Universidad Simón Bolívar
CI-5651
Enero-Marzo 2024

Tarea 2
Algoritmos Voraces

Estudiante: Pedro Ignacio Itzcoatl Rodríguez Reveron
Carnet: 15-11264

1.

El algoritmo propuesto para la solución de este problema es el siguiente: Ordenar los carteles según la posición en la que acaban (posición inicial sumada a su tamaño) e ir agregando aquellos cuya posición de inicio aún no se encuentre ocupada.

```
funcion mas_carteles(c : arreglo tuplas [0..n)) -> lista tuplas:
      r = lista tuplas con capacidad n {inicializada vacía}
      ap = 0
      ordenar(c, c[0] + c[1])
      para i desde 0 hasta n:
            si c[i][0] < ap:
                  continuar
            ap = c[i][0] + c[i][1]
            r.insertar_final(c[i])
retornar r
```

Donde:

- El arreglo c de entrada son todos los carteles propuestos, tal que son tuplas de la forma (posición inicial, tamaño).
- La lista r de tuplas son los carteles aprobados.
- El entero ap es la posición de izquierda a derecha a partir de donde hay disponible lugar para los carteles en la iteración i.

Justificación

Supongamos que tenemos una secuencia de carteles óptima $c = s_0 s_1 \ldots s_i \ldots$, y una secuencia $c = s'_0 s'_1 \ldots s'_i \ldots$ construida usando el algoritmo propuesto. Sea *i'* la menor posición de ambas secuencias donde $s_i \neq s'_i$, demostremos que s_i puede reemplazarse por s'_i sin reducir el número de carteles.

- s_i no puede finalizar antes que s'_i debido a que s' es construido con el algoritmo, por lo que este caso se ignora.

- Si s_i finaliza al mismo momento que s'_i, no hay problema en reemplazarlo dado a que ambos carteles tienen una posición de inicio válida, y s'_i al finalizar en el mismo momento no intersecta con ningún cartel posterior a s_i en *s*.

- Si s_i finaliza después que s'_i, no hay problema en reemplazarlo dado a que ambos carteles tienen una posición de inicio válida, y s'_i al finalizar antes no intersecta con ningún cartel posterior a s_i en *s*.

Adicionalmente, si *s* transformado tiene una cardinalidad mayor que *s'* a partir de un s_m, podemos anexar al final de *s'* los carteles faltantes y volver a aplicar estas transformaciones sin ninguna violación a las condiciones del problema. Por ende como podemos transformar el resultado óptimo *s* en *s'* sin reducir la cantidad de propuestas aprobadas, se concluye el algoritmo obtiene un resultado maximal al problema.

Análisis de complejidad

Sea n el número de carteles:

- Ordenar el arreglo de carteles puede realizarse con un algoritmo $\Theta(n * \log n)$ como Heapsort, mientras que este use espacio $O(n)$ u $O(1)$.

- Recorrer los carteles es $\Theta(n)$ ya que siempre recorre el arreglo c en su totalidad.

- La inserción al final en una lista de tuplas implementada como un arreglo dinámico con capacidad n puede realizarse en $O(1)$ al llevar el tamaño actual.

Debido a esto, el algoritmo propuesto es $O(n + n * \log n)$ lo cual es equivalente a $O(n * \log n)$.

Análisis de espacio

Sea n el número de carteles:

- El algoritmo de ordenamiento utilizado se restringió a uno con complejidad de memoria $O(n)$ u $O(1)$.

- Si la lista de resultados r es implementada como un arreglo dinámico con capacidad n inicial, se utiliza entonces $O(n)$ en memoria.

Por ende el algoritmo tiene complejidad de memoria $O(n)$

2.

2.a

Para demostrar que la descripción $M_T = (F, I)$ propuesta es efectivamente una matroide, debemos demostrar que se cumple la propiedad hereditaria e intercambio.

Propiedad hereditaria

Demostrando por contradicción, asumimos que si $A \subseteq B \wedge B \in I$, entonces $A \notin I$. Dado a que $A \notin I$, entonces existe un tipo $t \in T$ tal que *t* es imagen de una firma $f \in A$ y t es imagen de otra firma $f' \in A$, y al A ser subconjunto de B, entonces $f, f' \in B$, violando así el hecho de que $B \in I$ al existir más de una firma en *B* donde el tipo *t* es imagen, por lo que concluimos que $A \in I$.

Propiedad de intercambio

Sean $A, B \in I$ con $|B| > |A|$, como ambos son subconjuntos definitivos se cumple que existen $|B|$ imágenes únicas en las firmas pertenecientes a *B,* y análogamente $|A|$ imágenes en A. En consecuencia a que $|B| > |A|$, existen $|B| - |A|$ tipos que aparecen como imagen en *B* pero no en *A*. Sea *t* uno de los susodichos tipos, y sea $f' \in B$ una firma tal que *t* es imagen de f', dado a que *t* no aparece en *A* como imagen podemos concluir que $A \cup \{f'\}$ es definitivo ya que es primera vez que *t* es imagen en A. Debido a que conseguimos una firma en B que no pertenece al conjunto A, y tras añadir este elemento en A se obtuvo un conjunto definitivo, queda demostrada la propiedad de intercambio.