

排队论

question

某单位医院的一个科室有一位医生值班，经长期观察，每小时平均有4个病人，医生每小时平均可诊断5人，病人的到来服从泊松流，诊病时间服从负指数分布，（1）试分析该科室的工作状况，（2）如要求99%以上的病人有座，该科室至少设多少座位？（3）如果该单位每天24小时上班，病人因看病1小时而耽误工作单位要损失30元，这样单位平均损失多少元？（4）如果该科室提高看病速度，每小时平均可诊6人，单位每天可减少损失多少？可减少多少座位？

解：

（1）由每小时平均有4个病人，医生每小时平均可诊断5人，病人的到来服从泊松流，诊病时间服从负指数分布可得 $\lambda = \frac{4}{60}, \mu = \frac{5}{60}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{5}$

所以 $L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 4, L_q = \rho L_s = 3.2, W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = 60(min), W_q = \rho W_s = 48(min)$

医院当中没有病人的概率为： $1 - \rho = 0.2$ ，病人到来不需要等待的概率即是医院中没有病人的概率

综上，病人到来不需要等待的概率为0.2，医院平均病人数为4人，医院等待的平均病人数为3.2人，病人的平均看病(包括等待时间)时间为1h，病人平均排队等待时间为0.8h。

（2）要求99%以上的病人有座，设现在医院内有 m 个座位，则可以设 $P = (\text{医院总人数} \leq m) \geq 0.99$ ，考虑单位时间平均人数为4人，则 $m \geq 4$

- 考虑病人数为0人时，人数 $\leq m$ ，都有座位，发生这种情况下的概率为 P_0
- 考虑病人数为1人时，人数 $\leq m$ ，都有座位，发生这种情况下的概率为 P_1
- 考虑病人数为2人时，人数 $\leq m$ ，都有座位，发生这种情况下的概率为 P_2
- 考虑病人数为 m 人时，人数 $\leq m$ ，都有座位，发生这种情况下的概率为 P_m

由于在 t 时间内，这些情况相互独立，不可能同时发生，则可以得出

$P = (\text{医院总人数} \leq m) = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_m \geq 0.99$ ，即

$$\sum_{n=0}^m P_n = \sum_{n=0}^m \rho^n (1 - \rho) \geq 0.99$$

反解的 $m \geq 20$ ，故座位至少要有20个，才能保证99%的病人有座位

（3）设每天平均会有 N 个病人，因看病耽误的时间为 T ，损失的钱为 Q ，由题目所给条件可得平均每天会有 $N = 24 * 4 = 96$ 个病人，由问题一结论可得在每个病人在看病耽误时间为1个小时，则每天平均会耽误工作时间为 $T = 96 * 1 = 96h$ ，每天单位平均损失

$Q = N * T * W_s = 96 * 30 = 2880$ 元

（4）同问题一，只是每小时诊断人数有所增加， $\lambda = \frac{4}{60}, \mu = \frac{6}{60}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{6}$

所以 $L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 2, L_q = \rho L_s = \frac{4}{3}, W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = 30(min), W_q = \rho W_s = 20(min)$

每天单位平均损失 $Q = N * T * W_s = 96 * 0.5 * 30 = 1440$ 元，同理也可解得作为此时大于等于11张即可让99%以上的病人有座。综上单位每天可减少损失1440元，可减少9个座位。

