离散数学

Discrete Mathematics

极夜酱

目录

Chapter 1 逻辑

1.1 命题

1.1.1 命题（Proposition）

逻辑（logic）规则给出数学语句的准确含义，这些规则用来区分有效和无效的数学论证。逻辑不仅对理解数学推理十分重要，而且在计算机科学中有许多应用，逻辑可用于电路设计、程序构造、程序正确性证明等方面。

命题是逻辑的基本成分，一个命题是一个具有真值（truth value）的语句，命题可以为真也可以为假，但不能既为真又为假。

命题	**非命题**
I have a dog.	What day is today?
1 + 2 = 3	Shut the door!
Today is Wednesday.	1 + 2
It is snowing today.	x + 1 = 2

表 1.1: 命题与非命题

命题习惯上用字母 p, q, r, s 等来表示，如果一个命题是真命题，它的真值为真，用 T 表示；如果一个命题是假命题，它的真值为假，用 F 表示。

1.1.2 非运算符（NOT, Negation Operator）

非运算符 $\neg$ 只作用于一个命题，其作用是反转命题的真值。

真值表（truth table）可以给出命题真值之间的关系，在确定由简单命题组成的命题的真值时，真值表特别有用。

p	$\neg p$
T	F
F	T

表 1.2: NOT 真值表

Exercise $\neg p$

p: It snowed last night.

$\neg p$: It didn;t snow last night.

q: $2+3=6$

$\neg q$: $2+3\neq 6$

1.1.3 合取运算符（AND, Conjunction Operator）

命题 $p \wedge q$ 表示 p 并且 q，当 p 和 q 都为真时命题为真，否则为假。

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表 1.3: AND 真值表

Exercise $p \wedge q$

p: 今天是星期五。

q: 今天会下雨。

$p \wedge q$: 今天是星期五并且会下雨。

1.1.4 析取运算符（OR, Disjunction Operator）

命题 $p \vee q$ 表示 p 或 q，当 p 和 q 都为假时命题为假，否则为真。

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表 1.4: OR 真值表

Exercise $p \vee q$

p: 开关坏了。

q: 灯泡坏了。

$p \vee q$: 开关坏了或者灯泡坏了。

1.1.5 异或运算符（XOR, Exclusive Or）

命题 $p \oplus q$ 表示 p 和 q 的异或，当 p 和 q 中恰有一个为真时命题为真，否则为假。

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表 1.5: XOR 真值表

Exercise $p \oplus q$

p: 他现在在上海。

q: 他现在在北京。

$p \vee q$: 他现在在上海或北京。

Exercise 某地发生了一件谋杀案，警察通过排查确定杀人凶手必为 4 个嫌疑犯的一个，根据以下信息确定凶手。

A 说：不是我。

B 说：是 C。

C 说：是 D。

D 说：C 在胡说。

已知 3 个人说了真话，1 个人说的是假话。

```python
def main():
    for killer in ['A', 'B', 'C', 'D']:
        if (killer != 'A') + (killer == 'C') \
            + (killer == 'D') + (killer != 'D') == 3:
            print(killer)

if __name__ == "__main__":
    main()
```

运行结果 C

1.2 复合命题

1.2.1 复合命题（Compound Proposition）

使用非运算符和已定义的各联结词可以构造复合命题。小括号用于规定复合命题中多个逻辑运算符的操作顺序，为了减少所需的小括号数量，规定了各联结词的优先级。

优先级	**运算符**
1	$\neg$
2	$\wedge$ / $\vee$
3	$\rightarrow$ / $\leftrightarrow$

表 1.6: 运算符优先级

1.2.2 蕴含运算符（Implication Operator）

命题 $p \rightarrow q$ 表示 p 蕴含 q，在 p 为真而 q 为假时命题为假，否则为真。其中 p 称为前提，q 称为结论。

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

表 1.7: 蕴含真值表

表示 $p \rightarrow q$ 的术语有很多种，常见的有：

- If p, then q.
- p only if q.
- q is necessary for p.

> **Exercise** $p \to q$
>
> p：我去看电影。
>
> q：我买奶茶。
>
> $p \to q$：如果我去看电影，那么我会买奶茶。

由 $p \to q$ 可以构造出几个相关的蕴含：

1. $q \to p$ 称为 $p \to q$ 的逆命题（converse）。
2. $\neg q \to \neg p$ 称为 $p \to q$ 的逆否命题（contrapositive）。

> **Exercise** 逆命题与逆否命题
>
> p：今天是星期四。
>
> q：我今天有考试。
>
> $p \to q$：如果今天是星期四，那么我今天有考试。
>
> $q \to p$：如果我今天有考试，那么果今天是星期四。
>
> $\neg q \to \neg p$：如果我今天没有考试，那么今天不是星期四。

1.2.3 双向蕴含（Biconditional Operation）

命题 $p \leftrightarrow q$ 表示 p 双向蕴含 q，在 p 和 q 有相同的真值时命题为真，否则为假。

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

表 1.8: 双向蕴含真值表

双蕴含的真值表与异或的真值表正好相反，因此 $p \leftrightarrow q$ 与 $\neg(p \oplus q)$ 等价。

1.3 逻辑等价

1.3.1 逻辑等价（Logical Equivalence）

两个不同的复合命题可能拥有完全相同的真值，则称这两个命题在逻辑上是等价的。如果无论复合命题中各个命题的真值是什么，复合命题的真值总是为真，这样的复合命题称为永真式（tautology）。如果真值永远为假的复合命题称为矛盾(contradiction)。

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

表 1.9: 逻辑等价

如果复合命题 s 和是 r 逻辑等价的，可表示为 $s \equiv r$。只有当 $s \leftrightarrow r$ 是永真式时，s 和 r 才是逻辑等价的。

Exercise 使用真值表证明 $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	F

1.3.2 逻辑等价定理

幂等律 Idempotent Laws

$$p \wedge p \equiv p \tag{1.1}$$

$$p \vee p \equiv p \tag{1.2}$$

恒等律 Identity Laws

$$p \wedge T \equiv p \tag{1.3}$$

$$p \vee F \equiv p \tag{1.4}$$

支配律 Domination Laws

$$p \vee T \equiv T \tag{1.5}$$

$$p \wedge F \equiv F \tag{1.6}$$

双非律 Double Negation Law

$$\neg(\neg p) \equiv p \tag{1.7}$$

交换律 Commutative Laws

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \tag{1.8}$$

$$p \vee q \equiv q \vee p \tag{1.9}$$

结合律 Associative Laws

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \tag{1.10}$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \tag{1.11}$$

分配律 Distributive Laws

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \tag{1.12}$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \tag{1.13}$$

德摩根律 De Morgan's Laws

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \tag{1.14}$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \tag{1.15}$$

吸收律 Absorption Laws

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \tag{1.16}$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p \tag{1.17}$$

条件恒等

$$p \to q \equiv \neg p \vee q \tag{1.18}$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \tag{1.19}$$

Exercise 证明 $(p \vee q) \to p$ 永真

$$\begin{aligned}
&(p \vee q) \to p \\
&\equiv \neg(p \wedge q) \vee p \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee p \\
&\equiv (\neg q \vee \neg p) \vee p \\
&\equiv \neg q \vee (\neg p \vee p) \\
&\equiv \neg q \vee T \\
&\equiv T
\end{aligned}$$

1.4 谓词与量词

1.4.1 谓词（Predicate）

命题逻辑并不能表达数学语言和自然语言中所有语句的确切含义。在数学表达式和计算机程序中经常可以看到含有变量的语句，例如 $x > 3$、$x = y + 3$、程序 x 正在运行等。当变量值未指定时，这些语句既不为真也不为假。

利用 $P(x)$ 可以表示语句，其中 x 是变量，语句 $P(x)$ 可以说是命题函数 P 在 x 的值。一旦给变量 x 赋一个值，语句 $P(x)$ 就称为命题并具有真值。

