ABA \mid BA \mid AB \mid B \mid AA \mid A$$
$$A \to aA \mid a$$
$$B \to bB \mid b$$

消除所有 $A \to B$ 规则

在 S 中出现了单个变元到单个变元的情况，将这些规则进一步替换：

$$S \to ABA \mid BA \mid AB \mid bB \mid b \mid AA \mid aA \mid a$$
$$A \to aA \mid a$$
$$B \to bB \mid b$$

目前，$S \to BA$、$S \to AA$、$S \to AB$、$S \to a$、$S \to b$、$A \to a$、$B \to b$ 这些规则已经满足了 CNF 的要求：

$$S \to ABA \mid BA \mid AB \mid bB \mid b \mid AA \mid aA \mid a$$
$$A \to aA \mid a$$
$$B \to bB \mid b$$

添加变元

为了消除 $A \to BCD$ 这种情况，需要添加新的变元进行替换。

假设 $X \to AB$：

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow XA \mid BA \mid AB \mid bB \mid b \mid AA \mid aA \mid a \\
&A \rightarrow aA \mid a \\
&B \rightarrow bB \mid b \\
&X \rightarrow AB
\end{aligned}
$$

同时为了满足 CNF 规则中 $A \rightarrow BC$ 的要求，需要对如 $A \rightarrow aA$ 这样的规则进行替换。

假设 $A_1 \rightarrow a$、$B_1 \rightarrow b$:

$$
\begin{aligned}
&S \rightarrow XA \mid BA \mid AB \mid B_1B \mid b \mid AA \mid A_1A \mid a \\
&A \rightarrow A_1A \mid a \\
&B \rightarrow B_1B \mid b \\
&X \rightarrow AB \\
&A_1 \rightarrow a \\
&B_1 \rightarrow b
\end{aligned}
$$

这样就完成了 CFG 到 CNF 的转换，语法中的每条规则都满足了 CNF 的要求。

2.3 PDA

2.3.1 下推自动机（PDA, Pushdown Automata）

DFA 和 NFA 由于受限于存储空间的问题，不能识别类似于 $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ 这种语言。PDA 通过一个栈 (stack) 解决了这个问题。PDA 与 CFG 的功能的等价的。

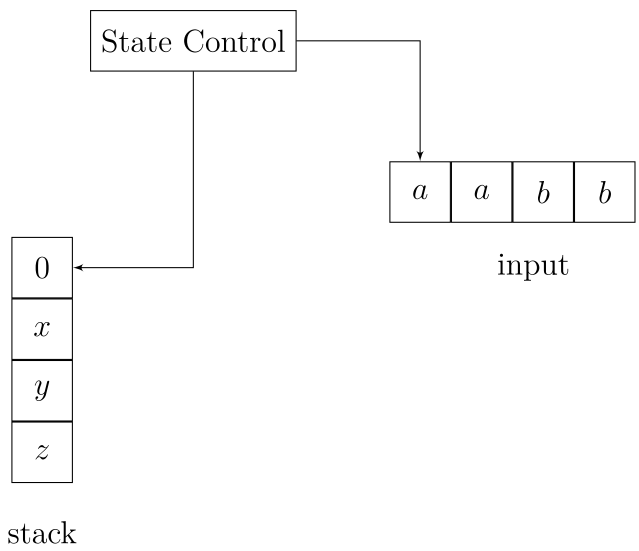


图 2.3: PDA

PDA 由一个六元组 $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ 表示：

- Q：状态集合
- Σ：输入字母表
- Γ：栈字母表
- δ：状态转移函数
- q_0：初始状态
- F：终结状态集合

例如状态转移函数 $\delta(q_1, a, b) = \{(q_2, \epsilon)\}$ 表示，在状态 q_1 时，如果输入字符为 a，并且栈顶元素为 b，那么就将 a 消耗掉，并将 b 出栈，进入状态 q_2。在 PDA 中

可表示为 $a, b \to \epsilon$。

例如状态转移函数 $\delta(q_3, \epsilon, b) = \{(q_4, a), (q_5, b)\}$ 表示，在状态 q_3 时，如果输入字符为空，并且栈顶元素为 b，那么有两种选择：

