Terceira Lista de Exercícios

Esta lista contém exercícios relacionados ao Método de Monte Carlo (MC) e à Simulação de Variáveis Aleatórias.

Exercício 1. Um dado equilibrado é lançado 2 vezes e os números obtidos nos dois lançamentos são registrados. Estime, via MC, a seguinte probabilidade: a soma dos dois resultados é 7 ou 11.

Exercício 2. Considere quatro urnas com as seguintes configurações: a urna I contém 8 bolas pretas, 3 brancas e 4 vermelhas; a urna II contém 3 bolas pretas, 5 brancas e 7 vermelhas; a urna III contém 4 bolas pretas, 3 brancas e 2 vermelhas; a urna IV contém 2 bolas pretas, 1 bola branca e 8 bolas vermelas. Lançam-se dois dados equilibrados. Se a soma for menor do que 4, uma bola da urna I é retirada; se a soma for maior ou igual do que 4 e menor do que 7, então uma bola da urna II é retirada; se a soma for 7, então uma bola da urna III é retirada; caso contrário, uma bola da urna IV é retirada. Estime, via MC, a probabilidade da bola retirada ser vermelha.

Exercício 3. No jogo de *Craps* dois dados são lançados:

- se a soma for 7 ou 11, então você ganha o jogo;
- se a soma for 2,3 ou 12, então você perde o jogo;
- caso contrário, os dois dados são rolados novamente até obter-se 7 (você perde) ou até obter-se a soma inicial (você ganha).

Estime, via MC, a probabilidade de você vencer o jogo de Craps.

Exemplo: as seguintes sequências (cada entrada é a soma dos dois dados) resultam em vitória: (9), (11), (5, 4, 5), (4, 5, 6, 12, 4); as seguintes sequências resultam em derrota: (2), (4, 11, 7), (8, 5, 2, 3, 9, 7).

Exercício 4. Considere o seguinte jogo: Jim e Dwight escolherão, cada um, uma sequência de tamanho 3 em que cada entrada da sequência é cara ou coroa; logo em seguida, uma moeda será lançada até que apareça a sequência que um dos dois escolheu; se aparecer primeiro a sequência de Jim, ele ganha; se aparecer primeiro a sequência de Dwight, ele vence. Convencione que cara seja 1 e que coroa seja zero. Supondo que Dwight escolheu a sequência (0, 1, 0) e que Jim escolheu a sequência (0, 0, 1), estime através do Método de Monte Carlo a probabilidade de Jim vencer.

Observação: as sequências (0, 1, 0), (1, 0, 1, 0) e (1, 1, 0, 1, 0) deixam Dwight vitorioso; as sequências (0, 0, 1), (0, 0, 0, 1) e (1, 0, 0, 0, 1) deixam Jim vitorioso.

Exercício 5. Luke Skywalker está na origem de uma reta. Um esboço da situação pode ser visto na Figura 1. Luke lança uma moeda honesta; se sair coroa, ele dá um passo para a esquerda (e termina na posição -1 da reta); se sair caraa, ele dá um passo para a direita (e termina na posição 1 da reta). Suponha que no primeiro lançamento tenha saído cara. Aí, agora na posição 1, ele lança novamente a moeda: se cara, um passo para a direita; se coroa um passo para a esquerda. Suponha que novamente tenha saído cara. Na posição 2 da reta ele irá jogar novamente a moeda e irá proceder da mesma forma que nos dois passos anteriores e assim sucessivamente. Estime via Monte Carlo a probabilidade de Luke retornar à origem depois de: (i) 4 passos; (ii) 6 passos; (iii) 10 passos; (iv) 20 passos.

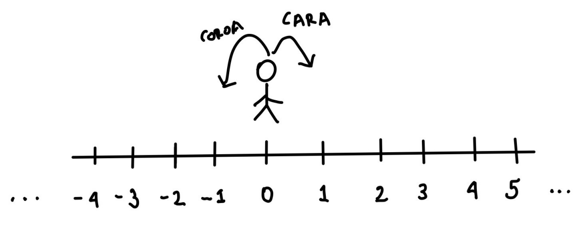
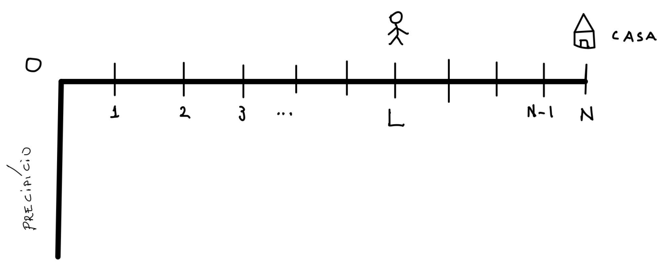


Figura 1: Passeio aleatório simétrico na reta.

Exercício 6. Considere o passeio aleatório que Luke Skywalker realizou no exercício acima. Entretanto, dessa vez, a reta do passeio é formada pelos números inteiros de zero até N. Considere que Luke está em um ponto L que é maior do que zero e menor do que N. Luke lança uma moeda honesta; se sair coroa, ele dá um passo para a esquerda (e termina na posição $L-1$ da reta); se sair cara, ele dá um passo para a direita (e termina na posição $L+1$ da reta). Luke continuará a lançar a moeda e se deslocará até que ele chegue em sua casa (e lá ele vai dormir e o passeio acaba) ou até que ele chegue (caia) no precipício (e, óbvio, o passeio também acaba nesse caso).



(a) Para $N = 20$, crie uma função cuja entrada seja L (um número maior do que zero e menor do que 20) e cuja saída retorne a estimativa da probabilidade de Luke cair no precipício antes de chegar em casa.

(b) Use a função criada em (a) para gerar estimativas para $L = 1, 2, \ldots, 19$ e, em seguida, use esses valores para plotar um gráfico de $x = 1 : 19$ por y, em que y são as estimativas de probabilidade para cada x.

Exercício 7. Utilize o método de MC para estimar as seguintes integrais:

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{e} \quad \int_{0}^{\pi} cos^2(x) dx.$$

Exercício 8. Escreva uma função para gerar n valores de uma variável aleatória X que possui a seguinte lei de probabilidade: $P(X = 1) = 1/7$ e $P(X = 5) = 2/7$ e $P(X = 10) = 4/7$. Em seguinda, utilize $n = 100$ em sua função e determine a proporção de valores que são iguais a 5. Obtenha a proporção também para $n = 1000$ e para $n = 10000$.

Exercício 9. Escreva uma função cuja entrada seja um número natural n e que a saída retorne n valores gerados de uma variável aleatória contínua X cuja função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x) = \frac{x^2 + x}{2}, \; 0 \leq x \leq 1.$$

Em seguinda, utilize $n = 10000$ em sua função para fornecer estimativas para $P(X < 0.7)$ e para $E[X]$.