

所属类别	2022 年“华数杯”全国大学生数学建模竞赛	参赛编号
本科生		CM2204233

基于回归拟合的插层熔喷非织造材料参数分析与优化

摘要

本文利用回归拟合研究了插层熔喷非织造材料制作过程中各参数之间的关系，分析了产品性能的影响因素，并且建立了优化模型对产品性能指标进行了优化。

针对问题一，我们首先通过对数据进行可视化，观察插层前后结构参数和产品性能的变化规律，得出结论：插层后厚度、孔隙率、过滤效率、透气性均比插层前增大，过滤阻力比插层前减小，压缩回弹性率也比插层前总体上有所提高。同时为了进一步分析插层率的影响，我们使用了**方差分析**模型，在工艺参数改变的情况下得出结论：插层率对所有结构变量、产品性能指标都具有显著的独立影响性。

针对问题二，我们首先利用**皮尔逊系数**对工艺参数和结构变量之间的相关性进行分析，发现厚度和孔隙率之间有很强的相关性。然后，结合数据的可视化发现**二次回归**对于结构变量和工艺参数之间的关系有很好的拟合效果，厚度、孔隙率、压缩回弹性率的拟合优度 R^2 分别为 **0.9998,0.9996,0.9646**，模型如式 (6)(11)(13) 所示。最后，我们利用这些关系对结构参数进行了预测，如表 2 所示，其中接收距离，热风速度组合为 (38,1250),(23,850) 对应的厚度、孔隙率、压缩回弹性率组合为 (3.389,96.687,83.811),(1.949,94.629,87.470)。

针对问题三，由于需要寻找多个变量之间的关系，很难进行数据可视化，且直接使用线性回归和二次回归效果较差，我们建立了**变换组合回归模型**，考虑了更多变量组合，拟合效果有较大提升。对于结构变量间的关系，我们利用问题二中的方程，以工艺参数为中间变量，找到了结构变量之间的关系；对于产品性能之间的关系、过滤阻力与结构变量的关系、过滤效率与结构变量的关系，我们利用构建的模型进行拟合，拟合优度 R^2 分别为 **0.907,0.734,0.760**，模型如式 (19)(21)(23) 所示。最后，我们建立了过滤效率的优化模型，并使用**模拟退火**算法进行优化，得到当接收距离 $d = 10.9976\text{cm}$ ，热风速度 $v = 771.8869\text{r/min}$ 时，过滤效率 η 达到 **94.34%**。

针对问题四，我们建立了多目标优化模型，并且利用软约束的条件，将目标约束中的正负偏差变量等式转变为目标函数中的**惩罚函数**，利用模拟退火算法求解得到满意解时，接收距离 $d = 11.568\text{cm}$ ，热风速度 $v = 820.824\text{r/min}$ ，厚度 $\delta = 1.584\text{mm}$ ，压缩回弹性率 $\beta = 82.057\%$ ，过滤阻力 $f = 12.388\text{Pa}$ ，过滤效率 $\eta = 84.208\%$ 。

关键词：方差分析 皮尔逊系数 二次回归 变换组合回归模型 模拟退火算法 惩罚函数

目录

1	问题重述	1
1.1	问题背景	1
1.2	问题要求	1
2	模型假设	1
3	符号说明	2
4	模型建立和求解	2
4.1	问题一模型建立和求解	2
4.1.1	数据可视化	2
4.1.2	模型建立	3
4.1.3	模型求解	4
4.2	问题二模型建立和求解	5
4.2.1	相关性分析	5
4.2.2	厚度与工艺参数的关系	5
4.2.3	孔隙率与工艺参数的关系	7
4.2.4	压缩回弹性率与工艺参数的关系	7
4.2.5	结构参数预测	8
4.3	问题三模型建立和求解	9
4.3.1	变换组合回归模型	10
4.3.2	结构变量之间的关系	11
4.3.3	产品性能之间的关系	11
4.3.4	结构变量与产品性能的关系	11
4.3.5	过滤效率优化	12
4.4	问题四模型建立和求解	14
4.4.1	模型建立	14
4.4.2	模型求解	15
5	模型评价	16
5.1	模型的优点	16
5.2	模型的缺点	16

1 问题重述

1.1 问题背景

融喷纺织材料是口罩生产的重要材料，具有良好的过滤效率，在生产中使用插层熔喷法，可以提高制备的融喷纺织材料的产品性能，融喷纺织工艺是使用高速热空气对喷丝孔挤出的聚合物融体细流进行拉伸，形成的超细纤维被收集后可以被制备为融喷纺织布。

在插层熔喷法中的各种参数会对产品效果产生影响，如热风速度，接受距离，插层率等。同时结构变量产品性能之间存在相互影响，通过合理地设置参数可以提高产品的性能，求解出最佳的工艺参数。

