

# 多目标优化

## question 1

某厂生产A和B两种型号的润滑油，每公斤润滑油的平均生产时间和利润分别为A种：3小时，100元；B种：2小时，80元。该厂每周生产时间为120小时，但可加班48小时，加班时间生产每公斤润滑油的利润为：90元（A种），70元（B种），市场每周需要A，B两种润滑油各30公斤以上，问如何安排每周的生产计划，在尽量满足市场需求的条件下使利润最大，加班时间最少，建立数学模型，并求解分析。

解：

提取题目信息绘制表格：

车辆型号	A		B	
时间性质	正常	加班	正常	加班
时间/h	3	3	2	2
利润/元	100	90	80	70

设：

- $f_1$  利润,  $f_2$ : 加班时间
- $x_1$ : 正常时间生产A型号的件数
- $x_2$ : 加班时间生产A型号的件数
- $x_3$ : 正常时间生产B型号的件数
- $x_4$ : 加班时间生产B型号的件数

建立下面的数学模型：

$$\begin{aligned} \max f_1(x) &= 100x_1 + 90x_2 + 80x_3 + 70x_4 \\ \min f_2(x) &= 3x_2 + 2x_4 \\ s.t. \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 30 \\ x_3 + x_4 \geq 30 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 3x_3 + 2x_4 \leq 48 \\ x_i \geq 0 (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \end{aligned}$$

利用matlab求解，代码如下：

example1Fun.m文件

```
1 function y=example1Fun(x)
2 y(1)=-100*x(1)-90*x(2)-80*x(3)-70*x(4);
3 y(2)=0*x(1)+0*x(3)+3*x(2)+2*x(4);
```

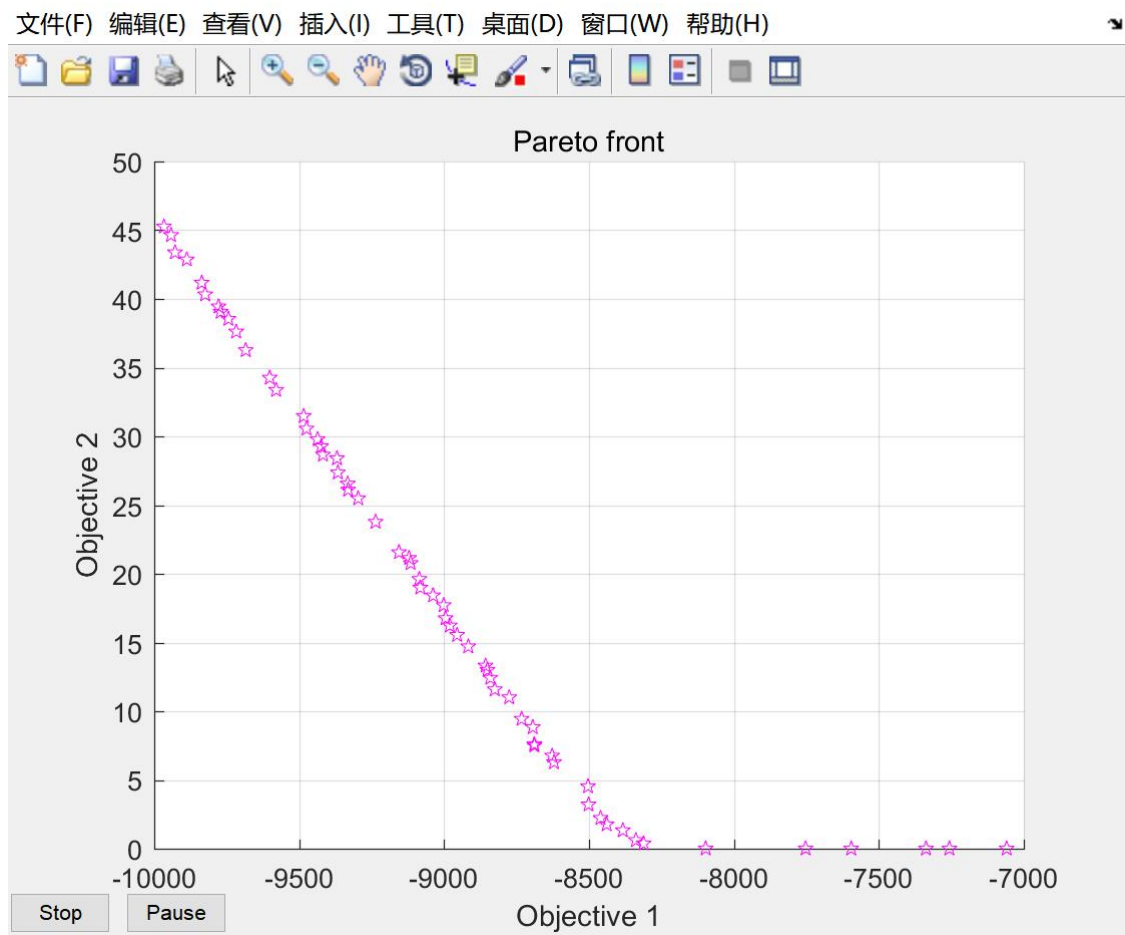
主程序：

```

1 fitnessfcn=@example1Fun;
2 nvars=4;
3 lb=zeros(1,4);
4 ub=[];
5 A=[-1,-1,0,0;0,0,-1,-1;3,2,0,0;0,3,0,2];
6 b=[-30,-30,120,48]';
7 Aeq=[];
8 beq=[];
9 options=gaoptimset('paretoFraction',0.3,'populationsize',200,'generations',300,'stallGenLimit',200,'TolFun',1e-10,'PlotFcns',@gaplotpareto);
10 [x,fval]=gamultiobj(fitnessfcn,nvars,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options)

