13.1

$p(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N} \alpha_{i} \cdot p\left(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\mu}_{i}, \boldsymbol{\Sigma}_{i}\right)$ [解析]： 该式即为 9.4.3 节的式(9.29)，式(9.29)中的k个混合成分对应于此处的N个可能的类别

13.2

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &=\underset{j \in \mathcal{Y}}{\arg \max } p(y=j \mid \boldsymbol{x}) \\
&=\underset{j \in \mathcal{Y}}{\arg \max } \sum_{i=1}^{N} p(y=j, \Theta=i \mid \boldsymbol{x}) \\
&=\underset{j \in \mathcal{Y}}{\arg \max } \sum_{i=1}^{N} p(y=j \mid \Theta=i, \boldsymbol{x}) \cdot p(\Theta=i \mid \boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

[解析]： 首先，该式的变量$\theta \in\{1,2, \ldots, N\}$即为 9.4.3 节的式(9.30)中的 $z_{j} \in\{1,2, \ldots k\}$ 从公式第 1 行到第 2 行是做了边际化（marginalization）；具体来说第 2 行比第 1 行多了θ为了消掉θ对其进行求和（若是连续变量则为积分）$\sum_{i=1}^{N}$ [推导]：从公式第 2 行到第 3 行推导如下

$$\begin{aligned}
p(y=j, \theta=i \mid x) &=\frac{p(y=j, \theta=i, x)}{p(x)} \\
&=\frac{p(y=j, \theta=i, x)}{p(\theta=i, x)} \cdot \frac{p(\theta=i, x)}{p(x)} \\
&=p(y=j \mid \theta=i, x) \cdot p(\theta=i \mid x)
\end{aligned}$$

[解析]：其中$p(y=j \mid x)$表示x的类别y为第j个类别标记的后验概率（注意条件是已知x）； $p(y=j, \theta=i \mid x)$表示x的类别y为第j个类别标记且由第i个高斯混合成分生成的后验概率（注意条件是已知x ）； $p(y=j, \theta=i, x)$表示第i个高斯混合成分生成的x其类别y为第j个类别标记的概率（注意条件是已知θ和x，这里修改了西瓜书式(13.3)下方对$p(y=j \mid \theta=i, x)$的表述； $p(\theta=i \mid x)$表示x由第i个高斯混合成分生成的后验概率（注意条件是已知x）； 西瓜书第 296 页第 2 行提到"假设样本由高斯混合模型生成，且每个类别对应一个高斯混合成分"，也就是说，如果已知x是由哪个高斯混合成分生成的，也就知道了其类别。而$p(y=j, \theta=i \mid x)$表示已知θ和x 的条件概率（其实已知θ就足够，不需x的信息），因此 $p(y=j \mid \theta=i, x)=\left\{\begin{array}{ll}1, & i=j \\ 0, & i \neq j\end{array}\right.$

13.3

$$p(\Theta=i \mid \boldsymbol{x})=\frac{\alpha_{i} \cdot p\left(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\mu}_{i}, \boldsymbol{\Sigma}_{i}\right)}{\sum_{i=1}^{N} \alpha_{i} \cdot p\left(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\mu}_{i}, \boldsymbol{\Sigma}_{i}\right)}$$

[解析]：该式即为 9.4.3 节的式(9.30)，具体推导参见有关式(9.30)的解释。

13.4

$$\begin{aligned}
L L\left(D_{l} \cup D_{u}\right)=& \sum_{\left(x_{j}, y_{j}\right) \in D_{l}} \ln \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_{i} \cdot p\left(\boldsymbol{x}_{j} \mid \boldsymbol{\mu}_{i}, \boldsymbol{\Sigma}_{i}\right) \cdot p\left(y_{j} \mid \Theta=i, \boldsymbol{x}_{j}\right)\right) \\
&+\sum_{x_{j} \in D_{u}} \ln \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_{i} \cdot p\left(\boldsymbol{x}_{j} \mid \boldsymbol{\mu}_{i}, \boldsymbol{\Sigma}_{i}\right)\right)
\end{aligned}$$