1.2 问题要求

问题 1：第一问要求我们研究插层后结构变量、产品性能的变化规律，并分析插层率对于这些变化的影响。

问题 2：第二问要求在插层率恒定的条件下研究工艺参数与结构变量之间的关系，并利用这些关系预测八组厚度，孔隙率和压缩回弹率。

问题 3：第三问要求在插层率恒定的条件下研究结构变量与产品性能的关系，以及结构变量之间、产品性能之间的关系。并且结合第二问，找到合适的工艺参数，使产品的过滤效率达到最高。

问题 4：第四问要求在考虑各工艺参数，结构变量等边界条件的前提下，找到合适工艺参数，使得过滤效率尽量的高的同时过滤阻力尽量的小。

2 模型假设

- 假设 1：插层熔喷非织造材料的结构变量只与接收距离，热风速度这两个工艺参数有关，不考虑其他因素的影响。
- 假设 2：产品性能只与厚度，孔隙率，压缩回弹率这三个结构变量有关，不考虑其他因素的影响。
- 假设 3：产品生产过程中的工艺参数在一定范围内连续可调。
- 假设 4：过滤效率，过滤压力等测试量都为理想仪器测量，没有较大的系统性偏差。
- 假设 5：各待研究量之间的关系可以用初等函数及其组合表示。

3 符号说明

符号	说明	单位
d	接收距离	cm
v	热风速度	r/min
δ	厚度	mm
α	孔隙率	%
β	压缩回弹率	%
f	过滤压力	Pa
η	过滤效率	%
γ	透气性	mm/s
λ	过滤系数	
ρ	空气中待过率物密度	
S_T	计算总平方和	
S_E	组内平方和	
S_A	组间平方和	

未说明的符号在文中使用处进行单独说明。

4 模型建立和求解

4.1 问题一模型建立和求解

4.1.1 数据可视化

在 data1 文件中数据是以不同组别、是否插层作为自变量，进行实验得到因变量结构参数和产品性能，其中不同组别的区别在于接收距离和热风速度，具体数值如 data2 所示。为了更直观地反映因变量随自变量的变化情况，对数据进行可视化如图 1 所示

从图中可以看出插层后结构变量、产品性能的变化规律。插层后厚度、孔隙率、过滤效率、透气性均比插层前增大，过滤阻力比插层前减小了；除个别点外，插层后压缩回弹性率也比插层前有所提高。因此，我们可以判断插层前后结构参数和产品性能总体上有所优化和提升，说明插层工艺是有效的。

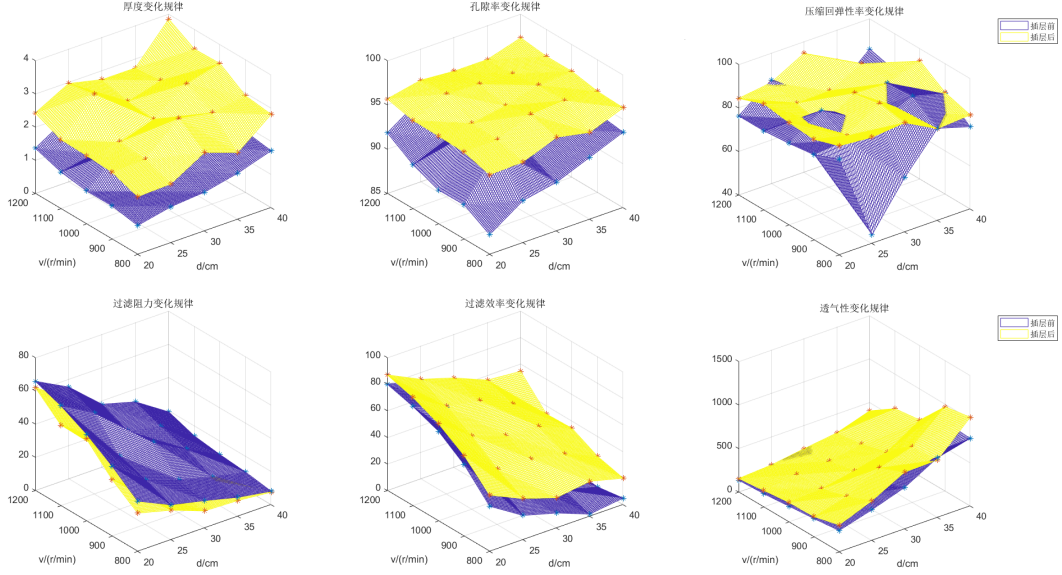


图 1: 插层前后结构参数和产品性能的变化规律

4.1.2 模型建立

方差分析常用于检验某个自变量对因变量的改变是否有影响，通过试验验证影响是由某个自变量造成的，而不是受到随机因素干扰。为了进一步确定插层率对结构变量、产品性能的影响，我们使用方差分析来判断自变量对因变量的影响是否显著。