```

得到下图为Pareto Front图像，横轴Objective\_1为第一个目标，即加班时间；纵轴Objective\_2为第二个目标，即工厂利润。其中主要的三个拐点已经标记出，由上图我们可以看到加班时间最小化与利润最大化之间是存在冲突的，和多目标规划定义符合。由图像可知：当加班时间在45小时时，收益达到最大值12100元，而当加班时间小于1.5小时时，利润变动变化较小，基本保持在1000元左右。对于其他的情况，工厂决策者可以根据工厂实际情况进行方案选择。



由于智能优化算法涉及到算子的选择问题，以及终止代数的不同，运行了多次后这里给出某一次运行得到的解：

```

1 Optimization terminated: maximum number of generations exceeded.
2
3 x =
4
5     38.3415     0.0006     40.3113     0.0014
6     38.3153     0.0006     42.8133     0.0014
7     39.7381     0.3147     55.5439     7.6425
8     38.3111     0.0006     47.0525     0.0014
9     39.7227     0.3942     55.5439     21.1019

```

10	39.6002	0.2844	55.3303	0.6878
11	39.5167	0.0956	54.8273	0.5241
12	39.7744	0.1369	55.5941	3.5944
13	39.4302	0.6629	55.5800	21.3278
14	39.5659	0.3877	55.6210	18.2277
15	39.6052	0.3827	55.5886	6.7798
16	38.2748	0.0009	49.0621	0.0038
17	39.5688	0.5795	55.5871	19.7164
18	39.7084	0.3832	55.5752	7.1980
19	39.4333	0.8459	55.6505	21.3612
20	38.3415	0.0006	40.3113	0.0014
21	39.0505	0.1864	55.1779	0.0292
22	39.4872	0.4540	55.5384	3.7340
23	39.6244	0.2803	55.3777	9.9654
24	39.6353	0.2928	55.5416	4.2795
25	39.6289	0.3182	55.4071	2.9023
26	39.6823	0.3738	55.5326	14.7173
27	38.9561	0.0622	55.0470	0.0949
28	39.6681	0.1914	55.4449	14.3487
29	39.6729	0.1624	55.4501	2.8995
30	39.6762	0.3922	55.5087	16.5414
31	39.5558	0.5717	55.4504	14.8769
32	39.7238	0.2125	55.5440	19.8433
33	39.7371	0.3299	55.5334	16.1894
34	39.5034	0.3993	55.3928	13.5974
35	39.6015	0.3144	55.3297	8.3833
36	39.7575	0.1725	55.5535	12.7964
37	39.5644	0.4567	55.5663	18.5874
38	39.6331	0.3554	55.4680	5.9694
39	39.5994	0.3787	55.4911	8.6419
40	39.7853	0.1057	55.6097	3.5944
41	39.6872	0.3401	55.5290	5.7027
42	39.7113	0.1881	55.2620	1.3229
43	39.6689	0.3721	55.5235	12.7218
44	39.5081	0.3974	55.4487	9.9763
45	39.6856	0.3218	55.5102	12.2595
