张量分析

- 考试形式：**笔试**
- 分数组成：考试成绩
- 教材：

黄克智，薛明德，陆明万 《张量分析》清华大学出版社

- 参考资料：

黄义，张引科《张量及其在连续介质力学中的应用》冶金工业出版社

概　述

1. 物理量的数学表示：

- 标量(零阶张量)：温度、电势、长度、密度、质量
- 矢量（一阶张量)：力、位移、速度、加速度
- 张量：应力、应变、弹性常数

张量的定义：

所谓张量是一个物理量或几何量，它由在某参考坐标系中一定数目的分量的集合所规定，当坐标变换时，这些分量按一定的变换法则变换。

2.张量表示的客观性：

在不同坐标系（直角坐标系，极坐标系，球坐标系等）下用分量描述的物理规律各不同，但用张量描述的物理规律与坐标系选择无关. 如 F＝ma.

3.张量表示的简洁性

静力平衡方程，笛卡尔坐标系中分量形式 → 张量形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}+\rho f_x=0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}+\rho f_y=0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\rho f_z=0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla+\rho\mathbf{f}=0$$

第1章 矢量(vector)和张量(tensor)

1. 1 矢量及其代数运算公式

矢量的定义：

在欧式（Euclidean）空间中，矢量是具有大小（称为模）和方向且满足一定运算规则的实体。

欧式空间是定义了内积的线性空间。

第1章 矢量(vector)和张量(tensor)

线性空间的定义：

设V是一个非空集合，F是一个数域，在集合V的元素之间定义一种代数运算，叫做加法；这就是说，给出了一个法则，对于V中任意两个元素x和y，在V中都有唯一的一个元素z与他们对应，称为x与y的和，记为z=x+y。在数域F与集合V的元素之间还定义了一种运算，叫做数量乘法；这就是说，对于数域F中任一数k与V中任一元素x，在V中都有唯一的一个元素y与他们对应，称为k与x的数量乘积，记为y=kx。如果加法与乘法还满足下述规则，那么V称为数域F上的线性空间.

第1章 矢量(vector)和张量(tensor)

交换率，$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$

结合率，$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$

存在唯一零元素，$\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$

存在唯一负元素，$\mathbf{x}+\mathbf{x}'=0$

$1\mathbf{x}=\mathbf{x}$

交换率，$a(b\mathbf{x})=(ab)\mathbf{x}$

结合率，$(a+b)\mathbf{x}=a\mathbf{x}+b\mathbf{x}$

结合率，$a(\mathbf{x}+\mathbf{y})=a\mathbf{x}+a\mathbf{y}$

线性空间中的元素称为矢量

欧式空间是定义了内积的线性空间

赋范空间

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0, \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$$

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

内积空间

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

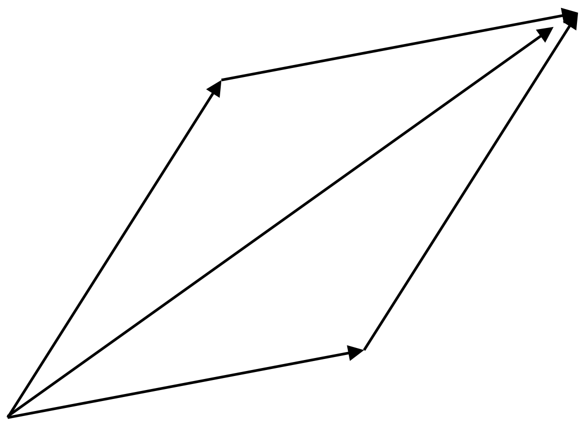
$$\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = a\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + b\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$

内积空间的范数 $\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$

第1章 矢量(vector)和张量(tensor)

- 两个矢量之和满足平行四边形法则，且仍是该空间的矢量。



➢如果两个矢量具有相同的模和方向，则称两矢量**相等**

线性相关和线性无关

- 线性相关的一组矢量中至少有一个矢量可以用其余的矢量线性组合表示。数学上可以定义为：

矢量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_q$ 称为线性相关的，是指存在不全为零的实数 $u_1,u_2,\ldots,u_q$ ，使得

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\cdots+\alpha_q u_q=0 \qquad (1.1.1)$$

该矢量组线性无关是指式(1. 1. 1)只有在 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_q=0$ 时才成立。

矢量空间的维数

定理1.1.1 如果矢量空间V中N个矢量 $g_1,g_2,\ldots,g_N$ 是线性无关的，且V中任何矢量都可以用它们线性表出，那么V是N维的，且 $g_1,g_2,\ldots,g_N$ 构成V的一组基。

笛卡尔坐标系：单位正交基

1.2 欧氏空间中矢量的基本运算

- 欧式空间是定义了内积的矢量空间。

"欧几里德空间(Euclidean Space)，简称为欧氏空间，在数学中是对欧几里德所研究的2维和3维空间的一般化。这个一般化把欧几里德对于距离、以及相关的概念长度和角度，转换成任意数维的坐标系。 这是有限维、实和内积空间的"标准"例子。"

- **1.2.1 点积**

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=|\bar{u}||\bar{v}|cos(\theta)$$

其中，θ为矢量$\bar{u}$和$\bar{v}$的夹角。如果$\bar{u}\cdot\bar{v}=0$，称$\bar{u}$和$\bar{v}$正交

笛卡儿坐标系下：

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=\sum_{i=1}^{3}u_i v_i$$

点积分配律：

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

- **1.2.2 叉积**

在笛卡儿坐标系下：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

物理意义：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=ab\sin\theta\boldsymbol{n}$ 有方向的平行四边形面积。

分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

- **1.2.3 混合积**

三个矢量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$的混合积定义为：$[\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}]=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$ 交换行列式中任意两行，则行列式改变符号。

注意到：

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})=\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$$

课堂练习1，证明等式

$$[\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}]^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} \end{vmatrix}$$

证明过程如下：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_i u_i & u_i v_i & u_i w_i \\ v_i u_i & v_i v_i & v_i w_i \\ w_i u_i & w_i v_i & w_i w_i \end{vmatrix} = \left|\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}\right|$$

$|AB|=|A|\cdot|B|$

$$= \left|\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right| \cdot \left|\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}\right|$$

$det(A)=det(A^T)$

$$= [\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}]\cdot[\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}]^2$$

课题练习2，证明等式

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$$

证明过程如下：

因为

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=(v_2w_3-v_3w_2)\boldsymbol{e}_1+(v_3w_1-v_1w_3)\boldsymbol{e}_2+(v_1w_2-v_2w_1)\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_2w_3-v_3w_2 & v_3w_1-v_1w_3 & v_1w_2-v_2w_1\end{vmatrix}$$

经比较二式相同

而

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}\\&=(w_1u_1+w_2u_2+w_3u_3)(v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3)-\\&(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)(w_1\boldsymbol{e}_1+w_2\boldsymbol{e}_2+w_3\boldsymbol{e}_3)\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$

- 课后练习：用矢量表示证明余弦定理（a,b,c是三角形的三个边，C是顶角）

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

第一讲完

1.3 斜角直线坐标系

三维空间中的坐标系

三轴坐标基：**orthonormal basis (ONB), orthogonal basis (OB), and skew-angular basis (SAB)**

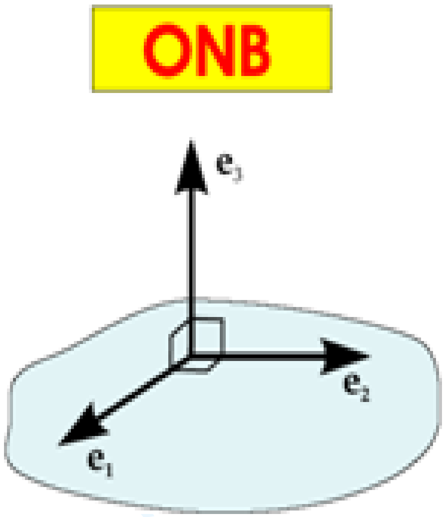


图 1.4 直角坐标系

$$\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3,\quad \mathbf{e}_3 \perp \mathbf{e}_1,$$

$$|\mathbf{e}_1| = 1,\quad |\mathbf{e}_2| = 1,\quad |\mathbf{e}_3| = 1.$$

- **1.3.1 直角坐标系下矢量的分解**

已知基矢量 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2$ 正交（即 $\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2 = 0$ ），如果要将 $\boldsymbol{P}$ 展开为

$$\boldsymbol{P} = P^1 \boldsymbol{g}_1 + P^2 \boldsymbol{g}_2 \qquad \textbf{(1.1)}$$

则将上式两端同时点乘 $\boldsymbol{g}_1$,由正交性可以得到：

$$P^1 = \frac{\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}_1}{\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_1} \qquad \textbf{(1.2)}$$

同理可得

$$P^2 = \frac{\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}_2}{\boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_2}$$

上式中 P^1 和 P^2 称为 $\boldsymbol{P}$ 的分量（即在基矢量 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2$ 下的坐标）。

- 显然：如果 g_1, g_2 正交且均是单位矢量（即对应坐标系为标准正交坐标系），则有 $P^1 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}_1, P^2 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}_2$（即标准正交坐标系中的矢量分量就是矢量在两个坐标轴上的投影）
- 对非交的基，必须引入逆变基矢量，才能得到分量的形式

➢ <u>几点注意</u>：

- 对于在曲线坐标系中的每一点，都有三个基 矢量
- 基矢量一般不是单位矢量，彼此也不正交；
- 基矢量可以有量纲，但一点的三个基矢量的量纲可以不同
- 基矢量不是常矢量，它们的大小和方向依赖于它们所在点的坐标。

• **1.3.2　二维空间中的斜角直线坐标系**

Einstein求和约定：式(1.1)也可以表示为

$$\boldsymbol{P} = P^1 \boldsymbol{g}_1 + P^2 \boldsymbol{g}_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} P^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha = P^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha$$

其中α为**哑指标**，满足以下规则：

(1)在同一项中，以一个上指标和一个下指标成对地出现，

α与β取值1，2；i，j与k取值1，2，3。

(2)每一对哑指标可以同时更换，其意义不变。如

$$\boldsymbol{P} = P^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha = P^\beta \boldsymbol{g}_\beta$$

自由指标：如 $P^1 = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}^1$，中的指标符号，满足规则：

(1)表达式中各项出现且只出现一次，**同为上或下指标**

(2) 一个表达式中的某个自由指标可以同时更换。

- 如右图：基矢量 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2$ 非正交，为了求$\boldsymbol{P}$的分量 P^1, P^2 引入 $\boldsymbol{g}^\alpha\ (\alpha=1,2)$，其中：

$$\boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}_1 = 0$$

$$\boldsymbol{g}^1 \cdot \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}_2 = 1$$

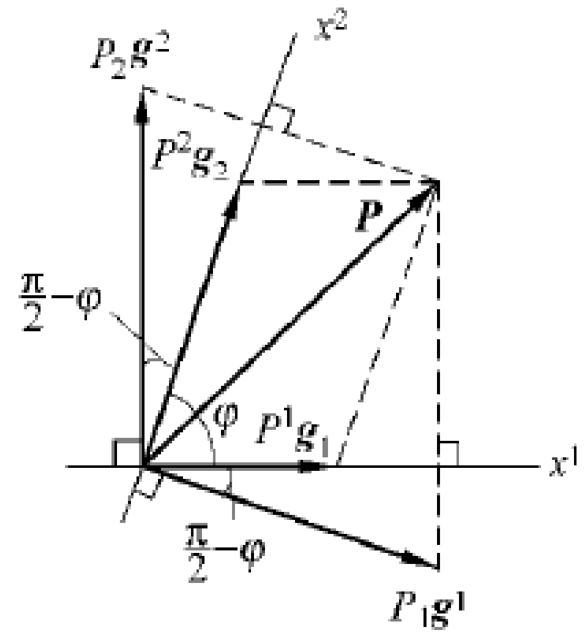


图 1.5 平面内斜角直线坐标系

称参考矢量 $\boldsymbol{g}_\alpha$ 为<u>协变基矢量</u>，与其对偶的参考矢量 $\boldsymbol{g}^\beta\ (\beta=1,2)$ 为<u>逆变基矢量</u>。它们所满足的关系可以统一写成对偶条件：

$$\boldsymbol{g}^\beta \cdot \boldsymbol{g}_\alpha = \delta_\alpha^\beta \quad (\alpha,\beta = 1,2)$$

式中 δ_α^β 称为 Kronecker δ，其值为

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & 当\alpha = \beta \\ 0 & 当\alpha \neq \beta \end{cases}$$

- **1.3.3　三维空间中的斜角直线坐标系**

三维空间中点 (x^1,x^2,x^3)的位置可用矢径$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x^1,x^2,x^3)$表示。

$$d\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}dx^i \triangleq \mathbf{g}_i dx^i$$

其中,$\boldsymbol{g}_i \triangleq \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$ 称为协变基矢量（covariant vector）。$\boldsymbol{g}_i$ 的几何意义是：坐标 x^i 发生微小变化时矢径的增量。

- 对于任何坐标系，首先必须知道在该坐标系中如何度量长度。在曲线坐标系中，线元矢量dr长度的平方为：

$$ds^2=d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=\mathbf{g}_i dx^i\cdot\mathbf{g}_j dx^j=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j dx^i dx^j$$

写写看

$\vec{u}.\vec{v} = u^i\vec{g}_i v_j\vec{g}^j = u^i v_i = u^j v_j$

$= u^i\vec{g}_i v^j\vec{g}_j = u^i v^j \vec{g}_{ij}$

$= u_i\vec{g}^i v^j\vec{g}_j = u_i v^i = u_j v^j$

$= u_i\vec{g}^i v_j\vec{g}^j = u_i v_j \vec{g}^{ij}$

判断协变基矢量，逆变基矢量

$u^i = \vec{u}.\vec{g}^i$ 逆变基矢量

$\vec{u}.\vec{g}^i = u^j\vec{g}_j\vec{g}^i = u^j\delta_j^i = u^i$

$u_j = \vec{u}.\vec{g}_j$ 协变基矢量

例题：求 $\sqrt{g}=\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)$ 对曲线坐标的导数

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\xi^i}=\frac{\partial[\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)]}{\partial\xi^i}$$

$$=\frac{\partial\boldsymbol{g}_1}{\partial\xi^i}\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)+\boldsymbol{g}_1\cdot(\frac{\partial\boldsymbol{g}_2}{\partial\xi^i}\times\boldsymbol{g}_3)+\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\frac{\partial\boldsymbol{g}_3}{\partial\xi^i})$$

$$=\Gamma_{i1}^{k}\boldsymbol{g}_k\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)+\Gamma_{i2}^{k}\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{g}_3)+\Gamma_{i3}^{k}\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_k)$$

$$=(\Gamma_{i1}^{1}+\Gamma_{i2}^{2}+\Gamma_{i3}^{3})\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)$$

$$=\Gamma_{ik}^{k}\sqrt{g}$$

$k\neq 3$ 则该项为零

$$\Gamma_{ik}^{k}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\xi^i}=\frac{\partial\, ln(\sqrt{g})}{\partial\xi^i}$$

逆变基矢量性质：

- 对应与某个协变基矢量的逆变基矢量与其他所有协变基矢量正交；
- 对应与某个协变基矢量的逆变基矢量与该协变基矢量点积为**1**；
- 协变基矢量与逆变基矢量是相互的。
- 笛卡儿坐标系中，协变基矢量和逆变基矢量重合。

- **1.3.4 三维空间中逆变基矢量的求解方法**

矢径：从原点出发 $\vec{r} = x^1\vec{g}_1 + x^2\vec{g}_2 + x^3\vec{g}_3 = x^i\vec{g}_i$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} dx^i = dx^i \vec{g}_i$$

其中，定义 $\vec{g}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}$

(1) 根据定义，由叉积求

设 $g^1 = \alpha g_2 \times g_3$，其中 α 待定，由定义

$$g^1 \cdot g_1 = \alpha(g_2 \times g_3) \cdot g_1 = 1$$

得到 $\alpha = \dfrac{1}{(g_2 \times g_3) \cdot g_1}$，从而

$$g^1 = \frac{g_2 \times g_3}{(g_2 \times g_3) \cdot g_1}$$

当 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 构成右手系时，混合积为正值，记

$$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3]=\sqrt{g}$$

即：

$$\boldsymbol{g}^1=\frac{1}{\sqrt{g}}(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)$$

$$\boldsymbol{g}^2=\frac{1}{\sqrt{g}}(\boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_1)$$

$$\boldsymbol{g}^3=\frac{1}{\sqrt{g}}(\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2)$$

(2) 由互逆关系求（思路：度量张量的逆变分量与协变分量构成的矩阵具有互逆关系：$[g^{ij}]=[g_{ij}]^{-1}$ ）

设 $\boldsymbol{g}^i=g^{ik}\boldsymbol{g}_k$，$\boldsymbol{g}_i=g_{ik}\boldsymbol{g}^k$， 两边各点乘 $\boldsymbol{g}^j$ 和 $\boldsymbol{g}_j$， 得到

$g^{ij}=\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^j$， 分别称为度量张量的逆、协变分量

$g_{ij}=\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j$

- 将 $\boldsymbol{g}_i = g_{ik}\boldsymbol{g}^k$ 两边点乘$\boldsymbol{g}^j$ 得到

$$\delta_i^j = g_{ik}\boldsymbol{g}^k \cdot \boldsymbol{g}^j = g_{ik}g^{kj}$$

上式写成矩阵形式为 $\left[g^{ij}\right]=\left[g_{ij}\right]^{-1}$

➢ 以上矩阵互逆关系可用于求解高于3维的坐标系的逆变基矢量：首先求出 $g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j$ ；再求出$\left[g^{ij}\right]=\left[g_{ij}\right]^{-1}$；最后根据 $\boldsymbol{g}^i = g^{ik}\boldsymbol{g}_k$ 得到逆变基矢量。

1.3.4 度量张量的作用

$$det([g_{ij}]) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_3 \\ \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_3 \\ \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_3 \end{bmatrix} = \left(\boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3)\right)^2 \triangleq g$$

- 度量张量的作用

- $p^i = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}^i = p_j \boldsymbol{g}^j \cdot \boldsymbol{g}^i = p_j g^{ij}$（度量张量的逆变分量有升指标的作用）
- $p_i = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}_i = p^j \boldsymbol{g}_j \cdot \boldsymbol{g}_i = p^j g_{ij}$（度量张量的协变分量有降指标的作用）

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_i \boldsymbol{g}^i \cdot v^j \boldsymbol{g}_j = u_i v^i = g^{ij} u_i u_j = g_{ij} u^i v^j \neq u_i v_i$$

- 斜角坐标系中矢量的点积

$$\boldsymbol{u} \cdot v = u^i \boldsymbol{g}_i \bullet v_j \boldsymbol{g}^j = u^i v_j \delta_i^j = u^i v_i \qquad (*)$$

或者 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_i\boldsymbol{g}^i\bullet v_j\boldsymbol{g}^j=u_i v_j g^{ij}$

以上两式相比较，可知g^{ij}有升指标的作用。

同理，由 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u^i\boldsymbol{g}_i\bullet v^j\boldsymbol{g}_j=u^i v^j g_{ij}$ 和式(*)相比知，g_{ij} 有降指标的作用。

- 练习：

三维空间中，根据协变基求逆变基

$\vec{g}_1=\mathbf{i}$，$\vec{g}_2=\mathbf{i}+\mathbf{j}$，$\vec{g}_3=\mathbf{i}+\mathbf{k}$

求：其对应的逆变分量

曲线坐标系

- **1.4.1 曲线坐标系的概念**
- 力学中球对称问题更易于在球坐标系(spherical polar coordinates)中施加边界条件和求解，圆柱问题更易于在柱坐标系(cylinder coordinates)施加边界条件和求解。这类坐标系的特点是坐标线并非直线。球坐标系和柱坐标系均是典型的曲线坐标系(曲线坐标系中坐标面是曲面，坐标线是曲线，因此得名)。
- 任何一点在曲线坐标系中的坐标和其在笛卡尔（Cartesian）坐标系的坐标有**一一对应**的关系
- 曲线坐标：确定空间中一点所用的参数

- ①矢径

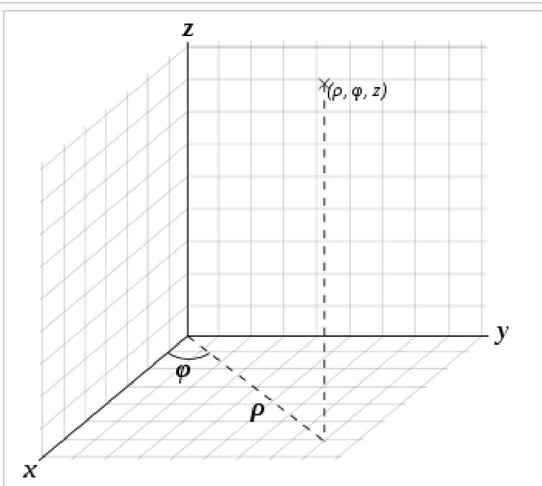
$$\boldsymbol{r} = x^1(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\boldsymbol{e}_1 + x^2(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\boldsymbol{e}_2 + x^3(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\boldsymbol{e}_3$$
$$= x^i(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\boldsymbol{e}_i$$

映射：点到矢径

- ②典型的曲线坐标系

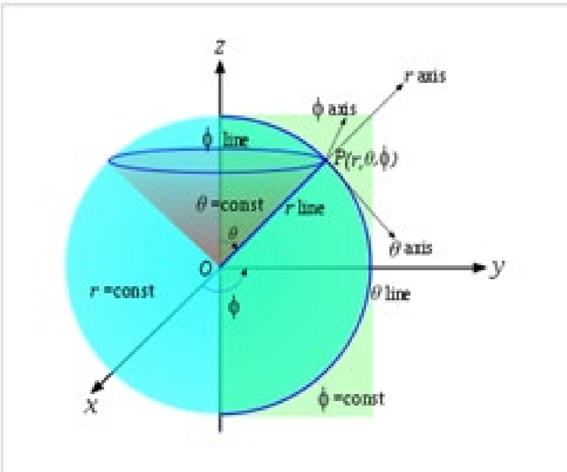
柱坐标系：　$x = r\cos\theta; y = r\sin\theta; z = z$

球坐标系：　$x = r\sin\theta\cos\varphi; y = r\sin\theta\sin\varphi; z = r\cos\theta$



A point plotted with cylindrical coordinates

1 柱坐标系



2 球坐标系

- ③曲线坐标的必要条件

$$det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\right)\neq 0$$

这是为了保证 $$\begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\xi^1 \\ d\xi^2 \\ d\xi^3 \end{bmatrix}$$

有唯一解（点到曲线坐标的一一对应）

注： $$J=\begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{bmatrix}$$ 称为Jacobian矩阵

- **坐标线：**只连续改变一个曲线坐标所对应的点形成的轨迹，通常是一条曲线
- **坐标面：**只保持一个坐标不变时，空间各点的集合构成的曲面。

- **1.4.2 空间点的局部基矢量**
- 协变基矢量：坐标线沿矢径增加方向的切线

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i}=\frac{\partial x^1}{\partial \xi^i}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial x^2}{\partial \xi^i}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial x3}{\partial \xi^i}\boldsymbol{e}_3$$

- 几何意义：协变基矢量为曲线坐标给定微小变化时矢径的增量。
- 极坐标系下的协变基矢量

$$\boldsymbol{r}=(r\cos\theta)e_1+(r\sin\theta)\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{g}_1=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^1}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2;\left|\boldsymbol{g}_1\right|=1$$

$$\boldsymbol{g}_2=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^2}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}=-r\sin\theta\boldsymbol{e}_1+r\cos\theta\boldsymbol{e}_2;\left|\boldsymbol{g}_2\right|=r$$

$$\boldsymbol{g}_3=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^3}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}=\boldsymbol{e}_3;\left|\boldsymbol{g}_3\right|=1$$

- 练习1：对柱坐标系$x = r\cos\theta; y = r\sin\theta; z = z$，验证

$$\boldsymbol{r} \neq \xi^1 \boldsymbol{g}_1 + \xi^2 \boldsymbol{g}_2 + \xi^3 \boldsymbol{g}_3$$

- 但可验证 $d\boldsymbol{r} = dr\boldsymbol{g}_1 + d\theta\boldsymbol{g}_2 + dz\boldsymbol{g}_3$

- 可见：曲线坐标系协变基矢量与位置有关（是曲线坐标的函数），模也未必是1。

- 练习2：求球坐标系下的协变基矢量

- 曲线坐标系中逆变基矢量的推导
- **方法1**：由于曲线坐标的独立性，有

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^j}=\delta^i_j \Rightarrow \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^j}=\delta^i_j$$

- 又由 $\dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^k}{\partial \xi^j}=\dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_m\dfrac{\partial x^m}{\partial \xi^j}\overset{\boldsymbol{g}_j=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^j}}{=}\left(\dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_k\right)\cdot\boldsymbol{g}_j$

$$\Rightarrow \boldsymbol{g}^i=\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_k$$

- 即逆变基矢量是坐标面的梯度：$\boldsymbol{g}^i=\nabla\xi^i$

$$\boldsymbol{g}^i=\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_k$$

$$\boldsymbol{g}^1=\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial \xi^1}{\partial x^3}\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{g}^2=\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial \xi^2}{\partial x^3}\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{g}^3=\frac{\partial \xi^3}{\partial x^1}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial \xi^3}{\partial x^2}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial \xi^3}{\partial x^3}\boldsymbol{e}_3$$

- **方法2**：也可这样证明 $\boldsymbol{g}^i=\nabla\xi^i$ 是逆变基矢量：

$$\nabla\xi^i\cdot\boldsymbol{g}_j=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{g}_j\overset{\boldsymbol{g}_j=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi^j}}{=}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_k\cdot\frac{\partial x^l}{\partial\xi^j}\boldsymbol{e}_l$$

$$=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\xi^j}=\frac{\partial\xi^i}{\partial\xi^j}=\delta^i_j$$

- 由逆变基矢量定义，知 $\boldsymbol{g}^i=\nabla\xi^i$ 是逆变基矢量。

- 1.5　坐标转换
- 矢量具有客观性（但矢量分量不具有客观性），不依赖于坐标系。可以在不同的坐标系内对某一矢量进行描述，为此需要对矢量分量进行变换（坐标变换）。
- 不同的坐标系是以其基矢量表征的，为了对新老坐标系中的矢量分量进行转换，必须首先已知新老坐标系间基矢量的转换关系。
- 1.5.1　基矢量的转换关系

用标记 i 和 i' 分别标记老坐标系和新坐标系，设两个坐标系的基矢量满足

$$\boldsymbol{g}_{i'} = \beta_{i'}^{j} \boldsymbol{g}_j$$

$$\boldsymbol{g}^{i'} = \beta_{j}^{i'} \boldsymbol{g}^j$$

则 $\beta_{i'}^{j}$ 和 $\beta_{j}^{i'}$ 分别称为协变转换系数和逆变转换系数。

- $\delta_{i'}^{j'} = \boldsymbol{g}^{j'} \cdot \boldsymbol{g}_{i'} = \beta_l^{j'} \boldsymbol{g}^l \cdot \beta_{i'}^m \boldsymbol{g}_m = \beta_m^{j'} \beta_{i'}^m$（即两种转换系数组成的矩阵有下列互逆关系）

$$\begin{bmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1'}^{1} & \beta_{2'}^{1} & \beta_{3'}^{1} \\ \beta_{1'}^{2} & \beta_{2'}^{2} & \beta_{3'}^{2} \\ \beta_{1'}^{3} & \beta_{2'}^{3} & \beta_{3'}^{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