4.1.2.1 单因素方差分析

对单因素 r 水平的试验，在第 i 个水平下重复试验 n_i 次，共试验 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ 次，第 i 组试验结果 Y_{i1}, \dots, Y_{in_i} 为来自正态总体 $N(\mu_i, \sigma^2)$ 的样本，样本均值和样本方差可由极大似然估计得到：

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_i &= \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \bar{Y}_i \\ \hat{\sigma}^2 &= \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2\end{aligned}\tag{1}$$

则方差分析步骤如下 [3]:

Step1: 我们关心因素取不同水平时试验的数学期望是否明显不同，因此建立假设：

$$H_0: \mu_1 = \dots = \mu_r, H_1: \mu_i \text{ 不全相同}\tag{2}$$

Step2: 计算总平方和 S_T , 组内平方和 S_E , 组间平方和 S_A 如下:

$$\begin{aligned} S_T &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y})^2 \\ S_E &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \\ S_A &= \sum_{i=1}^r n_i (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \end{aligned} \quad (3)$$

由假设 H_0 可导出 S_A/S_E 的分布为:

$$F = \frac{S_A/(r-1)}{S_E/(n-r)} = \frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E} \sim F(r-1, n-r) \quad (4)$$

Step3: 计算 F 值, 对于给定的显著水平 α , 可以得到 H_0 的拒绝域为 $F > F_\alpha(r-1, n-r)$

4.1.2.2 多因素方差分析

要检验多个自变量对试验结果影响的显著性, 需要对多个自变量进行组合试验, 在单因素方差分析的原理基础之上, 考虑组合效应对因变量的影响, 常见的组合效应为: 二阶交互作用、三阶交互作用。

4.1.3 模型求解

由于自变量不仅包含插层率, 还包含结构变量和产品性能, 因此我们不能直接抛开结构变量和产品性能去分析插层率的影响。因此, 我们选用三因素方差分析模型, 考虑二阶交互作用, 利用 SPSSPRO 软件进行求解, 求解结果如下表所示:

$F(p)$ \ 自变量	接收距离	热风速度	插层率
因变量			
厚度	22.124(0.000***)	9.534(0.000***)	224.039(0.000***)
孔隙率	26.012(0.000***)	10.821(0.000***)	255.15(0.000***)
压缩回弹性率	0.533(0.714)	1.227(0.338)	10.116(0.006***)
过滤阻力	398.151(0.000***)	186.084(0.000***)	85.177(0.000***)
过滤效率	142.827(0.000***)	126.457(0.000***)	128.192(0.000***)
透气性	218.35(0.000***)	129.326(0.000***)	48.756(0.000***)

表 1: 三因素方差分析结果

表中只记录了三种因素单独作用的结果，因为我们关心的对象是插层率单独作用的影响。括号前数据为 F 检验对应的 F 值，括号内的数字为接受原假设的概率 p ，星号数量表示显著程度， $p < 0.1, 0.05, 0.01$ 分别用一个、两个、三个星号表示。可以发现插层率对于所有的结构参数和产品性能参数都具有显著的影响。

4.2 问题二模型建立和求解

4.2.1 相关性分析

4.2.2 厚度与工艺参数的关系

4.2.2.1 模型建立

由插层熔喷气流场模拟实验的过程可以知道，接受距离越大，纤维越容易在下落的过程中冷却、黏合，从而使得接收得到的纤维厚度更大；同时，热风速度越大，插层出风口的风速越大，在一定距离内插层纤维流更加稳定，使得插层纤维能够与下落的熔喷纤维流混合得更充分，从而使得接收到的纤维厚度更大。因此，我们可以认为厚度与接收距离、热风速度具有正相关性。

同时，我们观察接收距离、热风速度等距变化对厚度的影响。在接收距离由 40cm 到 20cm 以 5cm 的距离减小时，保持热风速度不变，发现厚度的减小量并不均匀；同理，热风速度从 800r/min 到 1200r/min 以 100r/min 的距离增加时，厚度的增加量也不均匀，因此我们考虑厚度与这两个变量成二次关系。

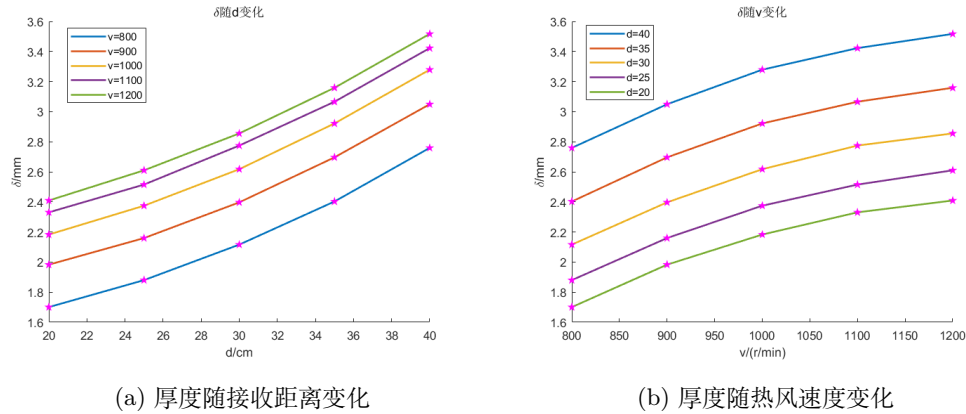


图 2: 厚度受其中一个工艺参数的影响

我们使用多元二次回归模型来拟合厚度与接收距离、热风速度的关系，多元二次回归模型如下所示：

$$\delta = p_0 + p_1 \cdot d + p_2 \cdot v + p_3 \cdot d \cdot v + p_4 \cdot d^2 + p_5 \cdot v^2 \quad (5)$$

