离散数学

Discrete Mathematics

极夜酱

目录

Chapter 1 逻辑

1.1 命题

1.1.1 命题（Proposition）

逻辑（logic）规则给出数学语句的准确含义，这些规则用来区分有效和无效的数学论证。逻辑不仅对理解数学推理十分重要，而且在计算机科学中有许多应用，逻辑可用于电路设计、程序构造、程序正确性证明等方面。

命题是逻辑的基本成分，一个命题是一个具有真值（truth value）的语句，命题可以为真也可以为假，但不能既为真又为假。

命题	**非命题**
I have a dog.	What day is today?
1 + 2 = 3	Shut the door!
Today is Wednesday.	1 + 2
It is snowing today.	x + 1 = 2

表 1.1: 命题与非命题

命题习惯上用字母 p, q, r, s 等来表示，如果一个命题是真命题，它的真值为真，用 T 表示；如果一个命题是假命题，它的真值为假，用 F 表示。

1.1.2 非运算符（NOT, Negation Operator）

非运算符 $\neg$ 只作用于一个命题，其作用是反转命题的真值。

真值表（truth table）可以给出命题真值之间的关系，在确定由简单命题组成的命题的真值时，真值表特别有用。

p	$\neg p$
T	F
F	T

表 1.2: NOT 真值表

Exercise $\neg p$

p: It snowed last night.

$\neg p$: It didn;t snow last night.

q: $2+3=6$

$\neg q$: $2+3\neq 6$

1.1.3 合取运算符（AND, Conjunction Operator）

命题 $p \wedge q$ 表示 p 并且 q，当 p 和 q 都为真时命题为真，否则为假。

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表 1.3: AND 真值表

Exercise $p \wedge q$

p: 今天是星期五。

q: 今天会下雨。

$p \wedge q$: 今天是星期五并且会下雨。

1.1.4 析取运算符（OR, Disjunction Operator）

命题 $p \vee q$ 表示 p 或 q，当 p 和 q 都为假时命题为假，否则为真。

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表 1.4: OR 真值表

Exercise $p \vee q$

p: 开关坏了。

q: 灯泡坏了。

$p \vee q$: 开关坏了或者灯泡坏了。

1.1.5 异或运算符（XOR, Exclusive Or）

命题 $p \oplus q$ 表示 p 和 q 的异或，当 p 和 q 中恰有一个为真时命题为真，否则为假。

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表 1.5: XOR 真值表

Exercise $p \oplus q$

p: 他现在在上海。

q: 他现在在北京。

$p \vee q$: 他现在在上海或北京。

Exercise 某地发生了一件谋杀案，警察通过排查确定杀人凶手必为 4 个嫌疑犯的一个，根据以下信息确定凶手。

A 说：不是我。

B 说：是 C。

C 说：是 D。

D 说：C 在胡说。

已知 3 个人说了真话，1 个人说的是假话。

```python
def main():
    for killer in ['A', 'B', 'C', 'D']:
        if (killer != 'A') + (killer == 'C') \
            + (killer == 'D') + (killer != 'D') == 3:
            print(killer)

if __name__ == "__main__":
    main()
```

运行结果 C

1.2 复合命题

1.2.1 复合命题（Compound Proposition）

使用非运算符和已定义的各联结词可以构造复合命题。小括号用于规定复合命题中多个逻辑运算符的操作顺序，为了减少所需的小括号数量，规定了各联结词的优先级。

优先级	**运算符**
1	$\neg$
2	$\wedge$ / $\vee$
3	$\rightarrow$ / $\leftrightarrow$

表 1.6: 运算符优先级

1.2.2 蕴含运算符（Implication Operator）

命题 $p \rightarrow q$ 表示 p 蕴含 q，在 p 为真而 q 为假时命题为假，否则为真。其中 p 称为前提，q 称为结论。

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

表 1.7: 蕴含真值表

表示 $p \rightarrow q$ 的术语有很多种，常见的有：

- If p, then q.
- p only if q.
- q is necessary for p.

Exercise $p \to q$

p：我去看电影。

q：我买奶茶。

$p \to q$：如果我去看电影，那么我会买奶茶。

由 $p \to q$ 可以构造出几个相关的蕴含：

1. $q \to p$ 称为 $p \to q$ 的逆命题（converse）。
2. $\neg q \to \neg p$ 称为 $p \to q$ 的逆否命题（contrapositive）。

Exercise 逆命题与逆否命题

p：今天是星期四。

q：我今天有考试。

$p \to q$：如果今天是星期四，那么我今天有考试。

$q \to p$：如果我今天有考试，那么果今天是星期四。

$\neg q \to \neg p$：如果我今天没有考试，那么今天不是星期四。

1.2.3 双向蕴含（Biconditional Operation）

命题 $p \leftrightarrow q$ 表示 p 双向蕴含 q，在 p 和 q 有相同的真值时命题为真，否则为假。

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

表 1.8: 双向蕴含真值表

双蕴含的真值表与异或的真值表正好相反，因此 $p \leftrightarrow q$ 与 $\neg(p \oplus q)$ 等价。

1.3 逻辑等价

1.3.1 逻辑等价（Logical Equivalence）

两个不同的复合命题可能拥有完全相同的真值，则称这两个命题在逻辑上是等价的。如果无论复合命题中各个命题的真值是什么，复合命题的真值总是为真，这样的复合命题称为永真式（tautology）。如果真值永远为假的复合命题称为矛盾（contradiction）。

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

表 1.9: 逻辑等价

如果复合命题 s 和是 r 逻辑等价的，可表示为 $s \equiv r$。只有当 $s \leftrightarrow r$ 是永真式时，s 和 r 才是逻辑等价的。

Exercise 使用真值表证明 $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T
F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	T	F

1.3.2 逻辑等价定理

幂等律 Idempotent Laws

$$p \wedge p \equiv p \tag{1.1}$$

$$p \vee p \equiv p \tag{1.2}$$

恒等律 Identity Laws

$$p \wedge T \equiv p \tag{1.3}$$

$$p \vee F \equiv p \tag{1.4}$$

支配律 Domination Laws

$$p \vee T \equiv T \tag{1.5}$$

$$p \wedge F \equiv F \tag{1.6}$$

双非律 Double Negation Law

$$\neg(\neg p) \equiv p \tag{1.7}$$

交换律 Commutative Laws

$$p \wedge q \equiv q \wedge p \tag{1.8}$$

$$p \vee q \equiv q \vee p \tag{1.9}$$

结合律 Associative Laws

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \tag{1.10}$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \tag{1.11}$$

分配律 Distributive Laws

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \tag{1.12}$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \tag{1.13}$$

德摩根律 De Morgan's Laws

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \tag{1.14}$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \tag{1.15}$$

吸收律 Absorption Laws

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \tag{1.16}$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p \tag{1.17}$$

条件恒等

$$p \to q \equiv \neg p \vee q \tag{1.18}$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \tag{1.19}$$

Exercise 证明 $(p \vee q) \to p$ 永真

$$\begin{aligned}
&(p \vee q) \to p \\
&\equiv \neg(p \wedge q) \vee p \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee p \\
&\equiv (\neg q \vee \neg p) \vee p \\
&\equiv \neg q \vee (\neg p \vee p) \\
&\equiv \neg q \vee T \\
&\equiv T
\end{aligned}$$

1.4 谓词与量词

1.4.1 谓词（Predicate）

命题逻辑并不能表达数学语言和自然语言中所有语句的确切含义。在数学表达式和计算机程序中经常可以看到含有变量的语句，例如 $x > 3$、$x = y + 3$、程序 x 正在运行等。当变量值未指定时，这些语句既不为真也不为假。

利用 $P(x)$ 可以表示语句，其中 x 是变量，语句 $P(x)$ 可以说是命题函数 P 在 x 的值。一旦给变量 x 赋一个值，语句 $P(x)$ 就称为命题并具有真值。

通常使用大写字母 P, Q, R 等表示谓词，小写字母 x, y, z 等表示变量。

Exercise 谓词

谓词	**真值**
$P(x) : x + 3 = 6$	$P(3)$ 为 True
$Q(x, y) : x = y + 2$	$Q(4, 1)$ 为 False

1.4.2 量词（Quantifier）

量词用量化表示在何种程度上谓词对于一定范围的个体成立。量词有全称量词（universal quantifier）和存在量词（existential quantifer）。

全称量词 $\forall$ 表示 all。$\forall_x P(x)$ 是一个命题，当范围内所有的 x 都能使语句 $P(x)$ 为真时，命题为真。

$$\forall_x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_k)$$

Exercise 全称量词

假设 x 表示全班所有学生，$P(x)$ 表示 x 完成了作业。

$\forall_x P(x)$：全班所有学生都完成了作业。

存在量词 $\exists$ 表示 exists。$\exists_x P(x)$ 是一个命题，当范围内存在至少一个 x 能够语句 $P(x)$ 为真时，命题为真。

$$\exists_x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_k)$$

Exercise 存在量词

假设 x 表示全班所有学生，$P(x)$ 表示 x 完成了作业。

$\exists_x P(x)$：班里存在有一个学生完成了作业。

Exercise 嵌套量词

假设 x 表示某个人，$P(x)$ 表示有父母。

$\forall_x P(x)$：所有人都有父母。

$\exists_x \neg P(x)$：存在至少有一个人没有父母。

$\exists_x \exists_y (P(x) \wedge P(y))$：至少存在一个人 x 和一个人 y 有父母。

Exercise $P(x)$：x 是偶数，$Q(x)$：x 能被 3 整除，$x \in \mathbb{Z}^+$

语句	真值
$\exists_x (P(x) \wedge Q(x))$	True
$\forall_x (P(x) \to \neg Q(x))$	False

1.4.3 全称量词的否定

否定运算符可以使用在全称量词上。

$$\neg \forall_x P(x) \equiv \exists_x \neg P(x) \tag{1.20}$$

$$\neg \exists_x P(x) \equiv \forall_x \neg P(x) \tag{1.21}$$

Exercise 全称量词的否定

$P(x)$: x will pass the course (x is a student).

$\neg\forall_x P(x)$: Not all students will pass the course.

$\forall_x \neg P(x)$: No student will pass the course.

$\neg\exists_x P(x)$: There does not exist a student that will pass the course.

$\exists_x \neg P(x)$: There exists a student that will not pass the course.

