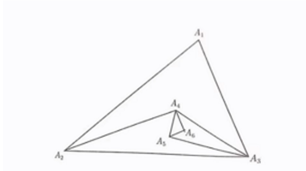
1.解：假设$A_1(x_1,y_1),A_2(x_2，y_2),A_3(x_3,y_3)\ldots\ldots$则由三角形重心公式可得：

$x_4 = {(x_1+x_2+x_3)}/{3}$，$y_4 = {(y_1+y_2+y_3)}/{3}$

$x_5 = {(x_2+x_3+x_4)}/{3}$，$y_5 = {(y_2+y_3+y_4)}/{3}$



$x_6 = {(x_3+x_4+x_5)}/{3}$，$y_6 = {(y_3+y_4+y_5)}/{3}$

…… ， ……

$x_n = {(x_{n-3}+x_{n-2}+x_{n-1})}/{3}$，$y_n = {(y_{n-3}+y_{n-2}+y_{n-1})}/{3}$ $(n\in N^*, n\geq 4)$

鉴于y_n与x_n形式相同，即可以将y_n替换相应x_n的获取纵坐标的值，故下列只对x_n分析：

猜想$x_n=\lambda^n$,代入上式整理有：

$$3\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1=0$$

解该特征方程得解：

$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i$，$\lambda_3=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i$

记$\beta=\arctan(\sqrt{2})$

则可得该方程的齐次通解为：

$$x_n=C_1\cdot 1^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n[C_2\cdot \cos(\beta\cdot n)+C_3\cdot\sin(\beta\cdot n)]$$

可将x_4,x_5,x_6的值作为初值，依次代入上式求得参数C_1,C_2,C_3。y_n表达式同理。

2.解：

由于大部分昆虫是成虫对人们生活影响最大，故在此仅考虑成虫数目的变化（其中b为成虫生育率，μ_L,μ_P,μ_A分别为幼虫、蛹期、成虫的死亡率：

$$A(t+1)=(1-\mu_P)\cdot P(t)+(1-\mu_A)\cdot A(t)$$
$$=(1-\mu_A)\cdot A(t)+b\cdot(1-\mu_P)\cdot(1-\mu_L)\cdot A(t-2)$$

故差分方程如上。解该差分方程的特征方程入下：

$$\lambda^3-(1-\mu_A)\cdot\lambda^2+b\cdot(1-\mu_L)\cdot(1-\mu_P)=0$$

研究该方程对应的三次函数$y=x^3-(1-\mu_A)\cdot x^2+b\cdot(1-\mu_L)\cdot(1-\mu_P)$

$$=x^2[x-(1-\mu_A)]+b\cdot(1-\mu_L)\cdot(1-\mu_P)$$

可视为该函数是由于x轴交点为0(双重根）和2（1-μ_A）的最高项为正的三次曲线向上平移$b\cdot(1-\mu_L)\cdot(1-\mu_P)$后的曲线。则所得的新曲线与x轴交点情况取决于三次函数的极小值与向上平移量的比较，由此可将情况分为三种情况：

极小值为：

$$y'=3x^2-2(1-\mu_A)x$$

令y'=0，结合该三次函数的最高次数项系数为正和（1-μ_A）的范围为（0，1）可知该导数的极小值点为$x_{极小}=\frac{2(1-\mu_A)}{3}$，

则极小值为：$y_{极小}$=b(1-μ_L)$(1-\mu_P)-\frac{4}{27}(1-\mu_A)^3$.

i. $y_{极小}>0$,此时特征方程对应函数与x轴仅有一个交点(一个单根和两个复数根)，三次函数的如下图图1

则此种情况将会解得该差分方程解为：

A(t)=$C_1\cdot\lambda^t+\rho^t(C_2cos\beta t+C_3sin\beta t)$　　图像大致的情况如下图2

其中$\lambda<0$.

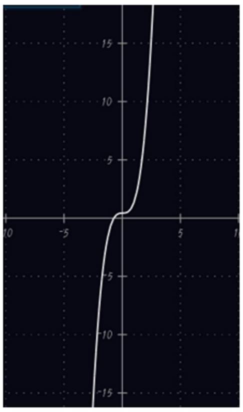


图 1

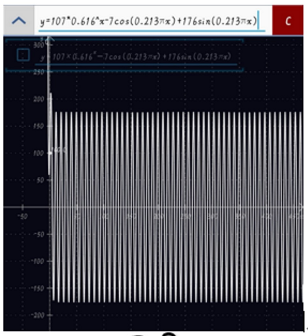


图 2

ii.$y_{极小}=0$，此时特征方程对应的有一个双重根和一个单根大致情况如图3，则差分方程解为：

A(t)= $C_1\cdot{\lambda_1}^t+(C_2\cdot t+C_3)\cdot{\lambda_2}^t$　其中 $\lambda_1<0,1>\lambda_2>0$　　　　大致图像可参考下图4