通常使用大写字母 P, Q, R 等表示谓词，小写字母 x, y, z 等表示变量。

Exercise 谓词

谓词	真值
$P(x) : x + 3 = 6$	$P(3)$ 为 True
$Q(x, y) : x = y + 2$	$Q(4, 1)$ 为 False

1.4.2 量词（Quantifier）

量词用量化表示在何种程度上谓词对于一定范围的个体成立。量词有全称量词（universal quantifier）和存在量词（existential quantifer）。

全称量词 $\forall$ 表示 all。$\forall_x P(x)$ 是一个命题，当范围内所有的 x 都能使语句 $P(x)$ 为真时，命题为真。

$$\forall_x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_k)$$

Exercise 全称量词

假设 x 表示全班所有学生，$P(x)$ 表示 x 完成了作业。

$\forall_x P(x)$：全班所有学生都完成了作业。

存在量词 $\exists$ 表示 exists。$\exists_x P(x)$ 是一个命题，当范围内存在至少一个 x 能够语句 $P(x)$ 为真时，命题为真。

$$\exists_x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_k)$$

Exercise 存在量词

假设 x 表示全班所有学生，$P(x)$ 表示 x 完成了作业。

$\exists_x P(x)$：班里存在有一个学生完成了作业。

Exercise 嵌套量词

假设 x 表示某个人，$P(x)$ 表示有父母。

$\forall_x P(x)$：所有人都有父母。

$\exists_x \neg P(x)$：存在至少有一个人没有父母。

$\exists_x \exists_y (P(x) \wedge P(y))$：至少存在一个人 x 和一个人 y 有父母。

Exercise $P(x)$：x 是偶数，$Q(x)$：x 能被 3 整除，$x \in \mathbb{Z}^+$

语句	真值
$\exists_x (P(x) \wedge Q(x))$	True
$\forall_x (P(x) \to \neg Q(x))$	False

1.4.3 全称量词的否定

否定运算符可以使用在全称量词上。

$$\neg \forall_x P(x) \equiv \exists_x \neg P(x) \tag{1.20}$$

$$\neg \exists_x P(x) \equiv \forall_x \neg P(x) \tag{1.21}$$

Exercise 全称量词的否定

$P(x)$: x will pass the course (x is a student).

$\neg\forall_x P(x)$: Not all students will pass the course.

$\forall_x \neg P(x)$: No student will pass the course.

$\neg\exists_x P(x)$: There does not exist a student that will pass the course.

$\exists_x \neg P(x)$: There exists a student that will not pass the course.

1.5 证明

1.5.1 证明（Proof）

证明方法非常重要，不仅因为它们可用于证明数学定理，而且在计算机科学中也有许多应用，包括验证程序正确性、建立安全的操作系统、人工智能领域做推论等。证明就是建立定理真实性的有效论证。

证明定理有很多方法：

1. 直接证明法（direct proof）

证明 如果 n 是奇数，那么 n^2 也是奇数，$n \in \mathbb{Z}$。

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

2. 反证法（proof by contrapositive）：由于 $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$，因此可以通过证明原命题的逆否命题来反证原命题。

证明 如果 xy 是偶数，那么 x 是偶数或 y 是偶数，$x, y \in \mathbb{Z}$。
逆否命题：如果 x 是奇数并且 y 是奇数，那么 xy 是奇数，$x, y \in \mathbb{Z}$。

$$\begin{aligned} xy &= (2m+1)(2n+1) \\ &= 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2(2mn + m + n) + 1 \end{aligned}$$

1.6 布尔代数

1.6.1 布尔代数（Boolean Algebra）

计算机和其它电子设备中的电路都有输入和输出，输入是 0 或 1，输出也是 0 或 1。电路可以用任何具有两个不同状态的基本元件来构造，例如开关和光学装置就是这样的原件，开关可位于开或关的位置，光学装置可能是点亮或未点亮。18 世纪，乔治 · 布尔（George Boole）给出了逻辑的基本规则。

电路的操作可以用布尔函数来定义，这样的布尔函数对任意一组输入都能指出其输出的值。

布尔代数提供的是集合 $\{0, 1\}$ 上的运算和规则，布尔代数的规则类似于命题逻辑的规则。1 相当于逻辑中的真，0 相当于逻辑中的假。

布尔代码运算主要有三种：

1. 补（complement）

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

2. 布尔积（boolean multiplication）

x	y	$x \cdot y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3. 布尔和（boolean addition）

x	y	$x+y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exercise 当 $x=y=1$，$w=z=0$ 时，

$x\cdot y+(w+z)=1\cdot 1+(0+0)=1+0=1$

$x\cdot\overline{y}+z\cdot\overline{(w+z)}=1\cdot\overline{1}+0\cdot\overline{(0+0)}=0+0=0$

$x\cdot\overline{y}+\overline{(\overline{x}+y+\overline{yz})}=1\cdot\overline{1}+\overline{(\overline{1}+1+\overline{1\cdot 0})}=0+\overline{1}=0$

1.6.2 布尔代数定理

幂等律 Idempotent Laws

$$x\cdot x=0 \tag{1.22}$$

$$x+x=x \tag{1.23}$$

恒等律 Identity Laws

$$x\cdot 1=x \tag{1.24}$$

$$x+0=x \tag{1.25}$$

支配律 Domination Laws

$$x\cdot 0=0 \tag{1.26}$$

$$x+1=1 \tag{1.27}$$

双非律 Double Negation Law

$$\overline{\overline{x}} = x \tag{1.28}$$

交换律 Commutative Laws

$$x \cdot y = y \cdot x \tag{1.29}$$

$$x + y = y + x \tag{1.30}$$

结合律 Associative Laws

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \tag{1.31}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \tag{1.32}$$

分配律 Distributive Laws

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \tag{1.33}$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \tag{1.34}$$

德摩根律 De Morgan's Laws

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y} \tag{1.35}$$

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y} \tag{1.36}$$

吸收律 Absorption Laws

$$x \cdot (x + y) = x \tag{1.37}$$

$$x + (x \cdot y) = x \tag{1.38}$$

证明 $xy + x\overline{y} = x$

$$xy + x\overline{y} \tag{1.39}$$
$$= x \cdot (y + \overline{y}) \tag{1.40}$$
$$= x \cdot 1 \tag{1.41}$$
$$= x \tag{1.42}$$

1.6.3 布尔函数（Boolean Function）

含有 n 个变量的布尔函数能够构造出 2^n 行的输入输出表。

Exercise 计算 $F(x, y, z) = xy + \overline{z}$

x	y	z	$F(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1.6.4 NAND 与 NOR

NAND 运算符用 $\uparrow$ 表示 Not And：

$$x \uparrow y = \overline{x \cdot y}$$

NOR 运算符用 $\downarrow$ 表示 Not Or：

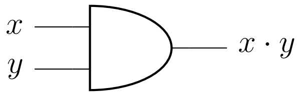
$$x \downarrow y = \overline{x + y}$$

1.7 逻辑门电路

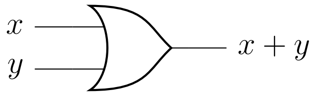
1.7.1 逻辑门电路（Logical Gate Circuit）

基础的逻辑门主要有三种：

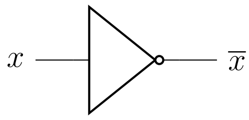
1. 与门（AND gate）



2. 或门（OR gate）：

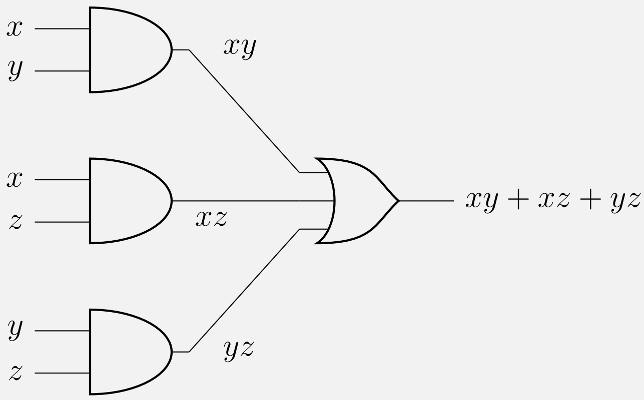


3. 非门（NOT gate）：



Exercise 设计一个投票表决电路，三个人中有两人赞成即通过。赞成票为 1，否决表为 0。

$$F(x, y, z) = xy + xz + yz$$



Chapter 2 集合

2.1 集合

2.1.1 集合（Set）

集合是对象的唯一的、无序的聚集，通常一个集合中的对象都具有相似的性质。对象也称为集合的元素（element）或成员（member）。

通常用大写字母表示集合，小写字母表示元素。$a \in A$ 表示是 a 集合 A 中的元素，$a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 中的元素。