两个很有用的关系：$\beta_j^{i'} = \boldsymbol{g}_j \cdot \boldsymbol{g}^{i'}$　$\beta_{i'}^{j} = \boldsymbol{g}_{i'} \cdot \boldsymbol{g}^{j}$

试证明 ？？

这两个关系可用于在已知新老坐标基矢量时求得坐标转换系

还可证明协变转换系数和逆变转换系数也可将新基矢量变换为旧基矢量，即

$$\boldsymbol{g}_i = \beta_i^{j'} \boldsymbol{g}_{j'}$$

$$\boldsymbol{g}^i = \beta_{j'}^{i} \boldsymbol{g}^{j'}$$

- 证明过程如下：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{g}_j \cdot \boldsymbol{g}^{i'} = \boldsymbol{g}_j \cdot \beta^{i'}_k \boldsymbol{g}^k = \beta^{i'}_k \delta^k_j = \beta^{i'}_j \\ \beta^{k'}_j \boldsymbol{g}_{k'} \cdot \boldsymbol{g}^{i'} = \beta^{k'}_j \delta^{i'}_{k'} = \beta^{i'}_j \end{aligned}\right\}$$

两式相减得

$$(\beta^{k'}_j \boldsymbol{g}_{k'} - \boldsymbol{g}_j) \cdot \boldsymbol{g}^{i'} = 0 \quad (i', j = 1,2,3)$$

所以 $\boldsymbol{g}_j = \beta^{k'}_j \boldsymbol{g}_{k'}$

- **1.5.2 转换系数和曲线坐标间的关系**

将旧坐标写为新坐标的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\xi^j(\xi^{i'}))=\boldsymbol{r}(\xi^1(\xi^{1'},\xi^{2'},\xi^{3'}),\xi^2(\xi^{1'},\xi^{2'},\xi^{3'}),\xi^3(\xi^{1'},\xi^{2'},\xi^{3'}))$$

由于

$$\boldsymbol{g}_{i'}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^{i'}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^{j}}\frac{\partial \xi^{j}}{\partial \xi^{i'}}=\frac{\partial \xi^{j}}{\partial \xi^{i'}}\boldsymbol{g}_j$$

$$\boldsymbol{g}_{i}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^{i}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^{j'}}\frac{\partial \xi^{j'}}{\partial \xi^{i}}=\frac{\partial \xi^{j'}}{\partial \xi^{i}}\boldsymbol{g}_{j'}$$

对比 $\boldsymbol{g}_{i'}=\beta_{i'}^{j}\boldsymbol{g}_j$　$\boldsymbol{g}^{i'}=\beta_{j}^{i'}\boldsymbol{g}^j$ 得到

$$\beta_{i'}^{j}=\frac{\partial \xi^{j}}{\partial \xi^{i'}}$$

（转换系数和曲线坐标间的关系）

$$\beta_{i}^{j'}=\frac{\partial \xi^{j'}}{\partial \xi^{i}}$$

- **1.5.3 矢量分量的坐标转换关系**

- 矢量分量：协变分量（对逆变基的分解系数）、逆变分量（对协变基的分解系数），由 $\boldsymbol{v}=v^j\boldsymbol{g}_j=v^j\beta_j^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}$ ，又 $\boldsymbol{v}=v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}$ ，得到 $v^{i'}=\beta_j^{i'}v^j$

  同理，可得到 $v_{i'}=\beta_{i'}^{j}v_j$

- 由上述可知：矢量分量与基矢量具有相同的转换关系。
- 对曲线坐标系下的分量，度量张量的指标升降关系同样成立，如：

$$v^i=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}^i=v_k\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}^i=v_k g^{ki}$$

$$v_i=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}_i=v^k\boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}_i=v^k g_{ki}$$

➢ 并矢：

- 并矢的表示方法形如：$\boldsymbol{abcd}$（有的书中为$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}$）
  其运算法则与矩阵相乘完全相同，满足分配律和结合律（不满足交换律），如：

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{bd}$$

$$\boldsymbol{ab}\neq\boldsymbol{ba}$$

$$\boldsymbol{abcd}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bcd})=(\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{cd})$$

①并矢是张量 $\boldsymbol{ab}=a^i b^j \boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=a^{i'}b^{j'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}=a^i b^j \beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}$

②并矢与矢量的点积

$$(\boldsymbol{abc})\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{ab}$$

$$\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{abc})=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{bc}$$

- **1.6　张量的基本概念**
- **1.6.1　矢量的定义**

➢ 如果三维空间中的物理量可用3个有序数 v_i（或另3个有序数 v^i ）表示，并且当坐标变换时，满足

$$v_{i'} = \beta_{i'}^{j} v_j \qquad v^{i'} = \beta_{j}^{i'} v^j$$

，其中，$\beta_{i'}^{j} = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}, \beta_{j}^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$ 为协变转换系数和逆变转换系数；则该物理量称为矢量。

➢ 矢量可以表示为分量（如 u_i, v^i ）或实体（如 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ ）。

- **1.6.2 张量（tensor）的定义**
- 当坐标系改变时满足上述坐标转换关系的有序数的集合称为张量。张量的自由指标的个数称为张量的阶数。

例如，如果9个有序数$T_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 在坐标变换时满足：

$$T^{i'j'}=\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}T^{ij}\ (i',i=1,2,3;j',j=1,2,3)$$

则这组数的集合就是二阶张量。

- 按照逆（协）变转换系数变换的张量分量称为张量的逆（协）变分量，用上（下）标进行标识。
- 张量分量转换时既有逆变转换系数，又有协变转换系数，则称其为混变分量，在上下指标空位处用圆点标识。
- 特点：每个指标都按照矢量分量变化规律变化

- 根据上述定义，可以给出张量分量坐标变换的如下例子（指标顺序不可更换）：

$$T_{i'j'} = \beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}T_{ij}\ (i',j'=1,2,3)$$

$$T^{i'j'} = \beta_{i}^{i'}\beta_{j}^{j'}T^{ij}\ (i',j'=1,2,3)$$

$$T_{\cdot j'\cdot}^{i'\cdot k'} = \beta_{i}^{i'}\beta_{j'}^{j}\beta_{k}^{k'}T_{\cdot j\cdot}^{i\cdot k}\ (i',j',k'=1,2,3)$$

$$T_{\cdot\cdot k'l'}^{i'j'} = \beta_{i}^{i'}\beta_{j}^{j'}\beta_{k'}^{k}\beta_{l'}^{l}T_{\cdot\cdot kl}^{ij}\ (i',j',k',l'=1,2,3)$$

已知：截面的面力 f^i 和外法线 n_j 是矢量，它们与应力 σ^{ij} 分量满足关系 $f^i=\sigma^{ij}n_j$

证明：应力 σ^{ij} 是二阶张量。

证：当坐标系变换时，有 $f^{i'}=\sigma^{i'j'}n_{j'}$ + 条件 $\begin{cases} n_j=\beta_j^{j'}n_{j'} \\ f^{i'}=\beta_i^{i'}f^i \end{cases}$

必有 $\sigma^{i'j'}=\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\sigma^{ij}$

因次，应力 σ^{ij} 是二阶张量。

- 又如，度量张量分量满足：

$$g^{i'j'} = \boldsymbol{g}^{i'} \cdot \boldsymbol{g}^{j'} = \beta_i^{i'} \beta_j^{j'} \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j = \beta_i^{i'} \beta_j^{j'} g^{ij}$$

$$g_{i'j'} = \boldsymbol{g}_{i'} \cdot \boldsymbol{g}_{j'} = \beta_{i'}^{i} \beta_{j'}^{j} \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = \beta_{i'}^{i} \beta_{j'}^{j} g_{ij}$$

因此，度量张量被称为张量）

- **1.6.3 张量的两种表示方法**
- 1)分量表示法

在同一个坐标系下，张量分量的指标升降必须利用度量张量的协变分量和逆变分量完成，例如：

$$T^{ij} = g^{ir} g^{js} T_{rs} = g^{ir} T_{r}^{\cdot j} = g^{js} T^{i}_{\cdot s}$$

$$T_{ij} = g_{ir} g_{js} T^{rs} = g_{ir} T^{r}_{\cdot j} = g_{js} T_{i}^{\cdot s}$$

$$T_{ijk} = g_{ir} g_{js} g_{kt} T^{rst} = g_{ir} T^{r}_{\cdot jk} = g_{js} T_{i \cdot k}^{\cdot s \cdot} = g_{ir} g_{js} T^{rs}_{\cdot \cdot k}$$

- 2)实体表示法（或称整体表示法、并矢表示法）
- 对于矢量 $\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{g}_i=v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}=v^i\beta_i^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}$

实体表示法中，将张量表示为各分量与基矢量的组合。

实体表示法例子：$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j=T^i_{\cdot j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j=T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$

注意：张量分量的指标可以与相配的基矢量指标相应上升和下降。

式中，$\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$ 是$\boldsymbol{g}^i$和$\boldsymbol{g}^j$的并矢，称为基张量。

基张量本身仍满足指标升降关系，如：

$$\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j=g^{ir}g^{js}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s$$

由上式，$T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j=T_{ij}g^{ir}g^{js}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s=T_{kl}g^{ki}g^{lj}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$，又因 $T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j=T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$，根据基张量的线性无关性质和度量张量的对称性，可知：

$$T^{ij}=g^{ki}g^{lj}T_{kl}=g^{ik}g^{jl}T_{kl}$$

- 张量的特点：坐标变换时，张量实体不因坐标转换而变化。即对于二阶张量：

$$\boldsymbol{T} = T_{i'j'}\boldsymbol{g}^{i'}\boldsymbol{g}^{j'} = T^{i'j'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'} = T^{i'}_{\cdot j'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}^{j'} = T_{i'}^{\cdot j'}\boldsymbol{g}^{i'}\boldsymbol{g}_{j'}$$

$$= T_{ij}\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}^{j} = T^{ij}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}_{j} = T^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_{i}\boldsymbol{g}^{j} = T_{i}^{\cdot j}\boldsymbol{g}^{i}\boldsymbol{g}_{j}$$

（注意其中 $T^{i'j'} = \beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}T_{ij}$；$T^{ij} = g^{ir}g^{js}T_{rs} = g^{ir}T_{r}^{\cdot j} = g^{js}T^{i}_{\cdot s}$ ）

➢ 张量的基底是基矢量的并矢：$\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j;\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j;\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j;\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j$

$$\boldsymbol{T}=T_{ij}^{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_l$$

- 并矢的顺序要与指标顺序相同
- 基矢量指标与分量指标要构成哑指标
- 整体表示自然满足张量定义

$$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j=T_{i'j'}\boldsymbol{g}^{i'}\boldsymbol{g}^{j'}=T_{ij}\beta^i_{i'}\beta^j_{j'}\boldsymbol{g}^{i'}\boldsymbol{g}^{j'}$$

- 指标升降规律与矢量分量的指标升降规律相同
- $\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j=T_i^{\cdot j}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j=T_{ij}g^{kj}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_k=T_{ik}g^{kj}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j$ （练习写写看）

$$T_i^{\cdot j}=T_{ik}g^{kj}$$

- 同理：$T^{ij}=T_{kl}g^{ik}g^{jl}\quad T_j^{\cdot i}=T_{jl}g^{li}$

✓ 指标升降不可改变指标顺序（在同一竖直线上升降）

- **1.6.4 度量张量的性质**
- 度量张量表示为：$\boldsymbol{G} = g^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j = \boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^i$
- 矢量或张量与度量张量点乘的结果仍为其本身：

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{G} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_i = v^i\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}^i v_i = \boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{G} = T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\cdot\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_k = T^{ij}\boldsymbol{g}_i\delta_j^k\boldsymbol{g}_k = T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j = \boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{T} = \boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^k\cdot(T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j) = T^{ij}\boldsymbol{g}_k\delta_i^k\boldsymbol{g}_j = T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j = \boldsymbol{T}$$

- 度量张量是对称张量

$$g^{ij} = g^{ji} \qquad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^i$$

- 度量张量的混变分量是Kronecker δ ：

$g^i_{\cdot j} = g^{ir}g_{rj} = \delta^i_j$（度量张量分量的互逆性，见书中式1.2.23a）

- 作业：

1.证明：由$\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)$ 组成的一组量是三阶张量

答案：令新老坐标系下的运算结果表示为

$$T_{ijk}=\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)\text{和 }T_{i'j'k'}=\boldsymbol{g}_{i'}\cdot(\boldsymbol{g}_{j'}\times\boldsymbol{g}_{k'})$$

$$T_{i'j'k'}=\boldsymbol{g}_{i'}\cdot(\boldsymbol{g}_{j'}\times\boldsymbol{g}_{k'})=\beta_{i'}^{i}\boldsymbol{g}_i\cdot(\beta_{j'}^{j}\boldsymbol{g}_j\times\beta_{k'}^{k}\boldsymbol{g}_k)$$
$$=\beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}\beta_{k'}^{k}\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)=\beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}\beta_{k'}^{k}T_{ijk}$$

因此，题中运算的结果满足张量的坐标变换关系，所以是张量。

2.　1.10　1.11　1.13　1.18

- **练习：**
- 1)判断下列等式的对错

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$$

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})$$

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{g}^i$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_iv^i$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_iv_jg_{ij}$$

$$v_i=v_jg_{ij}$$

$$v_i=v_jg^{ij}$$

$$\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=\delta^i_j$$

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j=g^{ij}$$

$$[g^{ij}]=[g_{ij}]^{-1}$$

$$v_{i'}=\beta^j_{i'}v_j$$

$$v^{i'}=\beta^{i'}_jv^j$$

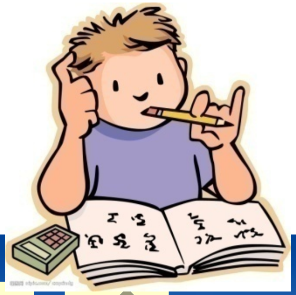
$$\boldsymbol{g}_{i'}=\beta^j_{i'}\boldsymbol{g}_j$$

$$\boldsymbol{g}^{i'}=\beta^j_{i'}\boldsymbol{g}^j$$

$$\boldsymbol{g}^{i'}=\beta^{i'}_j\boldsymbol{g}_j$$

$$(\boldsymbol{ab})\bullet\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\bullet(\boldsymbol{ab})$$

$$T_i^{\cdot j}=T_{ki}g^{kj}$$



- **1.7** 张量的代数运算
- **1.7.1** 张量的相等
- 若两个张量 T，S在同一个坐标系中的逆变（或协变，或某一混变）分量一一相等，即

$$T^{ij\cdots} = S^{ij\cdots} \qquad (i,j,\cdots = 1,2,3)$$

- 则此两个张量的其它一切分量均一一相等：

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}$$

- **1.7.2** 张量的相加
- 分量 $\quad T^{ij\cdots} + S^{ij\cdots} = U^{ij\cdots} \qquad (i,j,\cdots = 1,2,3)$
- 实体 $\quad \boldsymbol{T} + \boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}$

- **1.7.3 标量与张量相乘（数乘）**
- 若将张量在某一坐标系中的逆变（或协变，或任一种混变）分量乘以标量 k（k可以因点而异，但不随坐标变化而变化）则得到一组数，也是张量的逆变（或协变，或任一种混变）分量，即

$$kT^{ij\cdots} = U^{ij\cdots} \qquad (i,j,\cdots = 1,2,3)$$

- 等价写法 $k\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}$
- **1.7.4 张量的并乘**
- 实体形式： $\boldsymbol{TS} = \boldsymbol{U}$
- 分量形式： $T^{ij}S^{kl} = U^{ijkl}$

并乘次序不能任意调换。

- **1.7.5 张量的缩并**

缩并：张量的任意两个基矢量进行点积。

$$\boldsymbol{S} = T^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l = T^{ij}_{\cdot kl}\delta^l_j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k = T^{ij}_{\cdot kj}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k \triangleq S^i_{\cdot k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k$$

- 证明张量缩并后的结果仍是张量：

已知T是张量，所以有 $T^{i'j'}_{..k'l'}=\beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}\beta^{k}_{k'}\beta^{l}_{l'}T^{ij}_{..kl}$ ，又张量缩并后的结果满足 $S^{i'}_{.k'}\triangleq T^{i'r'}_{..k'r'}$,将上式指标 j',l'换为r' ，得到

$$S^{i'}_{.k'}=\beta^{i'}_{i}\beta^{r'}_{s}\beta^{k}_{k'}\beta^{n}_{r'}T^{is}_{..kn}=\beta^{i'}_{i}\beta^{k}_{k'}\delta^{n}_{s}T^{is}_{..kn}$$
$$=\beta^{i'}_{i}\beta^{k}_{k'}T^{is}_{..ks}=\beta^{i'}_{i}\beta^{k}_{k'}S^{i}_{.k}$$

即满足张量的坐标变换关系，因此是张量。

- 缩并后，张量阶数减2
- 两个矢量缩并为0阶张量
- 标量为零阶张量

- **1.7.6 张量的点积**
- **点积：**张量 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 先并乘，然后对各自的任意两个基矢量进行缩并的运算称为点积。
- 例如：

$$\boldsymbol{T}=T^{ij}_{..kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l\ ,\ \boldsymbol{S}=T^{rs}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s$$

则
$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}=T^{ij}_{..kl}S^{rs}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l\cdot\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s=T^{ij}_{..kl}S^{rs}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\delta^l_r\boldsymbol{g}_s$$
$$=T^{ij}_{..kl}S^{ls}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_s$$

并联式双点积，例如：

$$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}=T^{ij}_{..kl}S^{rs}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l:\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s=T^{ij}_{..kl}S^{rs}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\delta^k_r\delta^l_s$$
$$=T^{ij}_{..kl}S^{kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$$

- 串联式双点积，例如：

$$\boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{S} = T^{ij}_{\cdot\cdot kl} S^{rs} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}^l \cdot\cdot \boldsymbol{g}_r \boldsymbol{g}_s = T^{ij}_{\cdot\cdot kl} S^{rs} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \delta^l_r \delta^k_s$$

$$= T^{ij}_{\cdot\cdot kl} S^{lk} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j$$

- 注意：如果一对协变基矢量进行点积，结果中将出现度量张量的协变分量。

例：应变能密度

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\sigma^{ij}\boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j : \varepsilon_{kl} \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}^l = \frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{kl}\delta^k_i \delta^l_j = \frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}$$

- **1.7.7 转置张量**

- **张量的转置：**保持基矢量并矢顺序改变其中一对分量指标的顺序（指标的上下位置保持不变）所得到的张量（或保持分量指标顺序改变基矢量指标并矢顺序）
- 注意：转置并不是交换指标符号，而是仅改变前后顺序，不改变上下位置。
- 四阶张量 $\boldsymbol{T}=T^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$ 对2,3指标的转置张量是 $\boldsymbol{S}=T^{i\cdot j}_{\cdot k\cdot l}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$
- 对二阶张量（介绍张量阶的概念）$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ 表示转置：
- 若 $\boldsymbol{T}=T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$，则 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=T^{ji}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j=T_{j}^{\cdot i}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j=T^{j}_{\cdot i}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_j=T_{ji}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$

- 若$S=T$则称该张量对于相应两个指标对称。
- 若$S=-T$则称该张量对于相应两个指标反对称。
- 对称化运算：将任一张量 T 的分量指标中某两个指标顺序互换，得到张量 S，并按下式构成新张量

$$A=\frac{1}{2}(T+S)$$

则 A 对于该两个指标具有对称性。这种运算称为张量 T 的对称化。

- 反对称化运算： 如按下式由张量 T 和 S构成新张量

$$B=\frac{1}{2}(T-S)$$

则 B 对于该两个互换的指标具有反对称性。这种运算称为张量 T 的反对称化。

- **1.7.8 张量的商法则**
- 定义详见p32

如果 $T(i,j,k,l,m)S^{lm}=U^{ijk}$

则 $T(i',j',k',l',m')S^{l'm'}=U^{i'j'k'}$

U是张量推到 $U^{i'j'k'}=\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}U^{ijk}=\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}T(i,j,k,l,m)S^{lm}$

$$=\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}\beta_{l'}^{l}\beta_{m'}^{m}T(i,j,k,l,m)S^{l'm'}$$

$$T(i',j',k',l',m')=\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}\beta_{l'}^{l}\beta_{m'}^{m}T(i,j,k,l,m)$$

$$T(i,j,k,l,m)=T^{ijk}_{\cdots lm}$$

所以T是张量

- 例如： 根据 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ 知应力是二阶张量。（前已证明，这里可以用商法则再次证明）

- **1.8 张量的矢积**
- **1.8.1 置换符号（Permutation symbol）e^{ijk}**

e^{ijk} 中指标取值范围是 $i,j,k=1,2\ or\ 3$

偶置换得到顺序排列，如123，231，312；

奇置换得到逆序排列，如132，213，321；

$$e_{ijk}=e^{ijk}=\begin{cases}1 & i,j,k\ \text{顺序排列}\\ -1 & i,j,k\ \text{逆序排列}\\ 0 & i,j,k\ \text{非序排列}\end{cases}$$

➢ 约定 $[a^m_{.n}]$ 代表3x3矩阵，前一指标为行号，后一指标为列号，则其行列式为：

$$\det(a^m_{.n})=\begin{vmatrix}a^1_{.1} & a^1_{.2} & a^1_{.3}\\ a^2_{.1} & a^2_{.2} & a^2_{.3}\\ a^3_{.1} & a^3_{.2} & a^3_{.3}\end{vmatrix}=a^1_{.1}a^2_{.2}a^3_{.3}+a^2_{.1}a^3_{.2}a^1_{.3}+a^3_{.1}a^1_{.2}a^2_{.3}-a^3_{.1}a^2_{.2}a^1_{.3}-a^2_{.1}a^1_{.2}a^3_{.3}-a^1_{.1}a^3_{.2}a^2_{.3}$$

- 上式利用置换符号可写为

- $\det(a^{m}_{.n}) = a^{i}_{.1}a^{j}_{.2}a^{k}_{.3}e_{ijk}$ 或 $\det(a^{m}_{.n}) = a^{1}_{.i}a^{2}_{.j}a^{3}_{.k}e^{ijk}$

如果交换上述行列式中第1,2列，则行列式改变符号，即

$$\det\begin{bmatrix} a^1_2 & a^1_1 & a^1_3 \\ a^2_2 & a^2_1 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_1 & a^3_3 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{bmatrix}$$

上式利用置换符号可写为

$$\det\begin{bmatrix} a^1_2 & a^1_1 & a^1_3 \\ a^2_2 & a^2_1 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_1 & a^3_3 \end{bmatrix} = e_{213}\det\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{bmatrix} = e_{213}a^{i}_{.1}a^{j}_{.2}a^{k}_{.3}e_{ijk}$$

- 推广到一般情况

$$\begin{vmatrix} a_l^1 & a_m^1 & a_n^1 \\ a_l^2 & a_m^2 & a_n^2 \\ a_l^3 & a_m^3 & a_n^3 \end{vmatrix} = e_{lmn} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_l^i & a_m^i & a_n^i \\ a_l^j & a_m^j & a_n^j \\ a_l^k & a_m^k & a_n^k \end{vmatrix} = e^{ijk} e_{lmn} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

- 特别地：

$$\begin{vmatrix} \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_r^j & \delta_s^j & \delta_t^j \\ \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \end{vmatrix} = e^{ijk} e_{rst} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{ijk} e_{rst} \triangleq \delta_{rst}^{ijk}$$

$$= \delta_r^i \delta_s^j \delta_t^k + \delta_s^i \delta_t^j \delta_r^k + \delta_t^i \delta_r^j \delta_s^k - \delta_s^i \delta_r^j \delta_t^k - \delta_r^i \delta_t^j \delta_s^k - \delta_t^i \delta_s^j \delta_r^k$$

- 以上定义了**广义Kronecker** δ **张量（6阶张量）**,其分量的取值为：

➢ ijk与rst排列的奇偶性质相同则取值1；

➢ 不同则取值-1；

➢ 有一个是非序排列则为零。

- **1.8.2 置换张量**

- $$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}' \end{vmatrix} = [\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}][\boldsymbol{u}'\ \boldsymbol{v}'\ \boldsymbol{w}']$$ 书上(1.1.21)

- $$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} \end{vmatrix} = [\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]^2$$ 书上 (1.1.22)

- 根据（1.1.21）有

$$det(\left[g_{ij}\right]) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_3 \\ \boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}_3 \\ \boldsymbol{g}_3\cdot\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_3\cdot\boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3\cdot\boldsymbol{g}_3 \end{bmatrix} = \left(\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)\right)^2$$

- 在曲线坐标系中，记 $\det(g_{ij}) = [\mathbf{g}_1\ \mathbf{g}_2\ \mathbf{g}_2]^2 \triangleq g$（见式（1.2.24），g只是表示基矢量混合积的符号，不是一标量）。

- 又由式（1.1.21）可推出

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{g}_1\bullet\boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}_1\bullet\boldsymbol{g}^2 & \boldsymbol{g}_1\bullet\boldsymbol{g}^3 \\ \boldsymbol{g}_2\bullet\boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}_2\bullet\boldsymbol{g}^2 & \boldsymbol{g}_2\bullet\boldsymbol{g}^3 \\ \boldsymbol{g}_3\bullet\boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}_3\bullet\boldsymbol{g}^2 & \boldsymbol{g}_3\bullet\boldsymbol{g}^3 \end{vmatrix} = [\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3][\boldsymbol{g}^1\ \boldsymbol{g}^2\ \boldsymbol{g}^3]$$

- 又根据协变基矢量与逆变基矢量的互逆关系，有

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{g}_1\bullet\boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}_1\bullet\boldsymbol{g}^2 & \boldsymbol{g}_1\bullet\boldsymbol{g}^3 \\ \boldsymbol{g}_2\bullet\boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}_2\bullet\boldsymbol{g}^2 & \boldsymbol{g}_2\bullet\boldsymbol{g}^3 \\ \boldsymbol{g}_3\bullet\boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}_3\bullet\boldsymbol{g}^2 & \boldsymbol{g}_3\bullet\boldsymbol{g}^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- 得到

$$[\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \boldsymbol{g}_3][\boldsymbol{g}^1\ \boldsymbol{g}^2\ \boldsymbol{g}^3] = 1$$

注意，只有在标准正交坐标系下才有

$$[u\ v\ w] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

- 即

$$[\boldsymbol{g}^1\ \boldsymbol{g}^2\ \boldsymbol{g}^3] = \frac{1}{\sqrt{g}}$$

- 由混合积的性质，有

$$\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)=e_{ijk}\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)$$

$$\boldsymbol{g}^i\cdot(\boldsymbol{g}^j\times\boldsymbol{g}^k)=e^{ijk}\boldsymbol{g}^1\cdot(\boldsymbol{g}^2\times\boldsymbol{g}^3)$$

采用置换符号，可进一步写为

$$\left[\mathbf{g}_i\ \mathbf{g}_j\ \mathbf{g}_k\right]=\sqrt{g}e_{ijk}\quad\left[\boldsymbol{g}^i\ \boldsymbol{g}^j\ \boldsymbol{g}^k\right]=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{ijk}\qquad(*)$$