1.5 证明

1.5.1 证明（Proof）

证明方法非常重要，不仅因为它们可用于证明数学定理，而且在计算机科学中也有许多应用，包括验证程序正确性、建立安全的操作系统、人工智能领域做推论等。证明就是建立定理真实性的有效论证。

证明定理有很多方法：

1. 直接证明法（direct proof）

   证明 如果 n 是奇数，那么 n^2 也是奇数，$n \in \mathbb{Z}$。

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

2. 反证法（proof by contrapositive）：由于 $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$，因此可以通过证明原命题的逆否命题来反证原命题。

   证明 如果 xy 是偶数，那么 x 是偶数或 y 是偶数，$x, y \in \mathbb{Z}$。
   逆否命题：如果 x 是奇数并且 y 是奇数，那么 xy 是奇数，$x, y \in \mathbb{Z}$。

$$\begin{aligned} xy &= (2m+1)(2n+1) \\ &= 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2(2mn + m + n) + 1 \end{aligned}$$

1.6 布尔代数

1.6.1 布尔代数（Boolean Algebra）

计算机和其它电子设备中的电路都有输入和输出，输入是 0 或 1，输出也是 0 或 1。电路可以用任何具有两个不同状态的基本元件来构造，例如开关和光学装置就是这样的原件，开关可位于开或关的位置，光学装置可能是点亮或未点亮。18 世纪，乔治 · 布尔（George Boole）给出了逻辑的基本规则。

电路的操作可以用布尔函数来定义，这样的布尔函数对任意一组输入都能指出其输出的值。

布尔代数提供的是集合 $\{0,1\}$ 上的运算和规则，布尔代数的规则类似于命题逻辑的规则。1 相当于逻辑中的真，0 相当于逻辑中的假。

布尔代码运算主要有三种：

1. 补（complement）

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

2. 布尔积（boolean multiplication）

x	y	$x \cdot y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3. 布尔和（boolean addition）

x	y	$x+y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exercise 当 $x=y=1$，$w=z=0$ 时，

$x \cdot y + (w+z) = 1 \cdot 1 + (0+0) = 1 + 0 = 1$

$x \cdot \overline{y} + z \cdot \overline{(w+z)} = 1 \cdot \overline{1} + 0 \cdot \overline{(0+0)} = 0 + 0 = 0$

$x \cdot \overline{y} + \overline{(\overline{x} + y + \overline{yz})} = 1 \cdot \overline{1} + \overline{(\overline{1} + 1 + \overline{1 \cdot 0})} = 0 + \overline{1} = 0$

1.6.2 布尔代数定理

幂等律 Idempotent Laws

$$x \cdot x = 0 \tag{1.22}$$

$$x + x = x \tag{1.23}$$

恒等律 Identity Laws

$$x \cdot 1 = x \tag{1.24}$$

$$x + 0 = x \tag{1.25}$$

支配律 Domination Laws

$$x \cdot 0 = 0 \tag{1.26}$$

$$x + 1 = 1 \tag{1.27}$$

双非律 Double Negation Law

$$\overline{\overline{x}} = x \tag{1.28}$$

交换律 Commutative Laws

$$x \cdot y = y \cdot x \tag{1.29}$$

$$x + y = y + x \tag{1.30}$$

结合律 Associative Laws

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \tag{1.31}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \tag{1.32}$$

分配律 Distributive Laws

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \tag{1.33}$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \tag{1.34}$$

德摩根律 De Morgan's Laws

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y} \tag{1.35}$$

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y} \tag{1.36}$$

吸收律 Absorption Laws

$$x \cdot (x + y) = x \tag{1.37}$$

$$x + (x \cdot y) = x \tag{1.38}$$

证明 $xy + x\overline{y} = x$

$$xy + x\overline{y} \tag{1.39}$$
$$= x \cdot (y + \overline{y}) \tag{1.40}$$
$$= x \cdot 1 \tag{1.41}$$
$$= x \tag{1.42}$$

1.6.3 布尔函数（Boolean Function）

含有 n 个变量的布尔函数能够构造出 2^n 行的输入输出表。

Exercise 计算 $F(x, y, z) = xy + \overline{z}$

x	y	z	$F(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

1.6.4 NAND 与 NOR

NAND 运算符用 $\uparrow$ 表示 Not And：

$$x \uparrow y = \overline{x \cdot y}$$

NOR 运算符用 $\downarrow$ 表示 Not Or：

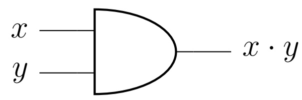
$$x \downarrow y = \overline{x + y}$$

1.7 逻辑门电路

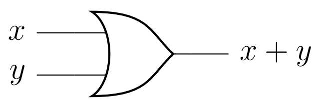
1.7.1 逻辑门电路（Logical Gate Circuit）

基础的逻辑门主要有三种:

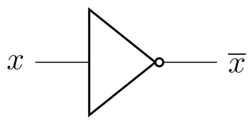
1. 与门（AND gate）



2. 或门（OR gate）:

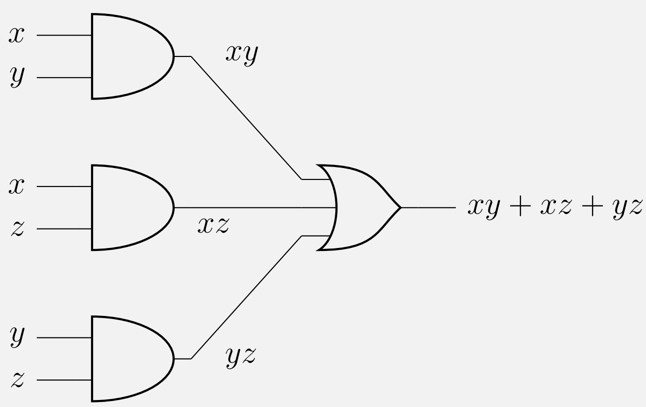


3. 非门（NOT gate）:



Exercise 设计一个投票表决电路，三个人中有两人赞成即通过。赞成票为 1，否决表为 0。

$$F(x, y, z) = xy + xz + yz$$



Chapter 2 集合

2.1 集合

2.1.1 集合（Set）

集合是对象的唯一的、无序的聚集，通常一个集合中的对象都具有相似的性质。对象也称为集合的元素（element）或成员（member）。

通常用大写字母表示集合，小写字母表示元素。$a \in A$ 表示是 a 集合 A 中的元素，$a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 中的元素。

使用花名册方法（roster method）列出集合中的元素，可以用于描述集合。

> **Exercise** 花名册方法
>
> 小写元音字母集合 $V = \{a, e, i, o, u\}$
>
> 小于 10 的正奇数集合 $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
>
> 小于 100 的非负整数集合 $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 99\}$

集合构造器（set builder）通过描述元素具有的形式来描述集合。

> **Exercise** 集合构造器
>
> 小于 10 的正整数 $A = \{x \mid x < 10\}$

一些常用的特殊符号可用于描述指定的集合：

符号	含义
$\mathbb{N}$	自然数集 $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	整数集 $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Z}^+$	正整数集 $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Q}$	有理数集 $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\ (q \neq 0)\}$
$\mathbb{Q}^+$	正有理数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}^+$	正实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$\emptyset$	空集 $\{\}$

2.1.2 基数（Cardinality）

基数表示有限集合中元素的个数，集合 A 的基数记为 $|A|$。

Exercise 基数

英语字母集合 A，$|A| = 26$

空集 $\emptyset$，$|\emptyset| = 0$

2.1.3 韦恩图（Venn Diagram）

集合还可以使用韦恩图来表示。

全集（universal set）包含所研究问题中所有的元素，用符号 U 表示。假设 A 是一个集合，由全集 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为 A 的补集，表示为 $\overline{A}$。

假设有两个集合 A 和 B，如果 A 中的所有元素都在 B 中，那么 A 就是 B 的子集，表示为 $A \subseteq B$。如果 A 中有一个元素不在 B 中，那么 A 就不是 B 的子集，表示为 $A \nsubseteq B$。只有当两个集合互相为对方的子集时，那么这两个集合相等，即：

$$A = B \text{ iff } A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A$$

如果 $A \subseteq B$，并且 B 中有一个元素不是 A 的元素，那么称 A 是 B 的真子集（proper subset），表示为 $A \subset B$。

2.1.4 幂集（Power Set）

一个集合中是可以包含另一个集合的，如 $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$。需要注意，$1 \neq \{1\} \neq \{\{1\}\}$。

幂集用于表示一个集合所有子集的集合，集合 A 的幂集表示为 $P(A)$。

Exercise 计算 $A = \{1, 2, 3\}$ 的幂集

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

如果集合 A 的基数为 n，那么 A 的幂集的基数为 2^n，即 $|P(A)| = 2^n$。

2.2 集合运算

2.2.1 交集（Intersection）

假设 A 和 B 是两个集合，由所有属于 A 并且属于 B 的元素所组成的集合，称为 A 与 B 的交集，表示为 $A \cap B$。

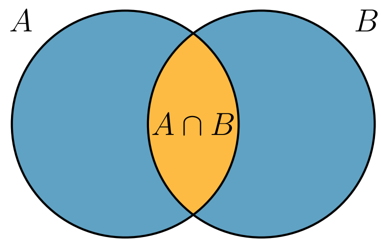


图 2.1: 交集

如果两个集合没有公共元素，那么它们的交集为空集。

2.2.2 并集（Union）

假设 A 和 B 是两个集合，由它们所有元素合并在一起组成的集合，称为 A 与 B 的并集，表示为 $A \cup B$。

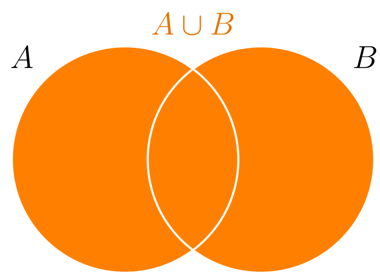


图 2.2: 并集

2.2.3 差集（Difference）

假设 A 和 B 是两个集合，由属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集，表示为 $A - B$。