使用花名册方法（roster method）列出集合中的元素，可以用于描述集合。

Exercise 花名册方法

小写元音字母集合 $V = \{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$

小于 10 的正奇数集合 $O = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

小于 100 的非负整数集合 $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 99\}$

集合构造器（set builder）通过描述元素具有的形式来描述集合。

Exercise 集合构造器

小于 10 的正整数 $A = \{x \mid x < 10\}$

一些常用的特殊符号可用于描述指定的集合：

符号	含义
$\mathbb{N}$	自然数集 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	整数集 $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	正整数集 $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	有理数集 $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\ (q \neq 0)\}$
$\mathbb{Q}^+$	正有理数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}^+$	正实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$\emptyset$	空集 $\{\}$

2.1.2 基数（Cardinality）

基数表示有限集合中元素的个数，集合 A 的基数记为 $|A|$。

Exercise 基数

英语字母集合 A，$|A| = 26$

空集 $\emptyset$，$|\emptyset| = 0$

2.1.3 韦恩图（Venn Diagram）

集合还可以使用韦恩图来表示。

全集（universal set）包含所研究问题中所有的元素，用符号 U 表示。假设 A 是一个集合，由全集 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为 A 的补集，表示为 $\overline{A}$。

假设有两个集合 A 和 B，如果 A 中的所有元素都在 B 中，那么 A 就是 B 的子集，表示为 $A \subseteq B$。如果 A 中有一个元素不在 B 中，那么 A 就不是 B 的子集，表示为 $A \nsubseteq B$。只有当两个集合互相为对方的子集时，那么这两个集合相等，即：

$$A = B \text{ iff } A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A$$

如果 $A \subseteq B$，并且 B 中有一个元素不是 A 的元素，那么称 A 是 B 的真子集（proper subset），表示为 $A \subset B$。

2.1.4 幂集（Power Set）

一个集合中是可以包含另一个集合的，如 $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$。需要注意，$1 \neq \{1\} \neq \{\{1\}\}$。

幂集用于表示一个集合所有子集的集合，集合 A 的幂集表示为 $P(A)$。

Exercise 计算 $A = \{1, 2, 3\}$ 的幂集

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

如果集合 A 的基数为 n，那么 A 的幂集的基数为 2^n，即 $|P(A)| = 2^n$。

2.2 集合运算

2.2.1 交集（Intersection）

假设 A 和 B 是两个集合，由所有属于 A 并且属于 B 的元素所组成的集合，称为 A 与 B 的交集，表示为 $A \cap B$。

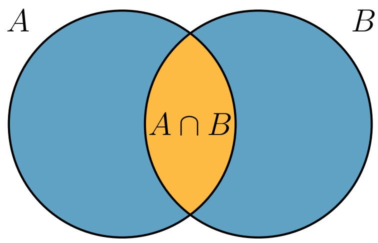


图 2.1: 交集

如果两个集合没有公共元素，那么它们的交集为空集。

2.2.2 并集（Union）

假设 A 和 B 是两个集合，由它们所有元素合并在一起组成的集合，称为 A 与 B 的并集，表示为 $A \cup B$。

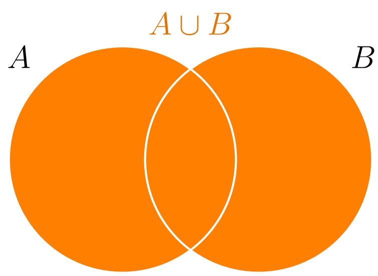


图 2.2: 并集

2.2.3 差集（Difference）

假设 A 和 B 是两个集合，由属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集，表示为 $A - B$。

差集运算不满足交换律，即 $A - B \neq B - A$。

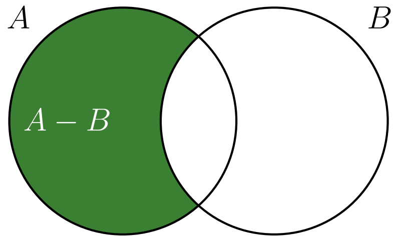


图 2.3: 差集 $A - B$

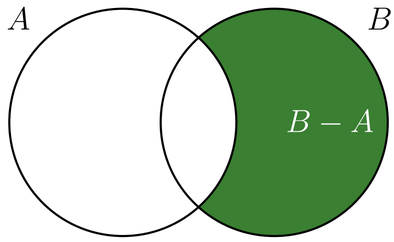


图 2.4: 差集 $B - A$

2.3 集合恒等式

2.3.1 集合恒等式

集合恒等式可以直接由对应的逻辑等价式证明。

幂等律 Idempotent Laws

$$A \cap A = A \tag{2.1}$$

$$A \cup A = A \tag{2.2}$$

恒等律 Identity Laws

$$A \cap U = A \tag{2.3}$$

$$A \cup \emptyset = A \tag{2.4}$$

支配律 Domination Laws

$$A \cap \emptyset = \emptyset \tag{2.5}$$

$$A \cup U = U \tag{2.6}$$

双非律 Double Negation Law

$$\overline{\overline{A}} = A \tag{2.7}$$

交换律 Commutative Laws

$$A \cap B = B \cap A \tag{2.8}$$

$$A \cup B = B \cup A \tag{2.9}$$

结合律 Associative Laws

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{2.10}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{2.11}$$

分配律 Distributive Laws

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{2.12}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{2.13}$$

德摩根律 De Morgan's Laws

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{2.14}$$

吸收律 Absorption Laws

$$A \cap (A \cup B) = A \tag{2.15}$$

$$A \cup (A \cap B) = A \tag{2.16}$$

证明 $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$

$$\begin{aligned}
&\overline{A \cup (B \cap C)} \\
&= \overline{A} \cap \overline{B \cap C} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} \\
&= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}
\end{aligned}$$

Exercise 一共有 40 个学生，有 3 门课程可供学生选择（C 语言、离散数学、软件工程）。

7 人没有选任何课程；

16 人选软件工程；

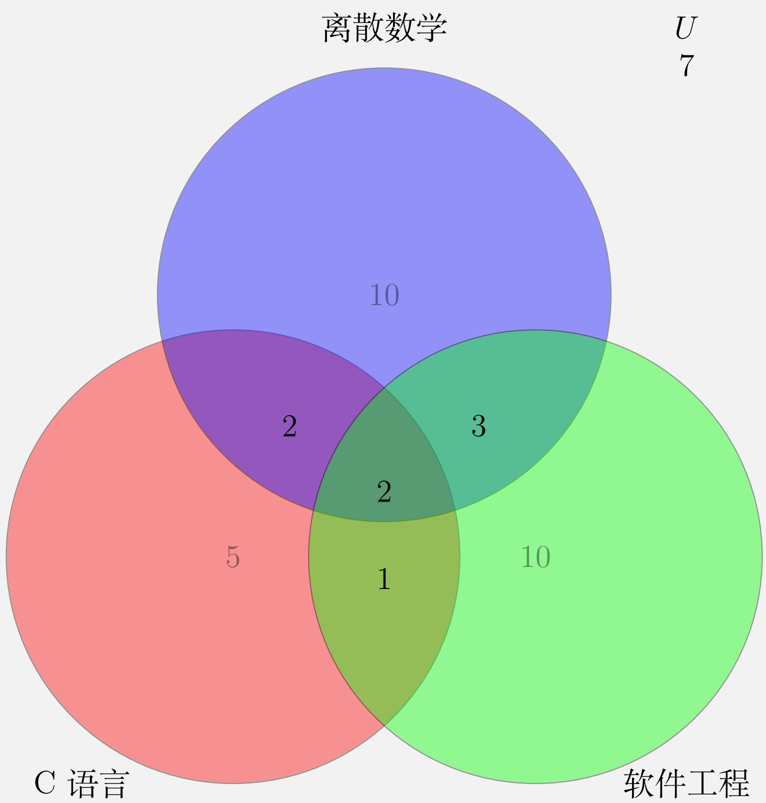
10 人选 C 语言；

5 人同时选离散数学和软件工程；

4 人同时选离散数学和 C 语言；

3 人同时选软件工程和 C 语言；

2 人同时选离散数学、软件工程和 C 语言。



2.4 笛卡尔积

2.4.1 元组（Tuple）

有时候元素聚集中次序是很重要的，由于集合是无序的，所以就需要一种不同的结构表示有序的聚集，这就是有序 n 元组（ordered-n-tuple）。

有序 n 元组 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 是以 a_1 为第 1 个元素，a_2 为第 2 个元素，a_n 为第 n 个元素的有序聚集。