1. 使用 a 代替栈顶元素 b，并进入状态 q_4。
2. 栈保持原样（b 为栈顶），并进入状态 q_5。

能够识别 $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ 的 PDA 如下：

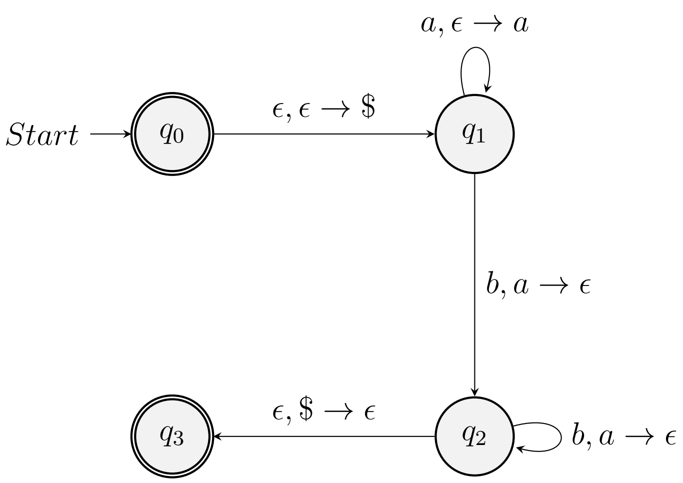
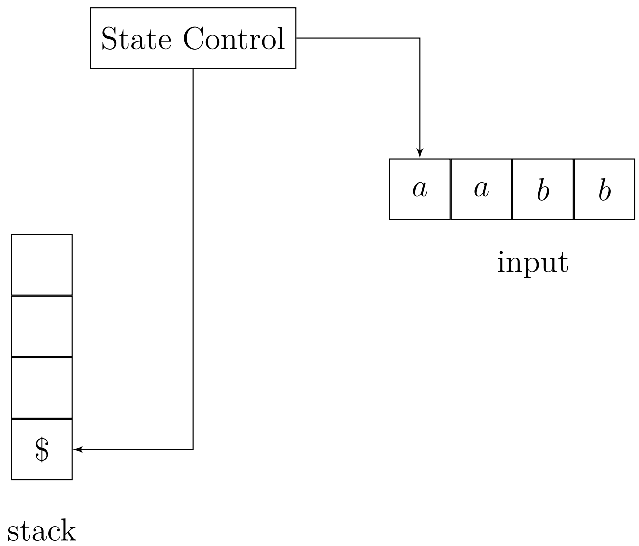
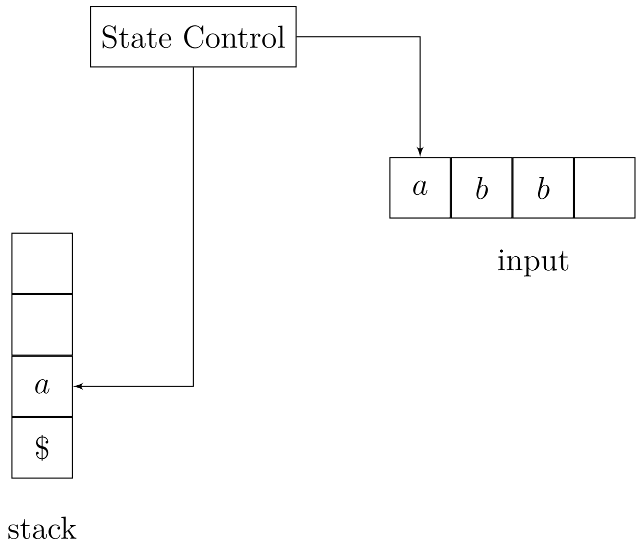
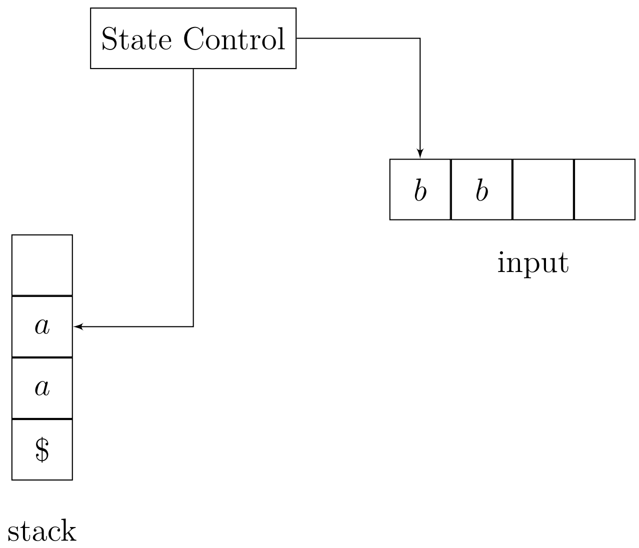


