1. 求证：$\boldsymbol{\frac{1^2}{1^2+1}+\frac{2^2}{2^2+1}+\ldots+\frac{n^2}{n^2+1}\leqslant\frac{n^2}{n+1}}$

证：$\because \frac{n^2}{n^2+1}=1-\frac{1}{1+n^2}$， $\frac{n^2}{n+1}=n-\frac{n}{n+1}$

$\therefore$ 只需证：$\left(1-\frac{1}{1^2+1}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2+1}\right)+\ldots+\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)\leqslant n-\frac{n}{n+1}$

即证：$\frac{n}{n+1}\leqslant\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}$

又 $\because \frac{1}{n^2+1}\geqslant\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore$ $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2+1}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\frac{n}{n+1}$

$\therefore$ $\frac{1^2}{1^2+1}+\frac{2^2}{2^2+1}+\ldots+\frac{n^2}{n^2+1}\leqslant\frac{n^2}{n+1}$

2. 正项数列$\boldsymbol{a_n}$，$\boldsymbol{a_n=\frac{n}{n^4+4}}$，求前$\boldsymbol{n}$ 项和$\boldsymbol{S_n}$

解：$\because a_n=\frac{n}{n^4+4}=\frac{n}{(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n-1)^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right]$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_n&=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-1)^2+1}-\frac{1}{(1+1)^2+1}+\frac{1}{(2-1)^2+1}-\frac{1}{(2+1)^2+1}\right.\\&\quad+\frac{1}{(3-1)^2+1}-\frac{1}{(3+1)^2+1}+\frac{1}{(n-2)^2+1}-\frac{1}{(n)^2+1}\\&\quad\left.+\frac{1}{(n-1)^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right]\\&=\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right]\\&=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{(n+1)^2+1}\right]\end{aligned}$$

3. 已知椭圆 C:$x^2+\frac{y^2}{e^2}=m(m>0,e\approx 2.718...)$ 与$f(x)=lnx$ 交于 A, B 两点, A 点横坐标为x_1, B 点横坐标为x_2, $x_1x_2<1$，求证：$x_1x_2<e^{-2}$

证：联立方程可得：$x_1^2+\frac{(lnx_1)^2}{e^2}=x_2^2+\frac{(lnx_2)^2}{e^2}=m$

$\therefore\quad x_1^2-x_2^2=\frac{(lnx_2-lnx_1)(lnx_2+lnx_1)}{e^2}=\frac{ln\frac{x_2}{x_1}lnx_1x_2}{e^2}$

$\therefore\quad lnx_1x_2=\frac{e^2\left(x_1^2-x_2^2\right)}{ln\frac{x_2}{x_1}}=\frac{e^2\left(x_1^2-x_2^2\right)}{x_1x_2ln\frac{x_2}{x_1}}x_1x_2=\frac{e^2\left(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)}{ln\frac{x_2}{x_1}}x_1x_2$

设 $x_2>x_1$，令 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$，则 $lnx_1x_2=\frac{e^2\left(\frac{1}{t}-t\right)}{lnt}x_1x_2$

令 $g(t)=2lnt-t+\frac{1}{t}$，$g^{'}(t)=\frac{-t^2+2t-1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$

$\therefore\quad g(t)<g(1)=0$，即 $2lnt<t-\frac{1}{t}$

$\therefore\quad lnx_1x_2=-2e^2x_1x_2\left(\frac{t-\frac{1}{t}}{2lnt}\right)<-2e^2x_1x_2$

$\therefore\quad lnx_1x_2+2e^2x_1x_2<0$

令 $p=x_1x_2<1$，$\varphi(p)=lnp+2e^2p$，$\varphi^{'}(p)=\frac{1}{p}+2e^2>0$

$\because\quad \varphi(p)<0=\varphi(e^{-2})$

$\therefore\quad p<e^{-2}$

$\therefore\quad x_1x_2<e^{-2}$

4.$\boldsymbol{f(x)=lnx+\tan x}$，求证：$\boldsymbol{f(x)+f^{'}(x)>\frac{7}{4}}$

证：$\because \quad f^{'}(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\cos^2 x}$

$\therefore \quad f(x)+f^{'}(x)=lnx+\tan x+\frac{1}{x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\left(lnx+\frac{1}{x}\right)+\left(\tan x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$

令 $g(x)=lnx+\frac{1}{x}$，则 $g^{'}(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$\therefore \quad g(x)$ 在 $(0,1]$ 上递减，$(1,+\infty)$ 上递增

$\therefore \quad g(x)\geqslant g(1)=1$

又 $\because \quad \tan x+\frac{1}{\cos^2 x}=\tan x+\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\left(\tan x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$

$\therefore \quad f(x)+f^{'}(x)>\frac{7}{4}$ （等号不同时成立）

5. 若$f(x)$ 满足当$x \geqslant 0$ 时，有$2f(x) \leqslant f(e^x-1)+f[ln(x+1)]$ 恒成立，则称$f(x)$ 为“凹凸函数”