其中 $p_i (i = 0, 1, \dots, 5)$ 均为拟合参数, d 为接收距离, v 为热风速度, δ 为厚度。

4.2.2.2 模型求解

基于上述模型, 使用 Matlab 中的 cftool 工具箱对数据进行拟合 (之后的拟合使用同样的方法), 所得结果为:

$$\delta = -2.979 - 0.01928d + 0.008305v + 0.00112d^2 + 6.253 \times 10^{-6}d \cdot v - 3.325 \times 10^{-6}v^2 \quad (6)$$

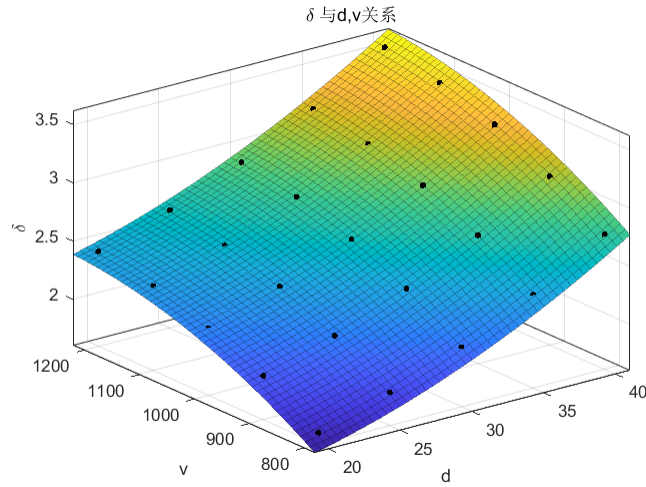


图 3: 厚度与工艺参数的关系

拟合优度 $R^2 = 0.9998$, 因此拟合效果较好。分别计算 δ 关于 d, v 的偏导数如下所示:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial d} &= 0.00224d + 6.253 \times 10^{-6}v - 0.01928 \\ \frac{\partial \delta}{\partial v} &= -6.65 \times 10^{-6}v + 6.253 \times 10^{-6}d + 0.008305 \end{aligned} \quad (7)$$

可以发现 δ 关于 d 的偏导数随 d 的增大而增大, 关于 v 的偏导数随 v 的增大而减小, 这和图 2 的趋势一致。

4.2.3 孔隙率与工艺参数的关系

4.2.3.1 模型建立

查阅文献发现，非织造多孔材料的孔隙率与其厚度有着密切关系，具体关系如下所示 [1]：

$$\alpha = \left(1 - \frac{m_0}{\rho\delta}\right) \times 100\% \quad (8)$$

其中 α 为孔隙率， m_0 为单位面积质量， ρ 为纤维密度。我们已经得到了 δ 的表达式，而 m_0, ρ 均为纤维的物质属性参数，受到插层熔喷气流场模拟实验中的工艺参数影响。因此，我们考虑建立孔隙率、厚度乘积与工艺参数关系。由于 $\alpha \cdot \delta = (\delta - \frac{m_0}{\rho}) \times 100\%$ ，等号右侧包含 δ ，因此我们仍然建立二次回归模型：

$$\alpha \cdot \delta = p_0 + p_1 \cdot d + p_2 \cdot v + p_3 \cdot d \cdot v + p_4 \cdot d^2 + p_5 \cdot v^2 \quad (9)$$

4.2.3.2 模型求解 基于上述模型进行拟合，得到结果如下：

$$\alpha \cdot \delta = -320 - 1.501d + 0.8425v + 0.1076d^2 + 4.556 \times 10^{-4}d \cdot v - 3.363 \times 10^{-4}v^2 \quad (10)$$

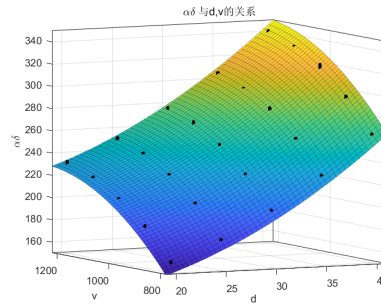


图 4: 孔隙率、厚度乘积与工艺参数的关系

拟合优度 $R^2 = 0.9996$ ，说明拟合效果较好。得到孔隙率和厚度乘积后，可以通过式 (6) 求出孔隙率的方程：

$$\alpha = \frac{-320 - 1.501d + 0.8425v + 0.1076d^2 + 4.556 \times 10^{-4}d \cdot v - 3.363 \times 10^{-4}v^2}{-2.979 - 0.01928d + 0.008305v + 0.00112d^2 + 6.253 \times 10^{-6}d \cdot v - 3.325 \times 10^{-6}v^2} \quad (11)$$