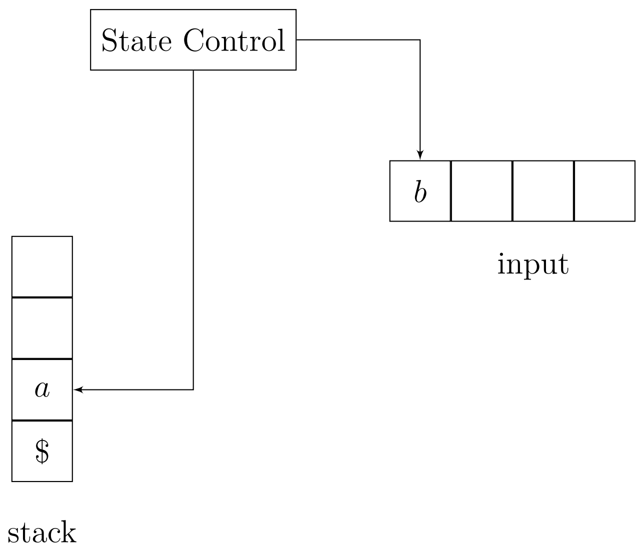
图 2.4: 识别 $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ 的 PDA

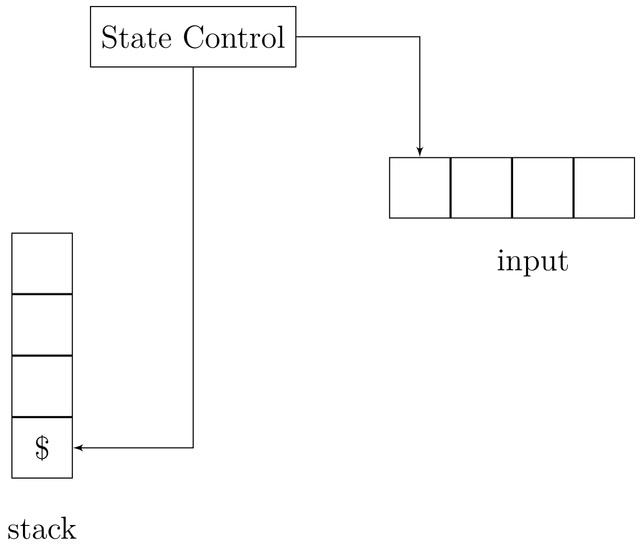
识别串 $aabb$ 的过程如下：

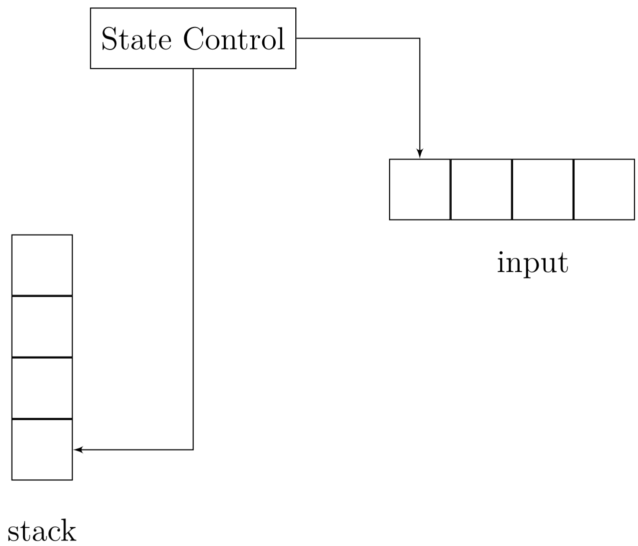



State Control
a
b
b
input
a
$
stack


State Control
b
b
input
a
a
$
stack


State Control
b
input
a
$
stack


State Control
input
$
stack


State Control
input
stack

2.4 预测分析法

2.4.1 LL(1) 文法

例如产生式 $A \rightarrow +T \mid -P$，当读到 $+$ 开头的串的时候，可以很直接地判断选择 $A \rightarrow +T$ 这个生成式；而读到 $-$ 开头的串的时候，可以直接判断选择 $A \rightarrow -P$ 这个生成式。