只有两个有序 n 元组的每一对对应的元素都相等，那么这两个有序 n 元组是相等的，即：

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \text{ iff } i = 1, 2, \ldots, n$$

需要注意，(a, b) 与 (b, a) 不相等，除非 $a = b$。

2.4.2 笛卡尔积（Cartesian Product）

假设有两个集合 A 和 B，A 和 B 的笛卡尔积用 $A \times B$ 表示，笛卡尔积是所有序偶 (a, b) 的集合，其中 $a \in A$ 且 $b \in B$。

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

笛卡尔积 $A \times B$ 和 $B \times A$ 是不相等的，除非 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$ 或 $A = B$。

Exercise 笛卡尔积

学生集合 $S = \{s1, s2\}$

课程集合 $C = \{c1, c2, c3\}$

$S \times C = \{(s1, c1), (s1, c2), (s1, c3), (s2, c1), (s2, c2), (s2, c3)\}$

笛卡尔积 $S \times C$ 表示学生选课的所有可能情况

Exercise 笛卡尔积 $A \times B \times C$

$A = \{0,\ 1\}$

$B = \{1,\ 2\}$

$C = \{0,\ 1,\ 2\}$

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{&(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,2,0),(0,2,1),(0,2,2),\\ &(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2)\} \end{aligned}$$

一个集合与自身的笛卡尔积，如 $A \times A$ 可表示为 A^2。

Exercise 笛卡尔积 A^2

$A = \{1,\ 2\}$

$A^2 = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)\}$

Chapter 3 函数

3.1 函数

3.1.1 函数（Function）

函数在数学和计算机科学中的概念非常重要，在离散数学中函数用于定义像序列和字符串这样的离散结构。

利用一个函数 f，可以将一个值 $x \in \mathbb{R}$ 映射（mapping）到一个特定的值 $y = f(x)$，$y \in \mathbb{R}$ 上。

假设有两个非空集合 X 和 Y，从 X 到 Y 的函数 f 是指对于 X 的每个元素恰好都对应 Y 的一个元素，即 $f(x) = y$，$x \in X$，$y \in Y$，那么就写成 $f : X \to Y$。

集合 X 被称为函数 f 的定义域（domain），集合 Y 被称为函数 f 的陪域（co-domain）。

如果 $f(x) = y$，那么 y 是 x 在函数 f 下的像（image），x 是 y 在函数 f 下的原像（pre-image）。函数 f 的值域（range）是集合 X 中所有像的集合。

当两个函数 f 和 g 有相同的定义域和陪域，并且对于定义域中所有元素 x 都满足 $f(x) = g(x)$，那么函数 f 和 g 相等，表示为 $f = g$。

Exercise 判断是否为函数

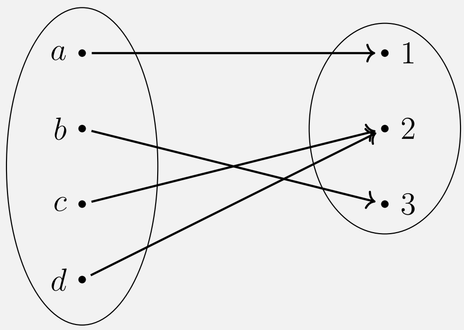


图 3.1: 函数

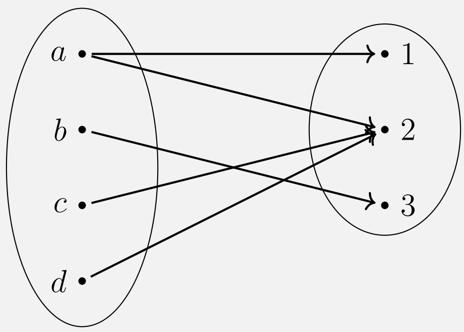
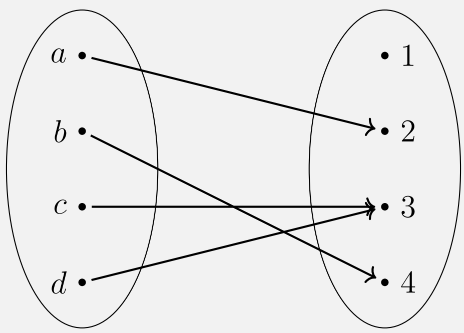


图 3.2: 非函数

Exercise



是否为函数：是

定义域（domain）：a，b，c，d

陪域（co-domain）：1，2，3，4

值域（range）：2，3，4

3.2 取整函数

3.2.1 上取整函数（Ceiling Function）

取整函数包括上取整和下取整，可以将实数映射到整数（$\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$），它们以不同的方式将实数近似到相邻的整数。

上取整函数将实数 x 向上取到大于或等于 x 的最小整数，表示为 $\lceil x \rceil$。

Exercise 上取整函数

$\lceil 3.2 \rceil = 4$

$\lceil 2.6 \rceil = 3$

$\lceil -0.5 \rceil = 0$

3.2.2 下取整函数（Floor Function）

下取整函数将实数 x 向下取到小于或等于 x 的最大整数，表示为 $\lfloor x \rfloor$。

Exercise 下取整函数

$\lfloor 3.2 \rfloor = 3$

$\lfloor 5.9 \rfloor = 5$

$\lfloor -0.5 \rfloor = -1$

3.3 函数分类

3.3.1 一对一函数（One-to-one）/ 单射函数（Injection）

一对一函数 / 单射函数是指对于函数 f 的定义域中所有的 a 和 b，如果 $a \neq b$，那么 $f(a) \neq f(b)$。

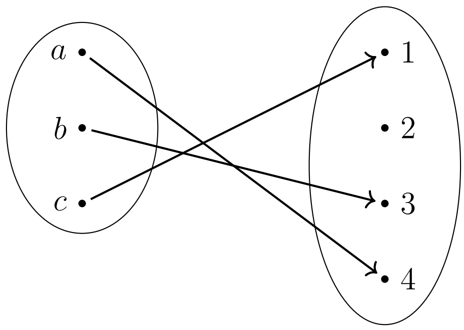


图 3.3: 一对一函数 / 单射函数

Exercise 一对一函数 / 单射函数

$f(x) = x + 1$ 是一对一函数。

$f(x) = x^2$ 不是一对一函数，因为 $f(1) = f(-1) = 1$。

3.3.2 映上函数（Onto）/ 满射函数（Surjection）

映上函数 / 满射函数是指对于函数 $f : A \to B$，每个 $b \in B$ 都有元素 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$。