[解析]：由式(13.2)对概率$p(y=j|\theta=i,x)=$的分析，式中第 1 项中的$p(y_j|\theta=i,x_j)$ 为 $p(y_j|\theta=i,x_j)=\begin{cases}1, & y_i=i\\ 0, & y_i\neq i\end{cases}$ 该式第 1 项针对有标记样本$(x_i,y_i)\in D_l$来说，因为有标记样本的类别是确定的，因此在计算它的对数似然时，它只可能来自N个高斯混合成分中的一个（西瓜书第 296 页第 2 行提到"假设样本由高斯混合模型生成，且每个类别对应一个高斯混合成分"），所以计算第 1 项计算有标记样本似然时乘以了$p(y_j|\theta=i,x_j)$；该式第 2 项针对未标记样本$x_j\in D_u$；来说的，因为未标记样本的类别不确定，即它可能来自N个高斯混合成分中的任何一个，所以第 1 项使用了式(13.1)。

13.5

$$\gamma_{ji}=\frac{\alpha_i\cdot p\left(\boldsymbol{x}_j|\boldsymbol{\mu}_i,\boldsymbol{\Sigma}_i\right)}{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\cdot p\left(\boldsymbol{x}_j|\boldsymbol{\mu}_i,\boldsymbol{\Sigma}_i\right)}$$

[解析]：该式与式(13.3)相同，即后验概率。 可通过有标记数据对模型参数$(\alpha_i,\mu_i,\Sigma_i)$进行初始化，具体来说：
$\alpha_i=\dfrac{l_i}{|D_l|}, where|D_l|=\sum_{i=1}^{N}l_i$ $\mu_i=\dfrac{1}{l_i}\sum_{(x_j,y_j)\in D_l\wedge y_i=i}(x_j-\mu_j)(x_j-\mu_j)^T$

$$\Sigma_i=\frac{1}{l_i}\sum_{(x_j,y_j)\in D_l\wedge y_j=i}\left(x_j-\mu_i\right)\left(x_j-\mu_i\right)^{\top}$$

其中l_i表示第i类样本的有标记样本数目，$|D_l|$为有标记样本集样本总数，$\wedge$为"逻辑与"。

13.6

$$\boldsymbol{\mu}_i=\frac{1}{\sum_{\boldsymbol{x}_j\in D_u}\gamma_{ji}+l_i}\left(\sum_{\boldsymbol{x}_j\in D_u}\gamma_{ji}\boldsymbol{x}_j+\sum_{(\boldsymbol{x}_j,y_j)\in D_l\wedge y_j=i}\boldsymbol{x}_j\right)$$

[推导]：类似于式(9.34)该式由$\dfrac{\partial LL(D_l\cup D_u)}{\partial\mu_i}=0$而得，将式(13.4)的两项分别记为：
$LL(D_l)=\sum_{(x_j,y_j\in D_l)}ln(\sum_{s=1}^{N}\alpha_s\cdot p(x_j|\mu_s,\Sigma_s)\cdot p(y_i|\theta=s,x_j)$ $LL(D_u)=\sum_{x_j\in D_u}ln(\sum_{s=1}^{N}\alpha_s\cdot p(x_j|\mu_s,\Sigma_s))$
对于式(13.4)中的第 1 项$LL(D_l)$，由于$p(y_j|\theta=i,x_j)$取值非1即0（详见13.2,13.4分析），因此
$LL(D_l)=\sum_{(x_j,y_j)\in D_l}ln(\alpha_{y_j}\cdot p(x_j|\mu_{y_j},\Sigma_{y_j}))$ 若求$LL(D_l)$对μ_i的偏导，则$LL(D_l)$求和号中只有$y_j=i$ 的项能留下来，即

$$\begin{aligned}\frac{\partial LL(D_l)}{\partial\mu_i}&=\sum_{(x_i,y_i)\in D_l\wedge y_j=i}\frac{\partial ln(\alpha_i\cdot p(x_j|\mu_i,\Sigma_i))}{\partial\mu_i}\\&=\sum_{(x_i,y_i)\in D_l\wedge y_j=i}\frac{1}{p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)}\cdot\frac{\partial p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)}{\partial\mu_i}\\&=\sum_{(x_i,y_i)\in D_l\wedge y_j=i}\frac{1}{p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)}\cdot p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)\cdot\Sigma_i^{-1}(x_j-\mu_i)\\&=\sum_{x_j\in D_u}\Sigma_i^{-1}(x_j-\mu_i)\end{aligned}$$