像这种根据第一个 token 就能得出选择哪个生成式的情况，就叫做预测分析法。

LL(1) 文法表示只查看后面 1 个符号，来判断需要选择的生成式。LL(k) 文法则表示根据后 k 个符号来决定生成式。

但是，如果文法是类似于 $A \rightarrow T \mid P$ 这样都以非终结符开头的话，一眼就很难判断。因此就需要知道，T 是如何展开的。如果 $T \rightarrow a \mid b$，$P \rightarrow c \mid d$, 那当串以 a 或 b 开头时，显然需要选择 $A \rightarrow T$；而当串以 c 或 d 开头时，就应该选择 $A \rightarrow P$ 这个生成式。

2.4.2 FIRST

为了能够预测下一个生成式，就需要知道每个生成式能够产生的开始符号的集合，称为 FIRST 集合。$FIRST(\alpha)$ 是一个记录所有能够由 α 推导出的出现在开头的终结字符的集合。

例如：

$$E \rightarrow TE'$$
$$E' \rightarrow +TE' \mid \epsilon$$
$$T \rightarrow FT'$$
$$T' \rightarrow *FT' \mid \epsilon$$
$$F \rightarrow (E) \mid id$$

每个终结符的 FIRST 集合都是自己本身。

$$FIRST(id) = \{id\}$$
$$FIRST(*) = \{*\}$$
$$FIRST(+) = \{+\}$$
$$FIRST(() = \{(\}$$
$$FIRST()) = \{)\}$$

如果 $E \to T$，则应该把 $FIRST(T)$ 也加入到 $FIRST(E)$ 中。

$$FIRST(E') = \{+, \epsilon\}$$
$$FIRST(T') = \{*, \epsilon\}$$
$$FIRST(F) = \{(, id\}$$
$$FIRST(T) = FIRST(F) = \{(, id\}$$
$$FIRST(E) = FIRST(T) = \{(, id\}$$

2.4.3 FOLLOW

仅有 FIRST 集合还不够，例如：

$$A \to Tb \mid P$$
$$T \to \epsilon \mid a$$
$$P \to c$$

可以得出：

$$FIRST(T) = \{\epsilon, a\}$$
$$FIRST(P) = \{c\}$$

当遇到 a 开头的串时，应该选择 $A \to Tb$；当遇到 c 开头的串时，应该选择 $A \to P$。

但其实，由于 ϵ 在 $FIRST(T)$ 中，所以当遇到 b 开头的串时，也应该选择 $A \to Tb$。

所以，为了特殊处理当一个非终结字符可以推出 ϵ 的情况，就需要知道它后面紧跟的是什么终结字符，这样的集合被称为 FOLLOW 集合。

FOLLOW 集合的规则:

1. 当 S 为开始符号时，将结束标记 \$ 添加到 $FOLLOW(S)$ 中。
2. 如果存在 $A \to \alpha B \beta$,那么 $FIRST(B)$ 中除了 ϵ 外所有符号都在 $FOLLOW(B)$ 中。
3. 如果存在 $A \to \alpha B$ 或 $A \to \alpha B \beta$ 且 $FIRST(B)$ 中包含 ϵ,那么 $FOLLOW(A)$ 中的所有符号都在 $FOLLOW(B)$ 中。

Chapter 3 图灵机

3.1 图灵机

3.1.1 艾伦 · 麦席森 · 图灵（Alan Mathison Turing）

在 1900 年的巴黎国际数学大会上，数学家希尔伯特（David Hilbert）提出 23 个重要的数学问题，其中第十个是“随便给一个不确定的方程，能够通过有限步的运算，判断它是否存在整数解?”