(1) 求所有可称为凹凸函数的一次函数

(2) 证明：存在凹凸函数$g(x)$，使得$\varphi(x)=g^2(x)$ 也为凹凸函数

解：(1) 设 $f(x)=kx+b$，代入条件可得：

$$k\left(e^x+ln(x+1)-2x-1\right)\geqslant 0 \quad ①$$

令 $\tau(x)=e^x+ln(x+1)-2x-1$，则 $\tau^{'}(x)=e^x+\frac{1}{1+x}-2$，

$\tau^{''}(x)=e^x-\frac{1}{(1+x)^2}\geqslant e^0-\frac{1}{(1+0)^2}=0$

$\therefore \quad \tau^{'}(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增 $\qquad \therefore \quad \tau^{'}(x)\geqslant\tau^{'}(0)=0$

$\therefore \quad \tau(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增 $\qquad \therefore \quad \tau^{(}x)\geqslant\tau(0)=0$

$\therefore$ 当 $k>0$ 时，①式成立

(2) 下证 $g(x)=x$，$\varphi(x)=x^2$ 满足条件：

由 (1) 可知：$e^x+ln(x+1)-1\geqslant 2x$

由柯西不等式：$\left[(e^x-1)^2+(ln(x+1))^2\right]\left(1^2+1^2\right)\geqslant[e^x-1+ln(x+1)]^2$

$$\geqslant(2x)^2$$

$\therefore \quad (e^x-1)^2+[ln(x+1)]^2\geqslant 2x^2$

$\therefore \quad \varphi(e^x-1)+\varphi[ln(x+1)]\geqslant 2\varphi(x)$

$\therefore \quad \varphi(x)=x^2$ 也是凹凸函数

6.$f(x)=aln(x+1)-\sqrt{x}$

(1) 若$f(x)$ 在定义域内单调递减，求a 的范围

(2) 求证：$\frac{3}{2}lnn!<\sqrt{n^3}$

解：(1) $\because \quad f^{'}(x)=\frac{a}{x+1}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\leqslant 0$

$\therefore \quad a\leqslant\frac{x+1}{2\sqrt{x}}$

又 $\because \quad \frac{x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$

$\therefore \quad a\leqslant 1$

(2) 由 (1) 知，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在定义域内单调递减

$\therefore$ 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=ln(x+1)-\sqrt{x}\leqslant f(0)=0$

$\therefore$ 对 $\forall n\in N^{+}$，有 $lnn\leqslant\sqrt{n-1}$

$\therefore \quad lnn!=\sum_{i=1}^{n}lni\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i-1}=\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{i}$

$\because \quad \sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{i}=\left(\sqrt{1}\cdot 1+\sqrt{2}\cdot 1+...+\sqrt{n-1}\cdot 1\right)<\int_0^n\sqrt{x}\,dx$

$=\frac{2}{3}\sqrt{n^3}$

$\therefore \quad \frac{3}{2}lnn!<\sqrt{n^3}$

7. 已知$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}(x\geqslant 0)$，$g(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}(x\geqslant 0)$

(1) 求证：

① $f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

② $f(2x)=2f(x)g(x)$

(2)$\forall x,y,z\in[0,+\infty)$,有$\left[f(x)+f(y)+f(z)\right]\left[g(x)+g(y)+g(z)\right]\geqslant k(x+y+z)$ 恒成立，求k 的最大值

解：(1) 第①问直接计算就行，第②问令 $y=x$

(2)$\left[f(x)+f(y)+f(z)\right]\left[g(x)+g(y)+g(z)\right]$

$=f(x)g(x)+f(x)g(y)+f(x)g(z)+f(y)g(x)+f(y)g(y)+f(y)g(z)$

$\quad+f(z)g(x)+f(z)g(y)+f(z)g(z)$

$=\frac{1}{2}f(2x)+\frac{1}{2}f(2y)+\frac{1}{2}f(2z)+f(x+y)+f(x+z)+f(y+z)$

不等式转化为：

$\frac{1}{2}\left[f(2x)-\frac{2kx}{3}\right]+\frac{1}{2}\left[f(2y)-\frac{2ky}{3}\right]+\frac{1}{2}\left[f(2z)-\frac{2kz}{3}\right]+\left[f(x+y)-\frac{k(x+y)}{3}\right]+\left[f(x+z)-\frac{k(x+z)}{3}\right]+\left[f(y+z)-\frac{k(y+z)}{3}\right]\geqslant 0$

$\therefore$ 只需满足：$f(x)-\frac{kx}{3}\geqslant 0$，即 $\frac{e^{x}-e^{-x}-\frac{2kx}{3}}{2}\geqslant 0$ 即可

令 $\varphi(x)=e^{x}-e^{-x}-\frac{2kx}{3}$，$\varphi^{'}(x)=e^{x}+e^{-x}-\frac{2k}{3}$

$\because$ $\varphi(0)=0$，且 $\varphi^{'}(x)$ 递增 $\quad\therefore$ 只需满足 $\varphi^{'}(0)\geqslant 0$

$\therefore$ $\varphi^{'}(0)=2-\frac{2k}{3}\geqslant 0$

$\therefore$ k 的最大值为 3