对于式(13.4)中的第 2 项$LL(D_u)$，求导结果与式(9.33)的推导过程一样
$\dfrac{\partial LL(D_l\cup D_u)}{\partial\mu_i}=\sum_{x_j\in D_u}\dfrac{\alpha_i}{\sum_{s=1}^{N}\alpha_s\cdot(x_j|\mu_s,\Sigma_s)}\cdot p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)\cdot\Sigma_i^{-1}(x_j-\mu_i)=\sum_{x_j\in D_u}\gamma_{ji}\cdot\Sigma_i^{-1}(x_j-\mu_i)$ 综合两项结果，则$\dfrac{\partial LL(D_l\cup D_u)}{\partial\mu_i}$为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial LL\left(D_l \cup D_u\right)}{\partial \mu_i} &= \sum_{\left(x_j, y_j\right) \in D_t \wedge y_j=i} \Sigma_i^{-1}\left(x_j-\mu_i\right)+\sum_{x_j \in D_u} \gamma_{ji} \cdot \Sigma_i^{-1}\left(x_j-\mu_i\right) \\
&= \Sigma_i^{-1}\left(\sum_{\left(x_j, y_j\right) \in D_l \wedge y_j=i}\left(x_j-\mu_i\right)+\sum_{x_j \in D_u} \gamma_{ji} \cdot\left(x_j-\mu_i\right)\right) \\
&= \Sigma_i^{-1}\left(\sum_{\left(x_j, y_j\right) \in D_l \wedge y_j=i} x_j+\sum_{x_j \in D_u} \gamma_{ji} \cdot x_j-\sum_{\left(x_j, y_j\right) \in D_l \wedge y_j=i} \mu_i-\sum_{x_j \in D_u} \gamma_{ji} \cdot \mu_i\right)
\end{aligned}
$$

令$\frac{\partial LL(D_l \cup D_u)}{\partial \boldsymbol{\mu}_i}=0$，两边同时左乘$\Sigma_i$可将$\Sigma_i^{-1}$消掉，移项即得

$$
\sum_{x_j \in D_u} \gamma_{ji} \cdot \mu_i+\sum_{\left(x_j, y_j\right) \in D_t \wedge y_j=i} \mu_i=\sum_{x_j \in D_u} \gamma_{ji} \cdot x_j+\sum_{\left(x_j, y_j\right) \in D_l \wedge y_j=i} x_j
$$

上式中， 可以作为常量提到求和号外面，而$\sum_{(x_j, y_j) \in D_l \wedge y_j=i} 1=l_i$，即第 类样本的有标记 样本数目，因此

$$
\left(\sum_{x_j \in D_u} \gamma_{ji}+\sum_{\left(x_j, y_j\right) \in D_l \backslash y_j=i} 1\right) \mu_i=\sum_{x_j \in D_u} \gamma_{ji} \cdot x_j+\sum_{\left(x_j, y_j\right) \in D_l \wedge y_j=i} x_j
$$

即得式(13.6)；

13.7

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_i= & \frac{1}{\sum_{\boldsymbol{x}_j \in D_u} \gamma_{ji}+l_i}\left(\sum_{\boldsymbol{x}_j \in D_u} \gamma_{ji}\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\mathrm{T}}\right. \\
& \left.+\sum_{\left(\boldsymbol{x}_j, y_j\right) \in D_l \wedge y_j=i}\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\mathrm{T}}\right)
\end{aligned}
$$

[推导]：类似于13.6 由$\dfrac{\partial LL(D_l \cup D_u)}{\partial \Sigma_i}=0$得，化简过程同13.6过程类似 对于式(13.4)中的第 1 项$LL(D_l)$ ，类似于刚才式(13.6)的推导过程;