4.2.4 压缩回弹性率与工艺参数的关系

4.2.4.1 模型建立

在插层熔喷气流场模拟实验中，接收距离和热风速度组合在一定范围内可以使压缩回弹率保

持在较高范围。当接收距离太小，热气流冷却和扩散不充分，导致纤维蓬松度降低，弹性降低；接收距离增大时，纤维纤度增大，纤维纤度过大也会降低弹性。热风速度增大会导致热黏合效果增大，蓬松度降低，弹性降低；热风速度太小也会使得纤维纤度过大，弹性下降 [2]。因此，接收距离太大或太小，热风速度太大或太小，都会使得压缩回弹性率降低，压缩回弹性率与工艺参数的函数关系应当形如二次函数。因此，二次回归模型依然适合这种情况：

$$\beta = p_0 + p_1 \cdot d + p_2 \cdot v + p_3 \cdot d \cdot v + p_4 \cdot d^2 + p_5 \cdot v^2 \quad (12)$$

4.2.4.2 模型求解

基于上述模型进行拟合，得到结果如下：

$$\beta = 43.96 + 1.154d + 0.0588v - 0.02072d^2 + 2.066 \times 10^{-5}d \cdot v - 3.108 \times 10^{-5}v^2 \quad (13)$$

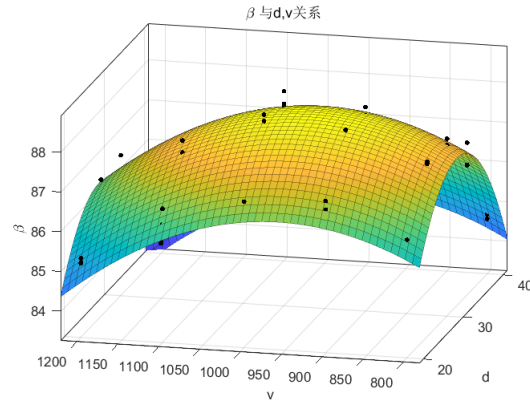


图 5: 压缩回弹性率与工艺参数的关系

拟合优度 $R^2 = 0.9646$ ，拟合效果较好。

4.2.5 结构参数预测

结构参数与工艺参数之间的关系如式 (6)(11)(13) 所示，基于所建立的模型对问题二所给的工艺参数组合对结构参数进行预测，结果如下表所示：

接收距离 (cm)	热风速度 (r/min)	厚度 (mm)	孔隙率 (%)	压缩回弹性率 (%)
38	850	2.765	96.291	86.084
33	950	2.689	96.226	87.936
28	1150	2.714	96.211	87.210
23	1250	2.536	95.890	85.073
38	1250	3.389	96.687	83.811
33	1150	2.995	96.506	86.779
28	950	2.414	95.802	88.387
23	850	1.949	94.629	87.470

表 2: 问题二的结果

4.3 问题三模型建立和求解

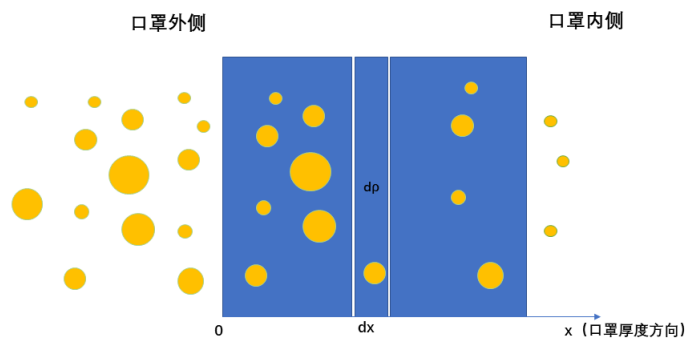


图 6: 物理模型示意图

可以建立口罩过滤空气的物理模型，以口罩最外侧为坐标原点向口罩内侧作 x 轴，设在 dx 范围内的过滤掉空气中的待过滤物 $d\rho$ ，可以得到下式

$$d\rho(x) = -\lambda\rho dx \quad (14)$$

对两边积分可得

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-\lambda x} \quad (15)$$

其中 λ 为口罩的过滤能力，与口罩中纤维直径有关，由口罩的制作工艺可以知道其与口罩的厚度和孔隙率均有关系，过滤效率可以表示为

$$\eta = \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\lambda x} \quad (16)$$