46	39.7379	0.1587	55.5770	9.2568
47	39.6826	0.3032	55.3414	6.2021
48	39.6803	0.2178	55.5447	8.0555
49	39.7076	0.3087	55.4763	11.4260
50	39.7101	0.2379	55.4515	19.1730
51	39.4348	0.5143	55.6418	20.6623
52	39.5825	0.3993	55.5873	9.2082
53	39.6745	0.4102	55.4985	10.1649
54	39.6023	0.3912	55.4926	14.3071
55	39.7530	0.2777	55.5480	17.7180
56	39.7380	0.1952	55.5496	14.0390
57	39.6822	0.2019	55.5409	13.3794
58	39.5106	0.3370	55.3921	0.3769
59	39.6024	0.2694	55.4282	5.0978
60	39.5577	0.2553	54.9089	1.8850
61	38.2709	0.0011	53.3743	0.0043
62	39.5925	0.4812	55.5646	19.0020
63	38.3089	0.0006	43.8297	0.0014
64	39.7664	0.1719	55.5712	5.5347
65				
66				
67	fval =			

68		
69	1.0e+03 *	
70		
71	-7.0592	0.0000
72	-7.2567	0.0000
73	-8.9806	0.0162
74	-7.5955	0.0000
75	-9.9284	0.0434
76	-8.4602	0.0022
77	-8.3832	0.0013
78	-8.6889	0.0076
79	-9.9420	0.0446
80	-9.7171	0.0376
81	-8.9166	0.0147
82	-7.7528	0.0000
83	-9.8361	0.0412
84	-8.9552	0.0155
85	-9.9668	0.0453
86	-7.0592	0.0000
87	-8.3381	0.0006
88	-8.6940	0.0088
89	-9.1155	0.0208
90	-8.7328	0.0094
91	-8.6273	0.0068
92	-9.4747	0.0306
93	-8.3116	0.0004
94	-9.4240	0.0293
95	-8.6209	0.0063
96	-9.6015	0.0343
97	-9.4845	0.0315
98	-9.8241	0.0403
99	-9.5793	0.0334
100	-9.3695	0.0284
101	-9.0017	0.0177
102	-9.3313	0.0261
103	-9.7440	0.0385
104	-8.8506	0.0130
105	-9.0382	0.0184
106	-8.6884	0.0075
107	-8.8408	0.0124
108	-8.5016	0.0032
109	-9.3328	0.0266
110	-9.1208	0.0211
111	-9.2965	0.0255
112	-9.0822	0.0190
113	-8.8570	0.0133
114	-8.9951	0.0168
115	-9.2365	0.0238
116	-9.7706	0.0391
117	-9.8875	0.0429
118	-9.0857	0.0196
119	-9.1558	0.0216
120	-9.4363	0.0298
121	-9.6844	0.0363
122	-9.4181	0.0287
123	-9.3662	0.0274
124	-8.4391	0.0018
125	-8.7756	0.0110

126	-8.5034	0.0045
127	-8.0974	0.0000
128	-9.7779	0.0394
129	-7.3374	0.0000
130	-8.8252	0.0116