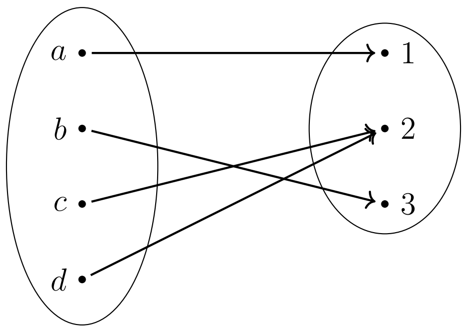


图 3.4: 映上函数 / 满射函数

Exercise 映上函数 / 满射函数

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，$f(x) = x + 1$ 是映上函数。

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，$f(x) = x^2$ 不是映上函数，因为没有整数 x 使 $x^2 = -1$。

3.3.3 一一对应函数 / 双射函数（Bijection）

如果一个函数既是一对一函数又是映上函数，那么这个函数就被称为一一对应函数 / 双射函数。

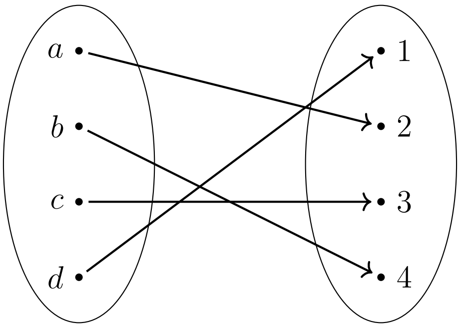


图 3.5: 一一对应函数 / 双射函数

Exercise 一一对应函数 / 双射函数

f 是从 $\{a, b, c, d\}$ 到 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的函数，定义 $f(a) = 4$，$f(b) = 2$，$f(c) = 1$，$f(d) = 3$。

函数 f 是单射函数，因为没有两个值映射到相同的函数值。

函数 f 是满射函数，因为陪域的个数与值域的个数相同。

因此，函数 f 是双射函数。

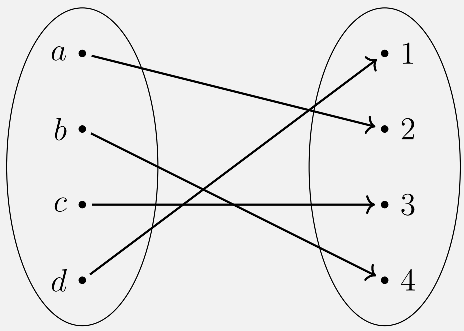
3.4 反函数

3.4.1 反函数（Inverse Function）

假设有一个从集合 A 到集合 B 的双射函数 f。由于 f 是满射函数，所以 B 中的每个元素都是 A 中某些元素的像；又由于 f 还是单射函数，所以 B 的每个元素都是 A 中唯一一个元素的像。

于是，通过把 f 的对应关系颠倒，获得的从 B 到 A 的新函数被称为 f 的反函数，用 f^{-1} 表示。当 $f(a) = b$ 时，$f^{-1}(b) = a$。需要注意，不要将 f^{-1} 与 $\frac{1}{f}$ 混淆。

Exercise 反函数



是否有反函数：是

$f^{-1}(2) = a$

$f^{-1}(1) = 1$

Exercise 计算 $f(x) = x + 3$ 的反函数

$f^{-1}(x) = x - 3$

3.5 合成函数

3.5.1 合成函数（Composition Function）

假设 g 是从集合 A 到集合 B 的函数，f 是从集合 B 到集合 C 的函数。函数 f 和 g 的合成，记作 $f \circ g$。

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

函数合成的顺序很重要，$f \circ g$ 与 $g \circ f$ 并不相等。

Exercise 合成函数

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，$f(x) = x^3$

$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，$g(x) = x + 2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + 2)^3$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^3 + 2$

3.5.2 恒等函数（Identity Function）

如果一个从集合 A 到集合 B 的函数 f 有反函数，那么 f 与 f^{-1} 的合成函数得到的是恒等函数。

如果 $f(a) = b$，那么 $f^{-1}(b) = a$。

$$(f \circ f^{-1})(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$$

3.6 指数函数与对数函数

3.6.1 指数函数（Exponential Function）

指数函数的定义为 $y = a^x\ (a > 0 \mid a \neq 1)$，其中 a 称为底数（base），x 称为指数（exponent）。

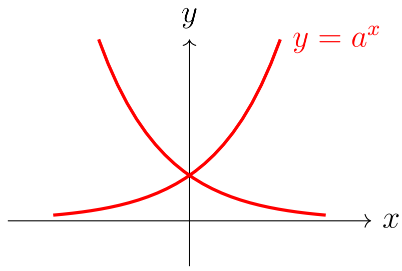


图 3.6: 指数函数

指数函数

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{a^{-x}} = a^x \tag{3.2}$$

$$(ab)^x = a^x b^x \tag{3.3}$$

$$(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x} \tag{3.4}$$

$$a^{kx} = (a^k)^x = (a^x)^k \tag{3.5}$$

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{3.6}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{3.7}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \tag{3.8}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \tag{3.9}$$

Exercise 指数函数

$(6^{2k})^3 = 6^{6k}$

$6^{k^2} \times 6 = 6^{k^2+1}$

$\frac{3^k}{9} = \frac{3^k}{3^2} = 3^{k-2}$

$3^k \times 27 = 3^k \times 3^3 = 3^{k+3}$

3.6.2 对数函数（Logarithm Function）

对于函数 $f:\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \to \{1,\ 4,\ 8,\ 16\}$，$f(x) = 2^x$，指数函数是双射函数，因此它是有反函数的。

对数函数是指数函数的反函数，对数函数的定义为 $y = log_a x\ (a > 0 \mid a \neq 1)$，其中 a 称为底数。

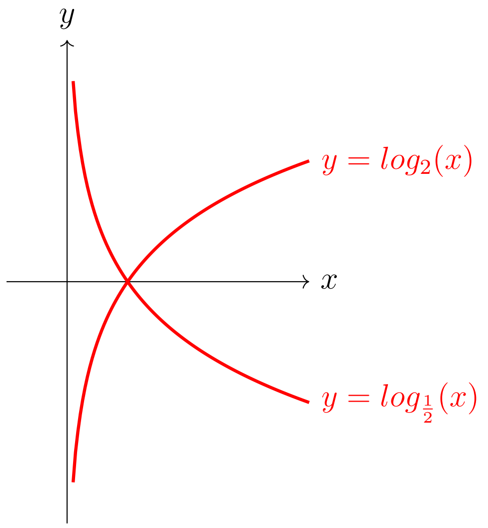


图 3.7: 对数函数

对数函数

$$log_a(a^x) = x \tag{3.10}$$

$$a^{log_a(x)} = x \tag{3.11}$$

$$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y) \tag{3.12}$$

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y) \tag{3.13}$$

$$log_a(x^n) = nlog_a(x) \tag{3.14}$$

$$log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)} \tag{3.15}$$

Exercise 对数函数

$log_5 k + log_5 2 = log_5 2k$

$log_2 5^2 = 2 \times log_2 5$

$\frac{log_3 k^2}{log_3 25} = \frac{2 \times log_3 k}{log_3 5^2} = \frac{2 \times log_3 k}{2 \times log_3 5} = log_5 k$

Chapter 4 数论

4.1 进制转换

4.1.1 进制

日常生活中都用十进制(decimal)来表示整数,十进制数由 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这 10 个字符组成。一个十进制整数的第 k 位的值可以由 10^{k-1} 计算得到。

Exercise 十进制

$$
\begin{aligned}
256 &= 200 + 50 + 6 \\
&= 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0
\end{aligned}
$$

二进制（binary)、八进制（octal)、十六进制（hexadecimal）也是非常常用的表示法，例如计算机通常用二进制来做算术运算，而用八进制或十六进制来表示字符。

4.1.2 进制转换

一个 b 进制的正整数 n 可以唯一地构造展开式:

$$n = a^k \times b^k + a_{k-1} \times b^{k-1} + \cdots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$$

Exercise b 进制转十进制

$(1011)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (11)_{10}$

$(21022)_3 = 2 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^0 = (197)_{10}$