定义

$$\varepsilon_{ijk}=\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)=[\boldsymbol{g}_i\ \boldsymbol{g}_j\ \boldsymbol{g}_k];$$

$$\varepsilon^{ijk}=\boldsymbol{g}^i\cdot(\boldsymbol{g}^j\times\boldsymbol{g}^k)=[\boldsymbol{g}^i\ \boldsymbol{g}^j\ \boldsymbol{g}^k]$$

可证明ε_{ijk}是张量，称为**置换张量**，或Eddington张量，用实体形式表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k=\varepsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k$$

(1) 根据置换张量的定义，有以下等式成立：

$$\varepsilon^{ijk}=\varepsilon^{kij}=\varepsilon^{jki}=-\varepsilon^{jik}=-\varepsilon^{ikj}=-\varepsilon^{kji}$$

$$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{kij}=\varepsilon_{jki}=-\varepsilon_{jik}=-\varepsilon_{ikj}=-\varepsilon_{kji}$$

置换张量分量之间不是独立的

(2) 置换张量与置换符号之间的关系

$$\varepsilon_{ijk}=\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)=e_{ijk}\sqrt{g}\qquad \varepsilon^{ijk}=\boldsymbol{g}^i\cdot(\boldsymbol{g}^j\times\boldsymbol{g}^k)=\frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}}$$ 即(*)式

由以上二式还可得 $\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rst}=e^{ijk}e_{rst}$

(3) 置换张量与广义 符号之间的关系

$$\delta^{ijk}_{rst}=e^{ijk}e_{rst}=\frac{\varepsilon^{ijk}}{\sqrt{g}}\varepsilon_{rst}\sqrt{g}=\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rst}$$ （三维$\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\delta}$等式）

- 将广义Kronecker δ 张量进行缩并，利用书1.8.17和 $\delta_i^i=3$ 可分别得到4、2、0阶张量：

$$\delta_{ist}^{ijk}=3\delta_s^j\delta_t^k+2\delta_t^j\delta_s^k-\delta_s^j\delta_t^k-3\delta_t^j\delta_s^k-\delta_s^j\delta_t^k=\delta_s^j\delta_t^k-\delta_t^j\delta_s^k;$$

$$\delta_{ijt}^{ijk}=3\delta_t^k-\delta_t^k=2\delta_t^k$$

$$\delta_{ijk}^{ijk}=6$$

(4) 置换张量与行列式之间的关系

$$a\triangleq det(a_{.n}^{m})=a_{.1}^{i}a_{.2}^{j}a_{.3}^{k}e_{ijk}=a_{.1}^{i}a_{.2}^{j}a_{.3}^{k}\frac{\varepsilon_{ijk}}{\sqrt{g}}$$

$$or \quad a=det(a_{.n}^{m})=a_i^1a_j^2a_k^3e^{ijk}=a_i^1a_j^2a_k^3\varepsilon^{ijk}\sqrt{g}$$

$$b\triangleq det(b_{mn})=b_{i1}b_{j2}b_{k3}e^{ijk}=b_{i1}b_{j2}b_{k3}\varepsilon^{ijk}\sqrt{g}$$

$$c\triangleq det(c^{mn})=c^{i1}c^{j2}c^{k3}e_{ijk}=c^{i1}c^{j2}c^{k3}\frac{\varepsilon_{ijk}}{\sqrt{g}}$$

- 由书中式（1.8.4）和式（1.8.12）分别有

$$a^i_{.l}a^j_{.m}a^k_{.m}e_{ijk}=ae_{lmn};\quad e_{ijk}=\frac{\varepsilon_{ijk}}{\sqrt{g}}$$

其中，

$$a\triangleq det(a^m_{.n});\quad a^i_{.l}a^j_{.m}a^k_{.n}e_{ijk}=ae_{lmn};\quad a^i_{.l}a^j_{.m}a^k_{.n}e_{ijk}=ae_{lmn}$$

故

$$a^i_{.l}a^j_{.m}a^k_{.m}\varepsilon_{ijk}\overset{\varepsilon_{ijk}=e_{ijk}\sqrt{g}}{=}=a^i_{.l}a^j_{.m}a^k_{.m}e_{ijk}\sqrt{g}=ae_{lmn}\sqrt{g}=a\varepsilon_{lmn}$$

$$b_{li}b_{mj}b_{nk}\varepsilon^{ijk}=b_{il}b_{jm}b_{kn}\varepsilon^{ijk}=b_{li}b_{mj}b_{nk}\frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}}=e_{lmn}\,det(b_{mn})\frac{1}{\sqrt{g}}=\frac{\varepsilon_{lmn}}{\sqrt{g}}b\frac{1}{\sqrt{g}}=\frac{b}{g}\varepsilon_{lmn}$$

其中, $b\triangleq det(b_{mn})$

同理，有 $c^{li}c^{mj}c^{nk}\varepsilon_{ijk}=cg\varepsilon^{lmn}$

张量的分量在任何一个坐标系下为零，则张量就是零张量

- ⑤二维置换张量 (了解即可)

引入 $\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{e}_3$（其中 $\boldsymbol{e}_3$ 是与 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2$ 正交的单位矢量）定义

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij3} = \boldsymbol{g}_3 \cdot (\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}_j) = \sqrt{g}\, e_{ij3}$$

其中

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{ij3} = \boldsymbol{g}^3 \cdot (\boldsymbol{g}^i \times \boldsymbol{g}^j) = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ij3}$$

实体形式表示为：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^{\alpha\beta} \boldsymbol{g}_\alpha \boldsymbol{g}_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta} \boldsymbol{g}^\alpha \boldsymbol{g}^\beta$$

- **1.8.3 叉积**

（1）矢量的叉积

- 基矢量的叉积可用置换张量定义为：

$$(\boldsymbol{g}_j \times \boldsymbol{g}_k) = \varepsilon_{jki}\boldsymbol{g}^i$$

$$or \quad (\boldsymbol{g}_j \times \boldsymbol{g}_k) = (\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k) : \varepsilon_{lmn}\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}^m\boldsymbol{g}^n = \boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k)$$

验证上式：

$$\boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k) = \varepsilon_{lmn}\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}^m\boldsymbol{g}^n : (\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k) = \varepsilon_{lmn}\boldsymbol{g}^l(\boldsymbol{g}^m \cdot \boldsymbol{g}_j)(\boldsymbol{g}^n \cdot \boldsymbol{g}_k) = \varepsilon_{ljk}\boldsymbol{g}^l \triangleq \boldsymbol{g}_j \times \boldsymbol{g}_k$$

同理有

$$(\boldsymbol{g}^j \times \boldsymbol{g}^k) = \varepsilon^{jki}\boldsymbol{g}_i = (\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k) : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k)$$

因此可定义两个矢量的叉积为

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a^i b^j \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k = a_i b_j \varepsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k = (\boldsymbol{ab}) : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{ab})$$

注意：两个矢量的叉积与该二矢量均正交。

（2）三个矢量的混合积

三个矢量的混合积（根据基矢量叉积定义导出）为：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a^i b^j c^k[\boldsymbol{g}_i\ \boldsymbol{g}_j\ \boldsymbol{g}_k]=a^i b^j c^k\varepsilon_{ijk}=a_i b_j c_k\varepsilon^{ijk}$$

（3）三个矢量的三重积

三个矢量的三重积有不同的形式，例如：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=a_i b_j c^k(\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^j)\times\boldsymbol{g}_k$$

$$=a_i b_j c^k\varepsilon^{ijl}\boldsymbol{g}_l\times\boldsymbol{g}_k=a_i b_j c^k\varepsilon^{ijl}\varepsilon_{lkm}\boldsymbol{g}^m=a_i b_j c^k\boldsymbol{g}^m\delta^{lij}_{lkm}$$

根据式(1.8.18)，上式可以继续写为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=a_i b_j c^k\boldsymbol{g}^m\delta^{lij}_{lkm}$$

$$=a_i b_j c^k\boldsymbol{g}^m(\delta^i_k\delta^j_m-\delta^i_m\delta^j_k)=a_k b_m c^k\boldsymbol{g}^m-a_m b_k c^k\boldsymbol{g}^m=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

再例如

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a_i b^j c^k\boldsymbol{g}^i\times(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)=a_i b^j c^k\varepsilon_{jkl}\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^l=a_i b^j c^k\varepsilon_{jkl}\varepsilon^{ilm}\boldsymbol{g}_m$$

$$=a_i b^j c^k\delta^{mil}_{jkl}\boldsymbol{g}_m=\ldots=(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

（4）张量的叉积

将叉积运算推广至张量间的叉积，定义：

$$\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{S} = T^{ij} S^{kl} \boldsymbol{g}_i (\boldsymbol{g}_j \times \boldsymbol{g}_k) \boldsymbol{g}_l$$

$$\boldsymbol{T} \overset{\times}{\underset{\times}{}} \boldsymbol{S} = T^{ij} S^{kl} (\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}_k)(\boldsymbol{g}_j \times \boldsymbol{g}_l) = T^{ij} S^{kl} \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} \boldsymbol{g}^m \boldsymbol{g}^n = U_{mn} \boldsymbol{g}^m \boldsymbol{g}^n$$

$$\boldsymbol{T} \overset{\cdot}{\underset{\times}{}} \boldsymbol{S} = T^{ij} S^{kl} (\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_k)(\boldsymbol{g}_j \times \boldsymbol{g}_l) = T^{ij} S^{kl} g_{ik} \varepsilon_{jln} \boldsymbol{g}^n = T^{ij} S_i^{\cdot l} \varepsilon_{jln} \boldsymbol{g}^n = v_n \boldsymbol{g}^n$$

结果为张量

本章重点内容：

- 指标记法（哑指标、自由指标规定）
- 一般坐标系协变基矢量定义
- 逆变基矢量定义
- 张量的坐标变换规律，与整体表示
- 转换系数的性质
- 张量指标升降
- 置换符号与行列式、广义 符号性质
- 矢量和张量的叉积运算
- 作业：1.归纳本章重点内容；2.书中习题各选简单和有些难度（依个人判断）的各一题

- **2 二阶张量**
- 例子：

受力物体内一点的应力状态，有9个应力分量，如以直角坐标表示，用矩阵形式列出，则有：

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$

- 这9个分量的集合，规定了一点的应力状态，称为应力张量。当 坐标变换时，应力张量的分量按一定的变换法则变换。

- 2.1 二阶张量的矩阵
- 2.1.1 二阶张量的实体表示形式及分量

$$\mathrm{T}^{\mathrm{ij}} = \boldsymbol{g}^{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{g}^{\mathrm{j}} \ ; \ \mathrm{T}_{\mathrm{ij}} = \boldsymbol{g}_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{g}_{\mathrm{j}}$$

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{T}^{\mathrm{ij}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{j}} = \mathrm{T}^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{g}^{j}; \quad \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \mathrm{T}^{\mathrm{ij}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{j}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}} = \mathrm{T}^{\mathrm{ji}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{j}} = \mathrm{T}_{j}^{\cdot i}\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{g}^{j}$$

- **验证** $\mathbf{g}^{i}.\boldsymbol{T}.\boldsymbol{g}^{j} = \mathbf{g}^{i}.\boldsymbol{T}^{rs}\boldsymbol{g}_{r}\boldsymbol{g}_{s}.\boldsymbol{g}^{j} = \boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{u}^{i} = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{g}^{i}, \boldsymbol{u}_{i} = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{g}_{i})$
- 二阶张量的转置：

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{T}^{\mathrm{ij}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{j}}; \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \mathrm{T}^{\mathrm{ij}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{j}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}} = \mathrm{T}^{\mathrm{ji}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{j}}$$

- 对称二阶张量：

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \ \text{即} \ N_{ij} = N_{ji}; N_{i}^{\cdot j} = N^{j}_{\cdot i}; N^{i}_{\cdot j} = N_{j}^{\cdot i}; N^{ij} = N^{ji}$$

- 反对称二阶张量：

$$\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} \ \text{即} \ \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}; \Omega_{i}^{\cdot j} = -\Omega^{j}_{\cdot i}; \Omega^{i}_{\cdot j} = -\Omega_{j}^{\cdot i}; \Omega^{ij} = -\Omega^{ji}$$

• 2.1.2 二阶张量的四种分量所对应的矩阵

$$\tau_1 = [T_{ij}],\ \tau_2 = [T_i^{\cdot j}],\ \tau_3 = [T_{\cdot j}^{i}],\ \tau_4 = [T^{ij}]$$

定义张量 $\boldsymbol{T}$ 的矩阵为 $[\boldsymbol{T}] = [T_{\cdot j}^{i}]$

根据 $T_{ij} = g_{ik} T_{\cdot j}^{k}$ 有

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{.1}^{1} & T_{.2}^{1} & T_{.3}^{1} \\ T_{.1}^{2} & T_{.2}^{2} & T_{.3}^{2} \\ T_{.1}^{3} & T_{.2}^{3} & T_{.3}^{3} \end{bmatrix}$$

即 $\tau_1 = [g_{ij}]\tau_3$

同理可得以下关系：

$$\tau_1 = \tau_2 \boldsymbol{g}_* = \boldsymbol{g}_* \tau_3 = \boldsymbol{g}_* \tau_4 \boldsymbol{g}_*,\ where\ \boldsymbol{g}_* = [g_{ij}]$$

- 下面推导张量不同分量组成的矩阵的行列式之间的关系。根据指标升降关系 $a_{ij}=g_{ir}a^{r}_{.j}$，有

$$det\begin{bmatrix} a_{1i} & a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2j} & a_{2k} \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3k} \end{bmatrix} = \det\left(\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^{1}_{.i} & a^{1}_{.j} & a^{1}_{.k} \\ a^{2}_{.i} & a^{2}_{.j} & a^{2}_{.k} \\ a^{3}_{.i} & a^{3}_{.j} & a^{3}_{.k} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}\right)\det\left(\begin{bmatrix} a^{1}_{.i} & a^{1}_{.j} & a^{1}_{.k} \\ a^{2}_{.i} & a^{2}_{.j} & a^{2}_{.k} \\ a^{3}_{.i} & a^{3}_{.j} & a^{3}_{.k} \end{bmatrix}\right) \qquad \text{（a）}$$

又
$$\det\left(\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}\right) = det(g_{ij}) \triangleq g \qquad \text{（b）}$$

- 将（b）代入（a）得到

$$det\begin{bmatrix} a_{1i} & a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2j} & a_{2k} \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3k} \end{bmatrix} = g\det\left(\begin{bmatrix} a^{1}_{.i} & a^{1}_{.j} & a^{1}_{.k} \\ a^{2}_{.i} & a^{2}_{.j} & a^{2}_{.k} \\ a^{3}_{.i} & a^{3}_{.j} & a^{3}_{.k} \end{bmatrix}\right)$$

- 同理还可推出

$$
det\begin{bmatrix} a^{1i} & a^{1j} & a^{1k} \\ a^{2i} & a^{2j} & a^{2k} \\ a^{3i} & a^{3j} & a^{3k} \end{bmatrix} = \frac{1}{g}\det\left(\begin{bmatrix} a^{1}_{.i} & a^{1}_{.j} & a^{1}_{.k} \\ a^{2}_{.i} & a^{2}_{.j} & a^{2}_{.k} \\ a^{3}_{.i} & a^{3}_{.j} & a^{3}_{.k} \end{bmatrix}\right)
$$

二阶张量的各种行列式中，只要有一种为零，则所有形式的行列式都为零

- **2.1.3 二阶张量的代数运算**

（1）二阶张量与矢量的点积（线性变换）满足：

$$
\boldsymbol{T}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}
$$

$$
(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}_{\mathrm{j}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}}\mathrm{T}^{\mathrm{ij}} = \mathrm{T}^{\mathrm{ij}}\mathrm{u}_{\mathrm{j}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}}; \quad \boldsymbol{T}.\boldsymbol{u} = \mathrm{T}^{\mathrm{ij}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{j}}\cdot\boldsymbol{u} = \mathrm{T}^{\mathrm{ij}}\mathrm{u}_{\mathrm{j}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{i}})
$$

- 二阶张量与矢量的点积 $\boldsymbol{T}.\boldsymbol{u}$ 对应于τ_3 矩阵与向量$[u^j]$的乘积$[T^i_{.j}][u^j]$；而矢量与二阶张量的点积 $\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{T}$ 对应于向量$[u^j]$与τ_2 矩阵的乘积$[u^j][T_j^{.i}]$。

（2）二阶张量与二阶张量的点积：　$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}$

分量表示为：

$$C^i_{.j}=A^i_{.k}B^k_{.j};\quad C_i^{.j}=A_i^{.k}B_k^{.j};\quad C_{ij}=A_{ik}B^k_{.j};\quad C^{ij}=A^{ik}B_k^{.j};$$

上式中前两式也可以用矩阵形式表示为

$$\tau_3^C=\tau_3^A\tau_3^B;\tau_2^C=\tau_2^A\tau_2^B$$

即对于τ_2,τ_3有矩阵乘法与二阶张量点积的对应关系。

- **二阶张量的迹**

二阶张量$\boldsymbol{A}$ 进行缩并得到的量称为张量$\boldsymbol{A}$ 的迹，记作 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$，即

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = A^{i}_{.i}$$ （对应 τ_3矩阵的对角线元素之和）

例如：

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{uv}) = u^i v_i = \boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v}$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}) = tr(A^{i}_{.j}B^{j}_{.k}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^k) = A^{i}_{.j}B^{j}_{.i} = B^{i}_{.j}A^{j}_{.i} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\bullet\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{A} = B^{l}_{.k}\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_l : A^{i}_{.j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j = B^{j}_{.i}A^{i}_{.j} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B})$$

$$or\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{A} = B_{l}^{.k}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^l : A^{i}_{.j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j = (g_{ki}g^{lj}B_{l}^{.k})A^{i}_{.j} = B^{j}_{.i}A^{i}_{.j} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B})$$

$$or\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} : \boldsymbol{B} = A_{l}^{.k}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}^l : B^{i}_{.j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j = (g_{ki}g^{lj}A_{l}^{.k})B^{i}_{.j} = A^{j}_{.i}B^{i}_{.j} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B})$$

- **2.2 正则与退化的二阶张量**

二阶张量的不同的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的行列式是不相同的。定义二阶张量 的行列式是 $det(\boldsymbol{T})=\left|\mathrm{T}^{\mathrm{i}}_{\cdot\mathrm{j}}\right|$。

由 $\tau_1=\tau_2\boldsymbol{g}_*=\boldsymbol{g}_*\tau_3=\boldsymbol{g}_*\tau_4\boldsymbol{g}_*$, $where\ \boldsymbol{g}_*=[g_{ij}]$ 有

$$det(\tau_1)=g\,det(\tau_2)=g\,det(\tau_3)=g^2\,det(\tau_4)$$

行列式不等于零的二阶张量定义为**正则的（可逆的）二阶张量**，否则称为**退化的二阶张量**。

正则二阶张量存在唯一的逆张量：$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{G}$

（$\boldsymbol{G}=\delta^i_j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j=\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^i=g^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$ 为度量张量）

$[\boldsymbol{T}^{-1}]=[\boldsymbol{T}]^{-1}$（逆张量的矩阵等于原张量矩阵的逆）

- 证明:根据张量点积与其 矩阵乘法的对应关系，有

$$[\boldsymbol{T}^{-1}][\boldsymbol{T}]=[\boldsymbol{T}^{-1}\bullet\boldsymbol{T}]$$

而由逆张量的定义,

$$\boldsymbol{T}^{-1}\bullet\boldsymbol{T}=G$$

注意到 $G=\delta^i_j\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$ 的 τ_3 矩阵是单位阵（记为 I ），故

$$[\boldsymbol{T}^{-1}\bullet\boldsymbol{T}]=I$$

由此得证

- **2.3 二阶张量的不变量**
- **2.3.1 二阶张量的标量不变量**

对二阶张量的分量进行一定的运算，如果运算的结果是不依赖于坐标系选择的标量结果，则称这些标量为二阶张量的**标量不变量**（简称**张量的不变量**）。

例如：

$$\boldsymbol{G} : \boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}^i : A_j^{\cdot k} \boldsymbol{g}^j \boldsymbol{g}_k = A_{\cdot i}^{i} = tr(A)$$

$$\boldsymbol{T} \cdot\cdot \boldsymbol{T} = T_{\cdot k}^{l} \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}_l : T_{\cdot j}^{i} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}^j = T_{\cdot i}^{j} T_{\cdot j}^{i} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T})$$

- **2.3.2 二阶张量的三个主不变量**

前面已讲过，张量的矩阵表示法为

$$[T_{\cdot j}^{i}] = \begin{bmatrix} T_{\cdot 1}^{1} & T_{\cdot 2}^{1} & T_{\cdot 3}^{1} \\ T_{\cdot 1}^{2} & T_{\cdot 2}^{2} & T_{\cdot 3}^{2} \\ T_{\cdot 1}^{3} & T_{\cdot 2}^{3} & T_{\cdot 3}^{3} \end{bmatrix}$$

- 定义 $I_1 = \boldsymbol{G} : \boldsymbol{T} = \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_i : T^j_{.k} \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^k = T^i_{.i} = Tr(\boldsymbol{T})$

  即 $I_1 = T^i_{.i} = T^1_{.1} + T^2_{.2} + T^3_{.3}$

定义

$$I_2 = \frac{1}{2}\delta^{ij}_{lm} T^l_{.i} T^m_{.j} = \frac{1}{2}(T^i_{.i} T^l_{.l} - T^i_{.l} T^l_{.i})$$ （δ^{ij}_{lm} 定义见（1.8.18））

或 $$I_2 = \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^1_{.2} \\ T^2_{.1} & T^2_{.2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^2_{.2} & T^2_{3} \\ T^3_{.2} & T^3_{.3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^3_{.3} & T^3_{.1} \\ T^1_{.3} & T^1_{.1} \end{vmatrix}$$

定义

$$I_3 = \frac{1}{6}\delta^{ijk}_{lmn} T^l_{.i} T^m_{.j} T^n_{.k} = \frac{1}{6} e^{ijk} e_{lmn} T^l_{.i} T^m_{.j} T^n_{.k} = det(\boldsymbol{T})$$

- **2.3.3 二阶张量的主不变量和二阶张量的矩的关系**

定义二阶张量的前三阶矩分别为

$$I_1^* = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}) = T_i^i$$

$$I_2^* = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}) = T_{.k}^{i}T_{.i}^{k}$$

$$I_3^* = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}) = T_{.j}^{i}T_{.k}^{j}T_{.i}^{k}$$

- 二阶张量的矩也是不变量。

$$I_1 = I_1^*$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(T_{.i}^{i}T_{.l}^{l} - T_{.l}^{i}T_{.i}^{l}) = \frac{1}{2}((T_{.i}^{i})^2 - T_{.l}^{i}T_{.i}^{l})$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{T})^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{T})) = \frac{1}{2}((I_1^*)^2 - I_2^*)$$

$$I_3 = \frac{1}{6} e^{ijk} e_{lmn} T^{l}_{.i} T^{m}_{.j} T^{n}_{.k}$$

$$\overset{(1.8.17)}{=} \frac{1}{6}(T^{i}_{.i}T^{j}_{.j}T^{k}_{.k} + T^{j}_{.i}T^{k}_{.j}T^{i}_{.k} + T^{k}_{.i}T^{i}_{.j}T^{j}_{.k}) - \frac{1}{6}(T^{j}_{.i}T^{i}_{.j}T^{k}_{.k} + T^{i}_{.i}T^{k}_{.j}T^{j}_{.k} + T^{k}_{.i}T^{j}_{.j}T^{i}_{.k})$$

$$= \frac{1}{6}[(I_1^*)^3 + I_3^* + I_3^*] - \frac{1}{6}[I_2^* I_1^* + I_1^* I_2^* + I_1^* I_2^*]$$

$$= \frac{1}{6}((I_1^*)^3 + 2I_3^* - 3I_1^* I_2^*)$$

- **2.4 二阶张量标准形**
- **2.4.1 张量的特征值、特征矢量**

定义二阶张量特征值和特征矢量满足

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$$

即 $(\lambda\boldsymbol{G}-\boldsymbol{T})\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ （**0**矢量）或 $(\lambda\delta^i_j-T^i_{.j})v^j=\boldsymbol{0}$

- 物理意义：对特征矢量进行线性变换后的结果与特征矢量本身具有相同的方向。特征矢量有非零解的条件（特征方程）是

$$\begin{vmatrix} \lambda-T^1_{.1} & -T^1_{.2} & -T^1_{.3} \\ -T^2_{.1} & \lambda-T^2_{.2} & -T^2_{.3} \\ -T^3_{.1} & -T^3_{.2} & \lambda-T^3_{.3} \end{vmatrix}=0$$

- 可以验证，上式展开后得到的特征方程是

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0$$

$\Delta(\lambda)\triangleq\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3$ 称为张量的特征多项式。

特征根是张量的不变量。

- **2.4.2 实对称二阶张量标准形**

对于实对称张量 $\boldsymbol{N}$ ，

(1)可证明特征根是实根：

- 反证法：对于实对称二阶张量，假设 λ 和 $\boldsymbol{v}$是一个复特征根和对应的特征矢量，则其共轭 $\lambda^*\boldsymbol{v}^*$ 也一定是特征根和特征矢量，即

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v} \quad ; \quad \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}^*=\lambda^*\boldsymbol{v}^*$$

- 上两式两端各点乘 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}^*$，得到

$$\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}^*=\lambda^*\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}^* \text{ 或 } \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}^*=(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}^*)\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{N}^T\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^*\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}$$

- 将两式相减，得到

$$(\lambda-\lambda^*)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}^*=0 \qquad \Rightarrow \lambda^*=\lambda$$

- 即 $\boldsymbol{N}$ 的特征值只能是实数。

以上证明用到实对称张量的性质：

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}=u^i N_{ij} v^j \ ; \quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}=v^j N_{ji} u^i$$

$$\because N_{ij}=N_{ji} \quad \therefore \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}$$

(2)实对称二阶张量必具有3个互相正交的特征矢量

（i）实对称二阶张量不等的实根对应的特征矢量正交：

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}_1=\lambda_1\boldsymbol{v}_1 \ ; \quad \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}_2=\lambda_2\boldsymbol{v}_2$$

$$\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}_1=\lambda_1\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1 \quad ; \quad \boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}_2=\lambda_2\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=0\Rightarrow\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=0$$

当实对称二阶张量具有不等的实根时，特征方程的秩为2

（ii）当实对称二阶张量有一对重合根 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，**特征方程的秩为1，特征矢量的方向不能唯一确定。但**可选取与 $\boldsymbol{v}_3$ 正交的任意两个矢量作为特征矢量。

（iii）当实对称二阶张量有三重根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 时，**特征方程的秩为0。**此时可选取空间中任意一组正交标准化基作为其特征矢量（特征矢量不是唯一的）。

- **（3）实对称二阶张量的标准形**

选取3个互相正交的特征向量作为基矢量，则实对称张量可以在该基下表示为对角形标准型：

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{g}_1=\lambda_1\boldsymbol{g}_1;\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{g}_2=\lambda_2\boldsymbol{g}_2;\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{g}_3=\lambda_3\boldsymbol{g}_3$$

$$\therefore \boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{G}=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^i=\lambda_1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+\lambda_2\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\lambda_3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3$$

