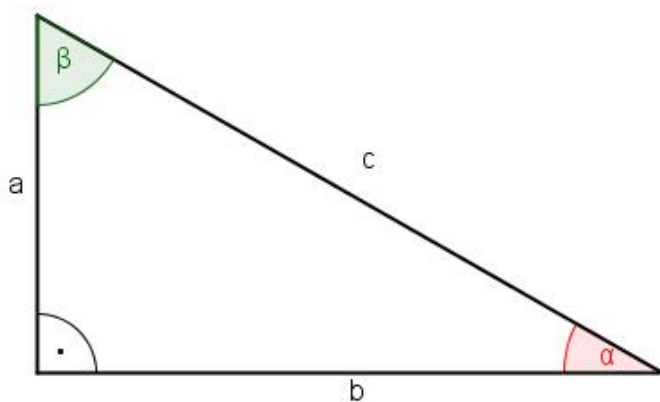


Trigonomeetria

Sõna „trigonomeetria“ tuleneb kreeka keelest (sõnadest trigonon – kolmnurk ja metreo – mõõdan) ning tähendab õpetust kolmnurkade lahendamisest. Vajadus kolmnurkade lahendamise järele tekkis seoses astronoomia arenguga ning meresõidu ja maamõõtmisega. Kolmnurga lahendamine tähendab tema puuduvate elementide leidmist antud elementide järgi. Kolmnurga elemendid on kolmnurga nurgad ja küljed. Sageli leitakse ka kolmnurga übermõõt ja pindala.

Täisnurkse kolmnurga lahendamine



Täisnurkse kolmnurga teravnurkade vastaskülgi nimetatakse kaatetiteks (joonisel a ja b).

Täisnurga vastaskülge nimetatakse hüpotenuusiks (joonisel c).

Nurga α vastaskaatet on a ja lähiskaatet on b. Nurga β vastaskaatet on b ja lähiskaatet on a.

Kui kolmnurga elementidest on kaks antud, siis saab tema ülejäänud elemente arvutada.

Antud elementideks võivad olla:

- 1) kaks kaatetit,
- 2) kaatet ja hüpotenuus,
- 3) teravnurk ja kaatet,
- 4) teravnurk ja hüpotenuus.

Täisnurkse kolmnurga lahendamisel saab kasutada **Pythagorase teoreemi**:

Kaatetite ruutude summa võrdub hüpotenuusi ruuduga:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Jätan meelde: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

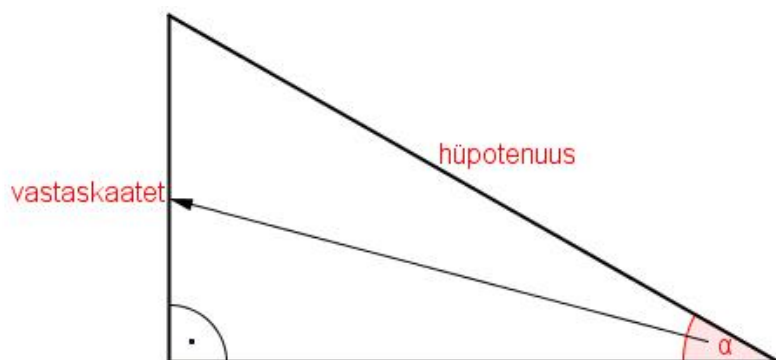
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Täisnurkse kolmnurga lahendamisel kasutatakse veel teravnurga trigonomeetrilisi funktsioone, mis seovad kolmnurga kahte külge ja nurka.

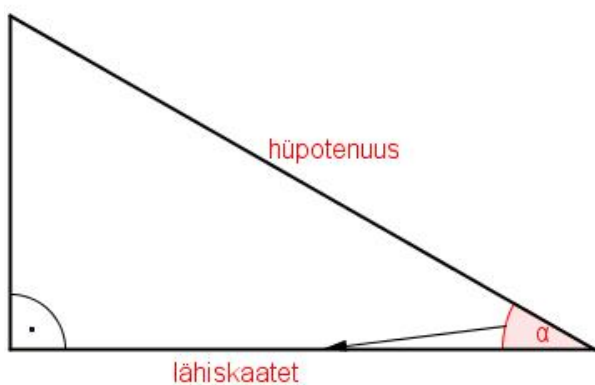
Teravnurga siinuseks nimetatakse selle nurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhet (jagatist):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \text{ ja } \sin \beta = \frac{b}{c}.$$