十进制	二进制	八进制	十六进制
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

表 4.1: 进制转换

十进制转 b 进制还可以使用短除法的方式。

Exercise 十进制转四进制

$$\begin{array}{r|l l}
4 & \underline{637} & \text{remainder } 1 \\
4 & \underline{159} & \text{remainder } 3 \\
4 & \underline{39} & \text{remainder } 3 \quad (637)_{10} = (21331)_4 \\
4 & \underline{9} & \text{remainder } 1 \\
4 & \underline{2} & \text{remainder } 2
\end{array}$$

Exercise 十进制转二进制

$$
\begin{array}{r|l l}
2 & \underline{637} & \text{remainder } 1 \\
2 & \underline{318} & \text{remainder } 0 \\
2 & \underline{159} & \text{remainder } 1 \\
2 & \underline{79} & \text{remainder } 1 \\
2 & \underline{39} & \text{remainder } 1 \\
2 & \underline{19} & \text{remainder } 1 \\
2 & \underline{9} & \text{remainder } 1 \\
2 & \underline{4} & \text{remainder } 0 \\
2 & \underline{2} & \text{remainder } 0 \\
2 & \underline{1} & \text{remainder } 1
\end{array}
\quad (637)_{10} = (1001111101)_2
$$

Exercise 十进制转八进制

$$
\begin{array}{r|l l}
8 & \underline{1000} & \text{remainder } 0 \\
8 & \underline{125} & \text{remainder } 5 \\
8 & \underline{15} & \text{remainder } 7 \\
8 & \underline{1} & \text{remainder } 1
\end{array}
\quad (1000)_{10} = (1750)_8
$$

4.2 素数

4.2.1 素数（Prime Numbers）

基于整除性的一个重要概念就是素数，素数是大于 1 的且不能被 1 和它自身以外的正整数整除的整数。素数是现代密码学中必不可少的一部分，密码学中的大素数就用在信息加密的某些方法中。

Exercise 判断素数

7 是素数，因子有 1 和 7。

9 是合数，因为 9 能被 3 整除。

每个大于 1 的整数都可以唯一地写成多个素数的乘积。

Exercise 素因子分解

$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$

$999 = 3 \times 3 \times 3 \times 37 = 3^3 \times 37$

$1024 = 2^{10}$

如果 n 是一个合数，那么 n 必有一个素因子小于或等于 $\sqrt{n}$。

Exercise 证明 101 是素数

不超过 $\sqrt{101}$ 的素数只有 $2, 3, 5, 7$，因为 101 不能被 $2, 3, 5, 7$ 整除，所以 101 是素数。

```python
import math

def is_prime(num):
    for i in range(2, int(math.sqrt(num)) + 1):
        if num % i == 0:
            return False
    return True

def main():
```

```python
    print(is_prime(13))
    print(is_prime(18))

if __name__ == "__main__":
    main()
```

埃拉托斯特尼筛法（Sieve of Eratosthenes）可以用来寻找不超过一个给定整数的所有素数。

步骤：

1. 建立包含所有给定整数以内的表格
2. 从 $i = 2$ 开始
3. 移除所有整数 $n\%i == 0$（除 i 以外）
4. $i = i + 1$
5. 重复第 3 步和第 4 步

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

表 4.2: 埃拉托斯特尼筛法

4.3 序列

4.3.1 序列（Sequence）

序列是一种用来表示有序列表的离散结构。例如 1，2，3，5，8 是一个含有五项的序列，而 1，3，9，27，81，... 是一个无穷序列。序列可以用记号 $\{a_n\}$ 表示。

- 递增序列（increasing sequence）：一个序列任意相邻的两项满足 $a_k < a_{k+1}$
- 非递减序列（non-decreasing sequence）：一个序列任意相邻的两项满足 $a_k \leq a_{k+1}$
- 递减序列（decreasing sequence）：一个序列任意相邻的两项满足 $a_k > a_{k+1}$
- 非递增序列（non-increasing sequence）：一个序列任意相邻的两项满足 $a_k \geq a_{k+1}$

> **Exercise** 序列
>
> $\{a_n\}$，$a_n = \frac{1}{n}$： 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，...
>
> $\{b_n\}$，$b_n = 2^n$： 1，2，4，8，16，32，...

4.3.2 算术级数（Arithmetic Sequence）

算术级数也称等差级数，序列形式如下：

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+nd,\ \ldots\ (a, d \in \mathbb{R})$$

> **Exercise** 算术级数
>
> $\{a_n\}$，$a_n = -1+4n$： -1，3，7，11，...
>
> $\{b_n\}$，$b_n = 7-3n$： 7，4，1，-2，...

4.3.3 几何级数（Geometric Sequence）

几何级数也称等比级数，序列形式如下：

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \ldots,\ ar^n,\ \ldots,\ (a, r \in \mathbb{R})$$

Exercise 几何级数

$\{a_n\},\ a_n = (-1)^n:\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$

$\{b_n\},\ b_n = -2 \times 5^n:\ 2,\ 10,\ 50,\ 250,\ 1250,\ \ldots$

$\{c_n\},\ c_n = 6 \times (\frac{1}{3})^n:\ 6,\ 2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{27},\ \ldots$

4.4 递推关系

4.4.1 递推（Recurrence）

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与它前一项的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推方程。

算术级数的递推关系：

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned}$$

几何级数的递推关系：

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ a_n &= a_{n-1} \times r \end{aligned}$$

Exercise 银行储蓄账户上有 10000 元，年利率为 5.8%，7 年后账户中将有多少钱？

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + 0.058P_{n-1} \\ &= (1.058)P_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P_0 = 10000 \\ &P_1 = (1.058)P_0 \\ &P_2 = (1.058)P_1 = (1.058)^2P_0 \\ &\dots \\ &P_7 = (1.058)P_6 = (1.058)^7P_0 \approx 14838.83 \end{aligned}$$

4.4.2 斐波那契数列（Fibonacci Sequence）

斐波那契数列 f_0，f_1，f_2，$\dots$ 的递推公式为：

$$
f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ f(n-1) + f(n-2) & n > 3 \end{cases}
$$

斐波那契数列的通项公式为:

$$
f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}
$$

斐波那契数列（递归）

```
int fibonacci(int n) {
    if(n == 1 || n == 2) {
        return 1;
    }
    return fibonacci(n-2) + fibonacci(n-1);
}
```

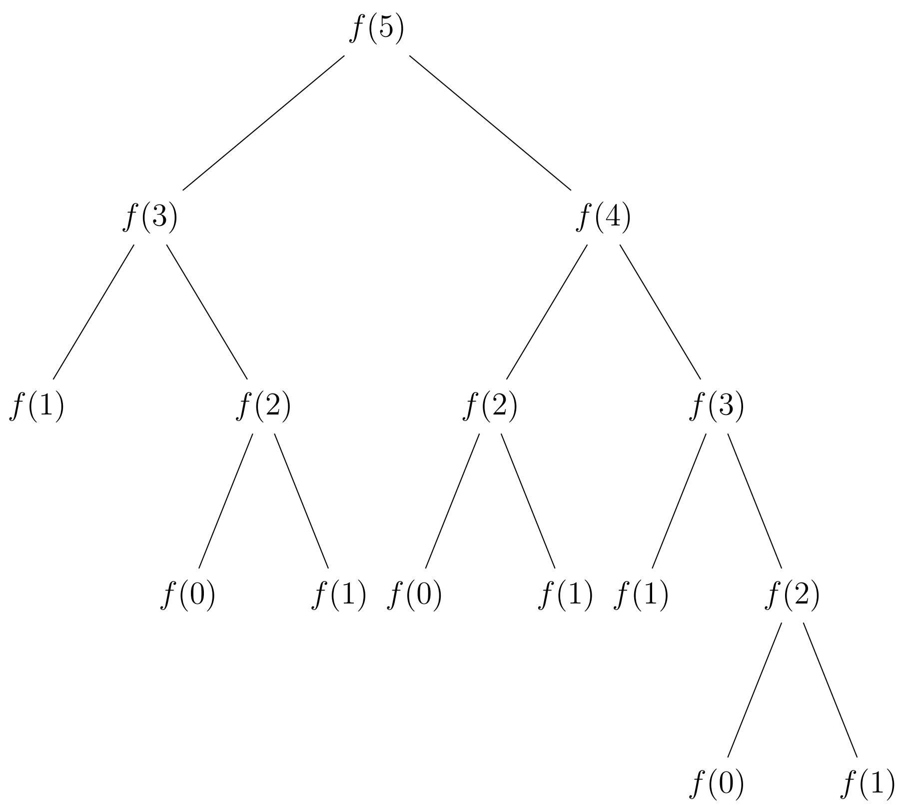


图 4.1: 递归树

斐波那契数列（迭代）

```
int fibonacci(int n) {
    int f[n];
    f[0] = f[1] = 1;
    for(int i = 2; i < n; i++) {
        f[i] = f[i-2] + f[i-1];
    }
    return f[n-1];
}
```