沿 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 方向选取长度为1的矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，构造一组正交标准化基，将 $\boldsymbol{N}$ 表示为

$$\boldsymbol{N}=N_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+N_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+N_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

上式中，N_1,N_2,N_3 称为 $\boldsymbol{N}$ 的**主分量**，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 称为 $\boldsymbol{N}$ 的**主方向**

- 在直角坐标系下特征根和特征矢量的求解方法

- 在**直角坐标系**下$\left[N^{i}_{.j}\right]$是对称矩阵（直角坐标系下，协变基矢量与逆变基矢量重合，因此张量分量满足 $N^{i}_{.j}=N_{i}^{.j}$；如果张量是对称张量，则可进一步得到 $N_{i}^{.j}=N^{j}_{.i}$；因此对称张量的两个矩阵满足$\left[N^{i}_{.j}\right]=\left[N^{j}_{.i}\right]$。即交换行号和列号后矩阵元素相等。因此$\left[N^{i}_{.j}\right]$是对称矩阵）。所以：一定存在三个实特征根，三个实特征向量（彼此正交）。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}&=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^i=\lambda_1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+\lambda_2\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\lambda_3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3\\&=\lambda_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

- 其中，$\boldsymbol{e}_i$ 为单位化的特征向量，即 $\boldsymbol{e}_i=\dfrac{\boldsymbol{g}_i}{\sqrt{\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_i}}\quad(i=1,2,3)$ 。
- 注意：如果 $\boldsymbol{g}_i$ 尚未进行模归一化，则不能写成 $\boldsymbol{N}=\lambda_1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_1+\lambda_2\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_2+\lambda_3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}_3$ 的标准化形式。

- 例：求出张量 $N=\vec{e}_1\vec{e}_1+4\vec{e}_2\vec{e}_2+\vec{e}_3\vec{e}_3+2(\vec{e}_1\vec{e}_2+\vec{e}_2\vec{e}_1)+(\vec{e}_1\vec{e}_3+\vec{e}_3\vec{e}_1)+2(\vec{e}_2\vec{e}_3+\vec{e}_3\vec{e}_2)$ 的主分量（从大到小排列）和主方向，并在主方向对应的正交标准化基（右手系）下将张量化为标准形。

$$[N^i_{\cdot j}]=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}$$

- 解：特征根和特征矢量满足：

$$(\lambda\delta^i_j-N^i_{\cdot j})v^j=0\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-2&\lambda-4&-2\\-1&-2&\lambda-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{Bmatrix}=0$$

上述方程有非零解的条件是系数矩阵行列式为0，因此有特征方程

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-2&\lambda-4&-2\\-1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad\lambda^3-6\lambda^2=0$$

将$\lambda_2=0$ 代入方程矢量方程，得到

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{Bmatrix} = 0$$

对上方程进行行初等变换，化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \{-2,1,0\}^T$$（ $\mathbf{v}_2$ 方向不唯一。）

将 $\mathbf{v}_2$ 化为单位向量，得到对应于 $\lambda_2=0$ 的特征矢量是

$$\mathbf{g}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

- 因为 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 是重特征根，所以选取与 $\mathbf{g}_1$ 和 $\mathbf{g}_2$ 均正交的单位矢量作为主方向。为此，令

$$\mathbf{g}_3=\mathbf{g}_1\times\mathbf{g}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{30}}(-\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+5\mathbf{e}_3)$$

采用标准正交基 $\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2,\mathbf{g}_3$ ，可将 N 表示为

$$\mathbf{N}=\lambda_1\mathbf{g}_1\mathbf{g}^1+\lambda_2\mathbf{g}_2\mathbf{g}^2+\lambda_3\mathbf{g}_3\mathbf{g}^3=6\mathbf{g}_1\mathbf{g}^1=6\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1$$

可以验证：

$$6\mathbf{g}_1\mathbf{g}_1=6[\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)][\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)]$$

$$=(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3+2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$$

$$+2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3=\mathbf{N}$$

（4）对称张量标准形的应用

- 在力学中，应力张量和应变张量都是对称张量。对于应力来说，存在三个互相正交的主方向，在此方向上，只要正应力分量，没有剪应力分量。这些正应力称为主应力。

- **2.4.3** 三维空间非对称二阶张量标准形

  非对称二阶张量的特征值可能是复数。

  复根总是成对出现 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}\Rightarrow\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}^{*}=\lambda^{*}\boldsymbol{v}^{*}$

  重根必然是实根。

- 不同特征根所对应特征向量必线性无关

  反证法：

  设 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_1=\lambda_1\boldsymbol{g}_1;\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_2=\lambda_2\boldsymbol{g}_2;\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_3=\lambda_3\boldsymbol{g}_3$

假设存在非零系数，使得 $c_1\boldsymbol{g}_1+c_2\boldsymbol{g}_2+c_3\boldsymbol{g}_3=0$

则有 $\boldsymbol{T}\cdot(c_1\boldsymbol{g}_1+c_2\boldsymbol{g}_2+c_3\boldsymbol{g}_3)=c_1\lambda_1\boldsymbol{g}_1+c_2\lambda_2\boldsymbol{g}_2+c_3\lambda_3\boldsymbol{g}_3=0$ （*）

$$\boldsymbol{T}\cdot\left(\boldsymbol{T}\cdot(c_1\boldsymbol{g}_1+c_2\boldsymbol{g}_2+c_3\boldsymbol{g}_3)\right)=c_1\lambda_1^2\boldsymbol{g}_1+c_2\lambda_2^2\boldsymbol{g}_2+c_3\lambda_3^2\boldsymbol{g}_3=0$$

可得

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\ \lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}c_1\boldsymbol{g}_1\\ c_2\boldsymbol{g}_2\\ c_3\boldsymbol{g}_3\end{Bmatrix}=0$$

- 因前已假设非重特征根，所以有

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1) \neq 0$$

- 故方程（*）只有零根，即 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$。与前假设矛盾。

- **非对称阵特征根的几种情况**

（i）有3个互不相等的实根的情况

此时，可证明特征向量必线性无关（但不一定正交）。因此可选取3个特征向量作为基矢量：

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{G}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^i=\lambda_1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+\lambda_2\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\lambda_3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3 \qquad \text{（标准型）}$$

基矢量不一定互相正交

（ii）有一个实根和一对共轭复根 $\lambda_1 \pm i\mu_1$（对应的共轭的特征向量 $\boldsymbol{g}_1 \pm i\boldsymbol{g}_2$）的情况（其中 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2$ 为实向量）

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_3=\lambda_3\boldsymbol{g}_3\\
&\boldsymbol{T}\cdot(\boldsymbol{g}_1+i\boldsymbol{g}_2)=(\lambda_1+i\mu_1)(\boldsymbol{g}_1+i\boldsymbol{g}_2)\\
&\boldsymbol{T}\cdot(\boldsymbol{g}_1-i\boldsymbol{g}_2)=(\lambda_1-i\mu_1)(\boldsymbol{g}_1-i\boldsymbol{g}_2)\\
&\Downarrow\\
&\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_3=\lambda_3\boldsymbol{g}_3\\
&\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_1=\lambda_1\boldsymbol{g}_1-\mu_1\boldsymbol{g}_2\\
&\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_2=\mu_1\boldsymbol{g}_1+\lambda_1\boldsymbol{g}_2
\end{aligned}$$

为得到标准型，选取 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 作为基矢量，可得到

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^i=\lambda_1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+\lambda_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\lambda_3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3+\mu_1(\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^2-\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^1)$$ ，即

$$[T^i_{.j}]=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \mu & 0\\ -\mu & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$ (这样就转化为实数基对应的标准型，但非对角)

上式与（2.4.24b）区别在非对角元素差一个符号，原因在于特征矢量的方向定义不一致。

（iii）有二重实根 $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$ 。此时，λ_1 对应的两个特征向量是线性相关的，不能作为基矢量。

特征矩阵 $\Sigma(\lambda)=[\lambda\delta^i_j-T^i_{.j}]$（特征方程是 $det(\Sigma(\lambda))=0$）经初等变换（行列是为零的矩阵经初等变换后行列式仍为零）后，可化为两种情况。

- c1:其一是

$$\Sigma(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-\lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-\lambda_3\end{bmatrix}$$

此时，存在线性无关的一组向量 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$满足：

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_3=\lambda_3\boldsymbol{g}_3;\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_1=\lambda_1\boldsymbol{g}_1;\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_2=\lambda_1\boldsymbol{g}_2$$ （证明略）

选取$\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$作为基矢量，则

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{G}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^i=\lambda_1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+\lambda_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\lambda_3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3$$ （对角形标准型）

- c2:其二是

$$\Sigma(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-\lambda_1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-\lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-\lambda_3\end{bmatrix}$$ （可验证λ_1 是其二重根）

此时，存在线性无关的一组向量 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 满足

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_3=\lambda_3\boldsymbol{g}_3;\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_1=\lambda_1\boldsymbol{g}_1;\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_2=\lambda_1\boldsymbol{g}_2+\boldsymbol{g}_1$$ （证明略）

- 选取 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ 作为基矢量，则

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}^i = \lambda_1 \boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}^1 + \lambda_1 \boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}^2 + \lambda_3 \boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}^3 + \boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}^2$$ 即

$$[T^i_{.j}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$ ，称为Jordan标准型。

（iv）有三重实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ 。此时，λ_1 对应的三个特征向量是线性相关的，不能作为基矢量。

特征矩阵 $\Sigma(\lambda) = [\lambda \delta^i_j - T^i_{.j}]$ 后，可化为三种情况。

- d1:其一是

$$\Sigma(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda_1 \end{bmatrix}$$

标准型与c1相同（对角型）。

- d2:其二是

$$\Sigma(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-\lambda_1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-\lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-\lambda_1\end{bmatrix}$$

标准型与c2相同。

- d3:其三是

$$\Sigma(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-\lambda_1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-\lambda_1 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-\lambda_1\end{bmatrix}$$

此时，存在线性无关的一组向量$\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$满足

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_1=\lambda_1\boldsymbol{g}_1;\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_2=\lambda_1\boldsymbol{g}_2+\boldsymbol{g}_1;\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_3=\lambda_1\boldsymbol{g}_3+\boldsymbol{g}_2$$

（证明略）

选取 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 作为基矢量，则

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^i=\lambda_1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+\lambda_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\lambda_1\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3+\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^2+\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^3$$

，即

$$[T^{i}_{.j}]=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$$

，即为Jordan标准型。

由以上各种情况的标准形可推论，**二阶张量的第三主不变量还可写为三个特征根的乘积：**

$$I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

第九讲完

- **2.5 几种特殊的二阶张量和极分解**
- **2.5.1 零二阶张量**

零二阶张量对应的矩阵是 $[0]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

- **2.5.2 度量张量G**

度量张量的矩阵

$$[\mathbf{G}]=[g^{i}_{.j}]=[\delta^{i}_{j}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- **2.5.3二阶张量的幂**

二阶张量的幂的定义为连续点积，如

$$\boldsymbol{T}^5=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}$$

对于对称张量 $\boldsymbol{N}$（设其特征根为 N_1,N_2,N_3）有

$$\boldsymbol{N}=N_1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+N_2\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+N_3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3$$

$$\boldsymbol{N}^2=\boldsymbol{N}\bullet(N_1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+N_2\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+N_3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3)=N_1^{\,2}\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+N_2^{\,2}\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+N_3^{\,2}\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3$$

$$\boldsymbol{N}^n=N_1^{\,n}\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+N_2^{\,n}\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+N_3^{\,n}\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3$$

正张量： $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}>0\ \ (for\ any\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0})$

非负张量： $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}\geq 0\ \ (for\ any\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0})$

注意：正张量和非负张量都首先是对称张量

在某一笛卡尔坐标系下，由于

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot(N_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+N_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+N_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3)\cdot\boldsymbol{u}=N_1u_1^2+N_2u_2^2+N_3u_3^2 \qquad (\boldsymbol{g}_i=\boldsymbol{g}^i)$$

- 正张量 $\Leftrightarrow N_1>0;N_2>0;N_3>0$
- 非负张量 $\Leftrightarrow N_1\geq 0;N_2\geq 0;N_3\geq 0$

对于非负张量，定义 m 次方根为（$m\geq 0$）：

$$\boldsymbol{N}^{\frac{1}{m}}=N_1^{\frac{1}{m}}\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+N_2^{\frac{1}{m}}\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+N_3^{\frac{1}{m}}\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3$$

$$\boldsymbol{N}^{\frac{1}{2}}=N_1^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+N_2^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+N_3^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3$$

- 由任意二阶张量构造的非负张量

$$\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{T}\geq 0\,;\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^T\geq 0$$

这是因为$\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{T}$ 是对称张量，并且

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u})\geq 0$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{u})\geq 0$$

如果$det(\boldsymbol{T})\neq 0$（正则张量），则

$$\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{T}>0\,;\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^T>0$$

- **2.5.4 反对称张量**

定义：反对称张量 $\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^T$

在**笛卡尔坐标系**中，反对称张量的矩阵是反对称阵：

$$[\boldsymbol{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & \Omega^1_{.2} & \Omega^1_{.3} \\ -\Omega^1_{.2} & 0 & \Omega^2_{.3} \\ -\Omega^1_{.3} & -\Omega^2_{.3} & 0 \end{bmatrix} \qquad (\&)$$

- 在**任意坐标系**中，反对称张量的矩阵不一定是反对称阵。
  由（&）可观察到 $det(\Omega) = 0; Tr(\Omega) = 0$
  因此，对反对称张量有 $I_1 = I_3 = 0$

$\therefore$ 特征方程：$\lambda^3 + I_2 \lambda = 0$

特征根：$\lambda_1 = i\mu; \lambda_2 = -i\mu; \lambda_3 = 0$

- 设 λ_3 对应的特征向量为 $\boldsymbol{g}_3$，λ_1, λ_2 对应的单位特征向量为 $\boldsymbol{g}_2 + i\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2 - i\boldsymbol{g}_1$，由

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{g}_2+i\boldsymbol{g}_1)=i\mu(\boldsymbol{g}_2+i\boldsymbol{g}_1)$$
$$\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{g}_2-i\boldsymbol{g}_1)=-i\mu(\boldsymbol{g}_2-i\boldsymbol{g}_1)$$

得到

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{g}_2=-\mu\boldsymbol{g}_1$$
$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{g}_1=\mu\boldsymbol{g}_2$$

因此选择 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 作基，可将反对称矩阵化为标准形

$$[\Omega]=\begin{bmatrix}0 & -\mu & 0\\ \mu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- 反偶矢量 $\boldsymbol{\omega} = -\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\Omega}$
- 证明： $-\varepsilon.\omega = \Omega$

证

$$-\boldsymbol{\varepsilon}\bullet\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}\bullet(\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2}\varepsilon^{lmn}\boldsymbol{g}_l\boldsymbol{g}_m\boldsymbol{g}_n(\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k : \Omega^{rs}\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}_s)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{lmn}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}_l\boldsymbol{g}_m\boldsymbol{g}_n\bullet\Omega^{jk}\boldsymbol{g}^i$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{ilm}\varepsilon_{ijk}\Omega^{jk}\boldsymbol{g}_l\boldsymbol{g}_m \overset{(1.8.18)}{=} \frac{1}{2}\Omega^{lm}\boldsymbol{g}_l\boldsymbol{g}_m - \frac{1}{2}\Omega^{ml}\boldsymbol{g}_l\boldsymbol{g}_m$$

$$= \boldsymbol{\Omega}$$

- **2.5.5 正交张量**
- 定义：如果正则二阶张量满足 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{T}$，则称为正交张量。
- 正交二阶张量满足：$\boldsymbol{Q}^{T}\cdot\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^{T}=\boldsymbol{G}$

$$[\boldsymbol{Q}^{T}]=[\boldsymbol{Q}^{-1}]=[\boldsymbol{Q}]^{-1}$$

$$[\boldsymbol{Q}^{T}][\boldsymbol{Q}]=[\boldsymbol{Q}][\boldsymbol{Q}^{T}]=[\boldsymbol{G}]=[\delta^{i}_{j}]$$

- 正交张量的保内积性质：

$$(\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{u}).(\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}).(\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{u})$$

$$(\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{u}).(\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$$

$$\det(\boldsymbol{Q}^{T}.\boldsymbol{Q})=1$$

即用一个正交张量对两个**矢量**进行线性变换后，两个矢量的点积不改变。

并且

$$det(\boldsymbol{Q}^{T})det(\boldsymbol{Q})=(det(\boldsymbol{Q}))^{2}=det[\delta^{i}_{j}]=1$$

$$\therefore det(\boldsymbol{Q})=1\ or\ -1$$

等于1时称为正常正交张量，-1时反常正交张量

- 正交张量特征根之积满足 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = I_3 = det(\boldsymbol{Q}) = \pm 1$
- 例如，对于正常正交张量，可假设实特征根和一对复特征根分别是

$$\lambda_3 = 1; \lambda_1 = cos(\varphi) + i\,sin(\varphi); \lambda_2 = cos(\varphi) - i\,sin(\varphi)$$

可给出其标准形为

$$[\boldsymbol{Q}] = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 2.6 二阶张量的分解
- 2.6.1 加法分解

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{N} + \boldsymbol{\Omega}$$

$$\mathrm{N} = \frac{1}{2}(\mathrm{T} + \mathrm{T}^{\mathrm{T}})$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathrm{T} - \mathrm{T}^{\mathrm{T}})$$

- **球形张量与偏斜张量：** 对称二阶张量N可分解为N=P+D，其中

  $P^i_{.j} = \frac{1}{3} I_1 \delta^i_j = \frac{1}{3}(N^1_{.1} + N^2_{.2} + N^3_{.3})\delta^i_j$ 称为球形张量。它的矩阵是对角矩阵且对角元相等。

  $D^i_{.j} = N^i_{.j} - \frac{1}{3}(N^1_{.1} + N^2_{.2} + N^3_{.3})\delta^i_j$ 称为偏斜张量。

  应变张量的球形张量和偏斜张量的物理意义。

- 2.6.2 极分解

  正则张量必可进行极分解

  $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{H}$（右积分解）

- 其中，$\boldsymbol{Q},\boldsymbol{H}$ 分别为一个正交张量和一个正张量。

$\boldsymbol{Q},\boldsymbol{H}$ 的具体形式是：

$$\boldsymbol{H}=\sqrt{\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{T}}>0$$

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{H}^{-1}$$

证明：$\boldsymbol{H}=\sqrt{\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{T}}$ 是正张量（正定、对称）

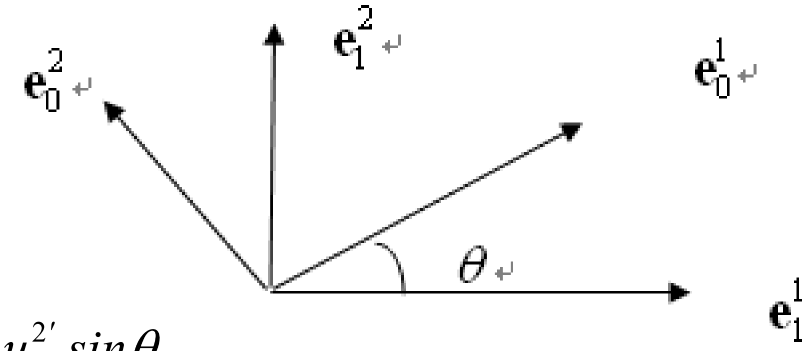
令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{T}\cdot\left(\sqrt{\boldsymbol{T}^T\cdot\boldsymbol{T}}\right)^{-1}$，则

$$\boldsymbol{Q}^T=(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{H}^{-1})^T\overset{(A\bullet B)^T=B^T\bullet A^T}{=}(\boldsymbol{H}^{-1})^T\cdot\boldsymbol{T}^T\overset{(\boldsymbol{H}^{-1})^T=(\boldsymbol{H}^T)^{-1}}{=}(\boldsymbol{H}^T)^{-1}\cdot\boldsymbol{T}^T\overset{H^T=H}{=}(\boldsymbol{H})^{-1}\cdot\boldsymbol{T}^T$$

$$\boldsymbol{Q}^T\bullet\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{H})^{-1}\cdot\boldsymbol{T}^T\bullet(\boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{H}^{-1})\overset{\boldsymbol{H}^2=\boldsymbol{T}^T\bullet\boldsymbol{T}}{=}(\boldsymbol{H})^{-1}\cdot\boldsymbol{H}^2\bullet\boldsymbol{H}^{-1}=\boldsymbol{G}\bullet\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}$$

- 说明它是正交张量
- 从证明过程中可见 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{H}$ 的分解是唯一的。
- 类似与右积分解，还可定义左积分解。
- 作业：习题2.6，2.10，2.11，2.14，2.15，2.17, 2.24

- 3 张量函数及其导数
- 3.1 平面直角坐标系旋转后矢量分量的变换
- 平面直角坐标系（$\mathbf{e}_0^1,\mathbf{e}_0^2$）绕平面法线进行旋转后得到另一个直角坐标系$\mathbf{e}_1^1,\mathbf{e}_1^2$，同一矢量 $\boldsymbol{u}$ 在两个坐标系中的分量满足：



$$u^1=\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{e}^1=(u^{1'}\boldsymbol{e}_{1'}+u^{2'}\boldsymbol{e}_{2'})\bullet\boldsymbol{e}^1=\ u^{1'}\cos\theta+u^{2'}\sin\theta$$

$$u^2=\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{e}^2=(u^{1'}\boldsymbol{e}_{1'}+u^{2'}\boldsymbol{e}_{2'})\bullet\boldsymbol{e}^2=-u^{1'}\sin\theta+u^{2'}\cos\theta$$

上式矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix}u^1\\u^2\\u^3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\-\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u^{1'}\\u^{2'}\\u^{3'}\end{Bmatrix} \quad 或 \quad \begin{Bmatrix}u^{1'}\\u^{2'}\\u^{3'}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u^1\\u^2\\u^3\end{Bmatrix}$$

即矢量在旋转后的坐标系中的分量与矢量在原坐标系中的分量满足正交变换关系。

- **3.2 张量函数**
- 张量函数：若张量 $\boldsymbol{H}$ 依赖于n个张量 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_n$ 而变化，即给定这n个张量 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_n$，可以唯一确定张量 $\boldsymbol{H}$，则称张量 $\boldsymbol{H}$ 是 $\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_n$ 的函数：

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_n)$$

① 定义中的张量包含标量、矢量特殊情况

② 函数形式可能与坐标系相关

- 例如：$\varphi=f_0(\boldsymbol{u})=u_0^1+u_0^2$（这里下标标记坐标系，上标标记分量序号）

  由于 $u^1+u^2\big|_0$ 不是不变量，当函数在坐标系1中描述时，

  根据：
$$u_0^1=u_1^1\cos\theta+u_1^2\sin\theta$$
$$u_0^2=-u_1^1\sin\theta+u_1^2\cos\theta$$

  可得：

$$\varphi=f_0(\boldsymbol{u})=u_1^1(\cos\theta-\sin\theta)+u_1^2(\cos\theta+\sin\theta)\neq u_1^1+u_1^2=f_1(\boldsymbol{u})$$

- 张量函数的其他例子：

动能： $\varphi = f(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$ （标量函数）

力的做功： $\varphi = f(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2$ （标量函数）

应力： $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{C}:\boldsymbol{\varepsilon}$

二阶张量的多项式： $\mathbf{H} = f(\mathbf{T}) = c_0\mathbf{G} + c_1\mathbf{T} + c_2\mathbf{T}^2 + \ldots + c_k\mathbf{T}^k$

- **3.3 各向同性标量函数的定义**

对于矢量（或二阶张量）为自变量的标量函数来说，如果当作为自变量的矢量（或二阶张量）旋转后，函数的形式不变，即满足 $\varphi = f(u^{1'},u^{2'},u^{3'}) = f(u^1,u^2,u^3)$ 或 $\varphi = f(T^{i'j'}) = f(T^{ij})$，则称为各向同性标量函数。

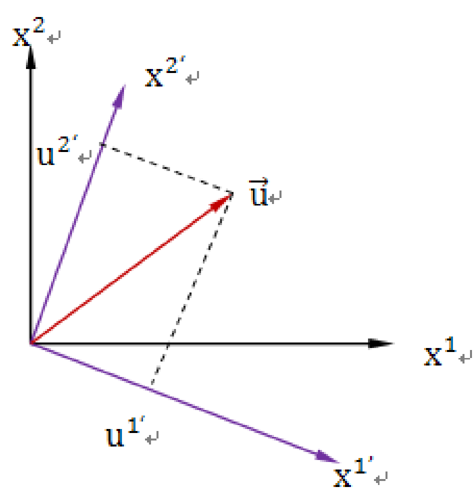
$u^{1'},u^{2'},u^{3'}$ ---矢量在旋转后坐标系中的分量

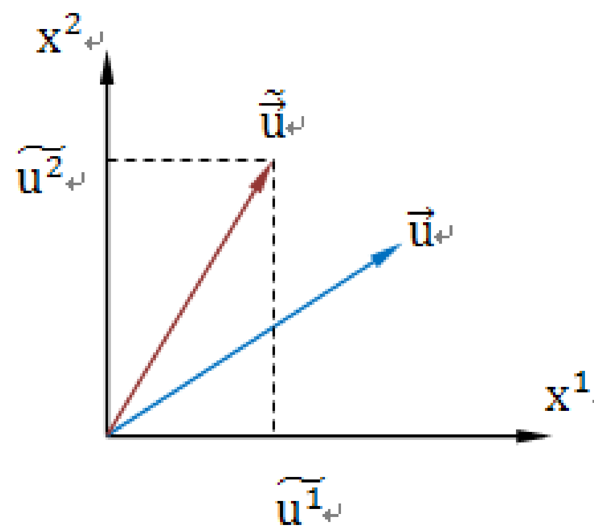
- 数学上定义：对于矢量的标量函数 $\varphi = f(\boldsymbol{u})$，若 $f(\boldsymbol{Q}.\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u})$（$\mathbf{Q}$为任意正交张量），$\varphi = f(\boldsymbol{u})$是各向同性标量函数。
- **张量的旋转量**
- 张量的旋转量：分量不变、坐标系彼此相差一个刚性转动的一组张量。（本书中旋转量用张量符号上面加一个波浪线表示）

二阶张量 $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}.\mathbf{T}.\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$

矢量 $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}.\mathbf{u}$

标量 $\tilde{\varphi} = \varphi$





以下给出张量的旋转量与张量本身的关系：

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$$

$$\mathrm{Q}\cdot\mathbf{g}_i = \mathbf{e}_i$$

$$\therefore \boldsymbol{T} = T^{ij}(\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{e}_j)$$

$$= T^{ij}(\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{Q})$$

$$= \boldsymbol{Q}^T\cdot\tilde{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{Q}$$

$$\tilde{\boldsymbol{T}} \triangleq T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T$$

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{g}_i$$

$$\mathrm{Q}\cdot\mathbf{g}_i = \mathbf{e}_i$$

$$\therefore \mathbf{v} = v^i(\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{e}_i)$$

$$= \mathbf{Q}^T\cdot\tilde{\mathbf{v}}$$

$$\tilde{\mathbf{v}} \triangleq v^i\mathbf{e}_i = \mathrm{Q}\cdot\mathbf{v}$$

$$\varphi = \varphi$$

$$\mathrm{Q}\cdot\mathbf{g}_i = \mathbf{e}_i$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi$$