如果这个问题的答案是否定的，那么意味着有些问题是无解的。正是因为对这个问题的深刻认识，让图灵认识到计算机的能力存在极限。

后来在 1970 年，前苏联伟大的数学家马季亚谢维奇从数学上解决了希尔伯特的那个问题。也就是说，的确有很多数学问题，根本没有答案，而且这样的问题比有答案的问题还要多得多。

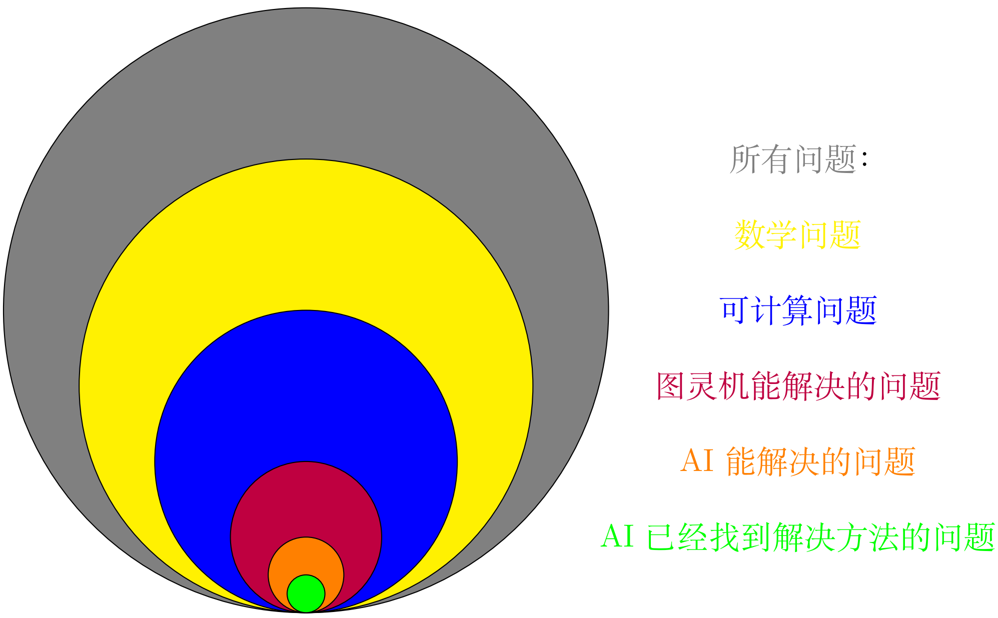


图 3.1: 数学问题的分类

3.1.2 图灵机（Turing Machine）

1935 年，22 岁的图灵写出了 *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*，并从数学和逻辑上定义了著名的图灵机。今天所有的计算机，包括全世界正在设计的新的计算机，从解决问题的能力来讲，都没有超出图灵机的范畴。