差集运算不满足交换律，即 $A - B \neq B - A$。

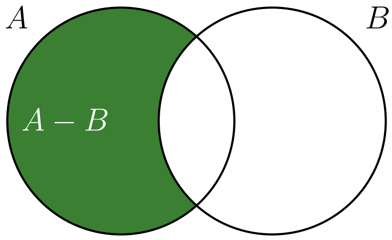


图 2.3: 差集 $A - B$

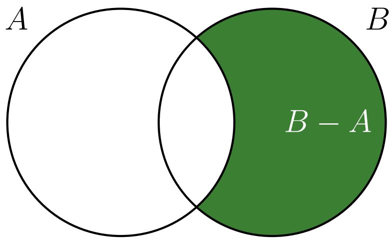


图 2.4: 差集 $B - A$

2.3 集合恒等式

2.3.1 集合恒等式

集合恒等式可以直接由对应的逻辑等价式证明。

幂等律 Idempotent Laws

$$A \cap A = A \tag{2.1}$$

$$A \cup A = A \tag{2.2}$$

恒等律 Identity Laws

$$A \cap U = A \tag{2.3}$$

$$A \cup \emptyset = A \tag{2.4}$$

支配律 Domination Laws

$$A \cap \emptyset = \emptyset \tag{2.5}$$

$$A \cup U = U \tag{2.6}$$

双非律 Double Negation Law

$$\overline{\overline{A}} = A \tag{2.7}$$

交换律 Commutative Laws

$$A \cap B = B \cap A \tag{2.8}$$

$$A \cup B = B \cup A \tag{2.9}$$

结合律 Associative Laws

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{2.10}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{2.11}$$

分配律 Distributive Laws

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{2.12}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{2.13}$$

德摩根律 De Morgan's Laws

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{2.14}$$

吸收律 Absorption Laws

$$A \cap (A \cup B) = A \tag{2.15}$$

$$A \cup (A \cap B) = A \tag{2.16}$$

证明 $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$

$$\begin{aligned}
&\overline{A \cup (B \cap C)} \\
&= \overline{A} \cap \overline{B \cap C} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} \\
&= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}
\end{aligned}$$

Exercise 一共有 40 个学生，有 3 门课程可供学生选择（C 语言、离散数学、软件工程）。

7 人没有选任何课程；

16 人选软件工程；

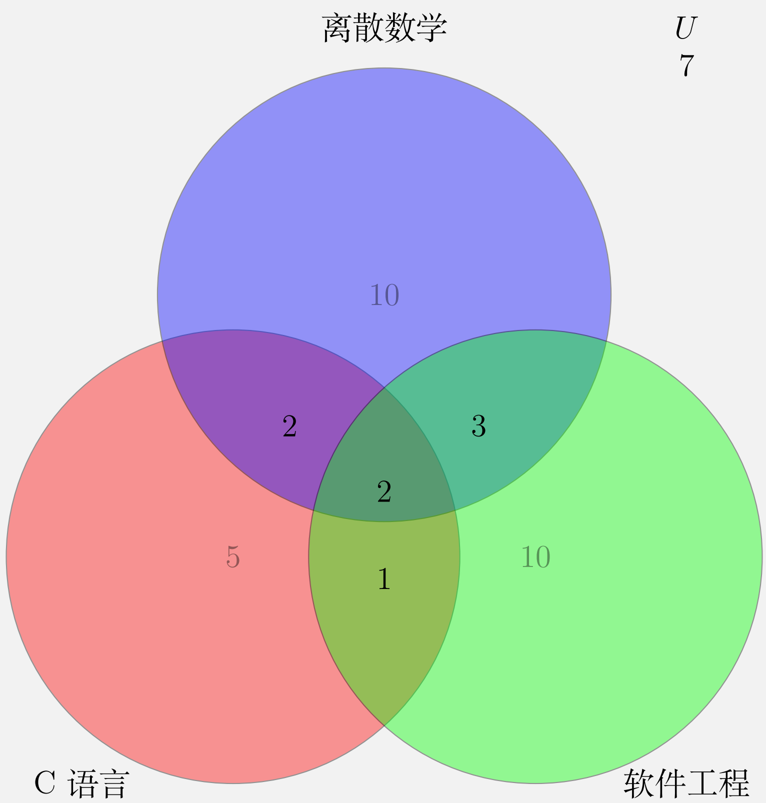
10 人选 C 语言；

5 人同时选离散数学和软件工程；

4 人同时选离散数学和 C 语言；

3 人同时选软件工程和 C 语言；

2 人同时选离散数学、软件工程和 C 语言。



2.4 笛卡尔积

2.4.1 元组（Tuple）

有时候元素聚集中次序是很重要的，由于集合是无序的，所以就需要一种不同的结构表示有序的聚集，这就是有序 n 元组（ordered-n-tuple）。

有序 n 元组 $(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$ 是以 a_1 为第 1 个元素，a_2 为第 2 个元素，a_n 为第 n 个元素的有序聚集。

只有两个有序 n 元组的每一对对应的元素都相等，那么这两个有序 n 元组是相等的，即：

$$(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n) = (b_1,\ b_2,\ ...,\ b_n) \text{ iff } i = 1,\ 2,\ ...,\ n$$

需要注意，$(a,\ b)$ 与 $(b,\ a)$ 不相等，除非 $a = b$。

2.4.2 笛卡尔积（Cartesian Product）

假设有两个集合 A 和 B，A 和 B 的笛卡尔积用 $A \times B$ 表示，笛卡尔积是所有序偶 $(a,\ b)$ 的集合，其中 $a \in A$ 且 $b \in B$。

$$A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A \land b \in B\}$$

笛卡尔积 $A \times B$ 和 $B \times A$ 是不相等的，除非 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$ 或 $A = B$。

Exercise 笛卡尔积

学生集合 $S = \{s1,\ s2\}$

课程集合 $C = \{c1,\ c2,\ c3\}$

$S \times C = \{(s1,\ c1),\ (s1,\ c2),\ (s1,\ c3),\ (s2,\ c1),\ (s2,\ c2),\ (s2,\ c3)\}$

笛卡尔积 $S \times C$ 表示学生选课的所有可能情况

Exercise 笛卡尔积 $A \times B \times C$

$A = \{0,\ 1\}$

$B = \{1,\ 2\}$

$C = \{0,\ 1,\ 2\}$

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{&(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,2,0),(0,2,1),(0,2,2), \\ &(1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2)\} \end{aligned}$$

一个集合与自身的笛卡尔积，如 $A \times A$ 可表示为 A^2。

Exercise 笛卡尔积 A^2

$A = \{1,\ 2\}$

$A^2 = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)\}$

Chapter 3 函数

3.1 函数

3.1.1 函数（Function）

函数在数学和计算机科学中的概念非常重要，在离散数学中函数用于定义像序列和字符串这样的离散结构。

利用一个函数 f，可以将一个值 $x \in \mathbb{R}$ 映射（mapping）到一个特定的值 $y = f(x)$，$y \in \mathbb{R}$ 上。

假设有两个非空集合 X 和 Y，从 X 到 Y 的函数 f 是指对于 X 的每个元素恰好都对应 Y 的一个元素，即 $f(x) = y$，$x \in X$，$y \in Y$，那么就写成 $f : X \to Y$。

集合 X 被称为函数 f 的定义域（domain），集合 Y 被称为函数 f 的陪域（co-domain）。

如果 $f(x) = y$，那么 y 是 x 在函数 f 下的像（image），x 是 y 在函数 f 下的原像（pre-image）。函数 f 的值域（range）是集合 X 中所有像的集合。

当两个函数 f 和 g 有相同的定义域和陪域，并且对于定义域中所有元素 x 都满足 $f(x) = g(x)$，那么函数 f 和 g 相等，表示为 $f = g$。

Exercise 判断是否为函数

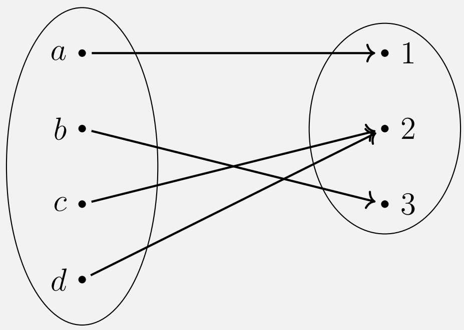


图 3.1: 函数

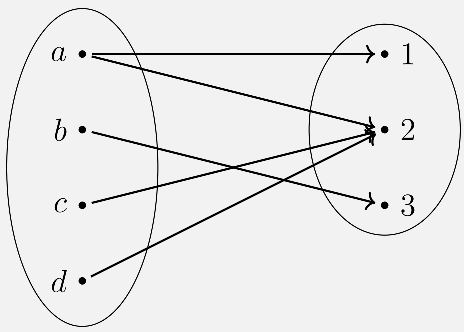
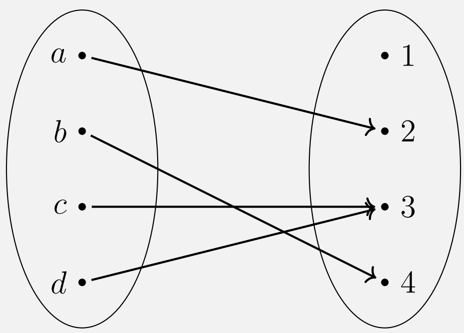


图 3.2: 非函数

Exercise



是否为函数：是

定义域（domain）：a，b，c，d

陪域（co-domain）：1，2，3，4

值域（range）：2，3，4

3.2 取整函数

3.2.1 上取整函数（Ceiling Function）

取整函数包括上取整和下取整，可以将实数映射到整数（$\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$），它们以不同的方式将实数近似到相邻的整数。

上取整函数将实数 x 向上取到大于或等于 x 的最小整数，表示为 $\lceil x \rceil$。

Exercise 上取整函数

$\lceil 3.2 \rceil = 4$

$\lceil 2.6 \rceil = 3$

$\lceil -0.5 \rceil = 0$

3.2.2 下取整函数（Floor Function）

下取整函数将实数 x 向下取到小于或等于 x 的最大整数，表示为 $\lfloor x \rfloor$。

Exercise 下取整函数

$\lfloor 3.2 \rfloor = 3$

$\lfloor 5.9 \rfloor = 5$

$\lfloor -0.5 \rfloor = -1$

3.3 函数分类

3.3.1 一对一函数（One-to-one）/ 单射函数（Injection）

一对一函数 / 单射函数是指对于函数 f 的定义域中所有的 a 和 b，如果 $a \neq b$，那么 $f(a) \neq f(b)$。

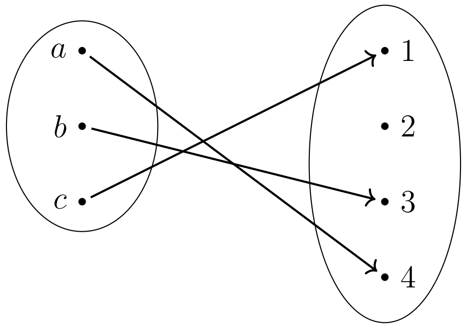


图 3.3: 一对一函数 / 单射函数

Exercise 一对一函数 / 单射函数

$f(x) = x + 1$ 是一对一函数。

$f(x) = x^2$ 不是一对一函数，因为 $f(1) = f(-1) = 1$。

3.3.2 映上函数（Onto）/ 满射函数（Surjection）

映上函数 / 满射函数是指对于函数 $f : A \to B$，每个 $b \in B$ 都有元素 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$。