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial LL\left(D_l\right)}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_i} &= \sum_{\left(\boldsymbol{x}_j, y_j\right) \in D_l \wedge y_j=i} \frac{\partial \ln\left(\alpha_i \cdot p\left(\boldsymbol{x}_j \mid \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_i} \\
&= \sum_{\left(\boldsymbol{x}_j, y_j\right) \in D_l \wedge y_j=i} \frac{1}{p\left(\boldsymbol{x}_j \mid \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i\right)} \cdot \frac{\partial p\left(\boldsymbol{x}_j \mid \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i\right)}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_i} \\
&= \sum_{\left(\boldsymbol{x}_j, y_j\right) \in D_l \wedge y_j=i} \frac{1}{p\left(\boldsymbol{x}_j \mid \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i\right)} \cdot p\left(\boldsymbol{x}_j \mid \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i\right) \cdot\left(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\top}-\boldsymbol{I}\right) \cdot \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \\
&= \sum_{\left(\boldsymbol{x}_j, y_j\right) \in D_l \wedge y_j=i}\left(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\top}-\boldsymbol{I}\right) \cdot \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}
\end{aligned}
$$

对于式(13.4)中的第 2 项$LL(D_u)$ ，求导结果与式(9.35)的推导过程一样；

$$
\frac{\partial LL\left(D_u\right)}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_i}=\sum_{\boldsymbol{x}_j \in D_u} \gamma_{ji} \cdot\left(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\top}-\boldsymbol{I}\right) \cdot \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}
$$

综合两项结果，则$\frac{\partial LL(D_l\cup D_u)}{\partial\Sigma_i}$为

$$\begin{aligned}\frac{\partial LL\left(D_l\cup D_u\right)}{\partial\boldsymbol{\mu}_i}&=\sum_{\boldsymbol{x}_j\in D_u}\gamma_{ji}\cdot\left(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\top}-\boldsymbol{I}\right)\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\\&+\sum_{\left(\boldsymbol{x}_j,y_j\right)\in D_l\wedge y_j=i}\left(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\top}-\boldsymbol{I}\right)\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\\&=\left(\sum_{\boldsymbol{x}_j\in D_u}\gamma_{ji}\cdot\left(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\top}-\boldsymbol{I}\right)\right.\\&\left.+\sum_{\left(\boldsymbol{x}_j,y_j\right)\in D_l\wedge y_j=i}\left(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\top}-\boldsymbol{I}\right)\right)\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\end{aligned}$$

令$\frac{\partial LL(D_l\cup D_u)}{\partial\boldsymbol{\Sigma}_i}=0$，两边同时右乘$2\Sigma_i$可将$\frac{1}{2}\Sigma_i^{-1}$消掉，移项即得

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{x}_j\in D_u}\gamma_{ji}\cdot\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\top}+\sum_{\left(\boldsymbol{x}_j,y_j\in D_l\wedge y_j=i\right.}\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\top}\\=\sum_{\boldsymbol{x}_j\in D_u}\gamma_{ji}\cdot\boldsymbol{I}+\sum_{\left(\boldsymbol{x}_j,y_j\right)\in D_l\wedge y_j=i}\boldsymbol{I}\\=\left(\sum_{\boldsymbol{x}_j\in D_u}\gamma_{ji}+l_i\right)\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

两边同时左乘以Σ_i，上式变为

$$\sum_{\boldsymbol{x}_j\in D_u}\gamma_{ji}\cdot\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\top}+\sum_{\left(\boldsymbol{x}_j,y_j\right)\in D_l\wedge y_j=i}\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)\left(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\mu}_i\right)^{\top}=\left(\sum_{\boldsymbol{x}_j\in D_u}\gamma_{ji}+l_i\right)\boldsymbol{\Sigma}_i$$

即得式(13.7)；

13.8

$$\alpha_i=\frac{1}{m}\left(\sum_{\boldsymbol{x}_j\in D_u}\gamma_{ji}+l_i\right)$$

[推导]：类似于式(9.36)，写出$LL(D_l\cup D_u)$的拉格朗日形式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D_l\cup D_u,\lambda)&=LL(D_l\cup D_u)+\lambda(\sum_{s=1}^{N}\alpha_s-1)\\&=LL(D_l)+LL(D_u)+\lambda(\sum_{s=1}^{N}\alpha_s-1)\end{aligned}$$

类似于式(9.37)，对α_i求偏导。对于LL(D_u)，求导结果与式(9.37)的推导过程一样：

$$\frac{\partial LL(D_u)}{\partial\alpha_i}=\sum_{x_j\in D_u}\frac{1}{\Sigma_{s=1}^{N}\alpha_s\cdot p(x_j|\mu_s,\Sigma_s)}\cdot p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)$$