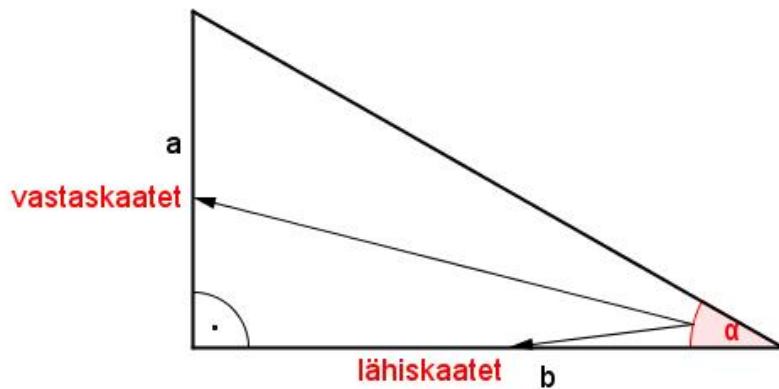
Teravnurga koosinuseks nimetatakse selle nurga lähiskaateti ja hüpotenuusi suhet:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \text{ ja } \cos \beta = \frac{a}{c}.$$



Teravnurga tangensiks nimetatakse selle nurga vastaskaateti ja lähiskaateti suhet:

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \text{ ja } \tan \beta = \frac{b}{a}.$$



Trigonomeetrilised funktsioonid on nimeta arvud.

Kolmnurga pindala valemid

Kolmnurga pindala on võrdne kolmnurga aluse ja kõrguse poole korrutisega:

$$S = \frac{ah}{2}$$

Täisnurkse kolmnurga pindala on võrdne kaatetite poole korrutisega

$$S = \frac{ab}{2}$$

Kui kolmnurgast on teada kõik küljed a , b , ja c , siis saab kolmnurga pindala arvutada Heroni valemi järgi:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

kus $p = \frac{a+b+c}{2}$ on pool kolmnurga übermõõtu.

Kolmnurga pindala võrdub kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse poole korrutisega:

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2}$$

Nurga mõõtühikuks on kraad. Üks kraad on $\frac{1}{360}$ täispöördest.

Kehtivad seosed:

$1^\circ = 60'$ ehk 1 kraad = 60 minutit

1' = 60'' ehk 1 minut = 60 sekundit.

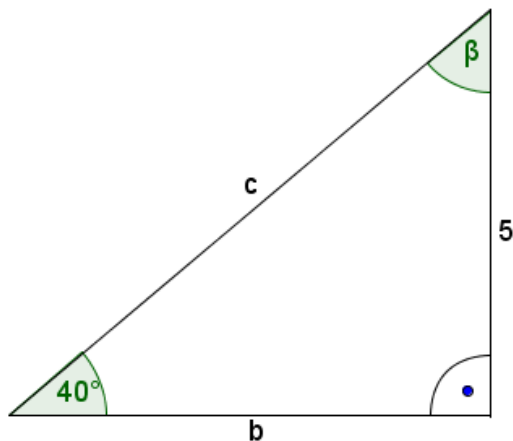
Ülesande vastuse kirjutamisel piisab minuti täpsusest. Kui sekundite arv on 30 või suurem, siis ümardamisel lisatakse minutite arvule 1.

Näpunäide ülesande lahendamisel:

- 1) tee joonis;
- 2) märgi andmed joonisele;
- 3) otsusta, millist funktsiooni kasutada;
- 4) tee vajalikud arvutused.

Näide 1

Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 5 cm ja selle vastasnurk on 40° . Arvutame kolmnurga puuduvad küljed, teise teravnurga, übermöödu ja pindala. Vastuse ümardame kümnendikeni.



Lahendus:

- 1) kasutame funktsiooni $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ja arvutame hüpotenuusi c

$$\text{valemist } \sin \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin \alpha} \quad c = \frac{5}{\sin 40^\circ} \approx 7,8(\text{cm})$$

- 2) kasutame Pythagorase teoreemi ja arvutame teise kaateti valemiga $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
 $b = \sqrt{7,8^2 - 5^2} \approx 6,0(\text{cm})$

- 3) teine teravnurk $\beta = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ (kolmnurga sisenurkade summa on 180° , täisnurkse kolmnurga kahe teravnurga summa on 90°)

4) arvutame ümbermõõdu $P = 5,0 + 7,8 + 6,0 = 18,8$ (cm)

5) arvutame pindala valemiga $S = \frac{ab}{2}$

$$S = \frac{5,0 \cdot 6,0}{2} = 15(\text{cm}^2)$$

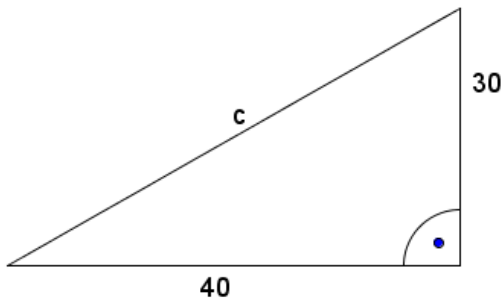
Vastus

Kolmnurga teine kaatet on 6,0 cm, hüpotenuus 7,8 cm, teine teravnurk 50° , ümbermõõt 18,8 cm ja pindala 15 cm^2 .