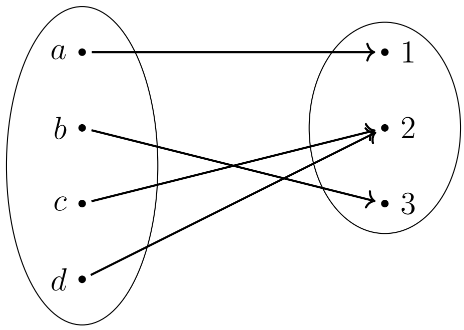


图 3.4: 映上函数 / 满射函数

Exercise 映上函数 / 满射函数

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x+1$ 是映上函数。

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x^2$ 不是映上函数，因为没有整数 x 使 $x^2=-1$。

3.3.3 一一对应函数 / 双射函数（Bijection）

如果一个函数既是一对一函数又是映上函数，那么这个函数就被称为一一对应函数 / 双射函数。

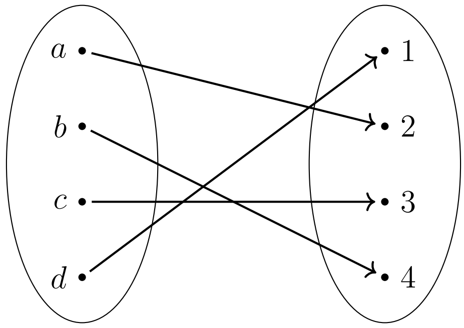


图 3.5: 一一对应函数 / 双射函数

Exercise 一一对应函数 / 双射函数

f 是从 $\{a, b, c, d\}$ 到 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的函数，定义 $f(a)=4$, $f(b)=2$, $f(c)=1$, $f(d)=3$。

函数 f 是单射函数，因为没有两个值映射到相同的函数值。

函数 f 是满射函数，因为陪域的个数与值域的个数相同。

因此，函数 f 是双射函数。

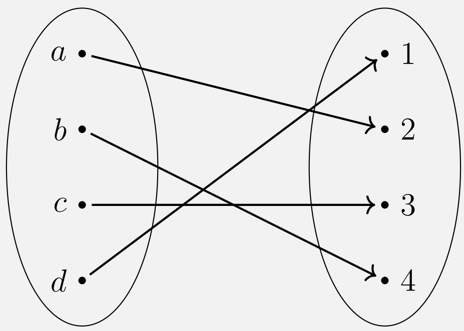
3.4 反函数

3.4.1 反函数（Inverse Function）

假设有一个从集合 A 到集合 B 的双射函数 f。由于 f 是满射函数，所以 B 中的每个元素都是 A 中某些元素的像；又由于 f 还是单射函数，所以 B 的每个元素都是 A 中唯一一个元素的像。

于是，通过把 f 的对应关系颠倒，获得的从 B 到 A 的新函数被称为 f 的反函数，用 f^{-1} 表示。当 $f(a) = b$ 时，$f^{-1}(b) = a$。需要注意，不要将 f^{-1} 与 $\frac{1}{f}$ 混淆。

Exercise 反函数



是否有反函数：是

$f^{-1}(2) = a$

$f^{-1}(1) = 1$

Exercise 计算 $f(x) = x + 3$ 的反函数

$f^{-1}(x) = x - 3$

3.5 合成函数

3.5.1 合成函数（Composition Function）

假设 g 是从集合 A 到集合 B 的函数，f 是从集合 B 到集合 C 的函数。函数 f 和 g 的合成，记作 $f \circ g$。

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

函数合成的顺序很重要，$f \circ g$ 与 $g \circ f$ 并不相等。

Exercise 合成函数

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，$f(x) = x^3$

$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，$g(x) = x + 2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + 2)^3$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^3 + 2$

3.5.2 恒等函数（Identity Function）

如果一个从集合 A 到集合 B 的函数 f 有反函数，那么 f 与 f^{-1} 的合成函数得到的是恒等函数。

如果 $f(a) = b$，那么 $f^{-1}(b) = a$。

$$(f \circ f^{-1})(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$$

3.6 指数函数与对数函数

3.6.1 指数函数（Exponential Function）

指数函数的定义为 $y = a^x$ $(a > 0 \mid a \neq 1)$，其中 a 称为底数（base），x 称为指数（exponent）。

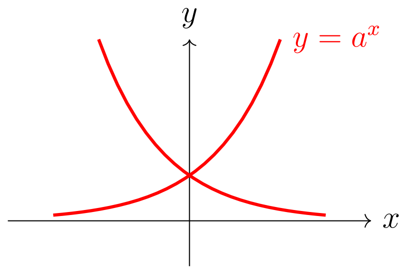


图 3.6: 指数函数

指数函数

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{a^{-x}} = a^x \tag{3.2}$$

$$(ab)^x = a^x b^x \tag{3.3}$$

$$(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x} \tag{3.4}$$

$$a^{kx} = (a^k)^x = (a^x)^k \tag{3.5}$$

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{3.6}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{3.7}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \tag{3.8}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \tag{3.9}$$

Exercise 指数函数

$(6^{2k})^3 = 6^{6k}$

$6^{k^2} \times 6 = 6^{k^2+1}$

$\frac{3^k}{9} = \frac{3^k}{3^2} = 3^{k-2}$

$3^k \times 27 = 3^k \times 3^3 = 3^{k+3}$

3.6.2 对数函数（Logarithm Function）

对于函数 $f: \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \to \{1,\ 4,\ 8,\ 16\}$，$f(x) = 2^x$，指数函数是双射函数，因此它是有反函数的。

对数函数是指数函数的反函数，对数函数的定义为 $y = log_a x\ (a > 0 \mid a \neq 1)$，其中 a 称为底数。

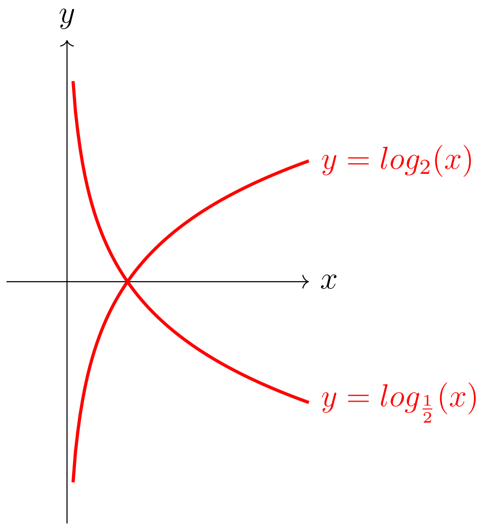


图 3.7: 对数函数

对数函数

$$log_a(a^x) = x \tag{3.10}$$

$$a^{log_a(x)} = x \tag{3.11}$$

$$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y) \tag{3.12}$$

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y) \tag{3.13}$$

$$log_a(x^n) = nlog_a(x) \tag{3.14}$$

$$log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)} \tag{3.15}$$

Exercise 对数函数

$log_5k + log_5 2 = log_5 2k$

$log_2 5^2 = 2 \times log_2 5$

$\frac{log_3 k^2}{log_3 25} = \frac{2 \times log_3 k}{log_3 5^2} = \frac{2 \times log_3 k}{2 \times log_3 5} = log_5 k$

Chapter 4 数论

4.1 进制转换

4.1.1 进制

日常生活中都用十进制(decimal)来表示整数,十进制数由 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这 10 个字符组成。一个十进制整数的第 k 位的值可以由 10^{k-1} 计算得到。

Exercise 十进制

$$\begin{aligned}256 &= 200 + 50 + 6 \\ &= 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0\end{aligned}$$

二进制（binary）、八进制（octal）、十六进制（hexadecimal）也是非常常用的表示法，例如计算机通常用二进制来做算术运算，而用八进制或十六进制来表示字符。

4.1.2 进制转换

一个 b 进制的正整数 n 可以唯一地构造展开式：

$$n = a^k \times b^k + a_{k-1} \times b^{k-1} + \cdots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$$

Exercise b 进制转十进制

$(1011)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (11)_{10}$

$(21022)_3 = 2 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^0 = (197)_{10}$

十进制	二进制	八进制	十六进制
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

表 4.1: 进制转换

十进制转 b 进制还可以使用短除法的方式。

Exercise 十进制转四进制

$$
\begin{array}{r|l}
4 & \underline{637} \quad \text{remainder } 1 \\
4 & \underline{159} \quad \text{remainder } 3 \\
4 & \underline{39} \quad \text{remainder } 3 \quad (637)_{10} = (21331)_4 \\
4 & \underline{9} \quad \text{remainder } 1 \\
4 & \underline{2} \quad \text{remainder } 2
\end{array}
$$

Exercise 十进制转二进制

$$
\begin{array}{r|l l}
2 & \underline{637} & \text{remainder } 1 \\
2 & \underline{318} & \text{remainder } 0 \\
2 & \underline{159} & \text{remainder } 1 \\
2 & \underline{79} & \text{remainder } 1 \\
2 & \underline{39} & \text{remainder } 1 \\
2 & \underline{19} & \text{remainder } 1 \\
2 & \underline{9} & \text{remainder } 1 \\
2 & \underline{4} & \text{remainder } 0 \\
2 & \underline{2} & \text{remainder } 0 \\
2 & \underline{1} & \text{remainder } 1
\end{array}
\quad (637)_{10} = (1001111101)_2
$$

Exercise 十进制转八进制

$$
\begin{array}{r|l l}
8 & \underline{1000} & \text{remainder } 0 \\
8 & \underline{125} & \text{remainder } 5 \\
8 & \underline{15} & \text{remainder } 7 \\
8 & \underline{1} & \text{remainder } 1
\end{array}
\quad (1000)_{10} = (1750)_8
$$

4.2 素数

4.2.1 素数（Prime Numbers）

基于整除性的一个重要概念就是素数，素数是大于 1 的且不能被 1 和它自身以外的正整数整除的整数。素数是现代密码学中必不可少的一部分，密码学中的大素数就用在信息加密的某些方法中。