## question 2

某工厂共有工人300名，生产A, B, C, D四种产品，要求每人每周平均生产时间在40~48小时内，C为国防用产品，每周至少生产150件，而每周至多可以提供能源20吨标准煤。其他数据如下表：

产品	最大产量 (kg/周)	销售量 (kg/周)	成本 (元/kg)	售价 (元/kg)	能耗 (吨煤/kg)	生产时间 (h/kg)
A	270	300	190	200	0.015	13
B	240	300	210	230	0.02	13.5
C	460	600	148	160	0.018	14
D	130	200	100	114	0.011	11.5

问如何安排每周的生产，才能使纯利润最高，而能耗最少？试建立数学模型并求解。

解：

设利润函数为  $f_1$ ，能耗函数为  $f_2$ 。A, B, C, D四种产品分别生产  $x_1, x_2, x_3, x_4$  件。

则可得：

$$\begin{aligned}
 \max f_1 &= 10x_1 + 20x_2 + 12x_3 + 14x_4 \\
 \min f_2 &= 0.01 * (1.5x_1 + 2x_2 + 1.8x_3 + 1.1x_4) \\
 s. t. \quad &\begin{cases} 13x_1 + 13.5x_2 + 14x_3 + 15x_4 \leq 48 * 300 \\ 13x_1 + 13.5x_2 + 14x_3 + 15x_4 \geq 40 * 300 \\ 0.01 * (1.5x_1 + 2x_2 + 1.8x_3 + 1.1x_4) \leq 20 \\ x_1 \leq 270, x_2 \leq 240, 150 \leq x_3 \leq 460, x_4 \leq 130 \\ x_i \geq 0 (i = 1, 2, 4 \dots) \end{cases}
 \end{aligned}$$

利用matlab求解，代码如下：

example2Fun.m文件

```

1 function y=example2Fun(x)
2 y(1)=-10*x(1)-20*x(2)-12*x(3)-14*x(4);
3 y(2)=0.01*(1.5*x(1)+2*x(2)+1.8*x(3)+1.1*x(4));