Näide 2

Mitu hiirt mahub täisnurkse kolmnurga kujulise juustutüki ümber maiustama, kui juustutüki kaatetid on 30 cm ja 40 cm ja igale hiirele arvestada 35 mm? Eeldame, et ükski hiir teise juustutükki ära ei söö.

Kui suur on sellise juustutüki pindala? Vastuse ümardame ühelisteni.



Lahendus

1) arvutame juustutüki suurima külje ehk hüpotenuusi pikkuse, kasutame pythagorase teoreemi

$$c = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50(\text{cm})$$

2) arvutame kolmnurga ümbermõõdu

$$P = 30 + 40 + 50 = 120 \text{ (cm)}$$

3) arvutame, mitu hiirt mahub ümber juustutüki maiustama

$$35 \text{ mm} = 3,5 \text{ cm}$$

$$120 : 3,5 \approx 34 \text{ (hiirt)}$$

4) arvutame kolmnurga pindala

$$S = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600(\text{cm}^2)$$

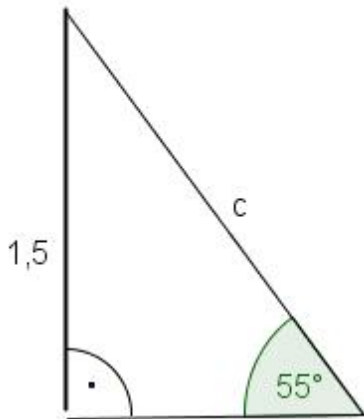
Vastus

Maiustama mahub 34 hiirt, kolmnurga pindala on 600 cm^2 .

Näide 3

Õunapuude toestamiseks pandi puudele toed, mis kinnitati 1,5 m kõrguselt puu külge. Toed moodustasid maapinnaga 55° . Arvutame tugede pikkuse. Vastuse ümardame kümnendikeni.

Lahendus



Täisnurksest kolmnurgast on teada üks teravnurk ja selle vastaskaatet. Leida on vaja tugede pikkus ehk täisnurkse kolmnurga hüpotenuus. Kasutame valemit $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, millest

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

$$c = \frac{1,5}{\sin 55^\circ} \approx 1,8(m)$$

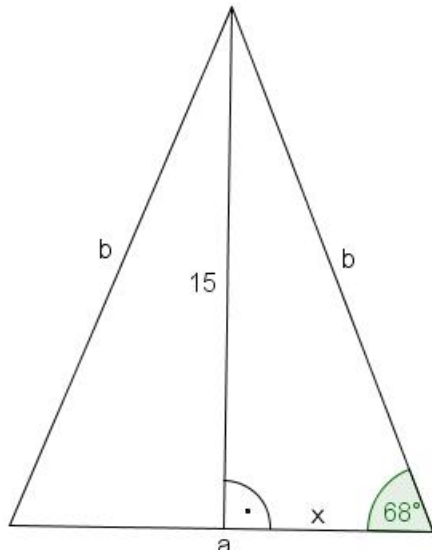
Vastus

Toed on 1,8 m pikad.

Näide 4

Võrdhaarse kolmnurga alusele tõmmatud kõrgus on 15 cm ja alusnurk on 68° . Arvutame kolmnurga küljed, ümbermõõdu ja pindala. Vastuse ümardame kümnendikeni.

Lahendus



- 1) arvutame pool kolmnurga alusest (joonisel x)
 $\tan 68^\circ = \frac{15}{x}$, millest $x = \frac{15}{\tan 68^\circ} \approx 6,1(\text{cm})$
- 2) kolmnurga alus on $2 \cdot 6,1 = 12,2(\text{cm})$
- 3) arvutame külje b (võrdhaarse kolmnurga haar) $b = \sqrt{15^2 + 6,1^2} \approx 16,2(\text{cm})$
- 4) arvutame kolmnurga ümbermõõdu $P = 12,2 + 2 \cdot 16,2 = 44,6(\text{cm})$
- 5) arvutame pindala $S = \frac{12,2 \cdot 15}{2} = 91,5(\text{cm}^2)$

Vastus

Kolmnurga alus on 12,2 cm, haarad 16,2 cm , ümbermõõt 44,6 cm ja pindala 91,5 cm².