> **Exercise** 判断素数
>
> 7 是素数，因子有 1 和 7。
>
> 9 是合数，因为 9 能被 3 整除。

每个大于 1 的整数都可以唯一地写成多个素数的乘积。

> **Exercise** 素因子分解
>
> $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$
>
> $999 = 3 \times 3 \times 3 \times 37 = 3^3 \times 37$
>
> $1024 = 2^{10}$

如果 n 是一个合数，那么 n 必有一个素因子小于或等于 $\sqrt{n}$。

> **Exercise** 证明 101 是素数
>
> 不超过 $\sqrt{101}$ 的素数只有 $2, 3, 5, 7$，因为 101 不能被 $2, 3, 5, 7$ 整除，所以 101 是素数。

```python
import math

def is_prime(num):
    for i in range(2, int(math.sqrt(num)) + 1):
        if num % i == 0:
            return False
    return True

def main():
```

```python
    print(is_prime(13))
    print(is_prime(18))

if __name__ == "__main__":
    main()
```

埃拉托斯特尼筛法（Sieve of Eratosthenes）可以用来寻找不超过一个给定整数的所有素数。

步骤:

1. 建立包含所有给定整数以内的表格
2. 从 $i = 2$ 开始
3. 移除所有整数 $n\%i == 0$（除 i 以外）
4. $i = i + 1$
5. 重复第 3 步和第 4 步

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

表 4.2: 埃拉托斯特尼筛法

4.3 序列

4.3.1 序列（Sequence）

序列是一种用来表示有序列表的离散结构。例如 1，2，3，5，8 是一个含有五项的序列，而 1，3，9，27，81，... 是一个无穷序列。序列可以用记号 $\{a_n\}$ 表示。

- 递增序列（increasing sequence）：一个序列任意相邻的两项满足 $a_k < a_{k+1}$
- 非递减序列（non-decreasing sequence）：一个序列任意相邻的两项满足 $a_k \leq a_{k+1}$
- 递减序列（decreasing sequence）：一个序列任意相邻的两项满足 $a_k > a_{k+1}$
- 非递增序列（non-increasing sequence）：一个序列任意相邻的两项满足 $a_k \geq a_{k+1}$

> **Exercise** 序列
>
> $\{a_n\}$，$a_n = \frac{1}{n}$：1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，...
>
> $\{b_n\}$，$b_n = 2^n$：1，2，4，8，16，32，...

4.3.2 算术级数（Arithmetic Sequence）

算术级数也称等差级数，序列形式如下：

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+nd,\ \ldots\ (a, d \in \mathbb{R})$$

> **Exercise** 算术级数
>
> $\{a_n\}$，$a_n = -1 + 4n$：-1，3，7，11，...
>
> $\{b_n\}$，$b_n = 7 - 3n$：7，4，1，-2，...

4.3.3 几何级数（Geometric Sequence）

几何级数也称等比级数，序列形式如下：

$$a,\ ar,\ ar^2,\ \dots,\ ar^n,\ \dots,\ (a, r \in \mathbb{R})$$

Exercise 几何级数

$\{a_n\},\ a_n = (-1)^n:\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \dots$

$\{b_n\},\ b_n = -2 \times 5^n:\ 2,\ 10,\ 50,\ 250,\ 1250,\ \dots$

$\{c_n\},\ c_n = 6 \times (\frac{1}{3})^n:\ 6,\ 2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{27},\ \dots$

4.4 递推关系

4.4.1 递推（Recurrence）

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与它前一项的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推方程。

算术级数的递推关系：

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ a_n &= a_{n-1} + d \end{aligned}$$

几何级数的递推关系：

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ a_n &= a_{n-1} \times r \end{aligned}$$

Exercise 银行储蓄账户上有 10000 元，年利率为 5.8%，7 年后账户中将有多少钱？

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + 0.058 P_{n-1} \\ &= (1.058) P_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_0 = 10000 \\ & P_1 = (1.058) P_0 \\ & P_2 = (1.058) P_1 = (1.058)^2 P_0 \\ & \dots \\ & P_7 = (1.058) P_6 = (1.058)^7 P_0 \approx 14838.83 \end{aligned}$$

4.4.2 斐波那契数列（Fibonacci Sequence）

斐波那契数列 f_0，f_1，f_2，$\dots$ 的递推公式为：

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ f(n-1) + f(n-2) & n > 3 \end{cases}$$

斐波那契数列的通项公式为:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

斐波那契数列（递归）

```
int fibonacci(int n) {
    if(n == 1 || n == 2) {
        return 1;
    }
    return fibonacci(n-2) + fibonacci(n-1);
}
```

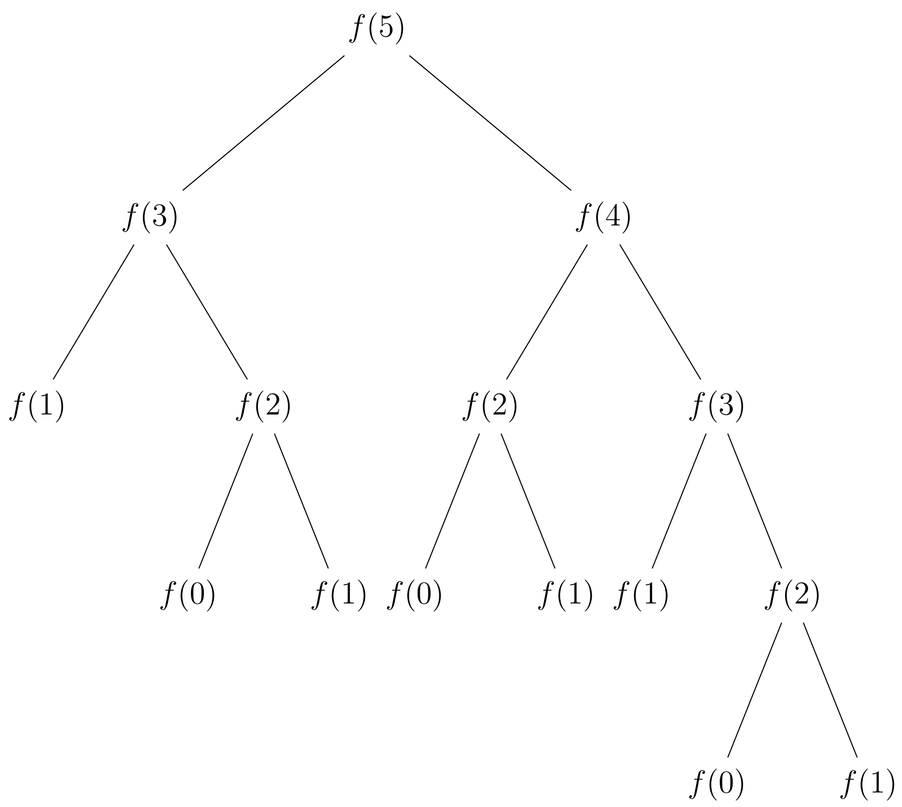


图 4.1: 递归树

斐波那契数列（迭代）

```
int fibonacci(int n) {
    int f[n];
    f[0] = f[1] = 1;
    for(int i = 2; i < n; i++) {
        f[i] = f[i-2] + f[i-1];
    }
    return f[n-1];
}
```

4.5 求和

4.5.1 求和（Summation）

求和符号 $\sum$ 可以用于表示序列中所有项的累加和。

$$\sum_{i=lower}^{upper} a_i$$

Exercise 求和

$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = 5050$

$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

$\sum_{k=4}^{6} (-1)^k = (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 = 1 - 1 + 1 = 1$

4.5.2 双重求和

很多情况下需要使用双重求和，比如在计算机程序中嵌套循环的分析中。

计算双重求和的方法是先展开内层求和，再继续计算外层求和。

Exercise 双重求和

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij \\
&= \sum_{i=1}^{4} (i + 2i + 3i) \\
&= \sum_{i=1}^{4} 6i \\
&= 6 + 12 + 18 + 24 \\
&= 60
\end{aligned}$$

4.6 数学归纳法

4.6.1 数学归纳法（Mathematical Induction）

数学归纳法是一种数学证明方法，通常被用于证明某个给定命题在一个给定范围内成立。

数学归纳法分为三个步骤：

1. 归纳基础
2. 归纳假设
3. 归纳递推

证明 $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$，$n \in \mathbb{Z}^{+}$

1. 归纳基础：当 $n = 1$，
   $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} = 1$
2. 归纳假设：假设 $n = k$，
   $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ 成立
3. 归纳递推：证明 $n = k + 1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^{k} i + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

证明 $2^n \geq 3n,\ n \geq 4$

1. 归纳基础：当 $n = 4$，
   $2^4 \geq 3 \times 4$

2. 归纳假设：假设 $n = k\ (n > 4)$，
   $2^k \geq 3k$ 成立

3. 归纳递推：证明 $n = k + 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
2^{k+1} &= 2 \times 2^k \\
&\geq 2 \times 3k \\
&= 3k + 3k \\
&\geq 3k + 3 \\
&\geq 3(k+1)
\end{aligned}
$$

证明 对于任意正整数 n，3 都能够整除 $2^{2n} - 1$

1. 归纳基础：当 $n = 1$，
   $2^{2\times 1} - 1 = 3$

2. 归纳假设：假设 $n = k\ (n > 0)$，
   3 能够整除 $2^{2k} - 1$ 成立，即 $2^{2k} - 1 = 3m$

3. 归纳递推：证明 $n = k + 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1 \\
&= 4 \times 2^{2k} - 1 \\
&= 4 \times (3m + 1) - 1 \\
&= 4 \times 3m + 4 - 1 \\
&= 3 \times (4m + 1)
\end{aligned}
$$

Chapter 5 计数

5.1 计数

5.1.1 分类加法计数原理

完成一件事有 n 种不同的方案，其中第 1 种方案有 m_1 种不同方法，第 2 种方案有 m_2 种不同方法，$\ldots$，第 n 种方案有 m_n 种不同方法，那么完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同方法。

Exercise 从 A 地到 B 地，可以乘火车、汽车、飞机。火车有 4 班、汽车 2 班、飞机 3 班，那么一天中乘坐这些交通工具从 A 地到 B 地有多少种不同的走法?

$$4+2+3=9$$

5.1.2 分步乘法计数原理

完成一件事需要 n 个步骤，其中第 1 个步骤有 m_1 种不同方法，第 2 个步骤有 m_2 种不同方法，$\ldots$，第 n 个步骤有 m_n 种不同方法，那么完成这件事共有 $m_1\times m_2\times\ldots m_n$ 种不同方法。

Exercise 一个书架的第 1 层有 4 本不同的计算机书，第 2 层有 3 本不同的经济书，第 3 层有 2 本不同的数学书。从书架的每一层各取一本书，有多少种不同取法?

$$4\times 3\times 2=24$$

5.2 排列

5.2.1 排列（Permutation）

从 n 个不同元素中取出 m $(m \leq n)$ 个元素，按照一定次序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{5.1}$$

例如一共有 8 个人, A、B、C、D、E、F、G、H。现在有 3 个奖杯, 分别为金牌、银牌和铜牌。将这 3 个奖牌颁发给 8 个人中的 3 个, 问颁发奖牌的不同方式总共有几种?