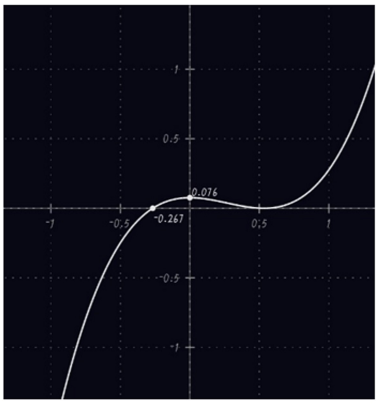


图 3

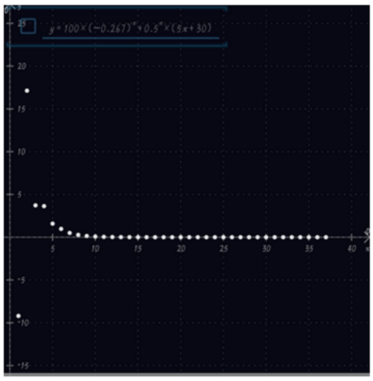


图 4

iii.$y_{极小}<0$,此时特征方程将有三个单根，函数与x轴的关系大致如下图5，则差分方程的解：

A（t)=$C_1\cdot{\lambda_1}^t+C_2\cdot{\lambda_2}^t+C_3\cdot{\lambda_3}^t$.其中$\lambda_1<0,\lambda_2>0,\lambda_3>0$.图像大致可以如下图6分布：

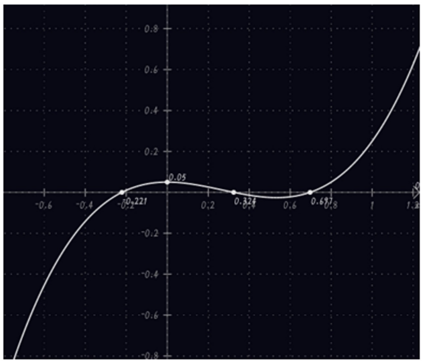


图 5

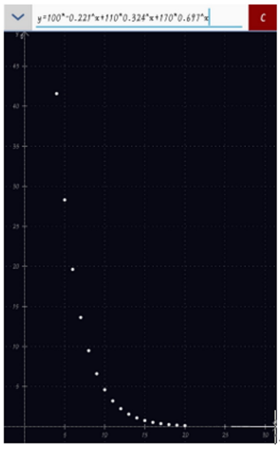


图 6

如上图分析可知，粉甲虫的数目终将稳定于y=0（即昆虫的数目将会减少）或者围绕y=0上下波动。

若想要控制昆虫的数目，可以通过营造适合成虫生育的环境来提高成虫的生育率，同时需要搭建良好的生活环境以供昆虫各阶段安然地存活下去，降低致死率。

3.解：

依据题意知：若第n个时段患者体内的药物含量为x(n)，则下一个时段该患者体内药物含量为（以四个小时为一个时段，且药物含量取该时段内的第四个小时的药物含量）：

$$x(n+1) = A_0 + x(n) - k\cdot[A_0 + x(n)]$$
$$= (1-\mathrm{k})\cdot[A_0 + \mathrm{x(n)}]$$

故x(n)的差分方程为：$x(n+1)-(1-k)\cdot \mathrm{x(n)} = (1-\mathrm{k})\cdot A_0$

则该方程的通解为：x(n) = $C_1\cdot(1-k)^n$

设该方程的特解为$\mathrm{y}^* = C_2$,代入差分方程可得：$C_2 = \frac{1\text{-k}}{k}\cdot A_0$

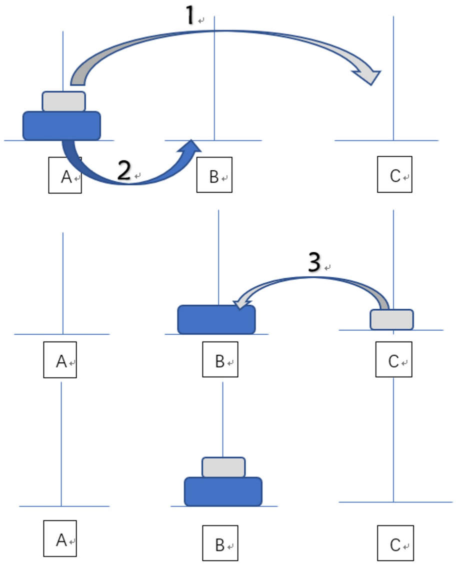
又 x(1) =$A_0 - \mathrm{k}\cdot A_0$,将此信息作为初值条件代入原方程可以求得$C_1 = \frac{k-1}{k}$

故差分方程最后的解为：x(n) = $\frac{k-1}{k}\cdot(1-k)^n + \frac{1\text{-k}}{k}\cdot A_0$

则其极限为$\lim_{n\to\infty} x(n) = \frac{1\text{-k}}{k}\cdot A_0$.

4.解：

以两个盘为例从一处移到另一处的过程如下：



由上图可知： x(2)=3;

对于更多的盘子如n个，可以将前n-1个小盘子视为一个整体，从而n个盘子视为由上面的小盘子集合与下面的大

盘子组合而成，则有：

$$x(n+1) = x(n) + 1 + x(n)$$

对应上图的步骤 1　　对应步骤 2　　对应步骤 3

故差分方程为 x(n+1) -2x(n) =1

对应齐次方程的通解为： $y = C_1 \cdot 2^n$

设特解为 $y^* = C_2$,代入原差分方程有可解得： $C_2 = -1.$

将初值条件x(2)=3 代入原差分方程可以得：$C_1 = 1$

从而解得该方程的解为： $x(n) = 2^n - 1.$