```

主程序：

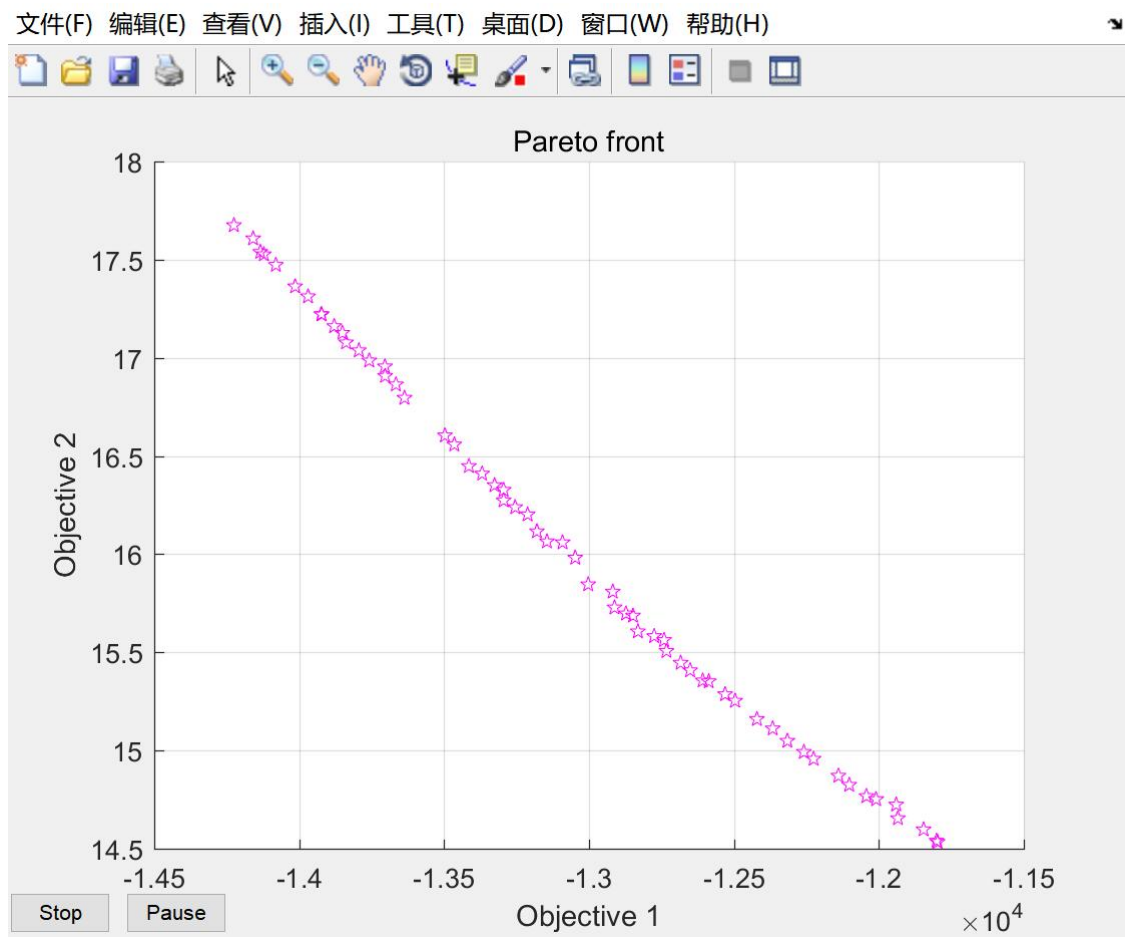
```

1 fitnessfcn=@example2Fun;
2 nvars=4;
3 A=[13,13.5,14,15;-13,-13.5,-14,-15;1.5,2,1.8,1.1];
4 b=[48*300 -40*300 2000]';
5 Aeq=[];
6 beq=[];
7 lb=[0,0,150,0];
8 ub=[270 240 460 130];
9 options=gaoptimset('paretoFraction',0.3,'populationsize',200,'generations',3
00,'stallGenLimit',200,'TolFun',1e-10,'PlotFcns',@gaplotpareto);
10 [x,fval]=gamultiobj(fitnessfcn,nvars,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options)

```

利用Matlab代码求解后得到下图所示的Pareto front。由图像可知：当煤耗量达到17.71t时所获得的利润也达到了最大值14240元；当煤耗量在14.45t~14.33t之间波动时，最大利润波动不大；当煤耗量达到最小14.06t时，利润值也达到了10510元。

对于其他的情况，我们给出相应的决策变量以及对应的决策空间的解，管理者可以根据工厂的实际情况进行相应的选择。



决策变量取值以及对应解空间：

```

1 Optimization terminated: maximum number of generations exceeded.
2
3 x =
4
5     189.0180    187.4171    362.9732    128.8139
6     185.5869    201.1508    363.6902    128.5536
7     189.8770    221.8578    365.6191    129.0825
8     203.2001    228.0210    376.8566    128.8167
9     189.6417    215.0598    363.8967    128.7110
10    184.7055    203.7014    364.3507    129.2203

