



# 数据结构与算法

Data Structure and Algorithm

极夜酱

# 目录

|          |                |          |
|----------|----------------|----------|
| <b>1</b> | <b>分治法</b>     | <b>1</b> |
| 1.1      | 最近点对 . . . . . | 1        |
| 1.2      | 凸包 . . . . .   | 3        |

# Chapter 1 分治法

## 1.1 最近点对

### 1.1.1 最近点对

在一个平面上有  $n$  个点，找到所有点对中距离最短的点对。

暴力解法就是计算任意两点之间的距离，找到其中的最小值，因此时间复杂度为  $O(n^2)$ 。

利用分治法，可以根据排序后的横坐标将点集分为左右两个部分，然后递归地对两个子问题进行求解。先求出左半部分的最短距离，再求出右半部分的最短距离。但是最短距离的点对也有可能会跨越边界，因此还需要计算一个点在左半部分、另一个点在右半部分的最短距离。三个距离中最短的就是原问题的最终解。

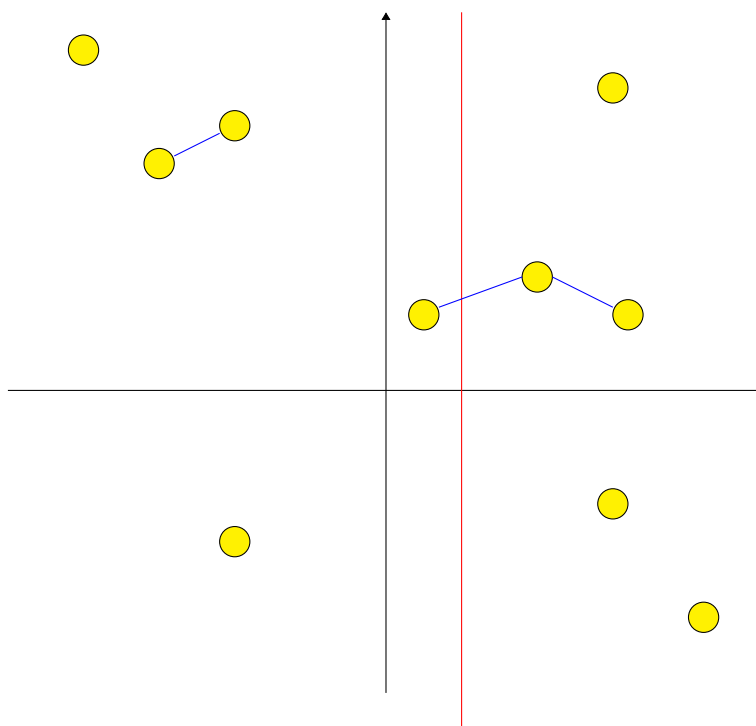


图 1.1: 最近点对

在计算出左右两边的最短距离后，两者较小的值  $d$  即为跨越边界的范围。

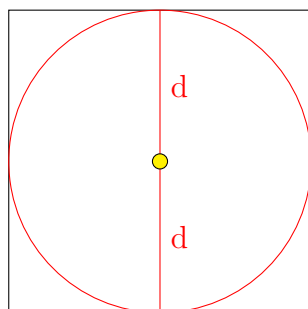


图 1.2: 跨越边界的范围

对于处于左边的每个点而言，在右边的每个小长方形中至多存在 1 个点，即最多只需要比较右边的 6 个点。如果在右半边存在超过 6 个点的话，那么就存在一个比  $d$  更短的距离，就与之前的最短距离矛盾了。

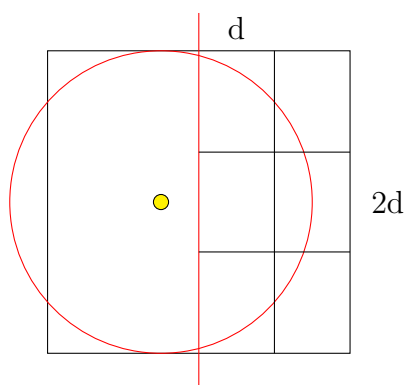


图 1.3: 检查跨越边界的点

检查 1 个点是常数时间，检查  $n$  个点需要  $O(n)$  的时间。分治算法中排序需要  $O(n \log n)$ ，递归处理子问题需要  $T(n/2) + O(n)$ 。总体时间复杂度为  $O(n \log n)$ 。