图灵机是图灵构想出来的虚拟机器，这个机器的伟大之处在于，它非常简单，但是却可以模拟任何的计算机程序。

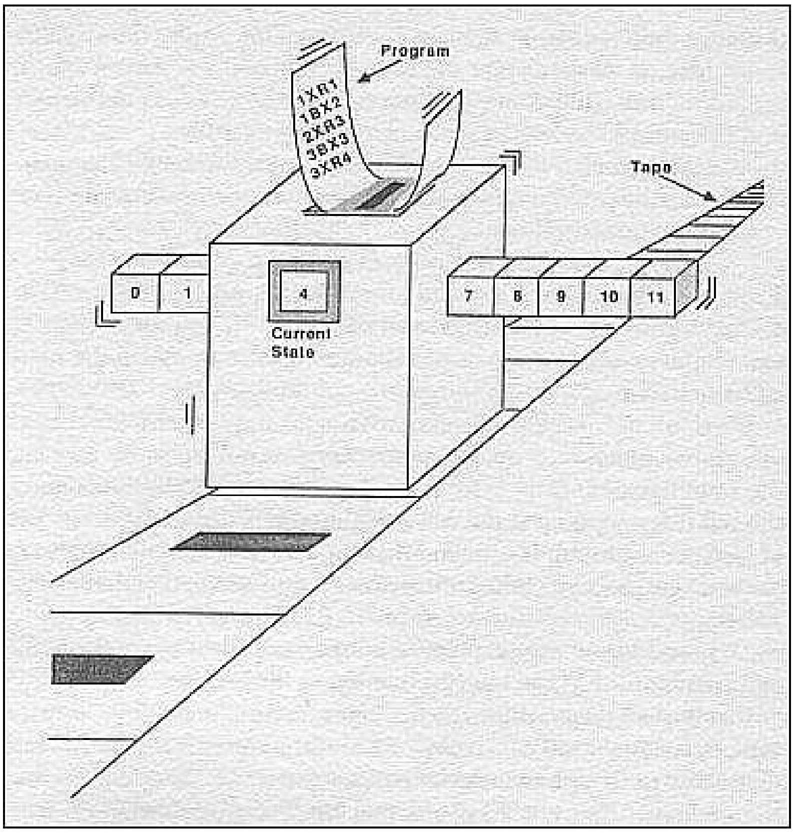


图 3.2: 图灵机

任何能被数字计算机执行的事情，图灵机同样也能够完成。如果你能写出一个算法来解决某个问题，那么同样可以写出一个图灵机程序来解决相同的问题。

图灵机的结构包括：

- 存储带（tape）

  - 双向无限延长
  - 存储带上有一个个小方格，每个小方格里面存储一个符号
- 控制器
  - 可以存储图灵机当前自身的状态
  - 可以改变自身的状态
  - 包含一个读写头（read-write head），可以读、写存储带上方格里面的内容
  - 读写头可以沿着存储带一格一格地左移或者右移。

这里存储带其实就相当于现在计算机的内存，控制器相当于 CPU 和程序代码。

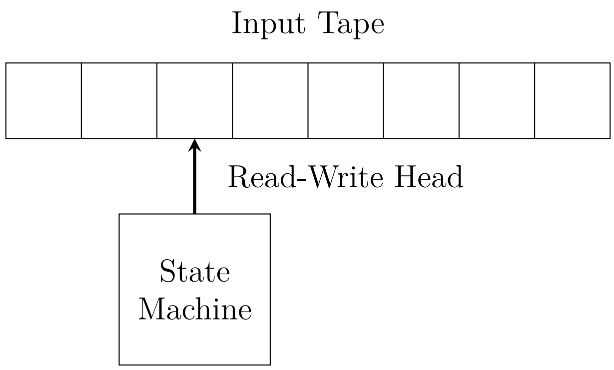


图 3.3: 图灵机

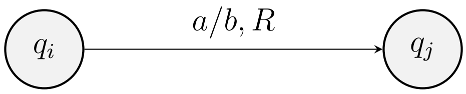
在运行图灵机前，首先需要将输入放入存储带中，然后将图灵机的状态设置为初始状态。开始运行后，图灵机会对存储带上的字符进行读写，当图灵机停止后，结果将会留在存储带上。

δ 是图灵机的状态转换函数。

例如将当前字符 a 替换为 b，并左移一格，可表示为 $\delta(q_i, a) = (q_j, b, L)$。

$$q_i \xrightarrow{a/b, L} q_j$$

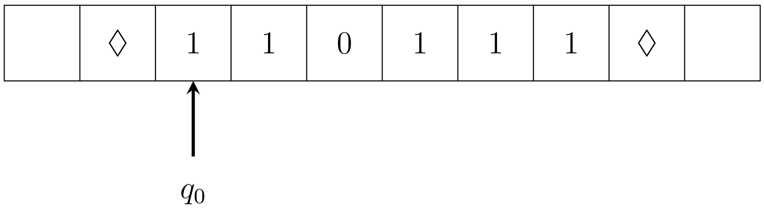
例如将当前字符 a 替换为 b，并右移一格，可表示为 $\delta(q_i, a) = (q_j, b, R)$。