```

11	212.9575	234.4151	391.4783	127.0872
12	240.5554	237.9694	428.3378	126.8196
13	200.2482	229.9833	370.4803	128.5868
14	245.2034	239.3590	434.1242	126.8815
15	188.4607	218.8681	363.5786	128.2781
16	190.0733	227.8499	365.6017	129.0156
17	187.2969	204.9426	363.5894	128.9131
18	189.2680	187.1046	363.2857	129.0639
19	244.0298	236.9993	434.4807	126.0695
20	185.1289	235.0681	372.7274	128.9956
21	219.7818	236.4132	398.5688	127.7469
22	187.9076	230.5156	370.1032	128.7267
23	225.4262	237.7796	426.1897	128.5497
24	208.7417	231.3122	378.8929	127.6669
25	220.3109	239.2287	420.7368	128.6807
26	191.8645	224.0972	365.3354	128.7435
27	195.3110	189.8294	365.5893	128.8317
28	190.8987	229.2107	365.6856	128.7392
29	195.7228	237.1872	387.5464	128.1211
30	207.2508	237.2509	418.1441	128.6798
31	194.4102	237.3641	376.0654	128.4735
32	222.6615	236.7216	425.9430	129.0495
33	210.1939	238.3062	394.9713	129.0491
34	235.9816	236.9031	435.1917	128.7042
35	200.1645	238.0035	394.0818	128.8537
36	195.1400	236.8992	390.9815	128.4786
37	191.2060	226.1392	375.2515	128.7986
38	217.8292	237.7610	420.1167	127.3852
39	204.7860	230.7780	387.5477	126.9538
40	189.5479	197.3031	363.5262	128.9837
41	187.1201	210.6637	364.1224	128.9141
42	232.7274	237.9128	428.2384	127.8199
43	197.3889	232.2800	370.7579	128.8444
44	223.8984	231.4863	419.6253	128.5805
45	209.8118	235.7005	404.7967	128.2321
46	221.0395	237.4626	425.4840	127.5365
47	213.5691	236.3556	383.3459	127.9891
48	213.2930	237.2747	419.9996	127.5117
49	211.8528	235.9714	420.1949	127.5658
50	205.1619	232.8786	391.7246	128.7185
51	196.3391	229.4849	368.5298	128.5508
52	189.8930	227.0919	364.0571	128.4515
53	186.9331	220.5519	368.0051	128.5487
54	208.9854	235.3342	397.1610	129.0436
55	236.2644	237.1680	423.8063	126.9700
56	186.5875	214.0117	364.2614	128.4634
57	187.5350	209.1073	363.5395	128.9544
58	198.2441	235.3180	368.4824	128.6799
59	225.4262	237.7796	426.0647	128.5497
60	236.0597	237.5281	435.0979	128.7042
61	189.1549	187.9267	365.6329	129.1473
62	208.7754	235.6443	394.2593	128.1656
63	217.2058	236.5920	423.9528	128.7665
64	185.5773	196.1308	363.0228	128.5548

65  
66  
67  
68

fval =

69	1.0e+04 *	
70		
71	-1.1798	0.0015
72	-1.2043	0.0015
73	-1.2531	0.0015
74	-1.2918	0.0016
75	-1.2366	0.0015
76	-1.2102	0.0015
77	-1.3295	0.0016
78	-1.4080	0.0017
79	-1.2848	0.0016
80	-1.4225	0.0018
81	-1.2421	0.0015
82	-1.2651	0.0015
83	-1.2140	0.0015
84	-1.1801	0.0015
85	-1.4159	0.0018
86	-1.2831	0.0016
87	-1.3497	0.0017
88	-1.2733	0.0016
89	-1.3924	0.0017
90	-1.3048	0.0016
91	-1.3838	0.0017
92	-1.2587	0.0015
93	-1.1940	0.0015
94	-1.2684	0.0015
95	-1.3145	0.0016
96	-1.3637	0.0017
97	-1.3003	0.0016
98	-1.3879	0.0017
99	-1.3414	0.0016
100	-1.4122	0.0018
101	-1.3295	0.0016
102	-1.3180	0.0016
103	-1.2741	0.0016
104	-1.3758	0.0017
105	-1.3091	0.0016
106	-1.2010	0.0015
107	-1.2259	0.0015
108	-1.4014	0.0017
109	-1.2872	0.0016
110	-1.3704	0.0017
111	-1.3465	0.0017
112	-1.3851	0.0017
113	-1.3255	0.0016
114	-1.3704	0.0017
115	-1.3666	0.0017
116	-1.3212	0.0016
117	-1.2775	0.0016
118	-1.2608	0.0015
119	-1.2496	0.0015
120	-1.3369	0.0016
121	-1.3969	0.0017
122	-1.2316	0.0015
123	-1.2225	0.0015
124	-1.2912	0.0016
125	-1.3922	0.0017
126	-1.4134	0.0018



127	-1.1846	0.0015
128	-1.3326	0.0016
129	-1.3794	0.0017
130	-1.1934	0.0015