故可以看出过滤效率和厚度关系密切三个结构变量和三个产品性能指标之间的关系很难做可视化，通过做部分变量间的可视化以及直接进行线性、二次回归后，发现关系复杂，不能简单考虑。因此我们建立了变换组合回归模型，拟合效果相比直接回归有较大提升。

4.3.1 变换组合回归模型

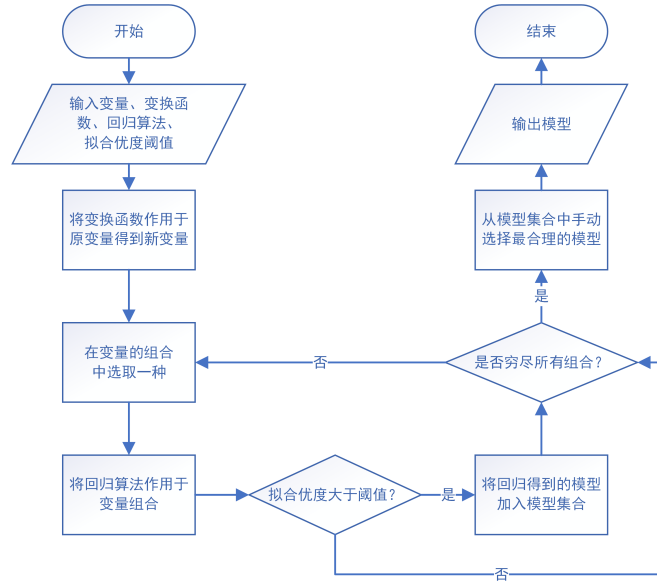


图 7: 变换组合回归算法流程

- **变换**: 通过对原始变量进行变换得到新的变量，增加可选的拟合情况。变换方式包括：取指数、取对数、取三角函数、取倒数等。
- **组合**: 将变换得到的新变量进行组合，包括乘积、求和操作。由于变换过程包括取倒数，变量系数可以为负，其实也涵盖了除法和减法操作。

- **回归：**选用合适的回归模型，对组合情况进行回归拟合，得到因变量和自变量的关系。

具体算法流程如图 7 所示，算法中手动选择模型部分主要依据可视化、其他回归算法尝试的经验以及基本常识，比如三个变量均为三角函数变换显然是不合理的，因为因变量不可能为一个周期性非常强的函数。

4.3.2 结构变量之间的关系

在问题二中，我们已经求解出了结构变量与工艺参数之间的关系，可表示为：

$$\begin{aligned}\delta &= \phi_1(d, v) \\ \alpha &= \phi_2(d, v) \\ \beta &= \phi_3(d, v)\end{aligned}\tag{17}$$

其中 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 如式 (6)(11)(13) 所示。由于二元方程可由包含两个方程的方程组求解得到，因此选择式 (17) 中两个方程，解出 d, v 与结构变量中的两个量的关系（不妨设 δ, α ），即 $d = \varphi_1(\delta, \alpha), v = \varphi_2(\delta, \alpha)$ 。同理可得 $d = \psi_1(\alpha, \beta), v = \psi_2(\alpha, \beta)$ ，于是结构变量之间的关系可表示如下：

$$\begin{aligned}\varphi_1(\delta, \alpha) &= \psi_1(\alpha, \beta) \\ \varphi_2(\delta, \alpha) &= \psi_2(\alpha, \beta)\end{aligned}\tag{18}$$

4.3.3 产品性能之间的关系

利用上述建立的模型，将过滤阻力 f ，过滤效率 η ，透气性 γ 输入模型，回归算法选用二次回归，得到结果如下所示：

$$\gamma = \frac{1}{-3.862 \times 10^{-6} f^2 + 4.438 \times 10^{-6} \eta^2 - 4.660 \times 10^{-6} f \eta + 5.430 \times 10^{-4} f - 3.757 \times 10^{-4} \eta}\tag{19}$$

拟合优度 $R^2 = 0.907$ ，拟合效果较好。该方程可以反映产品性能之间的关系，知二可求一。

4.3.4 结构变量与产品性能的关系

4.3.4.1 过滤阻力与结构变量的关系

查阅文献发现 [4]，过滤阻力一般不超过 49Pa，同时过滤阻力又大于 0，因此首先用 Softmax 进行标准化：

$$f = \frac{49}{1 + e^{-z}}\tag{20}$$

其中 z 为中间变量。然后使用变换组合回归模型，回归算法选用二次回归，整理后结果如下：

$$f = \frac{49}{1 + e^{-z}}$$

$$z = -290.96 + 78.636 \frac{1}{\ln \delta} + 27.273 \sin \alpha + 41300 \frac{1}{\beta} - 2.9333 \frac{\sin \alpha}{\ln \delta} - 5541.1 \frac{1}{\beta \ln \delta} \quad (21)$$

$$-2059.2 \frac{\sin \alpha}{\beta} - 4.9804 \left(\frac{1}{\ln \delta} \right)^2 - 0.2344 (\sin \alpha)^2 - 1.467 \times 10^6 \left(\frac{1}{\beta} \right)$$