- **3.4 各向同性张量函数的定义**

各向同性张量函数：对任意的正交张量 $\mathbf{Q}$ ，如果张量函数 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_n)$ 满足 $\tilde{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{T}}_1,\tilde{\boldsymbol{T}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{T}}_n)$ ，则称为各向同性张量函数。（即表达形式不因坐标系的刚性转动而改变的函数。）根据定义，各向同性标量函数、各向同性矢量函数和各向同性张量函数分别满足以下各式。

- 各向同性标量函数满足 $f=f(\boldsymbol{T},\boldsymbol{u},a)=f(\tilde{\boldsymbol{T}},\tilde{\boldsymbol{u}},a)=f(\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{Q}^T,\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{u},a)$
- 各向同性矢量函数满足 $\boldsymbol{Q}\bullet f(\boldsymbol{T},\boldsymbol{u},a)=f(\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{Q}^T,\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{u},a)$
- 各向同性张量函数满足 $\boldsymbol{Q}\bullet f(\boldsymbol{T},\boldsymbol{u},a)\bullet\boldsymbol{Q}^T=f(\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{Q}^T,\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{u},a)$

- **3.5矢量的标量函数**

Cauchy基本表示定理：$\varphi = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$为各向同性函数的充要条件为 $\varphi = f(\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j)$

例如：动能 $\varphi = f(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{v}$是各向同性标量函数。

充分性的证明：

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_j = (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{v}_i) \cdot (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{Q}^t \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j$$

推论： 单个矢量作为自变量的标量函数 $\varphi = f(\boldsymbol{v})$为各向同性函数的充要条件为 $\varphi = f(|\boldsymbol{v}|)$ 。

例如：力的做功 $\varphi = f(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}|^2$ 是各向同性标量函数。

- **3.6 二阶张量的标量函数**

- 二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的标量函数$\varphi=f(\boldsymbol{T})$为各向同性函数的充要条件为$\varphi$ 是仅由 $\boldsymbol{T}$ 与度量张量分量所决定的标量不变量。

- 例如：二阶张量的主不变量、各次矩、行列式均是各向同性标量函数

- 对称张量的标量函数 $\varphi=f(\boldsymbol{N})$为各向同性函数的充要条件为$\varphi$ 是仅由张量的主不变量决定的函数：

$$\varphi=f(I_1^N,I_2^N,I_3^N)$$

- **3.4 各向同性张量函数的定义**

各向同性张量函数：对任意的正交张量 $\mathbf{Q}$ ，如果张量函数 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_n)$ 满足 $\tilde{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{T}}_1,\tilde{\boldsymbol{T}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{T}}_n)$ ，则称为各向同性张量函数。（即表达形式不因坐标系的刚性转动而改变的函数。）根据定义，各向同性标量函数、各向同性矢量函数和各向同性张量函数分别满足以下各式。

- 各向同性标量函数满足 $f=f(\boldsymbol{T},\boldsymbol{u},a)=f(\tilde{\boldsymbol{T}},\tilde{\boldsymbol{u}},a)=f(\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{Q}^T,\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{u},a)$
- 各向同性矢量函数满足 $\boldsymbol{Q}\bullet f(\boldsymbol{T},\boldsymbol{u},a)=f(\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{Q}^T,\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{u},a)$
- 各向同性张量函数满足 $\boldsymbol{Q}\bullet f(\boldsymbol{T},\boldsymbol{u},a)\bullet\boldsymbol{Q}^T=f(\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{T}\bullet\boldsymbol{Q}^T,\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{u},a)$

张量的旋转量 $\tilde{\varphi}=\varphi \quad \tilde{\mathbf{v}}\triangleq\mathbf{Q}\cdot\mathbf{v} \quad \tilde{\boldsymbol{T}}\triangleq\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T$

- **3.5矢量的标量函数**

Cauchy基本表示定理：$\varphi = f(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$为各向同性函数的充要条件为 $\varphi = f(\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j)$

例如：动能 $\varphi = f(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f} \bullet \boldsymbol{v}$是各向同性标量函数。

充分性的证明：

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{v}}_j = (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{v}_i) \cdot (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{Q}^t \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j$$

推论： 单个矢量作为自变量的标量函数 $\varphi = f(\boldsymbol{v})$为各向同性函数的充要条件为 $\varphi = f(|\boldsymbol{v}|)$ 。

例如： $\varphi = f(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}|^2$ 是各向同性标量函数。

- **3.6 二阶张量的标量函数**
- 二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的标量函数$\varphi=f(\boldsymbol{T})$为各向同性函数的充要条件为$\varphi$ 是仅由 $\boldsymbol{T}$ 与度量张量分量所决定的标量不变量。
- 例如：二阶张量的主不变量、各次矩、行列式均是各向同性标量函数
- 对称张量的标量函数 $\varphi=f(\boldsymbol{N})$为各向同性函数的充要条件为$\varphi$ 是仅由张量的主不变量决定的函数：

$$\varphi=f(I_1^N,I_2^N,I_3^N)$$

3.4 二阶张量的解析函数

自变量为标量的标量值函数：

$$e^{z}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{3}}{3!}+\cdots+\frac{z^{n}}{n!}+\cdots;$$

$$e^{iz}=1+\frac{iz}{1!}-\frac{z^{2}}{2!}-\frac{iz^{3}}{3!}+\frac{z^{4}}{4!}+\frac{iz^{5}}{5!}-\cdots+\frac{z^{n}}{n!}+\cdots=cos(z)+i\,sin(z)$$

where

$$sin(z)=z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}-\frac{z^{7}}{7!}+\cdots;\quad cos(z)=1-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}-\frac{z^{6}}{6!}+\cdots$$

根据以上关系，可类似定义二阶张量的解析函数：

$$e^{\boldsymbol{T}}\triangleq\boldsymbol{G}+\boldsymbol{T}+\frac{\boldsymbol{T}^{2}}{2!}+\frac{\boldsymbol{T}^{3}}{3!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{T}^{n}}{n!}+\cdots$$

$$sin(\boldsymbol{T})\triangleq\boldsymbol{T}-\frac{\boldsymbol{T}^{3}}{3!}+\frac{\boldsymbol{T}^{5}}{5!}-\frac{\boldsymbol{T}^{7}}{7!}+\cdots;\quad cos(\boldsymbol{T})\triangleq\boldsymbol{G}-\frac{\boldsymbol{T}^{2}}{2!}+\frac{\boldsymbol{T}^{4}}{4!}-\frac{\boldsymbol{T}^{6}}{6!}+\cdots$$

这些级数是收敛的

注：以上三角函数的定义也可根据 $e^{i\boldsymbol{T}}=cos(\boldsymbol{T})+i\,sin(\boldsymbol{T})$ 得到。

由于二阶张量的旋转量的幂函数满足

$$\tilde{\boldsymbol{T}}^2 = (\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T)^2 = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}^2\cdot\boldsymbol{Q}^T$$

$$\tilde{\boldsymbol{T}}^3 = \tilde{\boldsymbol{T}}^2\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T) = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}^2\cdot\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}^3\cdot\boldsymbol{Q}^T$$

$$\tilde{\boldsymbol{T}}^n = \tilde{\boldsymbol{T}}^{n-1}\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T) = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}^{n-1}\cdot\boldsymbol{Q}^T\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}^n\cdot\boldsymbol{Q}^T$$

所以

$$e^{\tilde{\boldsymbol{T}}} = \boldsymbol{Q}\cdot e^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{Q}^T$$

$$\sin(\tilde{\boldsymbol{T}}) = \boldsymbol{Q}\cdot\sin(\boldsymbol{T})\cdot\boldsymbol{Q}^T;\quad \cos(\tilde{\boldsymbol{T}}) = \boldsymbol{Q}\cdot\cos(\boldsymbol{T})\cdot\boldsymbol{Q}^T$$

可见：**张量的解析函数都是各向同性函数**

如果二阶张量能在一组基下化为如下对角**标准型（例如对称张量可在其特征向量组成的基下化为对角型；非对称张量如果特征根不重合，或者特征根虽重合但都是简单因子，也可找到一组基化为对角型。也有的张量没有3个线性无关的特征矢量，所以不能化为对角标准型）：**

$$\boldsymbol{T} = \lambda_1 \boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}^2 + \lambda_3 \boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}^3$$

则有 $$\boldsymbol{T}^2 = \boldsymbol{T} \cdot (\lambda_1 \boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}^2 + \lambda_3 \boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}^3) = \lambda_1 \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}^1 + \lambda_2 \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}^2 + \lambda_3 \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}^3$$

$$\overset{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_1=\lambda_1\boldsymbol{g}_1;\dots}{=} \lambda_1(\lambda_1 \boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}^1) + \lambda_2(\lambda_2 \boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}^2) + \lambda_3(\lambda_3 \boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}^3)$$

$$= \lambda_1^2 \boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}^1 + \lambda_2^2 \boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}^2 + \lambda_3^2 \boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}^3$$

$$\boldsymbol{T}^3 = \lambda_1^3 \boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}^1 + \lambda_2^3 \boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}^2 + \lambda_3^3 \boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}^3$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{T}^n = \lambda_1^n \boldsymbol{g}_1 \boldsymbol{g}^1 + \lambda_2^n \boldsymbol{g}_2 \boldsymbol{g}^2 + \lambda_3^n \boldsymbol{g}_3 \boldsymbol{g}^3$$

例如，对于对称张量 $\boldsymbol{N}=\lambda_1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+\lambda_2\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\lambda_3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3$ ，根据以上各式有：

$$
\begin{aligned}
sin(\boldsymbol{N}) &\triangleq \boldsymbol{N}-\frac{\boldsymbol{N}^3}{3!}+\frac{\boldsymbol{N}^5}{5!}-\frac{\boldsymbol{N}^7}{7!}+\cdots \\
&=(\lambda_1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+\lambda_2\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\lambda_3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3)-\frac{1}{3!}(\lambda_1^3\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+\lambda_2^3\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\lambda_3^3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3)+ \\
&\frac{1}{5!}(\lambda_1^5\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+\lambda_2^5\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\lambda_3^5\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3)-\frac{1}{7!}(\lambda_1^7\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+\lambda_2^7\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\lambda_3^7\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3)+\cdots \\
&=sin(\lambda_1)\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+sin(\lambda_2)\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+sin(\lambda_3)\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3
\end{aligned}
$$

另一方面，若 $\lambda,\boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{T}$ 的特征值和特征矢量，则有：

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}\Rightarrow\boldsymbol{T}^2\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}=\lambda^2\boldsymbol{v}\Rightarrow\boldsymbol{T}^n\cdot\boldsymbol{v}=\lambda^n\boldsymbol{v}$$

所以

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}\Rightarrow e^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{v}=(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots+\frac{\lambda^n}{n!}+)\boldsymbol{v}=e^{\lambda}\boldsymbol{v}$$

将这一结论推广，可得到以下定理：

定理：若二阶张量 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ ，则它的解析函数 $\boldsymbol{H}=f(\boldsymbol{T})$ 必有

$$\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{v}=f(\lambda)\boldsymbol{v}$$

该定理的含义：
二阶张量的解析函数与该张量（即函数自变量）有相同的特征矢量；
二阶张量的解析函数的特征根是以该张量的特征根为自变量的对应函数值。

例1：若二阶张量T有特征根和特征矢量 $\lambda,\boldsymbol{v}$，则

$$\boldsymbol{T}^m\cdot\boldsymbol{v}=\lambda^m\boldsymbol{v}$$

例2：对称张量对角形写为 $\boldsymbol{N}=\lambda_1\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+\lambda_2\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+\lambda_3\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3$ 则同样可得到等式：

$$sin(\boldsymbol{N})=sin(\boldsymbol{N})\bullet\boldsymbol{G}=sin(\boldsymbol{N})\bullet\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^i$$

$$\overset{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{v}=f(\lambda)\boldsymbol{v}}{=}sin(\lambda_1)\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}^1+sin(\lambda_2)\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}^2+sin(\lambda_3)\boldsymbol{g}_3\boldsymbol{g}^3$$

3.4.1 Hamilton-Cayley等式：

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T}^3 - I_1\boldsymbol{T}^2 + I_2\boldsymbol{T} - I_3\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$$

（二阶张量的任何超过二阶的多项式都可以用二阶以下的多项式表示）

回忆：二阶张量的主不变量与张量的特征值之间满足如下关系（利用式2.3.5b，从对角标准型或Jordan标准型都可以推出这些关系）：

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3;$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(T^i_{.i}T^j_{.j} - T^i_{.j}T^j_{.i}) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1;$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

证明：

令 $\Delta(\boldsymbol{T}) \triangleq (\boldsymbol{T} - \lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T} - \lambda_2\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T} - \lambda_3\boldsymbol{G})$ ，则应用以上3个等式可以证明

$$\begin{aligned}
\Delta(\boldsymbol{T}) &= (\boldsymbol{T} - \lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T} - \lambda_2\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T} - \lambda_3\boldsymbol{G}) \\
&= (\boldsymbol{T}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{T} + \lambda_1\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T} - \lambda_3\boldsymbol{G}) \\
&= \boldsymbol{T}^3 - (\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{T}^2 + \lambda_1\lambda_2\boldsymbol{T} - \lambda_3\boldsymbol{T}^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3\boldsymbol{T} - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
&= \boldsymbol{T}^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\boldsymbol{T}^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\boldsymbol{T} - \lambda_1\lambda_2\lambda_3\boldsymbol{G} \\
&= \boldsymbol{T}^3 - I_1\boldsymbol{T}^2 + I_2\boldsymbol{T} - I_3\boldsymbol{G}
\end{aligned}$$

以下以两种不同情况为例证明$\Delta(\boldsymbol{T})=0$

（1）当T有一个实根和一对共轭复根时

记T的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2^*$ ，特征向量是 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2+i\boldsymbol{g}_3,\boldsymbol{g}_2-i\boldsymbol{g}_3$，则有

$$\Delta(\boldsymbol{T})=(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2^*\boldsymbol{G})$$

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_1=\lambda_1\boldsymbol{g}_1;\quad \boldsymbol{T}\cdot(\boldsymbol{g}_2+i\boldsymbol{g}_3)=\lambda_2(\boldsymbol{g}_2+i\boldsymbol{g}_3)$$

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{T})\cdot\boldsymbol{g}_1&=(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2^*\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{g}_1=(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot\big((\boldsymbol{T}-\lambda_2^*\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{g}_1\big)\\
&\overset{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_1=\lambda_1\boldsymbol{g}_1}{=}(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot\big((\lambda_1-\lambda_2^*)\boldsymbol{g}_1\big)\\
&=(\lambda_1-\lambda_2^*)(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{g}_1\\
&\overset{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{g}_1=\lambda_1\boldsymbol{g}_1}{=}(\lambda_1-\lambda_2^*)(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot\big((\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{g}_1\big)\\
&=(\lambda_1-\lambda_2^*)(\lambda_1-\lambda_2)(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

同理，可得

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{T})\cdot(\boldsymbol{g}_2+i\boldsymbol{g}_3)&=(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2^*\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{g}_2+i\boldsymbol{g}_3)\\
&\overset{\boldsymbol{T}\cdot(\boldsymbol{g}_2+i\boldsymbol{g}_3)=\lambda_2^*(\boldsymbol{g}_2+i\boldsymbol{g}_3)}{=}(\lambda_2-\lambda_2^*)(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{g}_2+i\boldsymbol{g}_3)\\
&=(\lambda_2-\lambda_2^*)(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{g}_2+i\boldsymbol{g}_3)\\
&=\boldsymbol{0}\\
&\Rightarrow\Delta(\boldsymbol{T})\cdot\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{0};\Delta(\boldsymbol{T})\cdot\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

（2）当T有有3个互不相同的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，（对应的特征向量 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 是线性无关的）时：

$$(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{0};(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{0};(\boldsymbol{T}-\lambda_3\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{0}$$

则有

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_3\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{g}_1\\&=(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot(\lambda_1\boldsymbol{g}_1-\lambda_3\boldsymbol{g}_1)\\&=(\lambda_1-\lambda_3)(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{g}_1=(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

同理，可得

$$(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_3\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{g}_2=0$$
$$(\boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{T}-\lambda_3\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{g}_3=0$$

综合以上各式，可得 $\Delta(\boldsymbol{T})$与任何矢量的点积都为零（因三个特征向量线性无关），即 $\Delta(\boldsymbol{T})=0$

对于其他情形，也可证明 $\Delta(\boldsymbol{T})=0$

即 $\boldsymbol{T}^3-I_1\boldsymbol{T}^2+I_2\boldsymbol{T}-I_3\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0}$

注意：Hamilton-Cayley等式对任意二阶张量均成立。

根据此定理可得 $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{n})}=f(\boldsymbol{T}^2,\boldsymbol{T},\boldsymbol{G})$ for any $n>2$

3.4.2 对称张量的对称张量函数

定理：对称张量$\boldsymbol{N}$的对称函数 $\boldsymbol{H}=f(\boldsymbol{N})$ 是各向同性函数的充要条件是

$$\boldsymbol{H}=f(\boldsymbol{N})=k_0\boldsymbol{G}+k_1\boldsymbol{N}+k_2\boldsymbol{N}^2$$

其中，系数k_i 是 $\boldsymbol{N}$ 的主不变量的函数。

该定理的充分性可从张量$\boldsymbol{T}$（不限于对称张量）解析函数的各向同性得到

即各向同性线弹性材料弹性常数只有2个独立的常数(称为Lame常数

3.5 张量函数的导数

3.5.1 有限微分、导数与微分的定义

回顾：以实数为自变量的函数的导数和微分定义为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}(f(x+\Delta x)-f(x))$$

$$\mathrm{d}f=f'(x)\mathrm{d}x$$

1 对自变量为矢量的张量函数：

对于矢量为自变量的张量函数，定义函数值对自变量的变化率时，必须指出自变量的变化的方向。

以单个矢量为自变量的张量函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$ 的**有限微分**定义为：

自变量　增量方向　描述增量大小

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}))$$

物理意义：

函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$的自变量在$\boldsymbol{u}$方向上增加$h\boldsymbol{u}$时，函数增量的主要部分（线性部分）

例：方向和大小不变的力***P***在位移***v***作功为 $w = f(v) = P \bullet v$ 则对于与***P***垂直的方向***u***，f(***v***)的有限微分是：

$$f'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u}) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{v})) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\boldsymbol{P}\bullet(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{P}\bullet\boldsymbol{v}) = 0$$

即做功对在和力垂直方向上的变化率为零。

① $F'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})$ 是***u***的线性函数：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};a\boldsymbol{u}) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}+ha\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}))\\ &\overset{k=ha}{=} \lim_{k\to 0}\frac{1}{k/a}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}+k\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}))\\ &= a\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u}+\boldsymbol{t}) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}+h(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{t})) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}))\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{t}+h\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{t})] + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}))]\\ &= \lim_{h\to 0}\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{t};\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{t})\end{aligned}$$

因此： $$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{t}) = a\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u}) + b\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{t})$$

②微分与导数的关系：

对于自变量为矢量的矢量函数*F*(v)：

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}))\ \ or\ \ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})=h\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})+O(h)$$

前已证明有限微分与矢量***u***具有线性变换关系,由商法则，该变换通过一个二阶张量实现。

为此可定义：$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})\triangleq\dfrac{d\boldsymbol{F}}{d\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{u}\triangleq\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u}$

其中 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v})\triangleq\dfrac{d\boldsymbol{F}}{d\boldsymbol{v}}$ 称为**矢量函数** $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$ **的导数，为二阶张量。**

在 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})=h\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u}+O(h)$ 中，记 $d\boldsymbol{v}=h\boldsymbol{u}$，并记函数增量的主部为 $d\boldsymbol{F}$，则有 $d\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v})\cdot d\boldsymbol{v}$ ，其中 $d\boldsymbol{F}$ 称为微分。

例：对于矢量的矢量函数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})=A\bullet\boldsymbol{v}$ (其中***A***为二阶张量)，有限微分是

$$F'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{v}))=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(A\bullet(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})-A\bullet\boldsymbol{v})=A\bullet\boldsymbol{u}$$

根据导数定义，得到 $F'(\boldsymbol{v})=A$

因此， $dF(\boldsymbol{v})=A\bullet d\boldsymbol{v}$

2 对自变量为张量的张量函数：

有限微分（方向导数）定义为：$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A};\boldsymbol{C})=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}+h\boldsymbol{C})-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})]$

同样可以证明：方向导数是$\boldsymbol{C}$的线性函数。据此可得：

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A};\boldsymbol{C})=\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A};c^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j)=c^{ij}\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A};\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j)$$

对于n阶张量$\boldsymbol{A}$的m阶张量函数 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$，由 $\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A};\boldsymbol{C})=\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A})\underset{n}{*}\boldsymbol{C}$

定义张量函数的导数，并记作 $\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A})=\dfrac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{A}}$

其中，$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A})$是$m+n$ 阶张量。

定义张量函数的微分为：$d\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A})\underset{n}{*}d\boldsymbol{A}$

例如：如果$\boldsymbol{A}$为3阶张量，则 $\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A};\boldsymbol{C})=\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A})\,\vdots\,\boldsymbol{C}\triangleq\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{A})\underset{3}{*}\boldsymbol{C}$

张量函数的有限微分、导数和微分举例

1. 矢量的标量函数 $\varphi = f(\mathbf{v})$

$$f'(\mathbf{v};\mathbf{u}) = f'(\mathbf{v})\cdot\mathbf{u} \quad f'(\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\mathbf{v}} \quad \mathrm{d}f = f'(\mathbf{v})\cdot\mathrm{d}\mathbf{v}$$

2. 矢量的矢量函数 $\mathbf{w} = F(\mathbf{v})$

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{v}} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

3. 矢量的二阶张量函数 $H = T(\mathbf{v})$

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{T}'(\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{T}'(\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}\boldsymbol{v}} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}'(\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

4. 二阶张量的标量函数 $\varphi = f(S)$

$$f'(S;C) = f'(S):C \quad f'(S) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}S} \quad \mathrm{d}f = f'(S):\mathrm{d}S$$

5. 二阶张量的二阶张量函数 $H = T(S)$

$$T'(S;C) = T'(S):C \quad T'(S) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}S} \quad \mathrm{d}T = T'(S):\mathrm{d}S$$

3.5.2 张量函数导数的链式法则

对于复合函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}))$，有 $\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{F})\underset{n}{*}\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{T})$。其中 ***H*, *G***是*p*阶张量函数，***T***是*m*阶张量，***F***是*n*阶张量，$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{T})$ 是 *p*+*m*阶张量。

证明：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}+h\boldsymbol{C})) &= \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})+\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{T})\underset{m}{*}h\boldsymbol{C}+\boldsymbol{o}(h)\right) \\
&= \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})+h\left(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{T})\underset{m}{*}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{o}(1)\right)\right) \\
&= \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\right)+\boldsymbol{G}'\left(\boldsymbol{F}\right)\underset{n}{*}h\left(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{T})\underset{m}{*}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{o}(1)\right)+\boldsymbol{o}(h) \\
&= \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\right)+\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{F})\underset{n}{*}\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{T})\underset{m}{*}h\boldsymbol{C}+\boldsymbol{o}(h)
\end{aligned}$$

根据有限微分与张量函数的导数的关系，得到：$\boldsymbol{H}'\left(\boldsymbol{T}\right)=\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{F})\underset{n}{*}\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{T})$

3.5.3 两个二阶张量值函数乘积（点积、并积、叉积）的微分

对于 $H(T)=U(T)\otimes V(T)$（$\otimes$代表代表并乘、点积、叉积），如果给定 T 的微小增量dT，则有

$$H(T+dT)=H(T)+dH(T)+o(dT)$$ （即 dH 是函数增量的主部）又

$$H(T+dT)=U(T+dT)\otimes V(T+dT)=(U(T)+dU(T)+o(dT))\otimes(V(T)+dV(T)+o(dT))$$
$$=U(T)\otimes V(T)+dU(T)\otimes V(T)+U(T)\otimes dV(T)+o(dT)$$
$$=H(T)+dU(T)\otimes V(T)+U(T)\otimes dV(T)+o(dT)$$

以上二式对比可得张量函数之乘积的微分为

$$dH(T)=dU(T)\otimes V(T)+U(T)\otimes dV(T)$$

（据此可以推导函数的导数，但没有一般的显式表达）

注意 $H'(T)\neq U'(T)\otimes V(T)+U(T)\otimes V'(T)$

例1：对于矢量的矢量函数之点积 $\varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})\bullet\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v})$ ，应用以上关系有

$$
\begin{aligned}
d\varphi(\boldsymbol{v}) &= d\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})\bullet\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})\bullet d\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}) \\
&= \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{v})\bullet d\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})\bullet\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{v})\bullet d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{v})\bullet\left(\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{v})\bullet d\boldsymbol{v}\right) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})\bullet\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{v})\bullet d\boldsymbol{v} \\
&= \left(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v})\bullet\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})\bullet\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{v})\right)\bullet d\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

因此 $\boxed{\varphi'(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{v})\bullet\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})\bullet\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{v})}$

注意： $\varphi'(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{v})\bullet\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})\bullet\boldsymbol{w}'(\boldsymbol{v})$

例2：对于二阶张量的二阶张量函数之双点积 $f(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{T}):\boldsymbol{V}(\boldsymbol{T})$ ，应用以上关系有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f(\boldsymbol{T}) &= \mathrm{d}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{T}):\boldsymbol{V}(\boldsymbol{T}) + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{T}):\mathrm{d}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{T}) \\
&= \boldsymbol{U}'(\boldsymbol{T}):\mathrm{d}\boldsymbol{T}:\boldsymbol{V}(\boldsymbol{T}) + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{T}):\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{T}):\mathrm{d}\boldsymbol{T} \\
&= \boldsymbol{V}(\boldsymbol{T}):\boldsymbol{U}'(\boldsymbol{T}):\mathrm{d}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{T}):\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{T}):\mathrm{d}\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{V}(\boldsymbol{T}):\boldsymbol{U}'(\boldsymbol{T}) + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{T}):\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{T})):\mathrm{d}\boldsymbol{T}
\end{aligned}
$$

因此 $\boxed{f'(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{T}):\boldsymbol{U}'(\boldsymbol{T}) + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{T}):\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{T})}$

例3：求动能 $\varphi=\dfrac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ 对时间的导数

方法1：由有限微分求

$$\varphi'(\boldsymbol{v};\boldsymbol{u})=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})-\varphi(\boldsymbol{v})}{h}=\frac{1}{2}\rho\lim_{h\to 0}\frac{(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{v}+h\boldsymbol{u})-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{h}=\frac{1}{2}\rho(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})=\rho\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u}$$

$$\therefore\varphi'=\rho\boldsymbol{v}$$

链式法则

$$\dot{\varphi}=\frac{d\varphi(\boldsymbol{v}(t))}{dt}=\varphi'(\boldsymbol{v})\bullet\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\varphi'(\boldsymbol{v})\bullet\dot{\boldsymbol{v}}=\rho\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}$$

方法2：由微分关系求

$$d\varphi=\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\rho\boldsymbol{v}\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

$$\therefore\varphi'=\rho\boldsymbol{v}$$

$$\dot{\varphi}=\frac{d\varphi(\boldsymbol{v}(t))}{dt}=\varphi'(\boldsymbol{v})\bullet\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\varphi'(\boldsymbol{v})\bullet\dot{\boldsymbol{v}}=\rho\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}$$

