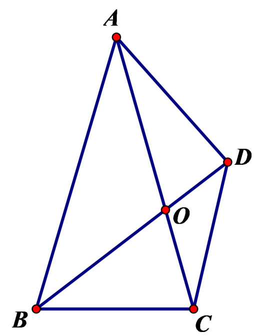
1. 如图，在四边形 ABCD 中，AC 与 BD 交于点 O，AB=AC，AD=CD，∠ACB=2∠ACD，OA：OC=3：2，求$\frac{OB}{OD}$ 的值



解：设 AB=$5x$，OA=$3x$，OC=$2x$，OD=y，OB=ky，BD=$(k+1)y$

∵ ∠ADC=180°-∠ACD-∠CAD=180°-2∠ACD，∠ABC=∠ACB=2∠ACD

∴ ABCD 四点共圆

∴ ∠OCD=∠CAD=∠CBD

∴ △BDC∼△CDO

∴ $\frac{BD}{CD}=\frac{CD}{OD}$，$\frac{BC}{CO}=\frac{BD}{CD}$

∴ CD=$\sqrt{k+1}y$，BC=$2\sqrt{k+1}x$

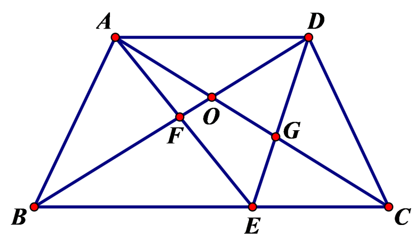
又∵ 由托勒密定理：AB·CD+AD·BC=AC·BD，且 AB=AC，AD=CD

∴ $5x\cdot\sqrt{k+1}y+2\sqrt{k+1}x\cdot\sqrt{k+1}y=5x\cdot(k+1)y$

∴ 解得：$k=\frac{16}{9}$

∴ $\frac{OB}{OD}=\frac{16}{9}$

2. 如图，在等腰梯形 ABCD 中，AD//BC，AB=AD=CD，E 是 BC 上一点，且∠ABE=∠AED，连接 AC、BD 交于点 O，AC 交 DE 于点 G，BD 交 AE 于点 F，求证：$\frac{AE}{AG}=\frac{DE}{DF}$



证：在 AE 上取一点 H，使得 DF=DH

$\because$ AD//BC，AD=CD=AB

$\therefore$ ∠BCA=∠DBC=∠ABD=∠ACD=∠ADB=∠DAC

$\therefore$ ∠DOG=∠OAD+∠ODA=∠ABD+∠DBC=∠ABC=∠AED

$\therefore$ OFEG 四点共圆

$\therefore$ ∠DFH+∠AGE=180°

又 $\because$ DF=DH

$\therefore$ ∠DFH=∠DHF

又 $\because$ ∠DHF+∠DHE=180°

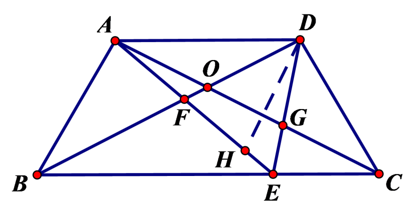
$\therefore$ ∠DHE=∠AGE

又 $\because$ ∠DEH=∠AEG

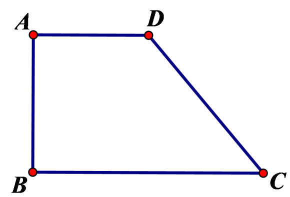
$\therefore$ △DEH ∼ △AEG

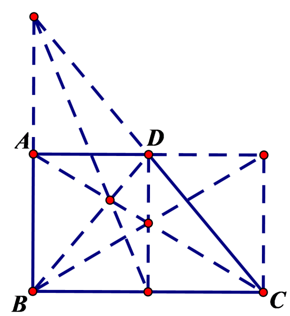
$\therefore$ $\frac{AE}{AG}=\frac{DE}{DH}$

$\therefore$ $\frac{AE}{AG}=\frac{DE}{DF}$



3. 如图，∠A=∠B=90°，BC=2AD，用无刻度的直尺将 ABCD 补全成一个矩形

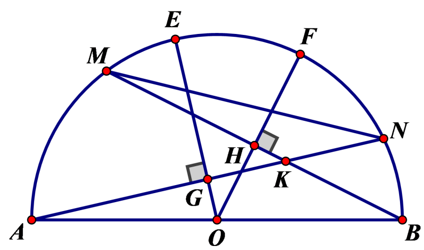




4. 如图，在半圆中，O 是圆心，AB 是直径，E、F 是$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上的动点，连接 OE、OF，$\angle$EOF 始终保持α 不变，作 AG$\perp$OE，垂足为 G，延长 AG 交半圆于 N，作 BH$\perp$OF，垂足为 H，延长 BH 交半圆于 M，BM 与 AN 交于点 K，连接 MN(初中)