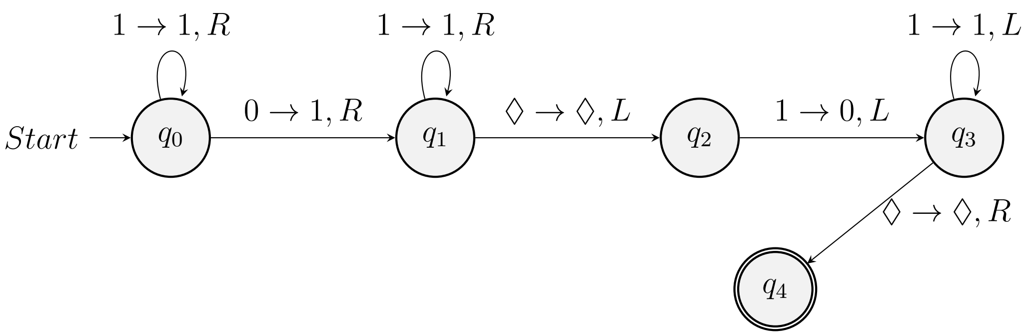
如果 $a = b$，则用 a, L 或 a, R 表示。

例如使用图灵机进行加法运算，为了方便操控图灵机，可将运算数转换为一进制的形式，如 $2 + 3$ 表示为 $11 + 111$。

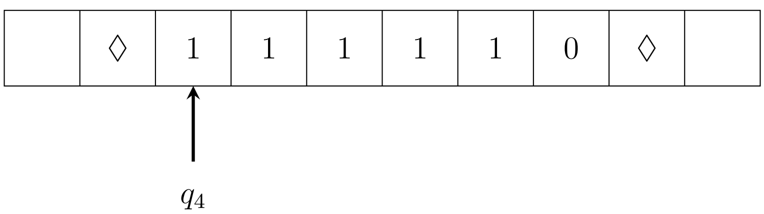
在输入带上放入这两个运算数，中间用 0 作为分割。输入内容的两端放入 $\Diamond$，用于标记开始和结束位置。



用于计算加法的图灵机可表示为:



当图灵机停止后，输入带中的内容即为最终结果。



借助图灵机模拟器`http://turingmachine.vassar.edu/EZzvuYfv8`可以可视化运行过程。

3.2 停机问题

3.2.1 不可判定性（Undecidability）

世界上存在不可解问题，存在数学和程序都不能抵达的边界。

图灵当年想要证明希尔伯特的可判定性问题，也就是说，是否存在一种通用的机械过程，能够判定任何数学命题的真假。

于是图灵就设计了一种假象的机器，也就是图灵机。他首先证明，图灵机就覆盖了所有的机械过程。如果存在一个问题，图灵机判定不了，那么就说明，不存在这种通用的机械过程，这样就证明了原问题。

然后，图灵就设计了一个问题，确实是图灵机判定不了的，这个问题就是“对于一个输入，让图灵机判定自己是否能够在有限的时间内停下来”。

经过证明，这个问题是图灵机回答不了的，所以原问题得以证否。这个问题被称为停机问题（Halting Problem）。

图灵当时设计这个图灵机，完全只是为了辅助他证明这个问题而已，这个机器是假想的、不存在的。可是后来他又发现，虽然这个机器不能解决所有的问题，但确实能够解决很多问题，而且真的是可以造出来的。

3.2.2 理发师悖论

停机问题类似于理发师悖论。

在一座小岛上有位理发师，有一天他做出一项规定：“他只给岛上所有不自己理发的人理发”。随着这个理发师自己的头发越来越长，他发现自己陷入了一个两难的境地：他该不该给自己理发？

如果他不为自己理发，按照他的规则，他属于自己的服务客户范围，因此可以给

自己理发；如果他选择为自己理发，同样按照规则，他便不属于自己的服务对象，因此他又不能给自己理发。

3.2.3 停机问题

在写代码时，有时会遇到一个程序一直在运行，等了半天毫无反应。但是我们不知道程序是陷入了死循环导致根本不会停止，还是仅仅只是运行时间很久。

如果一个程序能够有限时间内运行完，就认为是可停机的。这个有限时间是个理论的概念，无论是 1 秒还是 200 亿年，只要有终止的时候，就是可停机的。

因此，如果存在一种程序，能够判断一个程序是否可停机，那么就可以解决上面的问题。遗憾的是，不存在这样的一个程序使得其能判断任意程序的停机问题，即停机问题不可判定。

可以利用反证法进行证明。假设存在这样一个程序 H，能够判断任何一个程序是否可以停机，即 H 的判断总是正确的。

那么，我们可以设计一个程序 X，它的功能是让 H 判断自己能否停机，并将结果取反（即如果可以停机则输出不可停机；如果不可停机则输出可停机）。

这样就得到了一个悖论：

1. 如果 H 得出的结果是可停机的，但是 P 输出的结果是不可停机，说明 H 判断错了。
2. 如果 H 得出的结果是不可停机的，但是 P 输出的结果是可停机，说明 H 判断错了。

因此，并不存在 H 这样一个程序，能够判断任意程序的停机问题。

通过动画`https://www.youtube.com/watch?v=92WHN-pAFCs`可以更直观地理解停机问题。