3.6 矢量的函数之导数

3.6.1矢量的标量函数的导数

$$f'(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial f}{\partial v_i}\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial f}{\partial v^i}\boldsymbol{g}^i$$ （是一矢量）

物理意义：函数f增加最快的方向（在自变量分量组成的三维空间中，函数值f的等值面的法向）

定义导数算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial v^i}\boldsymbol{g}^i$$ （nabla）

（导数算子本身是一矢量），可将上式写为

$$f'(\boldsymbol{v}) = f\nabla$$

或 $$f'(\boldsymbol{v}) = f\nabla$$

3.6.2矢量的矢量函数的导数

对于矢量的矢量函数 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$，其导数为

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v})=\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})}{\partial v_i}\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})}{\partial v^i}\boldsymbol{g}^i=\left(\boldsymbol{g}^i\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})}{\partial v^i}\right)^T$$ （是一二阶张量）

利用导数算子可将上式写为

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}\nabla=(\nabla\boldsymbol{F})^T$$

3.6.3矢量的二阶张量函数的导数

对于矢量的二阶张量函数 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$，其导数为

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{v})=\frac{\partial \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})}{\partial v_i}\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})}{\partial v^i}\boldsymbol{g}^i$$ （是一三阶张量）

利用导数算子可将上式写为

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{T}\nabla$$

3.6.3张量函数的梯度、散度和旋度

对于自变量为矢量的函数，利用导数算子 $\nabla = \frac{\partial}{\partial v^i}\boldsymbol{g}^i$ 定义：

1 梯度：

矢量的标量函数的梯度 $$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial v^i}\boldsymbol{g}^i = f\nabla$$

物理意义：等值面（线）的法线方向（函数值增加最快的方向）

矢量的矢量函数的梯度 $$\nabla \boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}^i\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v^i} \qquad \boldsymbol{F}\nabla = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v^i}\boldsymbol{g}^i$$

矢量的二阶张量函数的梯度 $$\nabla \boldsymbol{T} = \boldsymbol{g}^i\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial v^i} \qquad \boldsymbol{T}\nabla = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial v^i}\boldsymbol{g}^i$$

以矢量为自变量的张量函数的微分和导数与梯度的关系：

$$df=\frac{\partial f}{\partial v^i}\boldsymbol{g}^i\bullet(\mathrm{d}v^j\boldsymbol{g}_j)=(f\nabla)\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

$$\Rightarrow f'(\boldsymbol{v})=f\nabla=\nabla f$$

$$d\boldsymbol{F}=\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v^i}\mathrm{d}v^i=\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v^i}\boldsymbol{g}^i\bullet(\mathrm{d}v^j\boldsymbol{g}_j)=(\boldsymbol{F}\nabla)\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{v}\bullet(\nabla\boldsymbol{F})$$

$$\Rightarrow F'(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}\nabla$$

$$d\boldsymbol{T}=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial v^i}\mathrm{d}v^i=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial v^i}\boldsymbol{g}^i\bullet(\mathrm{d}v^j\boldsymbol{g}_j)=(\boldsymbol{T}\nabla)\bullet\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\mathrm{d}\boldsymbol{v}\bullet(\nabla\boldsymbol{T})$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T}'(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{T}\nabla$$

2 散度：

矢量的矢量函数的散度
$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} \triangleq \nabla \bullet \boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}^i \bullet \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v^i} = \frac{\partial F^i}{\partial v^i} = \boldsymbol{F} \bullet \nabla$$

矢量的二阶张量函数的散度
$$\nabla \bullet \boldsymbol{T} = \boldsymbol{g}^i \bullet \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial v^i} \qquad \boldsymbol{T} \bullet \nabla = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial v^i} \bullet \boldsymbol{g}^i$$

物理意义：流体的源和汇、热源

3 旋度：

矢量的矢量量函数的旋度
$$\mathrm{curl}\boldsymbol{F} \triangleq \nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}^i \times \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v^i} = \boldsymbol{\varepsilon} : (\nabla \boldsymbol{F}) = -\boldsymbol{F} \times \nabla$$

矢量的二阶张量函数的旋度
$$\nabla \times \boldsymbol{T} = \boldsymbol{g}^i \times \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial v^i} = \boldsymbol{\varepsilon} : (\nabla \boldsymbol{T}) \qquad \boldsymbol{T} \times \nabla = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial v^i} \times \boldsymbol{g}^i = (\boldsymbol{T}\nabla) : \boldsymbol{\varepsilon}$$

物理意义：流体的漩涡

3.7 二阶张量的函数之导数

3.7.1 二阶张量的标量函数之导数

对于二阶张量S的标量函数 ，有限微分、导数和微分分别为：

$$f'(\boldsymbol{S};\boldsymbol{C})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(\boldsymbol{S}+h\boldsymbol{C})-f(\boldsymbol{S})]$$

$$f'(\boldsymbol{S};\boldsymbol{C})=f'(\boldsymbol{S}):\boldsymbol{C} \qquad df=f'(\boldsymbol{S}):d\boldsymbol{S}$$

将 $\varphi=f(\boldsymbol{S})$视为 S^{ij} 的多元函数(此处将S的各分量视为相互独立的，并将基矢量视为常矢量)，则 $\varphi=f(\boldsymbol{S})$ 的微分还可写为

$$df=\frac{\partial f}{\partial S^{ij}}dS^{ij}=(\frac{\partial f}{\partial S^{ij}}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j):(dS^{kl}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_l)=(\frac{\partial f}{\partial S^{ij}}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j):d\boldsymbol{S}$$

由导数定义，得到 $f'(\boldsymbol{S})\triangleq\frac{df}{d\boldsymbol{S}}=\frac{\partial f}{\partial S^{ij}}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$

3.7.2 二阶张量的不变量的导数

二阶张量的主不变量是

$$I_1 = T^i_{.i}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\delta^{ij}_{lm} T^l_{.i} T^m_{.j} = \frac{1}{2}(T^i_{.i}T^j_{.j} - T^j_{.i}T^i_{.j})$$

$$I_3 = \frac{1}{6}\delta^{ijk}_{lmn} T^l_{.i} T^m_{.j} T^n_{.k} = T^l_{.1} T^m_{.2} T^n_{.3} e_{lmn}$$

二阶张量的矩是

$$I^*_k = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^k)$$

利用性质

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = A^i_{.i} + B^i_{.i} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = A^i_{.j}B^j_{.i} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{A}^T : \boldsymbol{B}$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) = A^i_{.j}B^j_{.k}C^k_{.i} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

可得:

$$tr(\boldsymbol{T}+h\boldsymbol{C})^k = tr\left(\boldsymbol{T}^k + h(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{k-1} + \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{k-2} + \boldsymbol{T}^2\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{k-3} + \cdots + \boldsymbol{T}^{k-1}\cdot\boldsymbol{C} + o(h^2))\right)$$

$$\overset{tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=tr(\boldsymbol{A})+tr(\boldsymbol{B})}{=} tr(\boldsymbol{T}^k) + tr[h(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{k-1} + \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{k-2} + \boldsymbol{T}^2\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{T}^{k-3} + \cdots + \boldsymbol{T}^{k-1}\cdot\boldsymbol{C} + o(h^2)]$$

$$\overset{tr(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})=tr(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{=} tr(\boldsymbol{T}^k) + hktr(\boldsymbol{T}^{k-1}\cdot\boldsymbol{C}) + O(h^2)$$

$$\overset{tr(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^T:\boldsymbol{B}}{=} tr(\boldsymbol{T}^k) + hk(\boldsymbol{T}^{k-1})^T : \boldsymbol{C} + O(h^2)$$

因此：$\dfrac{dI_k^*}{d\boldsymbol{T}} = k(\boldsymbol{T}^{k-1})^T \quad (1)$

例如：$\dfrac{dI_1^*}{d\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{G}, \dfrac{dI_2^*}{d\boldsymbol{T}} = 2\boldsymbol{T}^T, \dfrac{dI_3^*}{d\boldsymbol{T}} = 3(\boldsymbol{T}^2)^T$

左边各式还可从Kronecker符号性质推出：

$$\frac{dI_1^*}{d\boldsymbol{T}} = \frac{\partial T^i_{.i}}{\partial T^j_{.k}} \boldsymbol{g}^j \boldsymbol{g}_k = \delta^i_j \delta^k_i \boldsymbol{g}^j \boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{G}$$

$$\frac{dI_2^*}{d\boldsymbol{T}} = \frac{\partial T^i_{.j} T^j_{.i}}{\partial T^r_{.s}} \boldsymbol{g}^r \boldsymbol{g}_s = \frac{\partial T^i_{.j}}{\partial T^r_{.s}} T^j_{.i} \boldsymbol{g}^r \boldsymbol{g}_s + T^i_{.j} \frac{\partial T^j_{.i}}{\partial T^r_{.s}} \boldsymbol{g}^r \boldsymbol{g}_s$$

$$= \delta^i_r \delta^s_j T^j_{.i} \boldsymbol{g}^r \boldsymbol{g}_s + T^i_{.j} \delta^j_r \delta^s_i \boldsymbol{g}^r \boldsymbol{g}_s = 2 T^s_{.r} \boldsymbol{g}^r \boldsymbol{g}_s = 2\boldsymbol{T}^T$$

$$\frac{dI_3^*}{d\boldsymbol{T}} = \ldots = 3(\boldsymbol{T}^2)^T$$

因此

根据二阶张量的主不变量与矩的关系，由式（1）可得：

$$I_1 = I_1^* \Rightarrow \frac{dI_1}{d\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{G}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((I_1^*)^2 - I_2^*) \Rightarrow \frac{dI_2}{d\boldsymbol{T}} = I_1^* \frac{dI_1^*}{d\boldsymbol{T}} - \frac{1}{2}\frac{dI_2^*}{d\boldsymbol{T}} = I_1 \boldsymbol{G} - \boldsymbol{T}^T$$

$$I_3 = \frac{1}{6}(I_1^*)^3 - \frac{1}{2} I_1^* I_2^* + \frac{1}{3} I_3^* \Rightarrow \frac{dI_3}{d\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(I_1^*)^2 \frac{dI_1^*}{d\boldsymbol{T}} - \frac{1}{2}\frac{dI_1^*}{d\boldsymbol{T}} I_2^* - \frac{1}{2} I_1^* \frac{dI_2^*}{d\boldsymbol{T}} + \frac{1}{3} I_3^* = (I_2 \boldsymbol{G} - I_1 \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^2)^T$$

若 $\mathbf{T}$ 可逆，由Hamilton-Cayley定理 $\mathbf{T}^3 - I_1\mathbf{T}^2 + I_2\mathbf{T} - I_3\mathbf{G} = 0$ 两边同时点乘 $\mathbf{T}^{-1}$ 得到:

$$\mathbf{T}^2 - I_1\mathbf{T} + I_2\mathbf{G} - I_3\mathbf{T}^{-1} = 0$$

因此 $\dfrac{dI_3}{d\boldsymbol{T}} = (I_2\boldsymbol{G} - I_1\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^2)^T$ 还可表示为 $\dfrac{dI_3}{d\boldsymbol{T}} = I_3(\boldsymbol{T}^{-1})^T$

3.7.3 二阶张量的张量函数之导数

对于二阶张量 $\mathbf{H}=\mathbf{T}(\mathbf{S})$ ，有限微分和导数满足

$$\mathbf{T}'(\mathbf{S};\mathbf{C})=\mathbf{T}'(\mathbf{S}):\mathbf{C}$$

由于 $\mathbf{T}'(\mathbf{S})=\dfrac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{S}}=\dfrac{\partial T^{i}_{.j}}{\partial S^{k}_{.l}}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j\mathbf{g}^k\mathbf{g}_l$

所以导数的分量表达为：$$(T')^{i..l}_{.jk.}=\frac{\partial T^{i}_{.j}}{\partial S^{k}_{.l}}$$

同理可得 $$(T')^{ij}_{..kl}=\frac{\partial T^{ij}}{\partial S^{kl}},(T')^{ijkl}=\frac{\partial T^{ij}}{\partial S_{kl}},(T')_{ijkl}=\frac{\partial T_{ij}}{\partial S^{kl}},\ldots$$

规律：导数表达式中，分母中出现的下标视为上标，上标视为下标。

第4章 曲线坐标张量分析

与第3章研究对象的区别

张量函数（自变量是矢量或张量）： $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2,\cdots,\boldsymbol{T}_n)$

张量场函数（自变量是矢径）： $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})=T^{i\ldots j}_{\;\ldots\ldots k\ldots l}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\cdots\boldsymbol{g}^l$

其中，r 为径矢。这个函数在空间中每一点定义了一个张量，因此无论是它的分量还是基底矢量都将随空间位置不同而变化

例子：流体速度场、应力场、应变场、电场强度

张量场函数的连续性

若张量场函数T 的分量是曲线坐标 ξ^1,ξ^2,ξ^3 的实函数，在其定义域内处处连续，则称其是连续函数。

类似可以定义 C^N 阶光滑的张量场函数。

不光滑的张量场的例子？

4.1 基矢量的导数、Christoffel符号

回顾：曲线坐标系中的协变基矢量和逆变基矢量

曲线坐标系中矢径表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= \overline{x}^1(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\boldsymbol{e}_1 + \overline{x}^2(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\boldsymbol{e}_2 + \overline{x}^3(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\boldsymbol{e}_3 \\ &= \overline{x}^i(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\boldsymbol{e}_i\end{aligned}$$

其中，$\overline{x}^i$ 为直角坐标

协变基矢量定义为 $\boldsymbol{g}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i}$　　　$d\mathbf{r} = d\xi^i \mathbf{g}_i$

在笛卡尔坐标系下 $\boldsymbol{r} = \overline{x}^1 \boldsymbol{e}_1 + \overline{x}^2 \boldsymbol{e}_2 + \overline{x}^3 \boldsymbol{e}_3$， 所以

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \xi^i} \boldsymbol{e}_k$$

如果已知曲线坐标与直角坐标之间的函数关系，我们可以把相应的逆变基底表示为

$$\boldsymbol{g}^j = \nabla \xi^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial \overline{x}^m} \boldsymbol{e}^m$$

这是由于 $$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^j}{\partial \overline{x}^m} \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}^m = \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^j}{\partial \overline{x}^m} = \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi^i} = \delta_i^j$$

协变基矢量的导数和第二类Christoffel符号

定义：协变基矢量的导数对协变基分解的系数称为第二类Christoffel符号，记为 Γ_{ij}^{k}，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial \xi^i} \triangleq \Gamma_{ij}^{k} \boldsymbol{g}_k$$

或者(上式两端同时点乘 $\boldsymbol{g}^p$ 得到）

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial \xi^i} \cdot \boldsymbol{g}^k$$

（类似于 $P^k = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{g}^k$）

根据曲线坐标与笛卡儿坐标之间的关系给出第二类Christoffel符号的具体表达式：

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial \xi^i}\cdot \boldsymbol{g}^k=\frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial \xi^j}\boldsymbol{e}_p\right)\cdot\frac{\partial \xi^k}{\partial \overline{x}^m}\boldsymbol{e}^m$$

$$=\frac{\partial^2 \overline{x}^p}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\frac{\partial \xi^k}{\partial \overline{x}^p}$$

对于直角坐标系，$\Gamma_{ij}^{k}=0$

第二类Christoffel符号的性质

1. 指标对称性

第二类Christoffel符号的两个协变指标用于指示哪一个基矢量（第二个协变指标）对哪一个曲线坐标（第一个协变指标）求导数，然而

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial \xi^i} \cdot \boldsymbol{g}^k = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \cdot \boldsymbol{g}^k = \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \xi^j} \cdot \boldsymbol{g}^k = \Gamma_{ji}^{k}$$

2. 不是张量

在直线坐标系中，由于基矢量不随坐标而改变，所以第二类Christoffel符号全部为零。如果它是张量，它在任意坐标系中都应是零。但是，显然，实际情况不是这样。

第一类Christoffel符号

定义：协变基矢量的导数对逆变基分解的系数称为第一类Christoffel符号，记为 $\Gamma_{ij,k}$ ，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial \xi^i} \triangleq \Gamma_{ij,k}\boldsymbol{g}^k \qquad \text{或} \qquad \Gamma_{ij,k} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial \xi^i} \cdot \boldsymbol{g}_k$$

第一类Christoffel符号的具体表达式为

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial \xi^i} \cdot \boldsymbol{g}_k = \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial \xi^j}\boldsymbol{e}_p\right) \cdot \frac{\partial \overline{x}^m}{\partial \xi^k}\boldsymbol{e}_m$$

$$= \frac{\partial^2 \overline{x}^p}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial \xi^k}$$

❑ 第二类和第一类Christoffel符号间的联系

由于Christoffel符号的第三个指标是矢量的分量指标，所以可以通过度量张量进行升降：

$$\Gamma_{ij}^{k} = g^{km}\Gamma_{ij,m}$$

$$\Gamma_{ij,k} = g_{km}\Gamma_{ij}^{m}$$

$\Gamma_{ij}^{k} = \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial \xi^i} \cdot \boldsymbol{g}^k$　　而 $g^{km}\Gamma_{ij,m} = g^{km}\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial \xi^i} \cdot \boldsymbol{g}_m = \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial \xi^i} \cdot \boldsymbol{g}^k$,两式相等

逆变基矢量的导数

因为逆变基矢量和协变基矢量满足正交关系，所以可以根据这一关系确定逆变基矢量对曲线坐标的导数

$$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_k = \delta_k^i$$

将上式两端对曲线坐标求导得

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial \xi^j} \cdot \boldsymbol{g}_k + \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial \xi^j} \cdot \boldsymbol{g}^i = 0$$

所以有 $$\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial \xi^j} \cdot \boldsymbol{g}_k = -\Gamma_{jk}^i$$ 即 $$\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial \xi^j} = -\Gamma^i_{jk} \boldsymbol{g}^k$$

例题：求 $\sqrt{g}=\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)$ 对曲线坐标的导数

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\xi^i} &= \frac{\partial[\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)]}{\partial\xi^i} \\
&= \frac{\partial\boldsymbol{g}_1}{\partial\xi^i}\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)+\boldsymbol{g}_1\cdot(\frac{\partial\boldsymbol{g}_2}{\partial\xi^i}\times\boldsymbol{g}_3)+\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\frac{\partial\boldsymbol{g}_3}{\partial\xi^i}) \\
&= \Gamma^k_{i1}\boldsymbol{g}_k\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)+\Gamma^k_{i2}\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{g}_3)+\Gamma^k_{i3}\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_k) \\
&= (\Gamma^1_{i1}+\Gamma^2_{i2}+\Gamma^3_{i3})\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3) \\
&= \Gamma^k_{ik}\sqrt{g}
\end{aligned}
$$

$k\neq 3$ 则该项为零

$$
\Gamma^k_{ik}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\xi^i}=\frac{\partial\, ln(\sqrt{g})}{\partial\xi^i}
$$

4.2 张量场对矢径的导数、梯度

张量场函数：$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})=T^{i\dots j}_{\dots\dots k\dots l}\boldsymbol{g}_i\cdots\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\dots\boldsymbol{g}^l$

4. 2. 1 有限微分、导数与微分

张量场函数 对于 $\boldsymbol{r}$ 在基矢量方向上增量的有限微分为

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{r};\boldsymbol{g}_i)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{g}_i)-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})]=\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\xi^i}$$

证明：注意 $\dfrac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\xi^i}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}(\xi^l+h\delta^l_i))-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}(\xi^l))]$

而 $\boldsymbol{r}(\xi^l+h\delta^l_i)=\boldsymbol{r}(\xi^l)+\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi^l}h+\boldsymbol{o}(h)=\boldsymbol{r}(\xi^l)+h\boldsymbol{g}_i+\boldsymbol{o}(h)$

由此得到 $\dfrac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\xi^i}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{g}_i)-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})]=\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{r};\boldsymbol{g}_i)$

由于有限微分 $\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{r};\boldsymbol{u})$ 对于矢径的增量是线性的，因此根据上式，张量场函数 对于 $\boldsymbol{r}$ 的增量 的有限微分为:

$$\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{r};\boldsymbol{u}) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{u})-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r}+hu^i\boldsymbol{g}_i)-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})]$$

$$= u^i\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i} = (\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i}\boldsymbol{g}^i)\bullet\boldsymbol{u}$$

由有限微分与导数的定义 $\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{r};\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{T}'\bullet\boldsymbol{u}$ ，从上式知:

$$\boxed{\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i}\boldsymbol{g}^i \triangleq \boldsymbol{T}\nabla}$$

注意：在上式中，$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i}$ 中既包含张量分量对坐标 ξ^i 的偏导数，又包含张量基矢量对坐标 ξ^i 的偏导数，故可记为： $\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{r}) \triangleq \frac{d\boldsymbol{T}}{d\boldsymbol{r}}$

张量场函数的微分为

$$d\mathbf{T}=\mathbf{T}'(\mathbf{r})\bullet d\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\xi^i}d\xi^i=(\mathbf{T}\nabla)\bullet d\mathbf{r}$$ （注意这里括号是必需的）

其中 $$d\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi^i}d\xi^i=\mathbf{g}_i d\xi^i$$

或者 $$d\mathbf{T}=\mathbf{T}'(\mathbf{r})\bullet d\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\xi^i}d\xi^i=d\xi^i\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\xi^i}=d\mathbf{r}\bullet(\nabla\mathbf{T})$$

Hamilton 微分算子、梯度

Hamilton 微分算子定义为 $\nabla(\ ) = \boldsymbol{g}^i \dfrac{\partial(\ )}{\partial \xi^i}$ $\quad (\ )\nabla = \dfrac{\partial(\ )}{\partial \xi^i}\boldsymbol{g}^i$

运算规则：作用于张量时，运算结果由张量对曲线坐标求偏导数与相应的基矢量组成；基矢量指标与曲线坐标指标相同；基矢量与张量偏导数之间的运算与算子与张量之间的运算相同

梯度（左梯度、右梯度） $\nabla \boldsymbol{T} = \boldsymbol{g}^i \dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i}$ $\quad \boldsymbol{T}\nabla = \dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i}\boldsymbol{g}^i$

注意： $d\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{T}\nabla)\cdot d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r}\cdot(\nabla \boldsymbol{T})$

对于标量场函数有 $\nabla\varphi = \varphi\nabla$

散度和旋度

散度（左散度、右散度）

$$\nabla \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i} \qquad \boldsymbol{T} \cdot \nabla = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i} \cdot \boldsymbol{g}^i$$

旋度（左旋度、右旋度）

$$\nabla \times \boldsymbol{T} = \boldsymbol{g}^i \times \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i} \qquad \boldsymbol{T} \times \nabla = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i} \times \boldsymbol{g}^i$$

Hamilton 算子是一种具有坐标不变性的微分算子，计算结果与坐标系无关

证明:

$$\mathbf{g}^{i'}\frac{\partial}{\partial \xi^{i'}}=\mathbf{g}^{i'}\frac{\partial \xi^{i}}{\partial \xi^{i'}}\frac{\partial}{\partial \xi^{i}}=\left(\frac{\partial \xi^{i}}{\partial \xi^{i'}}\mathbf{g}^{i'}\right)\frac{\partial}{\partial \xi^{i}}=\mathbf{g}^{i}\frac{\partial}{\partial \xi^{i}}$$

Hamilton 算子与张量之间的运算结果是张量

见1.4 坐标变换

例如:

$$\nabla \boldsymbol{T}=\boldsymbol{g}^{k}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^{k}}=\boldsymbol{g}^{k}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^{i'}}\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{k}}=\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{k}}\boldsymbol{g}^{k}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^{i'}}=\boldsymbol{g}^{i'}\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^{i'}}$$

又如:

$$\nabla \xi^{i}=\boldsymbol{g}^{k}\frac{\partial \xi^{i}}{\partial \xi^{k}}=\boldsymbol{g}^{k}\delta_{k}^{i}=\boldsymbol{g}^{i};\quad \nabla \xi^{i}=\boldsymbol{e}^{k}\frac{\partial \xi^{i}}{\partial \bar{x}^{k}}=\boldsymbol{g}^{i}$$

上式表明：曲线坐标的梯度在不同基下得到相同的结果（逆变基矢量）。后者即为逆变基矢量的定义

又如：

见1.4 坐标变换

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{g}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^k} = \mathbf{g}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^{i'}} \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^k} \mathbf{g}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^{i'}} = \mathbf{g}^{i'} \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^{i'}}$$

$$\nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{g}^k \times \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^k} = \mathbf{g}^k \times \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^{i'}} \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^k} \mathbf{g}^k \times \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^{i'}} = \mathbf{g}^{i'} \times \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \xi^{i'}}$$

4.3　张量分量的协变导数

张量场函数的导数 $\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{r})=\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i}\boldsymbol{g}^i$ 中，$\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i}$ 中既包含张量分量对坐标 ξ^i 的偏导数（分量对坐标的普通偏导数），又包含张量基矢量对坐标 ξ^i 的偏导数（用Christoffel符号表示）

以下分别针对矢量场函数和张量场函数给出 $\dfrac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i}$ 的具体表达式

4.3.1 矢量场函数分量对坐标的协变导数

设矢量场函数 $\boldsymbol{F} = F^i \boldsymbol{g}_i$

则有：

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi^s} = \frac{\partial F^i}{\partial \xi^s}\mathbf{g}_i + F^i \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \xi^s} = \frac{\partial F^i}{\partial \xi^s}\mathbf{g}_i + F^i \Gamma^m_{si}\mathbf{g}_m$$

$$= \left(\frac{\partial F^i}{\partial \xi^s} + F^m \Gamma^i_{sm}\right)\mathbf{g}_i \triangleq \nabla_s F^i \mathbf{g}_i \triangleq F^i_{;s}\mathbf{g}_i$$

其中： $\boxed{F^i_{;s} = \dfrac{\partial F^i}{\partial \xi^s} + F^m \Gamma^i_{sm}}$ **称** F **的逆变分量对坐标** ξ^s **的协变导数**

意义：矢量分量的协变导数分为两部分：第一部分是该分量的普通偏导数；第二部分反映了基矢量随坐标 ξ^s 的变化。

在直线坐标系中，协变导数与普通偏导数无差别。

如果将矢量场函数写为 $\boldsymbol{F}=F_i\boldsymbol{g}^i$ 注意到 $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial \xi^j}=-\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{g}^k$ 可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \xi^s}=\frac{\partial F_i}{\partial \xi^s}\boldsymbol{g}^i+F_i\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial \xi^s}=\frac{\partial F_i}{\partial \xi^s}\boldsymbol{g}^i-F_i\Gamma^i_{sm}\boldsymbol{g}^m$$

$$=\left(\frac{\partial F_i}{\partial \xi^s}-F_m\Gamma^m_{si}\right)\boldsymbol{g}^i\triangleq\nabla_s F_i\boldsymbol{g}^i\triangleq F_{i;s}\boldsymbol{g}^i$$

其中，$\boxed{F_{i;s}=\dfrac{\partial F_i}{\partial \xi^s}-F_m\Gamma^m_{si}}$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的协变分量对坐标 ξ^s 的协变导数