## 1.2 凸包

### 1.2.1 凸包 (Convex Hull)

凸包是计算几何中的概念。在大量离散点的集合中，求一个最小的凸多边形，使得所有点都在该多边形的内部或边上。凸包在形状识别、字形识别、碰撞检测中都有所应用。

利用分治算法，连接最大纵坐标和最小纵坐标的两点，将点集划分成左右两部分，并递归对两个子问题进行求解。

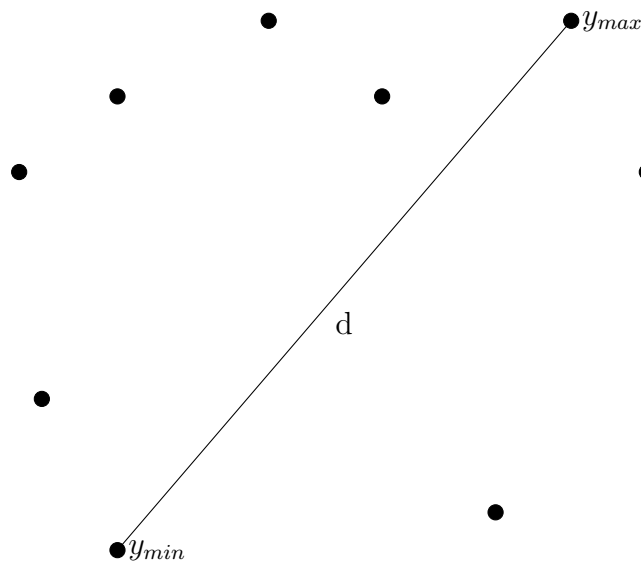


图 1.4: 划分点集

例如在左半边中，先找到距离边界  $d$  最远的点  $P$ 。落在形成的三角形内部的点全部排除。接着将边  $a$  外的点与  $a$  构成作左半边点集的子问题，将边  $b$  外的点与  $b$  构成另一个左半边点集的子问题。每次将距离边界最远的点加入凸包即可求解原问题。

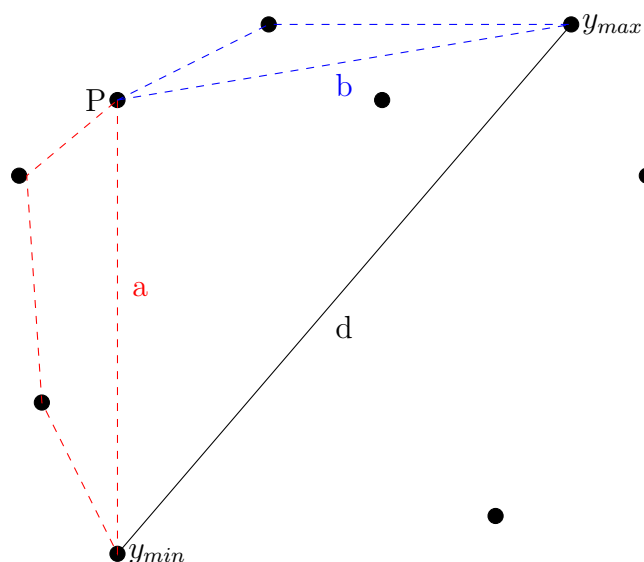


图 1.5: 子问题

每个子问题可以找到一个凸包上的点，使问题规模缩小 1，寻找凸包顶点和划分子问题需要的时间  $O(n)$ 。当子问题的规模小于 3 时，可直接进行求解。因此分治算法的时间复杂度为：

$$W(n) = \begin{cases} O(1) & n = 3 \\ W(n-1) + O(n) & n > 3 \end{cases}$$

求解得到：

$$W(n) = O(n^2)$$

### 1.2.2 Graham 扫描法

Graham 扫描法首先找到最靠近左下角的点，以这个点为极点，其它点按照极角排序。按照逆时针顺序进行扫描，先把点 1 压入凸包的栈中。