很明显这是一个排列的问题，因为把金牌先颁给 A，再把银牌颁给 B，跟把金牌先颁给 B，再把银牌颁给 A 这是两种不同的颁奖方式。

- 第一步颁发金牌，金牌可以颁发给 8 个人中的 1 个，共有 8 种选择。
- 第二步颁发银牌，银牌可以颁发剩下 7 个人中的 1 个，共有 7 种选择。
- 第二步颁发铜牌，铜牌可以颁发剩下 6 个人中的 1 个，共有 6 种选择。

那么总共的颁奖方式共有 $8 \times 7 \times 6 = 336$ 种。

Exercise 用 0-9 这 10 个数字可以组成多少个没有重复数字的三位数?

方法一

由于 0 没有排在百位上，那么百位只能是 1-9 这 9 个数字任选 1 个，有 P_9^1 种选法。

对于十位和个位，从余下的 9 个数字种选 2 个，有 P_9^2 种选法。

$$P_9^1 \times P_9^2 = 9 \times 9 \times 8 = 648$$

方法二

符合条件的三位数可以分为 3 大类:

1. 每一位数字都不是 0 的三位数，也就是从 1-9 中选 3 个，有 P_9^3 种选法。
2. 个位数字为 0，那么需要从剩下 9 个数字中选 2 个作为十位和百位，有 P_9^2 种选法。
3. 十位数字为 0，那么需要从剩下 9 个数字中选 2 个作为个位和百位，有 P_9^2 种选法。

$$P_9^3 + P_9^2 + P_9^2 = 648$$

方法三

利用容斥法。从 0-9 这 10 个数字任取 3 个数字的排列数为 P_{10}^3，其中 0 在百位上（也就是从 1-9 中选 2 个作为十位和个位）的排列数是 P_9^2。

$$P_{10}^3 - P_9^2 = 648$$

Exercise 打印字符串 math 的全排列。

全排列

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>

```

```c
void swap(char *a, char *b) {
    char temp = *a;
    *a = *b;
    *b = temp;
}

void permutation(char *s, int start, int end) {
    if(start >= end) {
        printf("%s\n", s);
    } else {
        for(int i = start; i < end; i++) {
            swap(s + i, s + start);
            permutation(s, start + 1, end);
            swap(s + i, s + start);
        }
    }
}