(1) 在 E、F 运动过程中，MN 的长度是否为定值？若是，探求 MN 与 AB 的数量关系 (用含α 的三角函数表示)；若不是，请说明理由

(2) 若$\sin = \frac{\sqrt{7}}{3}$，OA=4，求$S_{\triangle \mathrm{MKN}}$ 的最大值



解：(1) 是定值

$\because$ AN$\perp$OE，BM$\perp$OF

$\therefore$ $\overset{\frown}{\mathrm{BF}} = \overset{\frown}{\mathrm{MF}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{AE}} = \overset{\frown}{\mathrm{NE}}$

又$\because$ $\overset{\frown}{\mathrm{AE}} + \overset{\frown}{\mathrm{BF}} + \overset{\frown}{\mathrm{EF}} = \overset{\frown}{\mathrm{AB}}$

$\therefore$ $\overset{\frown}{\mathrm{MN}} = \overset{\frown}{\mathrm{AN}} + \overset{\frown}{\mathrm{BM}} - \overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 2\left(\overset{\frown}{\mathrm{AE}} + \overset{\frown}{\mathrm{BF}}\right) - \overset{\frown}{\mathrm{AB}}$

$= 2\left(\overset{\frown}{\mathrm{AB}} - \overset{\frown}{\mathrm{EF}}\right) - \overset{\frown}{\mathrm{AB}}$

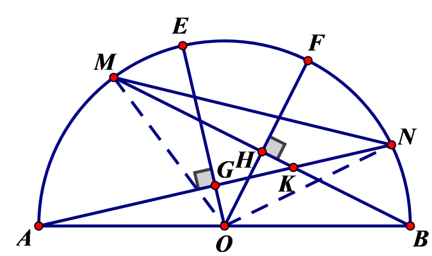
$= \overset{\frown}{\mathrm{AB}} - 2\overset{\frown}{\mathrm{EF}}$

$\therefore$ $\angle$MON=$2(180^\circ - \alpha) - 180^\circ$

$= 180^\circ - 2\alpha$

$\therefore$ $\angle$OMN=$\angle$ONM=α

$\therefore$ MN=$2R\cos\alpha$=AB$\cos\alpha$



(2) $\because$ $\angle$KMN=$\angle$KAB，$\angle$KNM=$\angle$KBA

$\therefore$ $\triangle$KMN$\sim\triangle$KAB

$\therefore$ $\frac{S_{\triangle \mathrm{KMN}}}{S_{\triangle \mathrm{KAB}}} = \left(\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AB}}\right)^2 = (\cos\alpha)^2 = 1 - \sin^2\alpha = \frac{2}{9}$

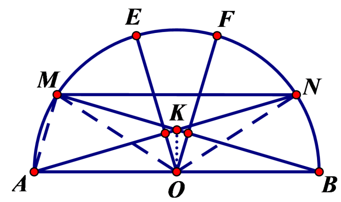
又$\because$ 同 (1) 中推导可以得到：$\angle$AKB=$180^\circ - \alpha$

$\therefore$ $\angle$AKB 为定值，K 点在定弧上运动，当 K 到达弧顶时，即 OK$\perp$AB 时，$S_{\triangle \mathrm{KAB}}$ 最大

$\because$ $\angle$AMK=$\angle$AOK=90°

$\therefore$ AOKM 四点共圆

$\therefore$ BK$\cdot$BM=BO$\cdot$BA=32



又$\because$ $\frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{BK}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AB}} = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ BK$\cdot$BM=BK(BK + MK)=$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\mathrm{BK}^2 = 32$

$\therefore$ $\mathrm{BK}^2 = \frac{32}{1+\frac{\sqrt{2}}{3}}$

又$\because$ $\angle$MKA=$180^\circ - \angle$AKB=α

$\therefore$ MA=AK$\sin\alpha$=BK$\sin\alpha$=$\frac{\sqrt{7}}{3}$BK

$\therefore$ $S_{\triangle \mathrm{KAB}} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{MA}\cdot \mathrm{BK} = \frac{\sqrt{7}}{6}\mathrm{BK}^2 = \frac{48\sqrt{7}-16\sqrt{14}}{7}$

$\therefore$ $S_{\triangle \mathrm{MKN}} = \frac{2}{9}S_{\triangle \mathrm{KAB}} = \frac{96\sqrt{7}-32\sqrt{14}}{63}$，当 OK$\perp$AB 时取最大值

(注：初中没学过二倍角公式)