拟合优度 $R^2 = 0.734$ ，拟合效果较好。

4.3.4.2 过滤效率与结构变量的关系

首先考虑过滤效率的范围为 (0,1)，因此使用缩放后的 Softmax 函数对其进行标准化，即：

$$\eta = \frac{100}{1 + e^{-z}} \quad (22)$$

z 为中间变量。然后使用变换组合回归模型去拟合 z ，回归算法为二次回归，整理后结果如下：

$$\eta = \frac{100}{1 + e^{-z}}$$

$$z = 0.3283 + 4.062 \cos \delta - 1.268 \sin \alpha + 1.669 \cos \beta - 2.406 \cos \delta \sin \alpha + 2.529 \cos \delta \cos \beta \quad (23)$$

$$+ 0.9806 \sin \alpha \cos \beta + 3.4727 (\cos \delta)^2 - 0.3506 (\sin \alpha)^2 - 0.1301 (\cos \beta)^2$$

拟合优度为 $R^2 = 0.760$ ，拟合效果较好。

4.3.4.3 透气性与结构变量的关系

过滤阻力和过滤效率与结构变量的关系已经得到，于是由式 (19) 可以得到透气性与结构变量的关系。

4.3.5 过滤效率优化

4.3.5.1 模型建立

我们已经得到过滤效率和结构变量的关系、结构变量和工艺参数的关系，利用这些关系可以将过滤效率表达为工艺参数的函数。

决策变量： 工艺参数 d, v

目标函数： $\max \eta$

约束条件： 式 (23)(6)(11)(13)

综上，优化模型为：

$$\begin{aligned} \max \quad & \eta = g_1(\delta, \alpha, \beta) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \delta = g_2(d, v) \\ \alpha = g_3(d, v) \\ \beta = g_4(d, v) \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

其中 g_1, g_2, g_3, g_4 分别如式 (23)(6)(11)(13) 所示。

求解函数极值使用模拟退火算法。模拟退火算法是一种启发式算法，能够快速找到极值，并且具有跳出局部最优解的能力，算法流程如下：

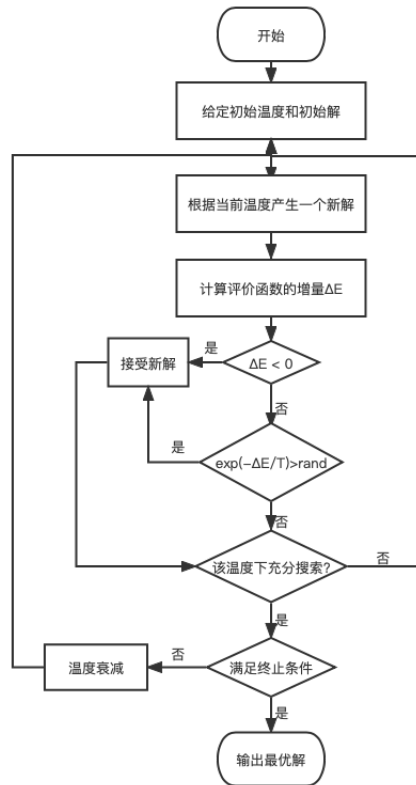


图 8: 模拟退火算法流程图

4.3.5.2 模型求解

使用模拟退火算法对模型进行求解，得到当 $d = 10.9976\text{cm}$, $v = 771.8869\text{r/min}$ 时，过滤效

率 $\eta = \frac{1}{0.0106} = 94.34\%$ 。

best_d	10.9976
best_func	0.0106
best_v	771.8869

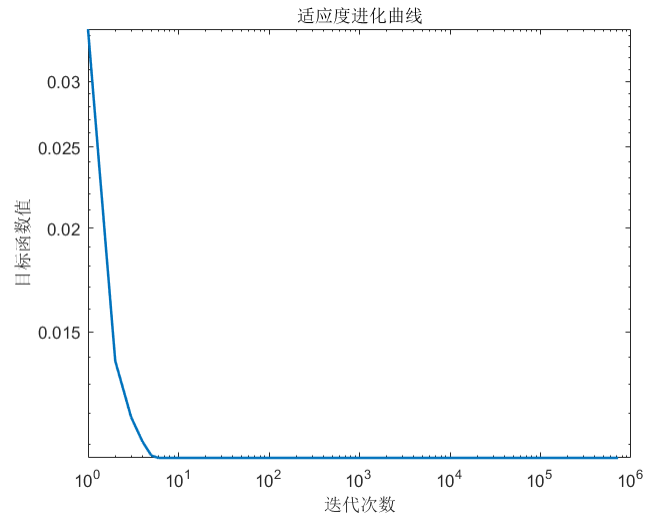


图 9: 模拟退火求解结果

4.4 问题四模型建立和求解

该问为多目标优化问题，需要在约束条件下追求过滤效率高且过滤阻力小的目标。

4.4.1 模型建立

由于目标有两个，故使用一个权重 ω 来调整目标，同时将目标约束转化成带有正负偏差变量 $d_i^+, d_i^- (i = 1, 2, 3, 4)$ 的等式约束，并对偏差变量分别赋予权重 $P_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 。