int main() {
    char s[] = "math";
    int len = strlen(s);
    permutation(s, 0, len);
    return 0;
}
```

5.3 组合

5.3.1 组合（Combination）

从 n 个不同元素中取出 m $(m \le n)$ 个元素，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

排列与组合的不同点在于，排列与元素的顺序有关，组合与元素的顺序无关。

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \tag{5.2}$$

Exercise 在 100 件产品中，有 98 件合格品，2 件次品，从这 100 件产品中任意抽出 3 件。

(1) 有多少种不同的抽法?

$$C_{100}^3 = \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} = 161700$$

(2) 抽出的 3 件中恰好有 1 件事次品的抽法有多少种?

2 件次品抽出 1 件有 C_2^1 种，再从 98 件合格品种抽出 2 件合格品有 C_{98}^2 种。

$$C_2^1 \times C_{98}^2 = 9506$$

(3) 抽出的 3 件中至少有 1 件事次品的抽法有多少种?

方法一

恰好有 1 件次品有 $C_2^1 \times C_{98}^2$ 种，恰好有 2 件次品有 $C_2^2 \times C_{98}^1$ 种。

$$C_2^1 \times C_{98}^2 + C_2^2 \times C_{98}^1 = 9604$$

方法二

利用容斥法。先从 100 件抽出 3 件有 C_{100}^3 种，其中 3 件都是合格品有 C_{98}^3 种。

$$C_{100}^3 - C_{98}^3 = 9604$$

5.4 鸽巢原理

5.4.1 鸽巢原理（Pigeonhole Principle）

鸽巢原理也称为狄利克雷抽屉原理（Dirichlet Drawer Principle），假设有 20 只鸽子要飞往 19 个鸽巢栖息，因此这 19 个鸽巢中至少有 1 个鸽巢最少栖息着 2 只鸽子。

鸽巢原理

如果 k + 1 个或者更多的物体放入 k 个盒子，那么至少有一个盒子包含了 2 个或更多的物体。

在生活中有很多场景都可以用鸽巢原理来解释：

- 367 个人中一定至少有 2 个人生日相同。
- 27 个英文单词中一定至少有 2 个单词是以同一个字母开头。

鸽巢原理指出当物体比盒子多时一定至少有 2 个物体在同一个盒子里，但是当物体树量超过盒子数量的倍数时，可以得到更多的结论。例如在 21 个在 $0 \sim 9$ 数字中一定有 3 个是相同的，这是由于 21 个物体被分配到 10 个盒子里，那么某个盒子的物体一定多于 2 个。

广义鸽巢原理

如果 N 个物体放入 k 个盒子，那么至少有一个盒子包含了至少 $\lceil N/k \rceil$ 个物体。

在生活中有很多场景都可以用广义鸽巢原理来解释：

- 在 100 个人中至少有 $\lceil 100/12 \rceil = 9$ 个人出生在同一个月。
- 假设有 A、B、C、D、E 五个成绩，一个班级至少要有 26 个学生才能保证至少 6 个学生得到相同的分数。

Exercise (1) 从一副标准的 52 张牌中必须选多少张牌才能保证选出的牌中至少有 3 张是同样的花色?

假设用 4 个盒子存放 4 种花色的牌，选 N 张牌后，至少有一个盒子含有至少 $\lceil N/4 \rceil$ 张牌。

因此使得 $\lceil N/4 \rceil \geq 3$ 的最小整数 $N = 2 \times 4 + 1 = 9$

(2) 必须选多少张牌才能保证选出的牌中至少有 3 张是红桃。

这个场景不适用广义鸽巢原理，因为要保证存在 3 张红桃，而不是 3 张同花色的牌。

最坏情况下，在选出第一张红桃之前已经选了所有的其它花色牌共 39 张，因此为了得到 3 张红桃，可能需要选 42 张牌。

5.5 二项式定理

5.5.1 二项式系数（Binomial Coefficient）

组合数 $C(n,r)$ 也可写为 $\binom{n}{r}$，由于这些数经常出现在 $(x+y)^n$ 的展开式中作为系数，所以这些数被称为二项式系数。

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 \\ &= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3\end{aligned}$$

二项式定理

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j \qquad (5.3) \\ &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n\end{aligned}$$

Exercise 计算 $(x+y)^{25}$ 的展开式中 $x^{12}y^{13}$ 的系数。

$$\binom{25}{13} = 5200300$$

Exercise 计算 $(2x-3y)^{25}$ 的展开式中 $x^{12}y^{13}$ 的系数。

$$\begin{aligned}(2x+(-3y))^{25} &= \sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j}(2x)^{25-j}(-3y)^j \\ &= \sum_{j=0}^{25}\binom{25}{j}(2)^{25-j}(x)^{25-j}(-3)^j(y)^j\end{aligned}$$

$x^{12}y^{13}$ 的系数为 $\binom{25}{13}\cdot 2^{12}\cdot(-3)^{13}$

推论 1

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n \tag{5.4}$$

证明

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} 1^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \end{aligned}$$

推论 2

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j = 0 \tag{5.5}$$

证明

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} (-1)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \end{aligned}$$

推论 3

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (2)^j = 3^n \tag{5.6}$$

证明

$$\begin{aligned} 3^n &= (1+2)^n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} 2^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (2)^j \end{aligned}$$

5.5.2 帕斯卡恒等式（Pascal’s Identity）

帕斯卡恒等式

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{5.7}$$

证明

假设 $\binom{n+1}{k}$ 表示在长度为 $n+1$ 的二进制串中正好有 k 个 1 的二进制串数量，满足条件的二进制串可以分成两组：

- 以 1 开头的二进制串：因为 1 是开头，所以剩余部分中包含 $k-1$ 个 1，即 $\binom{n}{k-1}$。
- 以 0 开头的二进制串：因为 0 是开头，所以剩余部分中包含 k 个 1，即 $\binom{n}{k}$。

5.5.3 范德蒙德恒等式（Vandermonde's Identity）

范德蒙德恒等式

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k} \tag{5.8}$$

证明

假设 $\binom{m+n}{r}$ 表示从集合 A（m 个元素）和集合 B（n 个元素）中选取 r 个元素。可以从集合 A 中取 $r-k$ 个元素，再从集合 B 中取 k 个元素，一共有 $\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ 种取法，其中 $0 \le k \le r$。最后将所有满足条件的 k 进行累加，即可得到范德蒙德恒等式。

5.6 可重复的排列组合

5.6.1 可重复的排列

在许多计数问题中，元素可以被重复使用，例如一个字母或数字可以在车牌号中重复出现。

当元素允许重复时，使用乘法法则可以很容易地计算排列数。具有 n 个元素的集合允许重复的 r 排列数为 n^r。

Exercise 用大写字母可以构成多少个长度为 10 的字符串？

$$26^{10}$$

5.6.2 可重复的组合

当元素允许重复时，从 n 个元素的集合选取 r 个元素的组合数为

$$C(n+r-1,r)=\binom{n+r-1}{r} \tag{5.9}$$

Exercise 从包含 1 元、2 元、5 元、10 元、20 元、50 元和 100 元的钱袋中选取 5 张有多少种不同的取法？

$$C(7+5-1,5)=\binom{11}{5}=462$$

5.6.3 不可区别物体的排列

在计数问题中，某些元素可能是没有区别的，这种情况必须要避免重复计数。

假设有 n_1 个相同元素 1、n_2 个相同元素 2、...、n_k 个相同元素 k，那么 n 个元素的不同排列数为

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} \tag{5.10}$$

Exercise 由 4 个 A、3 个 B、7 个 C 和 1 个 D 能组成多少个不同的字符串？

$$\frac{15!}{4! \cdot 3! \cdot 7! \cdot 1!}$$

Chapter 6 概率

6.1 古典概型

6.1.1 古典概型

如果一个随机试验所包含的单位事件是有限的，且每个单位事件发生的可能性均相等，则这个随机试验叫做拉普拉斯试验，这种条件下的概率模型就叫古典概型。古典概型是概率论中最直观和最简单的模型，概率的许多运算规则，也首先是在这种模型下得到的。单位事件的特点是两两互斥的，例如抛一枚质地均匀的硬币时，正面朝上和背面朝上不会同时出现。

事件 E 是结果具有相等可能性的有限样本空间 S 的子集，则事件 E 的概率为

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} \tag{6.1}$$

Exercise 掷两个质地均匀的骰子。

(1) 一共有多少种不同的结果?

$$6 \times 6 = 36$$

(2) 点数之和为 9 的结果有多少种?

一共有 4 种：$(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)$

(3) 点数之和为 9 的概率是多少?

$$P(E) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

有许多试验结果的可能性并不相等，例如抛一枚不均匀的硬币，正面朝上的概率是背面朝上的两倍。

Exercise 掷一个不均匀的骰子，点数 3 出现的次数是其它点数的两倍，其它五个点数出现是等可能的，计算出现奇数的概率。

$E = \{1, 3, 5\}$

$P(1) = P(2) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{7}$

$P(3) = \frac{2}{7}$

$$P(E) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

Exercise 计算从标准的 52 张牌中抽取 5 张牌，其中有 4 张数值相同的牌的概率。

52 张牌选取 5 张牌的组合数 $|S| = \binom{52}{5} = 2598960$

三带二的组合数 $|E| = \binom{13}{1}\binom{4}{3} \cdot \binom{12}{1}\binom{4}{2} = 3744$

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{624}{2598960} \approx 0.00024$$

Exercise 计算从标准的 52 张牌中抽取的 5 张牌为三带二的概率。

52 张牌选取 5 张牌的组合数 $|S| = \binom{52}{5} = 2598960$

4 张牌数值相同的组合数 $|E| = \binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{48}{1} = 624$，其中 $\binom{13}{1}$ 表示选择一种数值的方式数，$\binom{4}{4}$ 表示从 4 种花色中选出 4 张该数值的方式数，$\binom{48}{1}$ 表示选择第 5 张牌的方式数。

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{3744}{2598960} \approx 0.0014$$

6.1.2 有放回/无放回抽样

Exercise 计算从 50 个从 1 开始标号的球中，依次取出号码为 18、22、21、1、49 的球的概率。

(a) 每次取完球后，不把球放回箱子。

$$P(E) = \frac{1}{P(50,5)} = \frac{1}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46} = 254251200$$

(b) 每次取完球后，把球放回箱子。

$$P(E) = \frac{1}{50^5} = 312500000$$

6.1.3 对立事件概率

假设 E 是样本空间 S 的一个事件，事件 $\overline{E} = S - E$ 的概率是

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) \tag{6.2}$$

Exercise 随机生成一个 10 位的二进制串，计算其中至少包含 2 个 0 的概率。

没有 0 的组合数：$\binom{10}{0}$

1 个 0 的组合数：$\binom{10}{1}$

$$\begin{aligned} P(E) &= 1 - P(\overline{E}) \\ &= 1 - \frac{\binom{10}{0} + \binom{10}{1}}{2^{10}} \\ &= 1 - \frac{11}{1024} \\ &= \frac{1013}{1024} \end{aligned}$$

