Teoría Cuántica de Campos FI-7011
Tarea 2: Jueves 10 de abril, 2025
Fecha de entrega: Martes 22 de abril.

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux: Javier Huenupi

P5: Considere una teoría de Klein-Gordon. Se define la siguiente función:

$$\Delta_R(x-y) = i\theta(x^0 - y^0)\langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle, \tag{1}$$

donde $\theta(x^0 - y^0)$ es la función escalón.

(a) Demuestre que $\Delta_R(x-y)$ es una función de Green retardada asociada a la ecuación de Klein-Gordon.

(b) Muestre que $\Delta_R(x-y)$ tiene la siguiente representación integral

$$\Delta_R(x-y) = \int_C \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2+m^2} e^{ik\cdot(x-y)}, \tag{2}$$

donde C denota un camino de integración en el plano complejo de k^0. Para obtener dicha representación integral tendrá que determinar el camino de integración adecuado para sortear los polos del denominador k^2+m^2.

(c) Considere ahora la siguiente función de Green:

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2+m^2-i\epsilon} e^{ik\cdot(x-y)}, \tag{3}$$

donde ϵ es una cantidad infinitesimal. Observe que el límite $\epsilon \to 0$ determina un camino de integración en el plano complejo de k^0 distinto al de $D_R(x-y)$. Demuestre que $\Delta(x-y) = i\langle 0|\mathcal{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ donde $\mathcal{T}$ es el símbolo de ordenamiento temporal.

Propuesto: Continuacción del problema 1. Muestre que

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathcal{T}\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle = \frac{1}{i^2}\big[&\Delta(x_1-x_2)\Delta(x_3-x_4) + \Delta(x_1-x_3)\Delta(x_2-x_4) \\ &+\Delta(x_1-x_4)\Delta(x_2-x_3)\big]\end{aligned} \tag{4}$$

Generalice este resultado para determinar la forma de $\langle 0|\mathcal{T}\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_{2n})|0\rangle$.

P6: Considere la siguiente teoría

$$\mathcal{L}(\phi) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J(x)\phi(x), \tag{5}$$

donde $J(x)$ es un campo clásico externo. Asuma que $J(x) \to 0$ para $t \to -\infty$, y que $J(x) = 0$ para $x^0 > t_0$ donde t_0 es un tiempo dado. Debido a la presencia de $J(x)$, el sistema no es conservado, y H dependerá del tiempo.

(a) Cuantice la teoría, y obtenga expresiones para $\phi(x)$ en términos de operadores de creación y destrucción válida para tiempos mayores que t_0.

(b) Encuentre expresiones para $\langle 0|\phi(x)|0\rangle$ y $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ para $x^0 > t_0$.

(c) A partir de su resultado en la parte (a), determine el espectro de H para $t > t_0$. Compare este resultado con el espectro de la teoría en $t \to -\infty$, donde $H = \int \tilde{dk}\omega_k a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}$.

(d) Considere el operador $\hat{N} \equiv \int \tilde{dk}\, a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}$ definido en $t \to -\infty$ (esto es, cuando la fuente J no está activa). Este operador determina el número de partículas de un estado. Encuentre una expresión para $\langle 0|\hat{N}(t)|0\rangle$ para $t > t_0$. Interprete el rol de J en su resultado final. (Recuerde que puede escribir $a_{\mathbf{k}}$ y $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ en términos de ϕ y $\dot{\phi}$).

P7: Considere la teoría $g\varphi^3$ vista en clases con

$$V(\varphi) = -\frac{g}{3!}\varphi^3. \tag{6}$$

(no se preocupe de los contra-términos). Un diagrama D dado de orden g^V en $Z(J)$ viene precedido de un factor $1/S_D$ de la forma

$$\frac{1}{S_D} = N\left(\frac{1}{3!}\right)^V, \tag{7}$$

donde N es un número asociado a las distintas formas de obtener el diagrama D a través de la operación $Z(J) = e^{i\int_x V(\delta_x)} Z_0(J)$ (donde $\delta_x = i\delta/\delta J(x)$). Argumente que S_D corresponde al factor de simetría de un diagrama.

P8: Considere una teoría $\lambda\phi^4$ dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m_B^2\phi^2 - \frac{\lambda_B}{4!}\phi^4. \tag{8}$$

(a) Determine la redefinición de parámetros y campos que nos permite reescribir la teoría de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\rm int}$, donde:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \tag{9}$$

$$\mathcal{L}_{\rm int} = -\frac{Z_\lambda \lambda}{4!}\varphi^4 + \mathcal{L}_{\rm ct}, \tag{10}$$

$$\mathcal{L}_{\rm ct} = -\frac{1}{2}(Z_\varphi - 1)(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}(Z_m - 1)m^2\varphi^2. \tag{11}$$

(b) ¿Qué tipos de vértices aparece en la expansión diagramática de $Z(J)$? ¿Cuáles son los factores asociados a dichos vértices?

(c) Ignorando contratérminos, dibuje todos los diagramas conexos con $1 \leq E \leq 4$ y $0 \leq V \leq 2$ y encuentre sus factores de simetría asociados.

(d) Explique por qué no se agregó un término lineal en φ en $\mathcal{L}_{\rm ct}$.