4.5 求和

4.5.1 求和（Summation）

求和符号 $\sum$ 可以用于表示序列中所有项的累加和。

$$\sum_{i=lower}^{upper} a_i$$

Exercise 求和

$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = 5050$

$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

$\sum_{k=4}^{6} (-1)^k = (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 = 1 - 1 + 1 = 1$

4.5.2 双重求和

很多情况下需要使用双重求和，比如在计算机程序中嵌套循环的分析中。

计算双重求和的方法是先展开内层求和，再继续计算外层求和。

Exercise 双重求和

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij \\
&= \sum_{i=1}^{4} (i + 2i + 3i) \\
&= \sum_{i=1}^{4} 6i \\
&= 6 + 12 + 18 + 24 \\
&= 60
\end{aligned}$$

4.6 数学归纳法

4.6.1 数学归纳法（Mathematical Induction）

数学归纳法是一种数学证明方法，通常被用于证明某个给定命题在一个给定范围内成立。

数学归纳法分为三个步骤：

1. 归纳基础
2. 归纳假设
3. 归纳递推

证明 $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$，$n \in \mathbb{Z}^+$

1. 归纳基础：当 $n = 1$，
   $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$
2. 归纳假设：假设 $n = k$，
   $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ 成立
3. 归纳递推：证明 $n = k + 1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^{k} i + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

证明 $2^n \geq 3n$，$n \geq 4$

1. 归纳基础：当 $n = 4$，
   $2^4 \geq 3 \times 4$

2. 归纳假设：假设 $n = k\ (n > 4)$，
   $2^k \geq 3k$ 成立

3. 归纳递推：证明 $n = k + 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
2^{k+1} &= 2 \times 2^k \\
&\geq 2 \times 3k \\
&= 3k + 3k \\
&\geq 3k + 3 \\
&\geq 3(k+1)
\end{aligned}
$$

证明 对于任意正整数 n，3 都能够整除 $2^{2n} - 1$

1. 归纳基础：当 $n = 1$，
   $2^{2\times 1} - 1 = 3$

2. 归纳假设：假设 $n = k\ (n > 0)$，
   3 能够整除 $2^{2k} - 1$ 成立，即 $2^{2k} - 1 = 3m$

3. 归纳递推：证明 $n = k + 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1 \\
&= 4 \times 2^{2k} - 1 \\
&= 4 \times (3m + 1) - 1 \\
&= 4 \times 3m + 4 - 1 \\
&= 3 \times (4m + 1)
\end{aligned}
$$

Chapter 5 计数

5.1 计数

5.1.1 分类加法计数原理

完成一件事有 n 种不同的方案，其中第 1 种方案有 m_1 种不同方法，第 2 种方案有 m_2 种不同方法，$\ldots$，第 n 种方案有 m_n 种不同方法，那么完成这件事共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同方法。

Exercise 从 A 地到 B 地，可以乘火车、汽车、飞机。火车有 4 班、汽车 2 班、飞机 3 班，那么一天中乘坐这些交通工具从 A 地到 B 地有多少种不同的走法?

$$4 + 2 + 3 = 9$$

5.1.2 分步乘法计数原理

完成一件事需要 n 个步骤，其中第 1 个步骤有 m_1 种不同方法，第 2 个步骤有 m_2 种不同方法，$\ldots$，第 n 个步骤有 m_n 种不同方法，那么完成这件事共有 $m_1 \times m_2 \times \ldots m_n$ 种不同方法。

Exercise 一个书架的第 1 层有 4 本不同的计算机书，第 2 层有 3 本不同的经济书，第 3 层有 2 本不同的数学书。从书架的每一层各取一本书，有多少种不同取法?

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

5.2 排列

5.2.1 排列（Permutation）

从 n 个不同元素中取出 m $(m \leq n)$ 个元素，按照一定次序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{5.1}$$

例如一共有 8 个人,A、B、C、D、E、F、G、H。现在有 3 个奖杯,分别为金牌、银牌和铜牌。将这 3 个奖牌颁发给 8 个人中的 3 个,问颁发奖牌的不同方式总共有几种?

很明显这是一个排列的问题，因为把金牌先颁给 A，再把银牌颁给 B，跟把金牌先颁给 B，再把银牌颁给 A 这是两种不同的颁奖方式。

- 第一步颁发金牌，金牌可以颁发给 8 个人中的 1 个，共有 8 种选择。
- 第二步颁发银牌，银牌可以颁发剩下 7 个人中的 1 个，共有 7 种选择。
- 第二步颁发铜牌，铜牌可以颁发剩下 6 个人中的 1 个，共有 6 种选择。

那么总共的颁奖方式共有 $8 \times 7 \times 6 = 336$ 种。

Exercise 用 0-9 这 10 个数字可以组成多少个没有重复数字的三位数?

方法一

由于 0 没有排在百位上，那么百位只能是 1-9 这 9 个数字任选 1 个，有 P_9^1 种选法。

对于十位和个位，从余下的 9 个数字种选 2 个，有 P_9^2 种选法。

$$P_9^1 \times P_9^2 = 9 \times 9 \times 8 = 648$$

方法二

符合条件的三位数可以分为 3 大类:

1. 每一位数字都不是 0 的三位数，也就是从 1-9 中选 3 个，有 P_9^3 种选法。
2. 个位数字为 0，那么需要从剩下 9 个数字中选 2 个作为十位和百位，有 P_9^2 种选法。
3. 十位数字为 0，那么需要从剩下 9 个数字中选 2 个作为个位和百位，有 P_9^2 种选法。

$$P_9^3 + P_9^2 + P_9^2 = 648$$

方法三

利用容斥法。从 0-9 这 10 个数字任取 3 个数字的排列数为 P_{10}^3，其中 0 在百位上（也就是从 1-9 中选 2 个作为十位和个位）的排列数是 P_9^2。

$$P_{10}^3 - P_9^2 = 648$$

Exercise 打印字符串 math 的全排列。

全排列

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>

```

```c
void swap(char *a, char *b) {
    char temp = *a;
    *a = *b;
    *b = temp;
}

void permutation(char *s, int start, int end) {
    if(start >= end) {
        printf("%s\n", s);
    } else {
        for(int i = start; i < end; i++) {
            swap(s + i, s + start);
            permutation(s, start + 1, end);
            swap(s + i, s + start);
        }
    }
}