6.2 概率推理

6.2.1 三门问题（Monty Hall Problem）

三门问题也叫蒙提霍尔问题，是一个有关于博弈论的数学问题。美国主持人 Monty Hall 主持了一档电视游戏节目，在节目中有三扇门，这三扇门的后面分别会被随机地放进汽车和两只山羊。参赛者要随机选择一扇门，在参赛者选择了一扇门之后，主持人并不会立刻打开这扇门，而是从剩下的两扇门中打开一扇有山羊的门。随后主持人会给竞猜者提供一次重新选择门的机会，此时竞猜者可以保持自己的第一选择不变，也可以更换自己的选择。那么参赛者到底是应该怎么做能让得到汽车大奖的概率大一些呢?

该节目播出之后，引来了大家的热议。一名杂志专栏作者 Marilyn Vos Savant 曾先后三次对此问题作答，试图说服读者相信改变选择对参赛者是有利的，也就是换门比不换门得到汽车的概率要大一些，前者概率为 $\frac{2}{3}$，后者概率为 $\frac{1}{3}$。然而她的这一观点提出之后，绝大多数的读者都不接受她给出的答案。人们寄来了数千封抱怨信，很多寄信人是老师或者学者。

一位来自 University of Florida 的读者写道："这个国家已经有够多的数学文盲了，我们不想再有个世界上智商最高的人来充数！真让人羞愧!"

另一个人写道："我看你就是那只山羊!"

美国陆军研究所的 Everett Harman 写道："如果连博士都要出错，我看这个国家马上要陷入严重的麻烦了。"

时至今日，对于三门问题的争论仍在继续。对于这个问题有两种观点，一种认为改不改变获得汽车的概率都是一样的，都是 $\frac{1}{2}$；另一种观点则认为改变选择获得汽车的概率是 $\frac{2}{3}$，而不改变选择的到汽车的概率只有 $\frac{1}{3}$。持第二种观点的人认为，在这个游戏的过程当中，整体是一个关于条件概率的两个阶段的决策问题，也就是说，起初选择一扇认为有奖品的门，在主持人开了一扇没有奖品的门之后，对于参赛者要选择坚持最初的还是改变最初的选择是一个连续的动作，那么利用条

件概率的贝叶斯定理就可以说明改变选择会使得到汽车的概率增加。

随后，MIT 的数学家和阿拉莫斯国家实验室的程序员都宣布，他们用计算机进行模拟实验的结果，支持了 Marilyn 的答案。

可以看出，这是一个概率论和人的直觉不太符合的例子。这告诉我们在做基于量化的判断的时候，要以事实和数据为依据，而不要凭主观和直觉来决定。

那么正确结果 $\frac{2}{3}$ 是怎么来的呢? 其中有一个非常重要隐藏条件，作为知道答案的主持人，不可能选择开启有车的门，所以他永远都会挑一扇有山羊的门，也就是说主持人选择开启其中一扇门时，他的选择并不是一个纯随机事件。

遍历所有可能性:

- 如果参赛者选择汽车，主持人选择山羊 1，改变选择不中奖。
- 如果参赛者选择山羊 1，主持人选择山羊 2，改变选择中奖。
- 如果参赛者选择山羊 2，主持人选择山羊 1，改变选择中奖。

因此可见改变选择后的成功概率为 $\frac{2}{3}$。

延伸一下，可以看个类似的情况。54 张牌，抽中大王算赢，参赛者选中一张后先不要看，主持人去除 53 张牌里的 52 张非大王的牌，问你拿手里的牌换剩余的一张牌，是否能提高胜率?

6.3 条件概率

6.3.1 条件概率

在给定事件 F 出现的条件下，事件 E 的条件概率为

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \tag{6.3}$$

Exercise 抛 3 次硬币有 8 种不同的情形，假设已经知道第 1 次抛硬币背面朝上的事件 F 已经出现，计算背面朝上次数为奇数事件 E 的概率。

$P(F) = \frac{1}{2}$

因为第 1 次是背面朝上，只有 4 种情形：背正正、背正背、背背正、背背背。出现奇数次背面的只有背正正和背背背。

$P(E \cap F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

Exercise 在至少已经有一个男孩的条件下，计算一个家庭中两个孩子都为男孩的条件概率。

假设 E 是两个孩子都为男孩的概率，F 是两个孩子至少有一个是男孩的概率。因此 $E = \{BB\}$，$F = \{BB, BG, GB\}$，$E \cap F = \{BB\}$，其中 B 为 Boy、G 为 Girl。

$P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

$P(F) = \frac{3}{4}$

$P(E \cap F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

6.3.2 独立性（Independence）

假设抛 2 次硬币，已知第 1 次是背面朝上（事件 F），如果这个结果不会对第 2 次抛硬币也是背面朝上（事件 E）产生任何影响的话，就称事件 E 和 F 是独立的。

事件 E 和 F 是独立的，当且仅当

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) \tag{6.4}$$

Exercise 假设事件 E 是随机产生一个以 1 开头的 4 位二进制串，事件 F 是随机产生包含偶数个 0 的 4 位二进制串。判断 E 和 F 是否独立。

以 1 开头的有：1000、1001、1010、1011、1100、1101、1110、1111

偶数个 0 的有：0000、0011、0101、0110、1001、1010、1100、1111

$P(E) = P(F) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

$E \cap F = \{1111, 1100, 1010, 1001\}$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(E)P(F)$$

因此 E 和 F 是独立的。

Exercise 假设事件 E 表示有两个孩子的家庭有两个男孩，事件 F 表示有两个孩子的家庭有至少一个男孩。判断 E 和 F 是否独立。

$E = \{BB\}$，$P(E) = \frac{1}{4}$

$P(F) = \frac{3}{4}$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = P(E)P(F)$$

因此 E 和 F 不是独立的。

6.4 伯努利试验

6.4.1 伯努利试验（Bernoulli Trial）

假设一个试验只有两种可能的结果，例如抛一枚硬币、随机产生一个二进制位等，这种试验被称为伯努利试验。一次伯努利试验的结果成为成功或失败，如果 p 是一次成功的概率，q 是一次失败的概率，那么 $p+q=1$。

在 n 次独立的伯努利试验中，有 k 次成功的概率为

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{6.5}$$

Exercise 抛一枚不均匀的硬币，正面出现的概率为 $\frac{2}{3}$，计算抛 7 次时恰好 4 次正面朝上的概率。

$$\begin{aligned} & \binom{7}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ = & \frac{35 \cdot 16}{3^7} \\ = & \frac{560}{2187} \end{aligned}$$

Exercise 随机产生一个 10 位的二进制串，0 出现的概率为 0.9，1 出现的概率为 0.1，计算恰好产生 8 个 0 的概率。

$$\begin{aligned} & \binom{10}{8} \cdot 0.9^8 \cdot 0.1^2 \\ = & 0.1937102445 \end{aligned}$$

Chapter 7 树

Chapter 8 图

8.1 图

8.1.1 图（Graph）

你的微信中有若干好友，而你的好友又有若干好友。许许多多的用户组成了一个多对多的关系网，这个关系网就是数据结构中的图。

再例如使用地图导航功能时，导航会根据你的出发地和目的地规划最佳的地铁换乘路线。许许多多的地铁站组成的交通网络也可以认为是图。

图是一种比树更为复杂的数据结构。树的结点之间是一对多的关系，并且存在父与子的层级划分。而图的顶点之间是多对多关系，并且所有顶点都是平等的，无所谓谁是父子。

在图中，最基本的单元是顶点（vertex），相当于树中的结点。顶点之间的关联关系被称为边（edge）。图中包含一组顶点和一组边，通常用 V 表示顶点集合，用 E 表示边集合。边可以看作是顶点对，即 $(v, w) \in E$，$v, w \in V$。

在有些图中，每一条边并不是完全等同的。例如地铁线路，站与站之间的距离都有可能不同。因此图中会涉及边的权重（weight），涉及到权重的图被称为带权图（weighted graph），也称为网络。

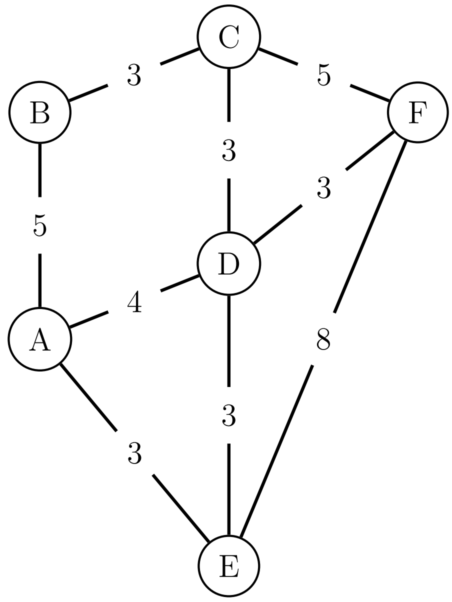


图 8.1: 带权图

还有一种图，顶点之间的关联并不是完全对称的。拿微信举例，你的好友列表里有我，但我的好友列表里未必有你。

这样一来，顶点之间的边就有了方向的区分，这种带有方向的图被称为有向图（directed graph）。有向边可以使用 <v, w> 表示从 v 指向 w 的边。

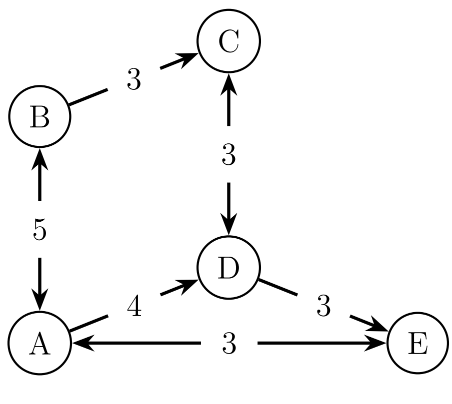


图 8.2: 有向图

相应地，在 QQ 中，只要我把你从好友里删除，你在自己的好友列表里就看不到我了。因此 QQ 的好友关系可以认为是一个没有方向区分的图，这种图被称为无向图（undirected graph）。

8.1.2 图的术语

图还有一些有关路径的术语：

- 度：一个顶点的度是指与该顶点相关联的边的条数。
- 入度：对于有向图，入度为以该顶点为终点的边数。
- 出度：对于有向图，入度为以该顶点为起点的边数。
- 连通：如果从顶点 V 到 W 存在一条路径，则称 V 和 W 是连通的。
- 路径：顶点 V 到 W 的路径是一系列顶点 $\{V, v_1, v_2, \dots, v_n, W\}$ 的集合，其中任意一对相邻的顶点间都有图中的边。
- 路径长度：路径中边的个数，如果是带权图（网络），则是所有边的权重和。
- 简单路径：顶点 V 到 W 之间的路径中所有顶点都不同。
- 回路：起点等于终点的路径。

握手定理 Handshaking Theorem 假设 $G = (V, E)$ 是无向图，每条边都会给顶点的度之和增加 2，则

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E| \tag{8.1}$$

Exercise 一个有 10 个顶点，且每个顶点的度都为 6 的图，有多少条边？

$$2m = 6 \times 10$$

$$m = 30$$

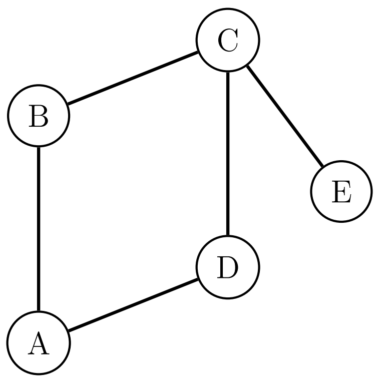
8.2 图的表示

8.2.1 邻接矩阵（Adjacency Matrix）

拥有 n 个顶点的图，它所包含的边的数量最多是 n(n-1) 条，因此，要表达各个顶点之间的关联关系，最清晰易懂的方式是使用邻接矩阵 G[N][N]。

对于无向图来说，如果顶点之间有关联，那么邻接矩阵中对应的值为 1；如果顶点之间没有关联，那么邻接矩阵中对应的值为 0。

$$G[i][j] = \begin{cases} 1 & <v_i, v_j> \text{是 G 中的边} \\ 0 & <v_i, v_j> \text{不是 G 中的边} \end{cases}$$

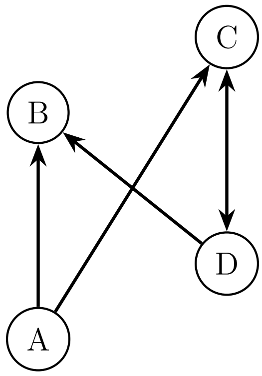


	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A	0	1	0	1	0
B	1	0	1	0	0
C	0	1	0	1	1
D	1	0	1	0	0
E	0	0	1	0	0

表 8.1: 无向图邻接矩阵

需要注意的是，邻接矩阵从左上到右下的一条对角线上的元素值必然是 0，因为任何一个顶点与它自身是没有连接的。同时，无向图对应的邻接矩阵是一个对称矩阵，假如 A 和 B 有关联，那么 B 和 A 也必定有关联。

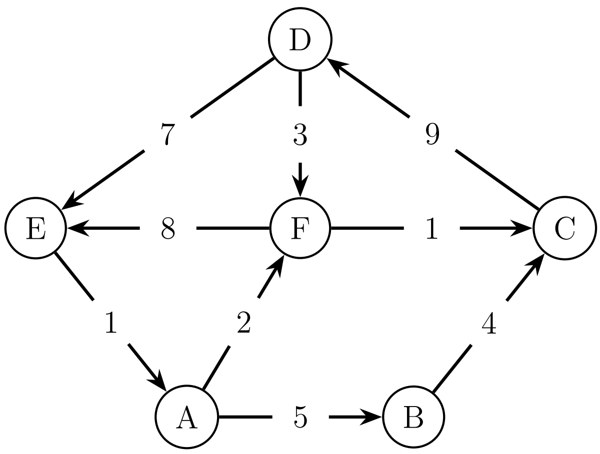
但是对于有向图的邻接矩阵，不一定是一个对称矩阵，假如 A 可以达到 B，从 B 未必能达到 A。



	A	**B**	**C**	**D**
A	0	1	1	0
B	0	0	0	0
C	0	0	0	1
D	0	1	1	0

表 8.2: 有向图邻接矩阵

对于网络，只要把邻接矩阵对应位置的值定义为边 $< v_i, v_j >$ 的权重即可。



	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A	∞	5	∞	∞	∞	2
B	∞	∞	4	∞	∞	∞
C	∞	∞	∞	9	∞	∞
D	∞	∞	∞	∞	7	3
E	1	∞	∞	∞	∞	∞
F	∞	∞	1	∞	8	∞

表 8.3: 带权图邻接矩阵

对于带权图，如果 v_i 和 v_j 之前没有边应该将权值设为 ∞。

邻接矩阵的优点：

1. 简单、直观。
2. 可以快速查到一个顶点和另一顶点之间的关联关系。
3. 方便计算任一顶点的度，对于有向图，从顶点发出的边数为出度，指向顶点的边数为入度。

邻接矩阵的缺点：

1. 浪费空间，对于稀疏图（点很多而边很少）有大量无效元素。但对于稠密图（特别是完全图）还是很合算的。
2. 浪费时间，统计稀疏图中边的个数，也就是计算邻接矩阵中元素 1 的个数。

8.3 特殊图

8.3.1 完全图（Complete Graph）

完全图是指每对顶点之间都有一条边的简单图，包含 n 个顶点的完全图记作 K_n。

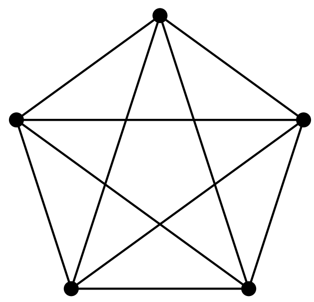


图 8.3: 完全图

8.3.2 圈图（Cycle Graph）

圈图是由 n $(n \geq 3)$ 的顶点，及边 (v_1, v_2)、(v_2, v_3)、(v_{n-1}, v_n)、(v_n, v_1) 组成的简单图。

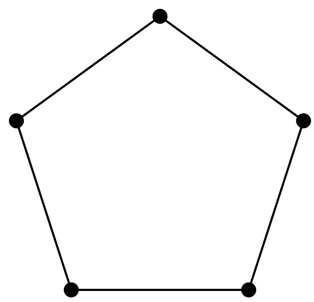


图 8.4: 圈图

8.3.3 n 立方图

n 立方图记作 Q_n，是用顶点表示 2^n 个长度为 n 的二进制串的图。n 立方图的两个顶点相邻，当且仅当它们所表示的二进制串恰有一位不同。

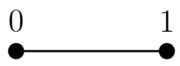


图 8.5: Q_1

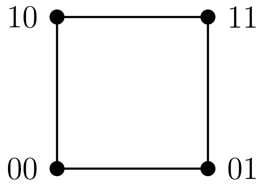


图 8.6: Q_2

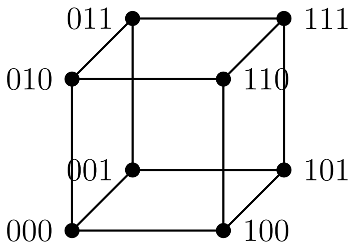


图 8.7: Q_3

8.3.4 二分图（Bipartite Graph）