Taller 1 - Cibernetica Cualitativa II

Daniel F. Santos B.

October 2020

1 Taller

Hallar el periodo del ciclo límite presente en el siguiente sistema

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 4)\dot{x} + x = 1, para \mu \geq 1 \tag{1}$$

2 Solución

Si $\dot{w} = \ddot{x} + \mu(x^2 - 4)\dot{x}$, $\dot{w} = -x$ (A)

podemos expresar $\dot{w}$ en términos de derivadas como:

$\dot{w} = \frac{d}{dt}(\dot{x} + \mu(\frac{1}{3}x^3 - 4x))$,

Lo que quiere decir:

$w = \dot{x} + \mu(\frac{1}{3}x^3 - 4x)$

Para encontrar el sistema bidimensional hacemos las siguientes substituciones:

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, $w = \dot{x} + \mu F(x)$ y $\dot{x} = w - \mu F(x)$

Para factorizar μ, realizamos la siguiente substitución:

$y = \frac{w}{\mu}$, derivando con respecto a t obtenemos, $\dot{y} = \frac{\dot{w}}{\mu}$, de (A) obtenemos que: $\dot{y} = -\frac{1}{\mu}x$

Por tanto:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= w - \mu F(x) \\
&= \mu y - \mu F(x) \\
&= \mu(y - F(x)) \\
&= \mu(y - (\frac{1}{3}x^3 - 4x))
\end{aligned}
$$

Con lo cual podemos obtener el sistema bidimensional

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \mu(y - (\frac{1}{3}x^3 - 4x)) \\
\dot{y} &= -\frac{1}{\mu}x
\end{aligned}
$$

Con esto podemos hallar las nullclines del sistema, igualando $\dot{x} = 0$ obtenemos:

$\rightarrow y = \frac{1}{3}(x^3 - 4x)$,

y igualando $\dot{y} = 0$, encontramos;

$\rightarrow x = 0$.

Graficando el diagrama de fase encontramos

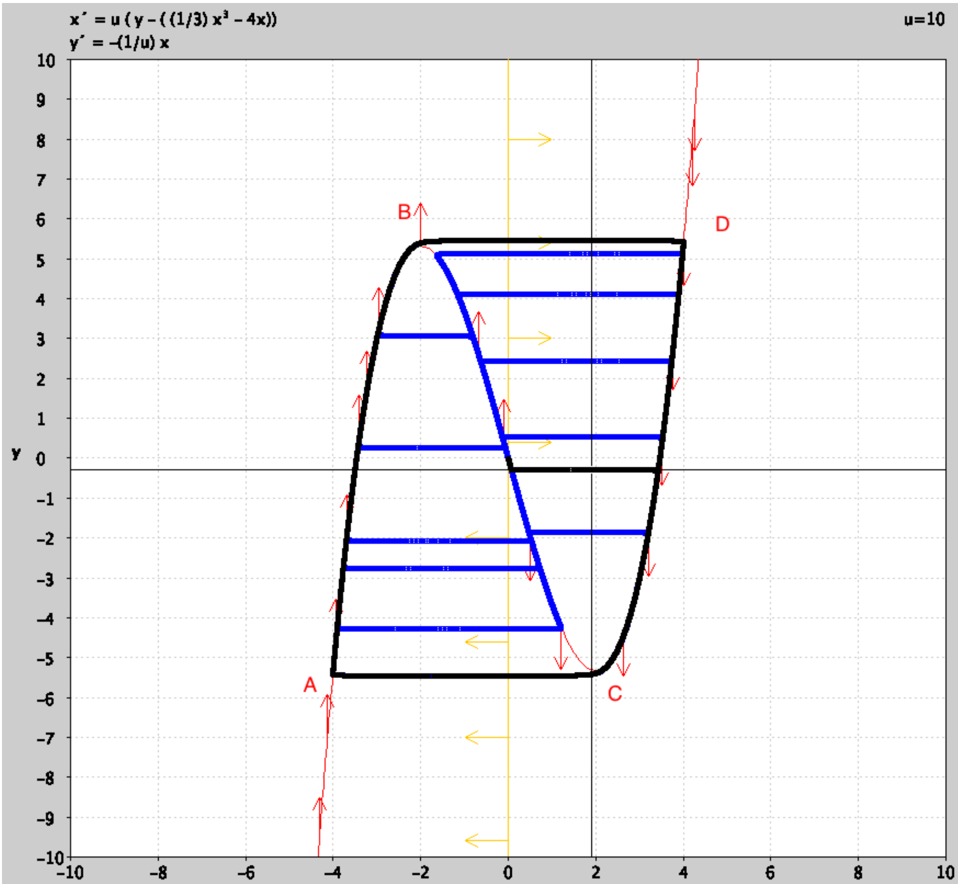

Figure 1: Diagrama de Fase, su puede evidencia un ciclo limite, Las partes lentas estan sobre las curvas A-B, y C-D

Para hallar el perido basta hallar la suma de los tramos lentos, de la sigiente forma

$$T \approx 2 \int_{T_A}^{T_B} dt \tag{2}$$

sabemos que el tramo A-B, $\dot{x} = 0, \rightarrow, y = F(x)$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= F'(x)\frac{dx}{dt} \\
\frac{dy}{dt} &= (x^2-4)\frac{dx}{dt} \\
-\frac{1}{\mu}x &= (x^2-4)\frac{dx}{dt} \\
dt &= -\frac{\mu(x^2-4)}{x}dx
\end{aligned}
$$

Como se puede ver en la Fig 1 los puntos de inflexión son B y C, por lo que podemos igualar dichos puntos igualando la derivada a cero.

$$F'(x) = (x^2-4) = 0$$

then $x = \pm 2$

evaluando dichos puntos en la función $F(x) obtenemos$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 4x \\
F(2) &= \frac{-16}{3} \\
F(-2) &= \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

Con estos valores, podemos calcular la curva en el punto A, de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
F(2) = \frac{1}{3}x^3 - 4x = \frac{-16}{3} \\
x^3 - 12x = -16
\end{aligned}
$$

obteniendo las raices pdomes ver que

$$(x^3 - 12x + 16) = (x+4)(x-2)(x-2) \tag{3}$$

por tanto el punto A esta en $x = 4$ y el punto C esta en $x = 2$, con esta información podemos establecer los limites de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
T &\approx 2\int_{-4}^{-2} dt && (4) \\
&= 2\int_{-4}^{-2} -\frac{\mu(x^2-4)}{x}dx && (5) \\
&= 2\mu(x^2/2 - 4log(x)) && (6) \\
&\approx 6.4548 && (7)
\end{aligned}
$$