决策变量： 工艺参数 d, v ，正负偏差变量 $d_i^+, d_i^- (i = 1, 2, 3, 4)$

目标函数： $\min f - \omega\eta + P_1d_1^+ + P_2d_2^+ + P_3d_3^+ + P_4d_4^-$

约束条件：

(1) 接收距离、热风速度、厚度、压缩回弹性率目标约束

$$\begin{aligned}
d + d_1^- - d_1^+ &= 100 \\
v + d_2^- - d_2^+ &= 2000 \\
\delta + d_3^- - d_3^+ &= 3 \\
\beta + d_4^- - d_4^+ &= 85
\end{aligned} \tag{25}$$

(2) 等式约束：式 (23)(6)(11)(13)(21)

考虑到题中所要求的“尽可能”，决策变量的约束应该为“软约束”，因此可将约束条件转化为目标函数中的惩罚项。同时考虑到原数据 data3 中已有变量组合使得 $f < 30\text{Pa}$, $\eta > 80\%$ ，因此建立惩罚项来缩小范围。综上，模型如下：

$$\begin{aligned}
\min &= f - \omega\eta + \zeta_1 ReLU(d - 100) + \zeta_2 ReLU(v - 2000) + \zeta_3 ReLU(\delta - 3) + \zeta_4 ReLU(85 - \beta) \\
&\quad + \zeta_5 ReLU(f - 30) + \zeta_6 ReLU(80 - \eta) \\
s.t. &\begin{cases} \eta = g_1(\delta, \alpha, \beta) \\ \delta = g_2(d, v) \\ \alpha = g_3(d, v) \\ \beta = g_4(d, v) \\ f = g_5(\delta, \alpha, \beta) \end{cases}
\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $g_5(\delta, \alpha, \beta)$ 如式 (21) 所示， $\zeta_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 为惩罚系数， ω 为目标权重，均为可调参数； $ReLU$ 为激活函数，大于 0 时为恒等变换，小于等于 0 时函数值为 0。

4.4.2 模型求解

权重系数 ω 以 0.01 为步长，从 0 增加到 1，利用模拟退火算法求解结果如图 10 所示：

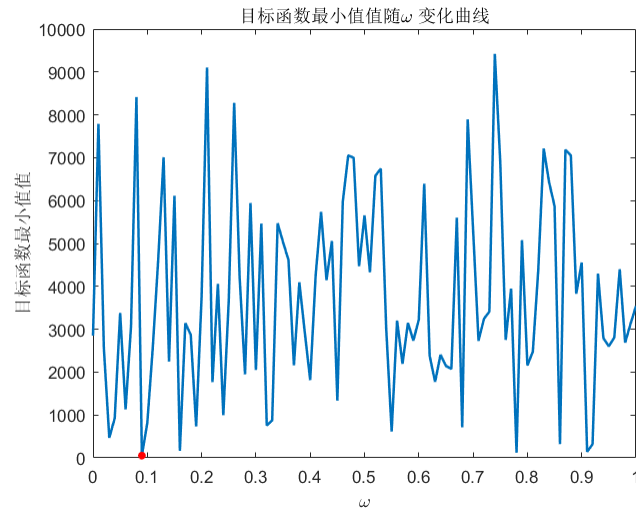


图 10: 模拟退火求解目标函数

图中红色圆点标注的为选中的理想解，该点各参数为： $d = 11.568, v = 820.824, \delta = 1.584, \beta = 82.057, f = 12.388, \eta = 84.208$ ，可以看到压缩回弹性率 82.057% 比要求的 85% 要低，而其他参数均在范围内，且在过滤效率高和过滤阻力小之间做了权衡。

5 模型评价

5.1 模型的优点

- 优点 1: 结合了数学模型和物理经验进行求解，使得模型更加真实准确。
- 优点 2: 设计了变换组合回归算法进行求解，提高了模型的效率。

5.2 模型的缺点

- 缺点 1: 在进行函数的拟合时，使用的是枚举法，无法穷举所有的函数，使得可能存在更优的函数。

参考文献

- [1] 武辉. 插层熔喷气流场模拟及其过滤材料性能的研究 [D]. 天津工业大学, 2018.
- [2] 陈光林. 浅谈熔喷非织造布工艺参数对产品性能的影响 [J]. 合成纤维, 2015(2):3.
- [3] 刘次华, 万建华. 概率论与数理统计. 第 3 版 [M]. 高等教育出版社, 2008:156~159.
- [4] 罗胜利, 左芳芳, 汪福坤, 等. 口罩国内外标准比较及质量问题分析 [J]. 北京服装学院学报: 自然科学版, 2020(2):9.