归纳：

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \xi^j} = F^i_{;j}\boldsymbol{g}_i} \qquad \boxed{\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \xi^j} = F_{i;j}\boldsymbol{g}^i}$$

引入记号， $\nabla_j(\ \ )=(\ \ )_{;j}$ ，则矢量分量的协变导数还可写为：

$$F^i_{;j} = \nabla_j F^i \qquad F_{i;j} = \nabla_j F_i$$

这样有 $\nabla \boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}^j \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \xi^j} = \boldsymbol{g}^j F^i_{;j}\boldsymbol{g}_i = F^i_{;j}\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i = \nabla_j F^i \boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i$

或$\nabla \boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}^j \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \xi^j} = \boldsymbol{g}^j F_{i;j}\boldsymbol{g}^i = F_{i;j}\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^i = \nabla_j F_i \boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^i$

小结

引入了协变导数后，对矢量场函数求对曲线坐标的导数时，在形式上可以看作直线坐标系情况下基矢量与坐标无关时只对分量求导数的做法，但要将分量的普通导数换为协变导数。

利用协变导数，矢量场函数的梯度可以表示为

$$\mathbf{F}\nabla = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi^j}\mathbf{g}^j = F^i_{;j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j = F_{i;j}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j$$

注意协变导数指标始终是下标，而对应的基矢量始终是逆变基

$$\nabla\mathbf{F} = \mathbf{g}^j\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi^j} = F^i_{;j}\mathbf{g}^j\mathbf{g}_i = F_{i;j}\mathbf{g}^j\mathbf{g}^i$$

可以证明，矢量场函数的梯度是二阶张量。

例：证明矢径的梯度是度量张量

将矢径写为

$$\mathbf{r}(\xi^1,\xi^2,\xi^3)=r^i(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\mathbf{g}_i=r^1(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\mathbf{g}_1+r^2(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\mathbf{g}_2+r^3(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\mathbf{g}_3$$

由基矢量与协变导数的定义，有 $\mathbf{g}_j=\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi^j}=r^i_{;j}\mathbf{g}_i$

又 $\mathbf{g}_j=\delta^i_j\mathbf{g}_i$

得到 $r^i_{;j}=\delta^i_j$

$$\mathbf{r}\nabla=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi^j}\mathbf{g}^j=r^i_{;j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j=\delta^i_{;j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j=\mathbf{g}_i\mathbf{g}^i=\mathbf{G}$$

$$\nabla\mathbf{r}=\mathbf{g}^j\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi^j}=r^i_{;j}\mathbf{g}^j\mathbf{g}_i=\delta^i_{;j}\mathbf{g}^j\mathbf{g}_i=\mathbf{g}^i\mathbf{g}_i=\mathbf{G}$$

4.3.2 张量场函数分量对坐标的协变导数

设张量 $\boldsymbol{T} = T^{ij}_{..kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$

则有：

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^s} = \frac{\partial T^{ij}_{..kl}}{\partial \xi^s}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l + T^{ij}_{..kl}\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \xi^s}\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l + T^{im}_{..kl}\boldsymbol{g}_i\frac{\partial \boldsymbol{g}_m}{\partial \xi^s}\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$$

$$+T^{ij}_{..ml}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\frac{\partial \boldsymbol{g}^m}{\partial \xi^s}\boldsymbol{g}^l + T^{ij}_{..km}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\frac{\partial \boldsymbol{g}^m}{\partial \xi^s}$$

$$=\left(\frac{\partial T^{ij}_{..kl}}{\partial \xi^s} + T^{mj}_{..kl}\Gamma^i_{ms} + T^{im}_{..kl}\Gamma^j_{ms} - T^{ij}_{..ml}\Gamma^m_{ks} - T^{ij}_{..km}\Gamma^m_{ls}\right)\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$$

$$\triangleq \nabla_s T^{ij}_{..kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l \triangleq T^{ij}_{..kl;s}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l$$

其中：

$$\boxed{\nabla_s T^{ij}_{..kl} = T^{ij}_{..kl;s} \triangleq \frac{\partial T^{ij}_{..kl}}{\partial \xi^s} + T^{mj}_{..kl}\Gamma^i_{ms} + T^{im}_{..kl}\Gamma^j_{ms} - T^{ij}_{..ml}\Gamma^m_{ks} - T^{ij}_{..km}\Gamma^m_{ls}}$$

称为张量分量的协变导数。

③ 将协变指标 i 替换为哑指标 m

④ 与 $-\Gamma^m_{is}$ 相乘(s 为求导坐标标号)

普通偏导数

$$\nabla_s T^{ij}_{\cdot\cdot kl} \triangleq \frac{\partial T^{ij}_{\cdot\cdot kl}}{\partial \xi^s} + T^{mj}_{\cdot\cdot kl}\Gamma^i_{ms} + T^{im}_{\cdot\cdot kl}\Gamma^j_{ms} - T^{ij}_{\cdot\cdot ml}\Gamma^m_{ks} - T^{ij}_{\cdot\cdot km}\Gamma^m_{ls} \triangleq T^{ij}_{\cdot\cdot kl;s}$$

① 将逆变指标 i 替换为哑指标 m

② 与 Γ^i_{ms} 相乘 (s 为求导坐标标号)

注意协变导数指标始终是下标，而对应的基矢量始终是逆变基

由于：

$$\boldsymbol{g}^k \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^k} = \boldsymbol{g}^{i'} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^{i'}} \longrightarrow \nabla_s T^{ij}_{\cdot\cdot kl}\boldsymbol{g}^s\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l = \nabla_{s'} T^{i'j'}_{\cdot\cdot k'l'}\boldsymbol{g}^{s'}\boldsymbol{g}_{i'}\boldsymbol{g}_{j'}\boldsymbol{g}^{k'}\boldsymbol{g}^{l'}$$

可见张量分量的协变导数 $\nabla_s T^{ij}_{\cdot\cdot kl}$ 是张量（5阶张量）

4.3.3 张量协变导数的性质

1. 度量张量的协变导数为零（度量张量不依赖于位置）

第一种证明:

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \xi^s} = \frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial \xi^s}\boldsymbol{g}_i + \boldsymbol{g}^i \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \xi^s}$$

$$= -\Gamma^i_{sk}\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_i + \Gamma^k_{si}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_k \overset{i\leftrightarrow k}{=} -\Gamma^k_{si}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_k + \Gamma^k_{si}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{0}$$

因此 $\boldsymbol{G}\nabla = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \xi^k}\boldsymbol{g}^k = \boldsymbol{0}$ $\qquad \nabla \boldsymbol{G} = \boldsymbol{g}^k \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \xi^k} = \boldsymbol{0}$

第二种证明：由于度量张量是常张量，则对任意 $d\mathbf{r}$ 有

$$d\mathbf{G} \overset{d\mathbf{T}=d\mathbf{r}\bullet(\nabla\mathbf{T})}{=} d\mathbf{r}\bullet(\nabla\mathbf{G}) = 0$$

由 $d\mathbf{r}$的任意得到 $\quad \nabla\mathbf{G} = 0$

2.置换张量的的分量的协变导数为零

$$\boxed{\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)=\varepsilon_{ijk}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \xi^s}=\Gamma_{is}^{m}\boldsymbol{g}_m;\quad \frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial \xi^s}=-\Gamma_{sm}^{i}\boldsymbol{g}^m}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \xi^s}=\frac{\partial[\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k]}{\partial \xi^s}=\frac{\partial \boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)}{\partial \xi^s}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k+\varepsilon_{ijk}\frac{\partial \boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k}{\partial \xi^s}$$

$$=[\Gamma_{is}^{m}\boldsymbol{g}_m\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)+\boldsymbol{g}_i\cdot(\Gamma_{js}^{m}\boldsymbol{g}_m\times\boldsymbol{g}_k)\Gamma_{js}^{m}+\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\Gamma_{ks}^{m}\boldsymbol{g}_m)]\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k+$$

$$\varepsilon_{ijk}[-\Gamma_{sm}^{i}\boldsymbol{g}^m\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k-\boldsymbol{g}^i\Gamma_{sm}^{j}\boldsymbol{g}^m\boldsymbol{g}^k-\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\Gamma_{sm}^{k}\boldsymbol{g}^m]$$

$$\overset{\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j=\varepsilon_{ijl}\boldsymbol{g}^l}{=}(\Gamma_{is}^{m}\boldsymbol{g}_m\cdot\varepsilon_{jkl}\boldsymbol{g}^l+\Gamma_{js}^{m}\boldsymbol{g}_i\cdot\varepsilon_{mkl}\boldsymbol{g}^l+\Gamma_{ks}^{m}\boldsymbol{g}_i\cdot\varepsilon_{jml}\boldsymbol{g}^l)\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k+$$

$$\varepsilon_{ijk}[-\Gamma_{sm}^{i}\boldsymbol{g}^m\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k-\boldsymbol{g}^i\Gamma_{sm}^{j}\boldsymbol{g}^m\boldsymbol{g}^k-\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\Gamma_{sm}^{k}\boldsymbol{g}^m]$$

$$=(\Gamma_{is}^{m}\varepsilon_{mjk}+\Gamma_{js}^{m}\varepsilon_{imk}+\Gamma_{ks}^{m}\varepsilon_{ijm})\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k-[\varepsilon_{mjk}\Gamma_{is}^{m}+\varepsilon_{imk}\Gamma_{sj}^{m}+\varepsilon_{ijm}\Gamma_{sk}^{m}]\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k=\boldsymbol{0}$$

$$\therefore \boldsymbol{\varepsilon}\nabla=\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \xi^s}\boldsymbol{g}^s=\boldsymbol{0}\qquad \nabla\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{g}^s\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \xi^s}=\boldsymbol{0}$$

3. 张量分量的缩并与求协变导数的次序可交换

根据协变导数的定义

$$\nabla_s T^{ij}_{\cdot\cdot k} = \frac{\partial T^{ij}_{\cdot\cdot k}}{\partial \xi^s} + T^{mj}_{\cdot\cdot k}\Gamma^i_{ms} + T^{im}_{\cdot\cdot k}\Gamma^j_{ms} - T^{ij}_{\cdot\cdot m}\Gamma^m_{ks}$$

可得到协变导数的缩并。例如

$$\begin{aligned}\nabla_s T^{kj}_{\cdot\cdot k} &= \frac{\partial T^{kj}_{\cdot\cdot k}}{\partial \xi^s} + T^{mj}_{\cdot\cdot k}\Gamma^k_{ms} + T^{km}_{\cdot\cdot k}\Gamma^j_{ms} - T^{kj}_{\cdot\cdot m}\Gamma^m_{ks} \\ &= \frac{\partial T^{kj}_{\cdot\cdot k}}{\partial \xi^s} + T^{kj}_{\cdot\cdot m}\Gamma^m_{ks} + T^{km}_{\cdot\cdot k}\Gamma^j_{ms} - T^{kj}_{\cdot\cdot m}\Gamma^m_{ks} = \frac{\partial T^{kj}_{\cdot\cdot k}}{\partial \xi^s} + T^{km}_{\cdot\cdot k}\Gamma^j_{ms}\end{aligned}$$

而如果先对张量进行缩并得到 $T^{kj}_{\cdot\cdot k}$，再求其分量的协变导数则得到：

$$\nabla_s T^{kj}_{\cdot\cdot k} = \frac{\partial T^{kj}_{\cdot\cdot k}}{\partial \xi^s} + T^{km}_{\cdot\cdot k}\Gamma^j_{ms}$$

显然，以上两式相同，即可以交换缩并和求协变导数的次序。

4. 张量分量的乘积的协变导数符合函数乘积的普通偏导数运算规则

例如，对于三阶张量和二阶张量并积的分量的协变导数有

$$\nabla_s (A^{ij}_{..k} B^l_{.m}) = (\nabla_s A^{ij}_{..k}) B^l_{.m} + A^{ij}_{..k} (\nabla_s B^l_{.m})$$

证明:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \xi^s} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \xi^s} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \xi^s}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla_s (A^{ij}_{..k} B^l_{.m}) \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}_l \boldsymbol{g}^m = (\nabla_s A^{ij}_{..k}) B^l_{.m} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}_l \boldsymbol{g}^m + A^{ij}_{..k} (\nabla_s B^l_{.m}) \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{g}_j \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}_l \boldsymbol{g}^m$$

上式中注意括号的存在是必需的。

注意：

$$C = AB \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial \xi^s} = \frac{\partial A}{\partial \xi^s} B + A \frac{\partial B}{\partial \xi^s}$$

但是

$$\nabla(AB) \neq (\nabla A)B + A(\nabla B)$$

实际上，

$$\nabla(\mathbf{AB}) = \mathbf{g}^i \frac{\partial(\mathbf{AB})}{\partial \xi^i} = \mathbf{g}^i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi^i} \mathbf{B} + \mathbf{g}^i \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi^i}$$

$$but \quad (\nabla \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \mathbf{B}) = \mathbf{g}^i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi^i} \mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{g}^i \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi^i}$$

4.3.4 张量场函数的散度与旋度

Hamilton 微分算子 ∇

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \boldsymbol{g}^i$$

散度

$$\nabla \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{g}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i} \qquad \boldsymbol{T} \cdot \nabla = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i} \cdot \boldsymbol{g}^i$$

例如：流体速度场的散度代表单位体积流出的流量。

旋度

$$\nabla \times \boldsymbol{T} = \boldsymbol{g}^i \times \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i} = \varepsilon : (\nabla \boldsymbol{T})$$

$$\boldsymbol{T} \times \nabla = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^i} \times \boldsymbol{g}^i = (\boldsymbol{T}\nabla) : \varepsilon$$

因为张量的矢积作用在两个张量相邻的基矢量间，所以上式不能写为

$$\nabla \times \boldsymbol{T} = (\nabla \boldsymbol{T}) : \varepsilon \quad （错）$$

4.3.3 张量协变导数的性质

1. 度量张量的协变导数为零（度量张量不依赖于位置）

第一种证明：

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \xi^s} = \frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial \xi^s}\boldsymbol{g}_i + \boldsymbol{g}^i \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \xi^s}$$

$$= -\Gamma^i_{sk}\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_i + \Gamma^k_{si}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_k \overset{i\leftrightarrow k}{=} -\Gamma^k_{si}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_k + \Gamma^k_{si}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{0}$$

因此 $\boldsymbol{G}\nabla = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \xi^k}\boldsymbol{g}^k = \boldsymbol{0}$ $\quad\quad \nabla\boldsymbol{G} = \boldsymbol{g}^k\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \xi^k} = \boldsymbol{0}$

第二种证明：由于度量张量是常张量，则对任意 $d\mathbf{r}$ 有

$$d\mathbf{G} \overset{d\mathbf{T}=d\mathbf{r}\bullet(\nabla\mathbf{T})}{=} d\mathbf{r}\bullet(\nabla\mathbf{G}) = 0$$

由 $d\mathbf{r}$ 的任意得到 $\quad \nabla\mathbf{G} = 0$

2.置换张量的的分量的协变导数为零

$$\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)=\varepsilon_{ijk}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{g}_i}{\partial\xi^s}=\Gamma_{is}^m\boldsymbol{g}_m;\quad\frac{\partial\boldsymbol{g}^i}{\partial\xi^s}=-\Gamma_{sm}^i\boldsymbol{g}^m$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\xi^s}=\frac{\partial[\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k]}{\partial\xi^s}=\frac{\partial\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)}{\partial\xi^s}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k+\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k}{\partial\xi^s}$$

$$=[\Gamma_{is}^m\boldsymbol{g}_m\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_k)+\boldsymbol{g}_i\cdot(\Gamma_{js}^m\boldsymbol{g}_m\times\boldsymbol{g}_k)\Gamma_{js}^m+\boldsymbol{g}_i\cdot(\boldsymbol{g}_j\times\Gamma_{ks}^m\boldsymbol{g}_m)]\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k+$$

$$\varepsilon_{ijk}[-\Gamma_{sm}^i\boldsymbol{g}^m\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k-\boldsymbol{g}^i\Gamma_{sm}^j\boldsymbol{g}^m\boldsymbol{g}^k-\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\Gamma_{sm}^k\boldsymbol{g}^m]$$

$$\overset{\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j=\varepsilon_{ijl}\boldsymbol{g}^l}{=}(\Gamma_{is}^m\boldsymbol{g}_m\cdot\varepsilon_{jkl}\boldsymbol{g}^l+\Gamma_{js}^m\boldsymbol{g}_i\cdot\varepsilon_{mkl}\boldsymbol{g}^l+\Gamma_{ks}^m\boldsymbol{g}_i\cdot\varepsilon_{jml}\boldsymbol{g}^l)\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k+$$

$$\varepsilon_{ijk}[-\Gamma_{sm}^i\boldsymbol{g}^m\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k-\boldsymbol{g}^i\Gamma_{sm}^j\boldsymbol{g}^m\boldsymbol{g}^k-\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\Gamma_{sm}^k\boldsymbol{g}^m]$$

$$=(\Gamma_{is}^m\varepsilon_{mjk}+\Gamma_{js}^m\varepsilon_{imk}+\Gamma_{ks}^m\varepsilon_{ijm})\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k-[\varepsilon_{mjk}\Gamma_{is}^m+\varepsilon_{imk}\Gamma_{sj}^m+\varepsilon_{ijm}\Gamma_{sk}^m]\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k=\boldsymbol{0}$$

$$\therefore\boldsymbol{\varepsilon}\nabla=\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\xi^s}\boldsymbol{g}^s=\boldsymbol{0}\qquad\nabla\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{g}^s\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\xi^s}=\boldsymbol{0}$$

3. 张量分量的缩并与求协变导数的次序可交换

根据协变导数的定义

$$\nabla_s T^{ij}_{..k} = \frac{\partial T^{ij}_{..k}}{\partial \xi^s} + T^{mj}_{..k}\Gamma^i_{ms} + T^{im}_{..k}\Gamma^j_{ms} - T^{ij}_{..m}\Gamma^m_{ks}$$

可得到协变导数的缩并。例如

$$\begin{aligned}\nabla_s T^{kj}_{..k} &= \frac{\partial T^{kj}_{..k}}{\partial \xi^s} + T^{mj}_{..k}\Gamma^k_{ms} + T^{km}_{..k}\Gamma^j_{ms} - T^{kj}_{..m}\Gamma^m_{ks} \\ &= \frac{\partial T^{kj}_{..k}}{\partial \xi^s} + T^{kj}_{..m}\Gamma^m_{ks} + T^{km}_{..k}\Gamma^j_{ms} - T^{kj}_{..m}\Gamma^m_{ks} = \frac{\partial T^{kj}_{..k}}{\partial \xi^s} + T^{km}_{..k}\Gamma^j_{ms}\end{aligned}$$

而如果先对张量进行缩并得到 $T^{kj}_{..k}$，再求其分量的协变导数则得到：

$$\nabla_s T^{kj}_{..k} = \frac{\partial T^{kj}_{..k}}{\partial \xi^s} + T^{km}_{..k}\Gamma^j_{ms}$$

显然，以上两式相同，即可以交换缩并和求协变导数的次序。

4. 张量分量的乘积的协变导数符合函数乘积的普通偏导数运算规则

例如，对于三阶张量和二阶张量并积的分量的协变导数有

$$\nabla_s(A^{ij}_{..k}B^{l}_{.m}) = (\nabla_s A^{ij}_{..k})B^{l}_{.m} + A^{ij}_{..k}(\nabla_s B^{l}_{.m})$$

证明：

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \Rightarrow \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \xi^s} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \xi^s}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \xi^s}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla_s(A^{ij}_{..k}B^{l}_{.m})\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_l\boldsymbol{g}^m = (\nabla_s A^{ij}_{..k})B^{l}_{.m}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_l\boldsymbol{g}^m + A^{ij}_{..k}(\nabla_s B^{l}_{.m})\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}_l\boldsymbol{g}^m$$

上式中注意括号的存在是必需的。

注意:

$$C = AB \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial \xi^s} = \frac{\partial A}{\partial \xi^s} B + A \frac{\partial B}{\partial \xi^s}$$

但是

$$\nabla(AB) \neq (\nabla A)B + A(\nabla B)$$

实际上,

$$\nabla(\mathbf{AB}) = \mathbf{g}^i \frac{\partial(\mathbf{AB})}{\partial \xi^i} = \mathbf{g}^i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi^i} \mathbf{B} + \mathbf{g}^i \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi^i}$$

$$but \quad (\nabla \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \mathbf{B}) = \mathbf{g}^i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi^i} \mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{g}^i \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \xi^i}$$

4.5 积分定理

Green变换公式

回顾：高等数学中的Gauss定理

$$\int_{\Omega} \nabla \bullet \mathbf{F} dV = \oint_{S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}$$

$$where \quad \int_{\Omega} \nabla \bullet \mathbf{F} dV = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) dV$$

其中，$\mathbf{F}$ 为矢量。

$$\oint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \int_\Omega \nabla \bullet \mathbf{F} dV$$

$$\boxed{\oint_A d\boldsymbol{a} * \boldsymbol{T} = \int_\Omega dv(\boldsymbol{g}^{\mathrm{k}} * \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^{\mathrm{k}}}) = \int_\Omega dv(\nabla * \boldsymbol{T})}$$

$$\boxed{\oint_A \boldsymbol{T} * d\boldsymbol{a} = \int_\Omega dv(\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^{\mathrm{k}}} * \boldsymbol{g}^{\mathrm{k}}) = \int_\Omega dv(\boldsymbol{T} * \nabla)}$$

其中，算子*可以是点积，叉积和并乘

这两个等式把张量的面积分转化为张量的体积分，是张量形式的Green公式

回顾：对于标量 *P, Q, R*, 有笛卡儿坐标系下的Stokes公式

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

二维空间中，Stokes公式形式退化为：

$$\iint_{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_{L} Pdx + Qdy$$

$$\boxed{\int_{S} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{L} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}}$$

对于张量场函数，不加证明给出 Stokes 变换公式

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{T})=\oint_L d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{T}$$

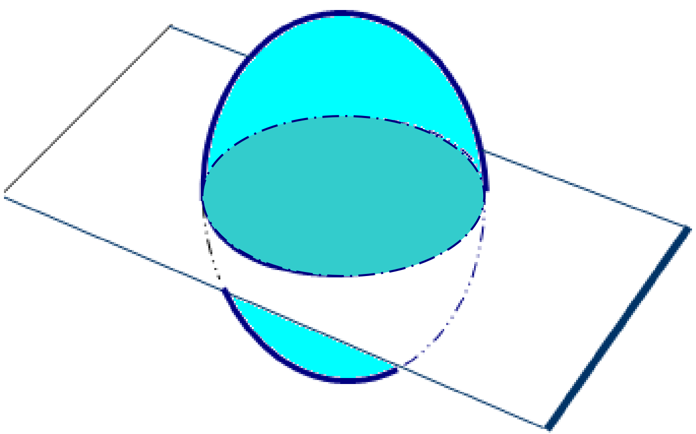
$$\oint_S(\boldsymbol{T}\times\nabla)\cdot d\boldsymbol{a}=-\oint_L\boldsymbol{T}\cdot d\boldsymbol{s}$$

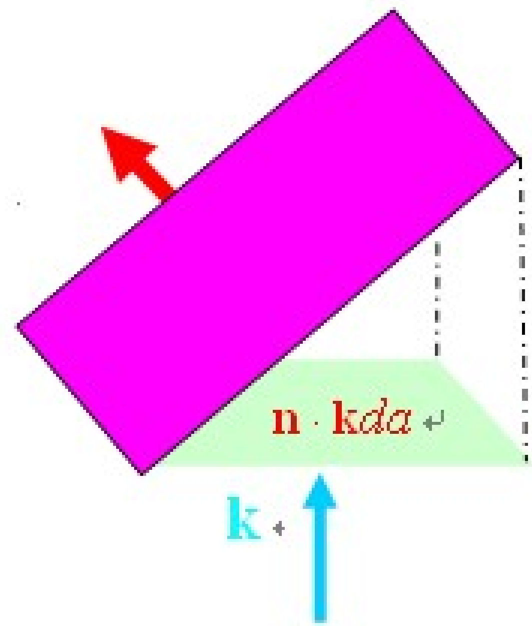
该公式将有向曲面上的面积分转化为曲面的闭合曲线边界上的积分

4.5 积分定理

4.5.1预备知识

面积为 da 外法线为 $\boldsymbol{n}$ 的微元沿 $\boldsymbol{k}$方向的投影面积为: $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}da$





在一个曲面上，定义$d\boldsymbol{a} \triangleq \boldsymbol{n}da$为矢量面积微元，其中 $\boldsymbol{n}$为面积微元中心点处曲面外法线方向矢量（单位向量）

一个封闭曲面向外法线方向为 $\boldsymbol{k}$ 的平面的投影面积为

$$\oint \boldsymbol{k} \cdot d\boldsymbol{a} = 0$$

这是由于穿过封闭曲面的平面把曲面分为上下两部分，而这两部分的投影面积分别等于正负图示阴影部分面积。因为 $\boldsymbol{k}$可以取任何值，所以：

$$\oint d\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad (15)$$

以下证明推论：

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^i)}{\partial\xi^i}=\boldsymbol{0}$$

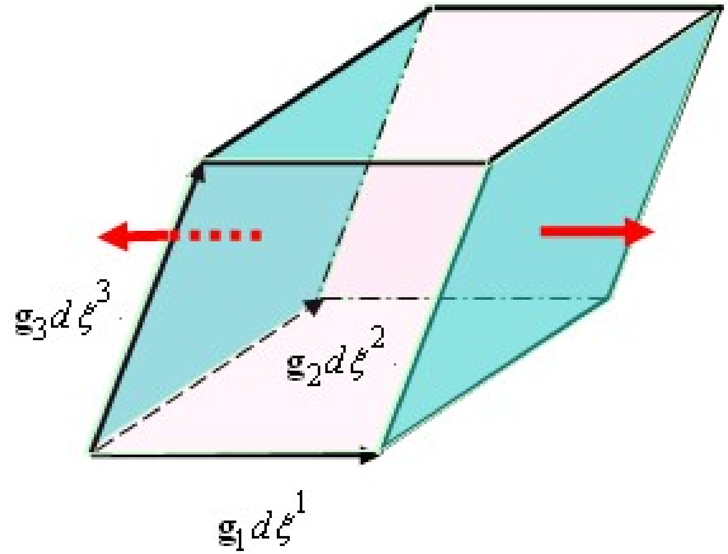
回顾：

$$[\mathbf{e}_i\ \mathbf{e}_j\ \mathbf{e}_k]=\mathbf{e}_i\bullet(\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k)\triangleq e_{ijk}\Rightarrow[\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3]=1$$

$$\varepsilon_{kij}\triangleq[\mathbf{g}_i\ \mathbf{g}_j\ \mathbf{g}_k]=\mathbf{g}_i\bullet(\mathbf{g}_j\times\mathbf{g}_k)=\sqrt{g}\,e_{ijk}$$ （见p37 （1.8.7））

$$\mathbf{g}_i\times\mathbf{g}_j=\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j=\varepsilon_{kij}\mathbf{g}^k$$ (见p38 (1.8.15))

沿过任一点的曲线坐标系的各坐标线方向（即协变基矢量方向）取一个六面体，如图所示。



由“两个矢量围成的平行四边形面积为两个矢量之叉积”，六面体各面的面积矢量分别为

$$d\boldsymbol{a}_{左} = -\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3 d\xi^2 d\xi^3 = -\boldsymbol{g}^1\sqrt{g}\,d\xi^2 d\xi^3$$