int main() {
    char s[] = "math";
    int len = strlen(s);
    permutation(s, 0, len);
    return 0;
}
```

5.3 组合

5.3.1 组合（Combination）

从 n 个不同元素中取出 m $(m \leq n)$ 个元素，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

排列与组合的不同点在于，排列与元素的顺序有关，组合与元素的顺序无关。

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \tag{5.2}$$

Exercise 在 100 件产品中，有 98 件合格品，2 件次品，从这 100 件产品中任意抽出 3 件。

(1) 有多少种不同的抽法?

$$C_{100}^3 = \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} = 161700$$

(2) 抽出的 3 件中恰好有 1 件事次品的抽法有多少种?

2 件次品抽出 1 件有 C_2^1 种，再从 98 件合格品种抽出 2 件合格品有 C_{98}^2 种。

$$C_2^1 \times C_{98}^2 = 9506$$

(3) 抽出的 3 件中至少有 1 件事次品的抽法有多少种?

方法一

恰好有 1 件次品有 $C_2^1 \times C_{98}^2$ 种，恰好有 2 件次品有 $C_2^2 \times C_{98}^1$ 种。

$$C_2^1 \times C_{98}^2 + C_2^2 \times C_{98}^1 = 9604$$

方法二

利用容斥法。先从 100 件抽出 3 件有 C_{100}^3 种，其中 3 件都是合格品有 C_{98}^3 种。

$$C_{100}^3 - C_{98}^3 = 9604$$

5.4 鸽巢原理

5.4.1 鸽巢原理（Pigeonhole Principle）

鸽巢原理也称为狄利克雷抽屉原理（Dirichlet Drawer Principle），假设有 20 只鸽子要飞往 19 个鸽巢栖息，因此这 19 个鸽巢中至少有 1 个鸽巢最少栖息着 2 只鸽子。

鸽巢原理

如果 k + 1 个或者更多的物体放入 k 个盒子，那么至少有一个盒子包含了 2 个或更多的物体。

在生活中有很多场景都可以用鸽巢原理来解释：

- 367 个人中一定至少有 2 个人生日相同。
- 27 个英文单词中一定至少有 2 个单词是以同一个字母开头。

鸽巢原理指出当物体比盒子多时一定至少有 2 个物体在同一个盒子里，但是当物体树量超过盒子数量的倍数时，可以得到更多的结论。例如在 21 个在 $0 \sim 9$ 数字中一定有 3 个是相同的，这是由于 21 个物体被分配到 10 个盒子里，那么某个盒子的物体一定多于 2 个。

广义鸽巢原理

如果 N 个物体放入 k 个盒子，那么至少有一个盒子包含了至少 $\lceil N/k \rceil$ 个物体。

在生活中有很多场景都可以用广义鸽巢原理来解释：

- 在 100 个人中至少有 $\lceil 100/12 \rceil = 9$ 个人出生在同一个月。
- 假设有 A、B、C、D、E 五个成绩，一个班级至少要有 26 个学生才能保证至少 6 个学生得到相同的分数。

Exercise (1) 从一副标准的 52 张牌中必须选多少张牌才能保证选出的牌中至少有 3 张是同样的花色?

假设用 4 个盒子存放 4 种花色的牌，选 N 张牌后，至少有一个盒子含有至少 $\lceil N/4 \rceil$ 张牌。

因此使得 $\lceil N/4 \rceil \geq 3$ 的最小整数 $N = 2 \times 4 + 1 = 9$

(2) 必须选多少张牌才能保证选出的牌中至少有 3 张是红桃。

这个场景不适用广义鸽巢原理，因为要保证存在 3 张红桃，而不是 3 张同花色的牌。

最坏情况下，在选出第一张红桃之前已经选了所有的其它花色牌共 39 张，因此为了得到 3 张红桃，可能需要选 42 张牌。

5.5 二项式定理

5.5.1 二项式系数（Binomial Coefficient）

组合数 $C(n,r)$ 也可写为 $\binom{n}{r}$，由于这些数经常出现在 $(x+y)^n$ 的展开式中作为系数，所以这些数被称为二项式系数。

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= 1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3\\ &= \binom{3}{0}x^3+\binom{3}{1}x^2y+\binom{3}{2}xy^2+\binom{3}{3}y^3\end{aligned}$$

二项式定理

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j\\ &= \binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\cdots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n\end{aligned} \tag{5.3}$$

Exercise 计算 $(x+y)^{25}$ 的展开式中 $x^{12}y^{13}$ 的系数。

$$\binom{25}{13}=5200300$$

Exercise 计算 $(2x-3y)^{25}$ 的展开式中 $x^{12}y^{13}$ 的系数。

$$\begin{aligned}(2x+(-3y))^{25} &= \sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j}(2x)^{25-j}(-3y)^j\\ &= \sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j}(2)^{25-j}(x)^{25-j}(-3)^j(y)^j\end{aligned}$$

$x^{12}y^{13}$ 的系数为 $\binom{25}{13}\cdot 2^{12}\cdot(-3)^{13}$

推论 1

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}=2^n \tag{5.4}$$

证明

$$\begin{aligned}2^n&=(1+1)^n\\&=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}1^{n-j}1^j\\&=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\end{aligned}$$

推论 2

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j=0 \tag{5.5}$$

证明

$$\begin{aligned}0&=(1-1)^n\\&=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}1^{n-j}(-1)^j\\&=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j\end{aligned}$$

推论 3

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (2)^j = 3^n \tag{5.6}$$

证明

$$\begin{aligned}
3^n &= (1+2)^n \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} 2^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (2)^j
\end{aligned}$$

5.5.2 帕斯卡恒等式（Pascal's Identity）

帕斯卡恒等式

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{5.7}$$

证明

假设 $\binom{n+1}{k}$ 表示在长度为 $n+1$ 的二进制串中正好有 k 个 1 的二进制串数量，满足条件的二进制串可以分成两组：

- 以 1 开头的二进制串：因为 1 是开头，所以剩余部分中包含 $k-1$ 个 1，即 $\binom{n}{k-1}$。
- 以 0 开头的二进制串：因为 0 是开头，所以剩余部分中包含 k 个 1，即 $\binom{n}{k}$。

5.5.3 范德蒙德恒等式（Vandermonde's Identity）

范德蒙德恒等式

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k} \tag{5.8}$$

证明

假设 $\binom{m+n}{r}$ 表示从集合 A（m 个元素）和集合 B（n 个元素）中选取 r 个元素。可以从集合 A 中取 $r-k$ 个元素，再从集合 B 中取 k 个元素，一共有 $\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ 种取法，其中 $0 \leq k \leq r$。最后将所有满足条件的 k 进行累加，即可得到范德蒙德恒等式。

5.6 可重复的排列组合

5.6.1 可重复的排列

在许多计数问题中，元素可以被重复使用，例如一个字母或数字可以在车牌号中重复出现。

当元素允许重复时，使用乘法法则可以很容易地计算排列数。具有 n 个元素的集合允许重复的 r 排列数为 n^r。

Exercise 用大写字母可以构成多少个长度为 10 的字符串？

$$26^{10}$$

5.6.2 可重复的组合

当元素允许重复时，从 n 个元素的集合选取 r 个元素的组合数为

$$C(n+r-1,r)=\binom{n+r-1}{r} \tag{5.9}$$

Exercise 从包含 1 元、2 元、5 元、10 元、20 元、50 元和 100 元的钱袋中选取 5 张有多少种不同的取法？

$$C(7+5-1,5)=\binom{11}{5}=462$$

5.6.3 不可区别物体的排列

在计数问题中，某些元素可能是没有区别的，这种情况必须要避免重复计数。

假设有 n_1 个相同元素 1、n_2 个相同元素 2、. . . 、n_k 个相同元素 k，那么 n 个元素的不同排列数为

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!} \tag{5.10}$$

Exercise 由 4 个 A、3 个 B、7 个 C 和 1 个 D 能组成多少个不同的字符串？

$$\frac{15!}{4! \cdot 3! \cdot 7! \cdot 1!}$$

Chapter 6 概率

6.1 古典概型

6.1.1 古典概型

如果一个随机试验所包含的单位事件是有限的，且每个单位事件发生的可能性均相等，则这个随机试验叫做拉普拉斯试验，这种条件下的概率模型就叫古典概型。古典概型是概率论中最直观和最简单的模型，概率的许多运算规则，也首先是在这种模型下得到的。

单位事件的特点是两两互斥的，例如抛一枚质地均匀的硬币时，正面朝上和背面朝上不会同时出现。

在古典概型中，概率的计算公式为：

$$P(A) = \frac{A\text{包含的单位事件个数}m}{\text{单位事件的总数}n}$$

Exercise 掷两个质地均匀的骰子。

(1) 一共有多少种不同的结果？

$$6 \times 6 = 36$$

(2) 点数之和为 9 的结果有多少种？

一共有 4 种：$(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)$

(3) 点数之和为 9 的概率是多少？

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$