常微分方程

question

在第一次世界大战中，甲、乙两方战役的胜负，往往由双方兵力多少及战斗力强弱两个因素决定，其中，兵力因战斗及非战斗减员而减少，因增援而增加；战斗力与射击次数及命中率有关。请按照正规战争和游击战争两类情况，应用常微分方程进行建模，分析并预测战役结局。

模型一：正规战争模型

模型假设

（1）双方士兵公开活动。x 方士兵的战斗减员仅与 y 方士兵人数有关。记双方士兵人数分别为 $x(t), y(t)$，则 x 方士兵战斗减员率为 $ay(t)$，a 表示 y 方每个士兵的杀伤率。可知 $a = r_y p_y$，r_y 为 y 方士兵的射击率，p_y 每次射击的命中率。同理，用 b 表示 x 方士兵对 y 方士兵的杀伤率，即 $b = r_x p_x$
（2）双方的非战斗减员率仅与本方兵力成正比。减员率系数分别为 α, β
（3）设双方的兵力增援率为 $u(t), v(t)$

模型与求解

由假设可知

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay - \alpha x + u(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx - \beta y + v(t) \end{cases}$$

我们对此式中的一种理想情况进行求解，即双方没有增援和非战斗减员，则式子化简为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

记为（1）式，其中 x_0, y_0 为双方战斗前的兵力，由上式中前两个分式相除得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay}$$

分离变量并积分得

$$a(y^2 - y_0^2) = b(x^2 - x_0^2)$$

整理得

$$ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2$$

若令 $k = ay_0^2 - bx_0^2$，则有

$$ay^2 - bx^2 = k$$

当 $k = 0$，双方打成平局。当 $k > 0$，y 方获胜。当 $k < 0$，x 方获胜。这样，如果 y 方想要取得战斗胜利，就要使当 $k > 0$，即

$$ay_0^2 - bx_0^2 > 0$$

考虑到假设（1），上式可写为

$$(\frac{y_0}{x_0})^2 > (\frac{r_x}{r_y})(\frac{p_x}{p_y})$$

上式子是 y 方占优势的条件。若交战双方都训练有素，且都处于良好的作战状态。则 r_x 与 r_y， p_x 与 p_y相差不大，上式右边近似为1，左边表明，初始兵力比例被平方地放大了。即双方初始兵力之比 $\frac{y_0}{x_0}$，以平方的关系影响着战争的结局。比如说，如果 y 方的兵力增加到原来的2倍，x 方兵力不变，则影响着战争的结局的能力将增加4倍。此时，x 方要想与 y 方抗衡，须把其士兵的射击率 r_x 增加到原来的4倍(p_x, r_y, p_y 均不变)。

以上是研究双方兵力之间得变化关系，下面讨论每一方得兵力随时间的变化关系。对（1）式两边对 t 求导，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\frac{dy}{dt} = abx$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2} - abx = 0$$

初始条件为

$$x(0) = x_0, \frac{dx}{dt}|_{t=0} = -ay_0$$

解得

$$x(t) = x_0ch(\sqrt{ab}t) - \sqrt{\frac{a}{b}}y_0sh(\sqrt{ab}t)$$

同理求得 $y(t)$ 表达式

$$y(t) = y_0ch(\sqrt{ab}t) - \sqrt{\frac{a}{b}}x_0sh(\sqrt{ab}t)$$

模型二：游击战模型

模型假设

（1）y 方士兵看不见 x 方士兵，x 方士兵在某个面积为 S_x 的区域内活动。y 方士兵不是向 x 方士兵射击，而是向该区域射击。此时，x 方士兵的战斗减员不仅与 y 方兵力有关，而且随着 x 方兵力增加而增加。因为在一个有限区域内，士兵人数越多，被杀伤的可能性越大。可设，x 方的战斗减员率为 cxy，其中 c 为 y 方战斗效果系数，$c = r_yp_y = r_y\frac{S_{ry}}{S_x}$，其中 r_y 仍为射击率，命中率 p_y 为 y 方一次射击的有效面积 S_{ry}与 x 方活动面积 (S_x) 之比。
假设（1）（2）同模型一的假设（1）（2）。

模型与求解

由假设，可得方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -cxy - \alpha x + u(t) \\ \frac{dy}{dt} = -dxy - \beta y + v(t) \end{cases}$$

其中 $d = r_x p_x = r_x \frac{S_{rx}}{S_y}$ 是 x 方战斗效果系数。

同样为了容易求解做一些简化：设交战双方在作战中均无非战斗减员和增援，有

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -cxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -dxy \end{cases}$$

两式相除，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{c}$$

其解为

$$c(y - y_0) = d(x - x_0)$$

令 $l = cy_0 - dx_0$，上式可化为

$$cy - dx = l$$

当 $l = 0$，双方打成平局。当 $l > 0$，y 方获胜。当 $l < 0$，x 方获胜。这样，如果 y 方想要取得战斗胜利，就要使当 $l > 0$，即

$$(\frac{y_0}{x_0}) > \frac{d}{c} = \frac{r_x S_{rx} S_x}{r_y S_{ry} S_y}$$

即初始兵力之比 $\frac{y_0}{x_0}$ 以线性关系影响战斗得结局。当双方得射击率 r_x, r_y 与有效射击面积 S_{rx}, S_{ry} 一定时，增加活动面积 S_y 与增加初始兵力 y_0 起着同样作用。