



离散数学

Discrete Mathematics

极夜酱

目录

0.1 欧拉回路与哈密顿回路	1
--------------------------	---

0.1 欧拉回路与哈密尔顿回路

0.1.1 欧拉通路 (Euler Trail) / 欧拉回路 (Euler Circuit)

Konigsberg 被一条河流分成 4 块区域，有 7 座桥把这 4 块区域连接了起来。镇上的人们想弄明白是否可能从某块区域出发，不重复地经过所有桥并且回到出发点。

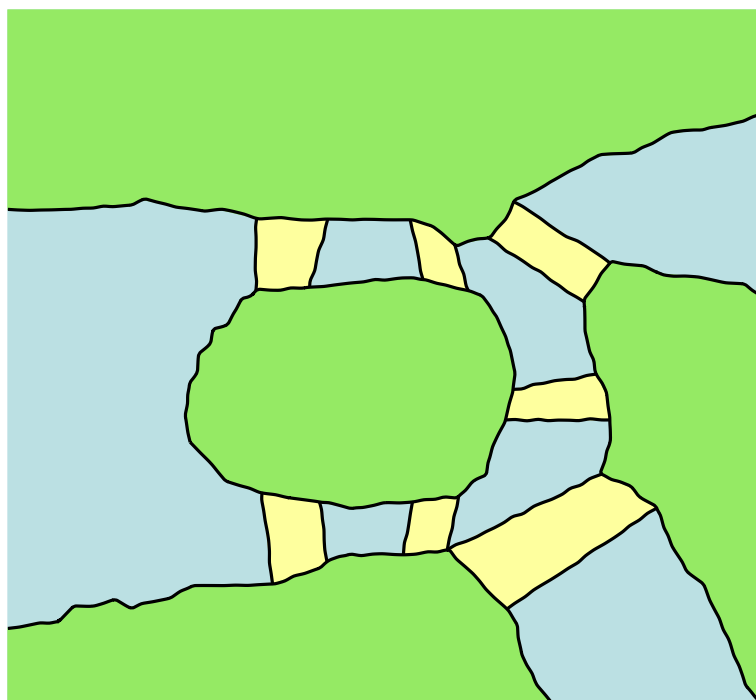
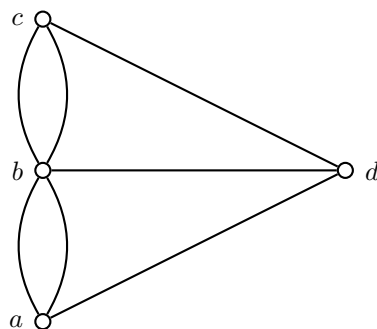


图 1: 哥尼斯堡七桥问题

这个问题可以用图进行描述，顶点用于表示 4 块区域，边用于表示连接两个区域的桥。这样问题就转化成了能否不重复地一笔画完所有的边，即图是否存在欧拉回路。



1736 年，29 岁的欧拉向圣彼得堡科学院递交了关于哥尼斯堡七桥问题的论文。

在解答问题的同时，开创了数学的一个新的分支——图论与几何拓扑，也由此展开了数学史上的新历程。

七桥问题提出后，很多人对此很感兴趣，纷纷进行试验，但在相当长的时间里，始终未能解决。欧拉通过对七桥问题的研究，不仅圆满地回答了哥尼斯堡居民提出的问题，而且得到并证明了更为广泛的有关一笔画的三条结论。

欧拉通路和欧拉回路的区别在于，欧拉通路需要经过图中所有边正好一次，而欧拉回路则需要经过图中所有边正好一次并最终回到出发点。

Exercise 判断在一个有度为奇数的顶点的图中是否存在一条欧拉回路。

假设图 G 存在欧拉回路，令 v 为回路中的第一个顶点。从第一个顶点出发离开会使当前顶点的度增加 1。

经过回路中的中间顶点时，每个顶点的度都会增加 2，一个入度，一个出度。

最后一条边必须回到第一个顶点 v ，这样会使第一个顶点 v 的度增加 1。

因为每一个顶点都有可能作为出发点，因此只有顶点度都为偶数的图才有可能存在欧拉回路。

一个连通图存在欧拉通路但无欧拉回路，当且仅当它恰好拥有 2 个度为奇数的顶点。

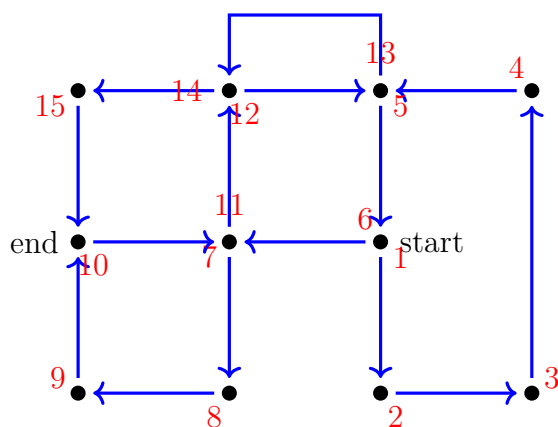


图 2: 欧拉通路