对于$LL(D_l)$，类似于类似于(13.6)和(13.7)的推导过程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial LL(D_l)}{\partial \alpha_i} &= \sum_{(x_i,y_i)\in D_l \wedge y_j=i} \frac{\partial ln(\alpha_i \cdot p(x_j|\mu_i,\Sigma_i))}{\partial \alpha_i} \\
&= \sum_{(x_i,y_i)\in D_l \wedge y_j=i} \frac{1}{\alpha_i \cdot p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)} \cdot \frac{\partial(\alpha_i \cdot p(x_j|\mu_i,\Sigma_i))}{\partial \alpha_i} \\
&= \sum_{(x_i,y_i)\in D_l \wedge y_j=i} \frac{1}{\alpha_i \cdot p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)} \cdot p(x_j|\mu_i,\Sigma_i) \\
&= \frac{1}{\alpha_i} \cdot \sum_{(x_i,y_i)\in D_l \wedge y_j=i} 1 \\
&= \frac{l_i}{\alpha_i}
\end{aligned}
$$

上式推导过程中，重点注意变量是α_i ，$p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)$是常量；最后一行α_i相对于求和变量为常量，因此作为公因子提到求和号外面； 为第i类样本的有标记样本数目。 综合两项结果，则$\frac{\partial LL(D_l \cup D_u)}{\partial \alpha_i}$为

$$
\frac{\partial LL(D_l \cup D_u)}{\partial \mu_i} = \frac{l_i}{\alpha_i} + \sum_{x_j \in D_u} \frac{p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)}{\Sigma_{s=1}^{N} \alpha_s \cdot p(x_j|\mu_s,\Sigma_s)} + \lambda
$$

令$\frac{\partial LL(D_l \cup D_u)}{\partial \alpha_i} = 0$并且两边同乘以$\alpha_i$,得

$$
\alpha_i \cdot \frac{l_i}{\alpha_i} + \sum_{x_j \in D_u} \frac{\alpha_i \cdot p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)}{\Sigma_{s=1}^{N} \alpha_s \cdot p(x_j|\mu_s,\Sigma_s)} + \lambda \cdot \alpha_i = 0
$$

结合式(9.30)发现，求和号内即为后验概率γ_{ji},即

$$
l_i + \sum_{x_i \in D_u} \gamma_{ji} + \lambda \alpha_i = 0
$$

对所有混合成分求和，得

$$
\sum_{i=1}^{N} l_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{x_i \in D_u} \gamma_{ji} + \sum_{i=1}^{N} \lambda \alpha_i = 0
$$

这里$\Sigma_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$ ，因此$\sum_{i=1}^{N} \lambda \alpha_i = \lambda \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = \lambda$ 根据（9.30）中γ_{ji}表达式可知

$$
\sum_{i=1}^{N} \gamma_{ji} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i \cdot p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)}{\Sigma_{s=1}^{N} \alpha_s \cdot p(x_j|\mu_s,\Sigma_s)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot p(x_j|\mu_i,\Sigma_i)}{\sum_{s=1}^{N} \alpha_s \cdot p(x_j|\mu_s,\Sigma_s)} = 1
$$

再结合加法满足交换律，所以

$$
\sum_{i=1}^{N} \sum_{x_i \in D_u} \gamma_{ji} = \sum_{x_i \in D_u} \sum_{i=1}^{N} \gamma_{ji} = \sum_{x_i \in D_u} 1 = u
$$

以上分析过程中，$\sum_{x_j \in D_u}$ 形式与$\sum_{j=1}^{u}$等价，其中u为未标记样本集的样本个数； $\sum_{i=1}^{N} l_i = l$其中l为有标记样本集的样本个数；将这些结果代入

$$\sum_{i=1}^{N} l_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{x_i \in D_u} \gamma_{ji} + \sum_{i=1}^{N} \lambda \alpha_i = 0$$

解出$l + u + \lambda = 0$ 且$l + u = m$ 其中m为样本总个数，移项即得$\lambda = -m$ 最后带入整理解得

$$l_i + \Sigma_{X_j \in D_u} \gamma_{ji} - m \alpha_i = 0$$

整理即得式(13.8)；