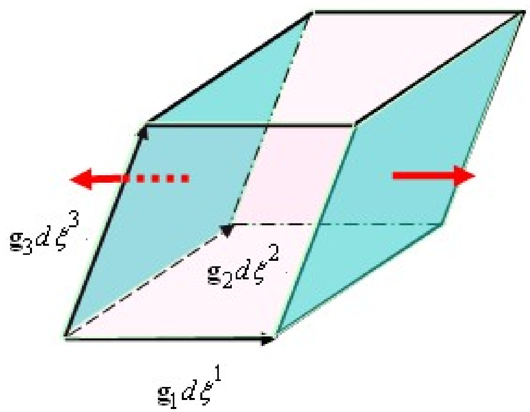
(因为与协变基矢量 $\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$ 同时正交的矢量是逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^1$)

$$d\boldsymbol{a}_{下} = -\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2 d\xi^2 d\xi^1 = -\boldsymbol{g}^3\sqrt{g}\,d\xi^2 d\xi^1$$

$$d\boldsymbol{a}_{前} = \boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_3 d\xi^3 d\xi^1 = -\boldsymbol{g}^2\sqrt{g}\,d\xi^3 d\xi^1$$

左侧的面积矢量与右侧的面积矢量方向不同；右侧的面积矢量可以看作是左侧面积矢量函数的负值仅仅改变第一个曲线坐标而得到。即

$$d\boldsymbol{a}_{右} = -(d\boldsymbol{a}_{左} + \frac{\partial(d\boldsymbol{a}_{左})}{\partial \xi^1} d\xi^1) = -d\boldsymbol{a}_{左} + \frac{\partial \boldsymbol{g}^1 \sqrt{g}}{\partial \xi^1} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$



所以:

$$d\boldsymbol{a}_{右} + d\boldsymbol{a}_{左} = \frac{\partial \boldsymbol{g}^1 \sqrt{g}}{\partial \xi^1} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

类似地有:

$$d\boldsymbol{a}_{上} + d\boldsymbol{a}_{下} = \frac{\partial \boldsymbol{g}^3 \sqrt{g}}{\partial \xi^3} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

$$d\boldsymbol{a}_{前} + d\boldsymbol{a}_{后} = \frac{\partial \boldsymbol{g}^2 \sqrt{g}}{\partial \xi^2} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

所以

$$\sum d\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}^1 \sqrt{g}}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \boldsymbol{g}^2 \sqrt{g}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \boldsymbol{g}^3 \sqrt{g}}{\partial \xi^3}\right) d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \quad (16)$$

由式(15)和(16)得到

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^i)}{\partial \xi^i} = \boldsymbol{0} \quad (17)$$

证明张量的对应的Green变换公式

类似前节推导，不难看出对于六面体体积微元：

$$d\boldsymbol{a}_{右}\boldsymbol{T} + d\boldsymbol{a}_{左}\boldsymbol{T} = \frac{\partial(\sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{T})}{\partial\xi^1}d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

$$d\boldsymbol{a}_{上}\boldsymbol{T} + d\boldsymbol{a}_{下}\boldsymbol{T} = \frac{\partial(\sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^3\boldsymbol{T})}{\partial\xi^3}d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

$$d\boldsymbol{a}_{前}\boldsymbol{T} + d\boldsymbol{a}_{后}\boldsymbol{T} = \frac{\partial(\sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{T})}{\partial\xi^2}d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

因此，对于六面微元体（用*代表并积、点积或叉积）：

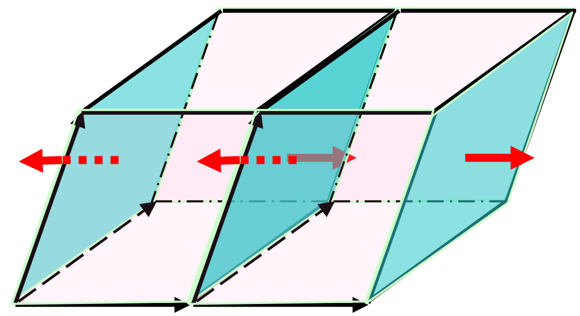
$$\oint_S d\boldsymbol{a} * \boldsymbol{T} = \int_V \left(\frac{\partial(\sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^1 * \boldsymbol{T})}{\partial\xi^1} + \frac{\partial(\sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^2 * \boldsymbol{T})}{\partial\xi^2} + \frac{\partial(\sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^3 * \boldsymbol{T})}{\partial\xi^3}\right)d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial(\sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^{\mathrm{k}})}{\partial\xi^{\mathrm{k}}} * \boldsymbol{T} + \sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^{\mathrm{k}} * \frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\xi^{\mathrm{k}}}\right)d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$$

将 $\dfrac{\partial(\sqrt{g}\,\mathbf{g}^i)}{\partial \xi^i} = 0$ (式(17))和 $dv = \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \sqrt{g}\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3$

代入上式，得到

$$\oint_S d\boldsymbol{a} * \boldsymbol{T} = \int_V \boldsymbol{g}^{\mathrm{k}} * \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^{\mathrm{k}}} dv$$



两个微元体拼接在一起时，上式对每一个微元体都成立，因此：

$$\oint_{S1} d\boldsymbol{a} * \boldsymbol{T} + \oint_{S2} d\boldsymbol{a} * \boldsymbol{T} = \int_{V1} \boldsymbol{g}^{\mathrm{k}} * \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^{\mathrm{k}}} dv + \int_{V2} \boldsymbol{g}^{\mathrm{k}} * \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^{\mathrm{k}}} dv$$

然而，由于公共界面处的面积微元大小相等方向相反，等式左端与 $\oint_{S'} d\boldsymbol{a} * \boldsymbol{T}$ 相等。其中 S 为合成后的微元体的外表面。

任意形状的空间区域，都可以看作是内部的六面微元体和区域边界处“残缺单元”的组合。而在残缺单元处的积分是长度的高阶小量，可以忽略。因而：

$$\oint_A d\boldsymbol{a} * \boldsymbol{T} = \int_\Omega dv(\boldsymbol{g}^{\mathrm{k}} * \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^{\mathrm{k}}}) = \int_\Omega dv(\nabla * \boldsymbol{T}) \qquad (18)$$

同理可以证明：

$$\oint_A \boldsymbol{T} * d\boldsymbol{a} = \int_\Omega dv(\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \xi^{\mathrm{k}}} * \boldsymbol{g}^{\mathrm{k}}) = \int_\Omega dv(\boldsymbol{T} * \nabla) \qquad (19)$$

其中，算子*可以是点积，叉积和并乘

注意：式(18)和(19)中左右两边基矢量的次序不变。

这两个等式把张量的面积分转化为张量的体积分，是张量形式的Green公式

例如：　有势力（保守力）分量可利用势函数的偏导数写为

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}, F_y = \frac{\partial V}{\partial y}$$

该有势力在一个闭合曲线上做功为

$$\oint_L \mathbf{F} \bullet d\mathbf{s} = \oint_L F_x dx + F_y dy = \oint_L \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy$$

由Stokes定理，有

$$\oint_L \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = \iint_S \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) dxdx = 0$$

即保守力在闭合曲线上做功为零（保守力做功与路径无关）。

对于张量场函数，不加证明给出 Stokes 变换公式

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{T}) = \oint_L d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{T}$$

$$\oint_S (\boldsymbol{T}\times\nabla)\cdot d\boldsymbol{a} = -\oint_L \boldsymbol{T}\cdot d\boldsymbol{s}$$

该公式将有向曲面上的面积分转化为曲面的闭合曲线边界上的积分

正交曲线坐标系下张量的物理分量

在对曲线坐标下的物理量（如位移，应力，应变等）进行张量运算时，物理量应在单位基底矢量下分解（物理分量），以使其分量具有明确的物理意义。
在一般的曲线坐标系中，由于基矢量不一定是单位矢量，一些有明确物理意义的张量的分量并没有明确的物理意义。

以下针对正交曲线坐标系给出建立正交标准化基的方法。
对于正交曲线坐标系，协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 的长度为

$$A_{(i)} \triangleq \sqrt{\mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}_i} = \sqrt{g_{ii}}$$ (对 i 不求和)

对于正交曲线坐标系

当 $i \neq j$ 时， $g_{ij} = \mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}_j = 0$ 所以

$$\mathbf{g}_1 = g_{1j}\mathbf{g}^j = g_{11}\mathbf{g}^1 \quad \mathbf{g}_2 = g_{22}\mathbf{g}^2 \quad \mathbf{g}_3 = g_{33}\mathbf{g}^3$$

正交曲线坐标系下张量的物理分量

逆变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 的长度为

$$\sqrt{\mathbf{g}^i \bullet \mathbf{g}^i} = \frac{1}{g_{ii}}\sqrt{\left(g_{ii}\mathbf{g}^i\right)\bullet\left(g_{ii}\mathbf{g}^i\right)} = \frac{1}{g_{ii}}\sqrt{\mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}_i} = \frac{A_{(i)}}{g_{ii}} = \frac{1}{A_{(i)}}$$

(对 i 不求和)

定义单位基矢量：

$$\boldsymbol{g}_{(i)} = \frac{1}{A_{(i)}}\boldsymbol{g}_i \qquad \boldsymbol{g}^{(i)} = A_{(i)}\boldsymbol{g}^i$$

该组基矢量称为笛卡儿标架。张量对改组基矢量分解得到的分量称为物理分量。

一般的张量

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}_{..kl}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}^k\boldsymbol{g}^l = T^{(i)(j)}_{..(k)(l)}\boldsymbol{g}_{(i)}\boldsymbol{g}_{(j)}\boldsymbol{g}^{(k)}\boldsymbol{g}^{(l)}$$

其中，张量的物理分量与张量分量的关系为

$$T^{(i)(j)}_{..(k)(l)} = \frac{A_{(i)}A_{(j)}}{A_{(k)}A_{(l)}}T^{ij}_{..kl}$$

（带括号的指标与不带括号的指标不求和）

例：柱坐标系中的单位基矢量及其导数

柱坐标系　$\mathbf{r}=r\cos\theta\mathbf{e}_1+r\sin\theta\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3$

协变基矢量为

$$\mathbf{g}_r=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}=\cos\theta\mathbf{e}_1+\sin\theta\mathbf{e}_2,\quad \left|\mathbf{g}_r\right|=\sqrt{\mathbf{g}_1\bullet\mathbf{g}_1}=1$$

$$\mathbf{g}_\theta=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}=-r\sin\theta\mathbf{e}_1+r\cos\theta\mathbf{e}_2,\quad \left|\mathbf{g}_\theta\right|=\sqrt{\mathbf{g}_2\bullet\mathbf{g}_2}=r$$

$$\mathbf{g}_z=\mathbf{e}_3,\quad \left|\mathbf{g}_z\right|=1$$

逆变基矢量为

$$\mathbf{g}^r=\cos\theta\mathbf{e}_1+\sin\theta\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{g}^\theta=\frac{1}{r}(-\sin\theta\mathbf{e}_1+\cos\theta\mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{g}^z=\mathbf{e}_3$$

其同向单位基矢量为 $$\mathbf{g}_{(r)}=\frac{\mathbf{g}_r}{|\mathbf{g}_r|}=\cos\theta\mathbf{e}_1+\sin\theta\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{g}_{(\theta)}=\frac{\mathbf{g}_\theta}{|\mathbf{g}_\theta|}=-\sin\theta\mathbf{e}_1+\cos\theta\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{g}_{(z)}=\frac{\mathbf{g}_z}{|\mathbf{g}_z|}=\mathbf{e}_3$$

柱坐标系中，单位基矢量的导数为

$$\frac{\partial\mathbf{g}_{(r)}}{\partial r}=0;\quad \frac{\partial\mathbf{g}_{(r)}}{\partial\theta}=-\sin\theta\mathbf{e}_1+\cos\theta\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2;\quad \frac{\partial\mathbf{g}_{(r)}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\mathbf{g}_{(\theta)}}{\partial r}=0;\quad \frac{\partial\mathbf{g}_{(\theta)}}{\partial\theta}=-\cos\theta\mathbf{e}_1-\sin\theta\mathbf{e}_2=-\mathbf{e}_1;\quad \frac{\partial\mathbf{g}_{(\theta)}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\mathbf{g}_{(z)}}{\partial r}=0;\quad \frac{\partial\mathbf{g}_{(z)}}{\partial\theta}=0;\quad \frac{\partial\mathbf{g}_{(z)}}{\partial z}=0$$

设位移矢量 $$\mathbf{u} = u^{(r)}\mathbf{g}_{(r)} + u^{(\theta)}\mathbf{g}_{(\theta)}$$

位移梯度 $$\mathbf{u}\nabla = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r}\mathbf{g}^{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}\mathbf{g}^{\theta} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r}\mathbf{g}_{(r)} + \frac{\partial \mathbf{u}}{r\partial \theta}\mathbf{g}^{(\theta)}$$

而 $$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \frac{\partial u^{(r)}}{\partial r}\mathbf{g}_{(r)} + \frac{\partial u^{(\theta)}}{\partial r}\mathbf{g}_{(\theta)}; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{r\partial \theta} = \frac{\partial u^{(r)}}{r\partial \theta}\mathbf{g}_{(r)} + \frac{u^{(r)}}{r}\frac{\partial \mathbf{g}_{(r)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u^{(\theta)}}{r\partial \theta}\mathbf{g}_{(\theta)} + \frac{u^{(\theta)}}{r}\frac{\partial \mathbf{g}_{(\theta)}}{\partial \theta}$$

$$= \left(\frac{\partial u^{(r)}}{r\partial \theta} - \frac{u^{(\theta)}}{r}\right)\mathbf{g}_{(r)} + \left(\frac{\partial u^{(\theta)}}{r\partial \theta} + \frac{u^{(r)}}{r}\right)\mathbf{g}_{(\theta)}$$

从而 $$\mathbf{u}\nabla = \frac{\partial u^{(r)}}{\partial r}\mathbf{g}_{(r)}\mathbf{g}_{(r)} + \left(\frac{\partial u^{(\theta)}}{r\partial \theta} + \frac{u^{(r)}}{r}\right)\mathbf{g}_{(\theta)}\mathbf{g}_{(\theta)}$$

$$+ \frac{\partial u^{(\theta)}}{\partial r}\mathbf{g}_{(\theta)}\mathbf{g}_{(r)} + \left(\frac{\partial u^{(r)}}{r\partial \theta} - \frac{u^{(\theta)}}{r}\right)\mathbf{g}_{(r)}\mathbf{g}_{(\theta)}$$

极坐标系下的线性应变

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla + (\mathbf{u}\nabla)^{\mathrm{T}})$$

$$= \frac{\partial u^{(r)}}{\partial r}\mathbf{g}_{(r)}\mathbf{g}_{(r)} + (\frac{\partial u^{(\theta)}}{r\partial \theta} + \frac{u^{(r)}}{r})\mathbf{g}_{(\theta)}\mathbf{g}_{(\theta)}$$

$$+ \frac{1}{2}(\frac{\partial u^{(\theta)}}{\partial r} + \frac{\partial u^{(r)}}{r\partial \theta} - \frac{u^{(\theta)}}{r})(\mathbf{g}_{(r)}\mathbf{g}_{(\theta)} + \mathbf{g}_{(\theta)}\mathbf{g}_{(r)})$$

即：

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u^{(r)}}{\partial r} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{\partial u^{(\theta)}}{r\partial \theta} + \frac{u^{(r)}}{r}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u^{(\theta)}}{\partial r} + \frac{\partial u^{(r)}}{r\partial \theta} - \frac{u^{(\theta)}}{r})$$

课堂练习：

习题4.2 $$F_i = g_{ik} F^k$$

$$\frac{\partial(F_i \mathbf{g}^i)}{\partial \xi^j} \mathbf{g}^j = \frac{\partial(g_{ik} F^k \mathbf{g}^i)}{\partial \xi^j} \mathbf{g}^j$$

由于度量张量分量的协变导数恒为零（度量张量是常张量）（见Ricci引理4.3.26），上式化为

$$\frac{\partial(F_i \mathbf{g}^i)}{\partial \xi^j} \mathbf{g}^j = g_{ik} \frac{\partial(F^k \mathbf{g}^i)}{\partial \xi^j} \mathbf{g}^j = g_{ik} F^k_{;j} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j$$

因此 $$F_{i;j} = g_{ik} F^k_{;j}$$

习题4.5

$$\nabla(\varphi\mathbf{v}) = \mathbf{g}^s \frac{\partial\varphi\mathbf{v}}{\partial\xi^s} = \varphi\mathbf{g}^s \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi^s} + \mathbf{g}^s \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^s}\mathbf{v}$$

$$= \varphi(\nabla\mathbf{v}) + (\nabla\varphi)\mathbf{v}$$

习题4.6

$$\nabla(\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}) = \mathbf{g}^s \frac{\partial\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}}{\partial\xi^s} = \mathbf{g}^s(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi^s}\bullet\mathbf{w} + \mathbf{v}\bullet\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\xi^s})$$

根据并式点积的定义（相邻两个矢量进行缩并），有式**(1.5.10)**中关系，即对三个矢量有

$$\mathbf{u}\bullet(\mathbf{ab}) = (\mathbf{u}\bullet\mathbf{a})\mathbf{b} \quad 和 \quad (\mathbf{ab})\bullet\mathbf{u} = (\mathbf{b}\bullet\mathbf{u})\mathbf{a}$$

以上二式代入（22），有

$$\nabla(\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}) = \mathbf{g}^s(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi^s}\bullet\mathbf{w} + \mathbf{v}\bullet\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\xi^s}) = \mathbf{g}^s(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi^s}\bullet\mathbf{w} + \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\xi^s}\bullet\mathbf{v})$$

$$= (\mathbf{g}^s\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi^s})\bullet\mathbf{w} + (\mathbf{g}^s\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\xi^s})\bullet\mathbf{v}$$

$$= (\nabla\mathbf{v})\bullet\mathbf{w} + (\nabla\mathbf{w})\bullet\mathbf{v}$$

必须注意：以上关系只对矢量场函数成立。

第4章重点掌握知识点

- 基矢量的导数；第二类和第一类Christoffel符号及其性质
- 矢量和张量分量的协变导数
- Hamilton算子、梯度、散度、旋度
- 积分公式及其在连续介质力学中的应用
- 曲线坐标系中单位基矢量、物理分量的求解

第 6 章 张量场函数对参数的导数

第4章已经介绍张量场函数对曲线坐标的导数，本章处理张量场函数对时间参数的导数。

质点的运动

空间中运动的质点的矢径可以用其曲线坐标表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1(t), x^2(t), x^3(t))$$

单个质点的速度

将矢径对时间求导数，得到该物质点的速度为

$$\boldsymbol{v} \triangleq \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} = \frac{dx^k}{dt}\boldsymbol{g}_k, \quad \boldsymbol{v} = v^k \boldsymbol{g}_k$$

$v^k(t) = \dfrac{dx^k}{dt}$ 是质点速度的逆变分量

任意矢量对时间的导数

$$\boldsymbol{u}(t)=u^{i}(t)\boldsymbol{g}_{i}\left(x^{k}(t)\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u^{i}(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_{i}+u^{m}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}_{m}\left(x^{k}(t)\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}_{m}\left(x^{k}(t)\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{g}_{m}}{\partial x^{k}}\frac{\mathrm{d}x^{k}}{\mathrm{d}t}=\Gamma_{km}^{i}\frac{\mathrm{d}x^{k}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{g}_{i}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}u^{i}}{\mathrm{d}t}+u^{m}v^{k}\Gamma_{km}^{i}\right)\boldsymbol{g}_{i}=\frac{\mathrm{D}u^{i}}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{g}_{i}$$

$\frac{\mathrm{D}u^{i}}{\mathrm{D}t}$ **全导数**

拉格朗日和欧拉描述

Euler坐标是固定在空间中的坐标系，又称为空间坐标或固定坐标

$$(x^1, x^2, x^3)$$

Lagrange坐标是嵌在物体质点上，随物体一起运动和变形的坐标，又称为物质坐标或随体坐标

$$(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$$

二者关系

$$x^k = x^k(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$$

物质导数

保持物质坐标不变时，张量 $\mathbf{T}$ 随时间的变化率称为张量的物质导数，记作 $\dfrac{D\mathbf{T}}{Dt}$ 或 $\dot{\mathbf{T}}$。对物质描述的张量，物质导数就是对时间的偏导数；对空间描述的张量，物质导数是对时间的全导数。

例如：物质点 ξ 的速度定义为矢径的物质导数，即：

$$\mathbf{v}=\frac{\partial\mathbf{r}(\xi,t)}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{x})}{\partial x^k}\frac{\partial x^k(\xi,t)}{\partial t}=v^k\mathbf{g}_k$$

其中

$$v^k=\frac{\partial x^k(\xi,t)}{\partial t}$$

空间坐标基底矢量的物质导数:

$$\mathbf{g}^i\left(x^k(\xi, t)\right)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_i = \frac{D\mathbf{g}_i}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k(\xi, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^k} v^k = v^k \Gamma_{ik}^m \mathbf{g}_m$$

$$\dot{\mathbf{g}}^i = \frac{D\mathbf{g}^i}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k(\xi, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial x^k} v^k = -v^k \Gamma_{mk}^i \mathbf{g}^m$$

物质坐标（Langrange）基底矢量的物质导数

物质坐标协变基矢量的物质导数：

$$\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}_i}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}(\xi,t)}{\partial\xi^i}\right)$$

矢量求偏导数的顺序是可以交换的，因此

$$\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}_i}{Dt}=\frac{\partial}{\partial\xi^i}\left(\frac{\partial\hat{\boldsymbol{r}}(\xi,t)}{\partial t}\right)=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\xi^i}$$

利用协变基与逆变基之间的关系，我们得到：

$$\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}_i}{Dt}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\xi^m}\hat{\boldsymbol{g}}^m\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_i=(\boldsymbol{v}\nabla)\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_i$$

$$\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}_i}{Dt}=\hat{\boldsymbol{g}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{g}}^m\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\xi^m}=\hat{\boldsymbol{g}}_i\cdot(\nabla\boldsymbol{v})$$

考虑到：

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\xi^i}=\nabla_i v^m\boldsymbol{g}_m=\nabla_i v_m\boldsymbol{g}^m$$

我们也可以把**Langrange**基底矢量的物质导数写作

$$\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}_i}{Dt}=\nabla_i v^m\boldsymbol{g}_m=\nabla_i v_m\boldsymbol{g}^m$$

$$\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}_i}{Dt}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \xi^m}\hat{\boldsymbol{g}}^m\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_i=\boldsymbol{v}\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_i$$

物质坐标逆变基矢量的物质导数可由 $\hat{\boldsymbol{g}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{g}}^j=\delta_i^j$ 给出：

$$\frac{D(\hat{\boldsymbol{g}}^i\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_m)}{Dt}=0 \quad\Rightarrow\quad \hat{\boldsymbol{g}}_m\cdot\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}^i}{Dt}=-\hat{\boldsymbol{g}}^i\cdot\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}_m}{Dt}$$

该式右端是逆变基物质导数在协变基下的分量，因而

$$\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}^i}{Dt}=-(\hat{\boldsymbol{g}}^i\cdot\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}_m}{Dt})\hat{\boldsymbol{g}}^m$$

将协变基的物质导数代入到上式中，可得：

$$\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}^i}{Dt}=-(\hat{\boldsymbol{g}}^i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \xi^m})\hat{\boldsymbol{g}}^m=-\hat{\boldsymbol{g}}^i\cdot\boldsymbol{v}\nabla$$

$$\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}^i}{Dt}=-(\hat{\boldsymbol{g}}^m\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \xi^m})\cdot\hat{\boldsymbol{g}}^i=-\nabla\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{g}}^i$$

考虑到：

$$\boldsymbol{v}\nabla=\nabla_k v^m\hat{\boldsymbol{g}}_m\hat{\boldsymbol{g}}^k;\quad \nabla\boldsymbol{v}=\nabla_k v^m\hat{\boldsymbol{g}}^k\hat{\boldsymbol{g}}_m$$

可以将逆变基物质导数改写为：

$$\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}^i}{Dt}=-\nabla_k v^i\hat{\boldsymbol{g}}^k$$

Euler 描述下张量的物质导数

Euler描述下，张量是空间坐标和时间的函数, 所以张量 $\boldsymbol{T}=T^{i}_{\cdot j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$ 的物质导数:

$$\frac{D\boldsymbol{T}}{Dt}=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^k}v^k=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^k}\otimes\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t}+(\boldsymbol{T}\nabla)\cdot\boldsymbol{v}$$

$$=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}^k\otimes\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^k}=\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{T})$$

它的分量表示为

$$\frac{DT^{i}_{\cdot j}}{Dt}=\frac{\partial T^{i}_{\cdot j}}{\partial t}+v^k\left(\frac{\partial T^{i}_{\cdot j}}{\partial x^k}+T^{m}_{\cdot j}\Gamma^{i}_{mk}-T^{i}_{\cdot m}\Gamma^{m}_{jk}\right)$$

推导上式时，我们利用了欧拉基矢量不是时间显函数的性质:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial t}=0$$

这是由于空间坐标确定后，欧拉基矢量就完全确定了。

物质描述下张量的物质导数

$$\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}_i}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \xi^m}\hat{\boldsymbol{g}}^m \cdot \hat{\boldsymbol{g}}_i = (\boldsymbol{v}\nabla)\cdot \hat{\boldsymbol{g}}_i$$

$$\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}^i}{Dt} = -(\hat{\boldsymbol{g}}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \xi^m})\hat{\boldsymbol{g}}^m = -\hat{\boldsymbol{g}}^i \cdot \boldsymbol{v}\nabla$$

物质描述下，张量 $\boldsymbol{T} = T^i_{\cdot j}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j$ 的物质导数：

将Langrange基矢量的物质导数代入上式得：

$$\begin{aligned}\frac{D\boldsymbol{T}}{Dt} &= \frac{\partial \hat{T}^i_{\cdot j}}{\partial t}\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}^j + \hat{T}^i_{\cdot j}\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}_i}{Dt}\hat{\boldsymbol{g}}^j + T^i_{\cdot j}\hat{\boldsymbol{g}}_i\frac{D\hat{\boldsymbol{g}}^j}{Dt} \\ &= \frac{\partial \hat{T}^i_{\cdot j}}{\partial t}\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}^j + \hat{T}^i_{\cdot j}(\boldsymbol{v}\nabla)\cdot\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}^j + T^i_{\cdot j}\hat{\boldsymbol{g}}_i\left(-\hat{\boldsymbol{g}}^j\cdot(\boldsymbol{v}\nabla)\right) \\ &= \frac{\partial \hat{T}^i_{\cdot j}}{\partial t}\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}^j + (\boldsymbol{v}\nabla)\cdot\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}\cdot(\boldsymbol{v}\nabla)\end{aligned}$$

$$\frac{D\boldsymbol{T}}{Dt} = \left(\frac{d\hat{T}^i_{\cdot j}}{dt} + \hat{T}^m_{\cdot j}\nabla_m v^i - T^i_{\cdot m}\nabla_j v^m\right)\hat{\boldsymbol{g}}_i\hat{\boldsymbol{g}}^j$$