

Интеграл локального потенциального векторного поля по непрерывному пути

Лемма 1 (о гусенице).

- $\gamma : [a, b] \rightarrow O \subset \mathbb{R}^m$ — непр.

Тогда \exists дробление $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и \exists шары $B_1 \dots B_n \subset O : \gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$.



Рис. 1: “Гусеница” — покрытие пути шарами

Доказательство. $\forall c \in [a, b]$ возьмём $B_c := B(\gamma(c), \underbrace{r_c}_{\text{произвольн.}}) \subset O$.

$$\overline{\alpha}_c := \inf\{\alpha \in [a, b] : \gamma[\alpha, c] \subset B_c\}$$

$\overline{\beta}_c := \sup\{\beta \in [a, b] : \gamma[c, \beta] \subset B_c\}$ — момент первого выхода после посещения точки $\gamma(c)$

Возьмём $(\alpha_c, \beta_c) : \overline{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \overline{\beta}_c$

Таким образом $c \mapsto (\alpha_c, \beta_c)$ — открытое покрытие $[a, b]$, если для $c = a$ или $c = b$ вместо α_c, β_c брать $[a, \beta_a), (\alpha_b, b]$

$[a, b]$ — компактно $\Rightarrow [a, b] \subset \bigcup_{\text{кон.}} (\alpha_c, \beta_c)$

Не умаляя общности ни один интервал не накрывается целиком остальными $\Leftrightarrow \forall (\alpha_c, \beta_c) \exists d_c$, принадлежащая “только этому” интервалу.



Рис. 2: Выбор точек t_k

Точка t_k выбирается на d_k, d_{k+1} и $t_k \in (\alpha_k, \beta_k) \cap (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$.

$$\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset \gamma(\alpha_k, \beta_k) \subset B_k$$

□

Примечание. $\forall \delta > 0$ мы можем требовать, чтобы все $r_k < \delta$

Примечание. В силу произвольности r_c можно требовать, чтобы шары B_c удовлетворяют некоторому локальному условию.

Например пусть V — локально потенциальное поле в O . Мы можем требовать, чтобы во всех шарах существовал потенциал V . Тогда будем называть $\{B_k\}$ V -гусеницей.

Определение.

- V — локально потенциальное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

$\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O$ называются похожими (V -похожими), если у них есть общая V -гусеница:

$\exists t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b \quad \exists \text{ шары } B_k \subset O :$

$$\gamma[t_{k-1}, t_k] \subset B_k, \tilde{\gamma}[t_{k-1}, t_k] \subset B_k$$

Следствие 0.1.

- V — локально потенциальное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда любой путь V -похож на ломаную:



Рис. 3: Построение ломаной (розовая) по пути (чёрный) с помощью V -гусеницы (круги)

Лемма 2 (о равенстве интегралов локально-потенциальных векторных путей по похожим путям).

- V — локально-потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$
- $\gamma, \tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow O$ — V -похожие, кусочно гладкие
- $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$

Тогда $\int_{\gamma} \sum V_i dx_i = \int_{\tilde{\gamma}} \sum V_i dx_i$

Доказательство. Рассмотрим общую V -гусеницу. Пусть f_k — потенциал V в шаре B_k , $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

Сдвинем потенциалы прибавлением константы, так что $f_k(\gamma(t_k)) = f_{k+1}(\gamma(t_k))$ при $k = 1 \dots n$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum_i V_i dx_i &= \sum \int_{[t_{k-1}, t_k]} \dots \\ &= \sum f_k(\gamma(t_k)) - f_k(\gamma(t_{k-1})) \\ &= f_n(\gamma(b)) - f_1(\gamma(a)) \end{aligned} \quad (1)$$

(1): По обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Для $\tilde{\gamma}$ воспользуемся свойством: $f_k|_{B_k \cap B_{k+1}} = f_{k+1}|_{B_k \cap B_{k+1}}$ и тогда аналогично

$$\int_{\tilde{\gamma}} \sum v_i dx_i = f_n(\tilde{\gamma}(b)) - f_1(\tilde{\gamma}(a))$$

□

Примечание. Вместо условия “ $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a), \gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$ ” можно взять условие: $\gamma, \tilde{\gamma}$ — петли. Тогда утверждение леммы тоже верно.

Лемма 3.

- $\gamma : [a, b] \rightarrow O$ — непр.
- V — локально-потенциальное векторное поле в $O \subset \mathbb{R}^m$

Тогда $\exists \delta > 0$: если $\tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}} : [a, b] \rightarrow O$ таковы, что:

$$\forall t \in [a, b] \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta, |\gamma(t) - \tilde{\tilde{\gamma}}(t)| < \delta$$

Тогда $\gamma, \tilde{\gamma}, \tilde{\tilde{\gamma}}$ V -похожи.

Доказательство. Берём V -гусеницу для γ .

δ_k -окрестность множества $A := \{x : \exists a \in A \quad \rho(a, x) < \delta\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \delta)$

$$\forall k \quad \exists \delta_k > 0 : (\delta_k\text{-окрестность } \gamma[t_{k-1}, t_k]) \subset B_k$$

Это следует из компактности:

Пусть $B_k = B(w, r)$, функция $t \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k] \mapsto \rho(\gamma(t), w)$ непрерывна \Rightarrow достигается \max , $\rho(\gamma(t), w) \leq r_0 < r$

Рис. 4: δ_k -окрестность множества $\gamma[t_{k-1}, t_k]$

$$\delta_k := \frac{r-r_0}{2}, \delta := \min(\delta_1 \dots \delta_k)$$

При таком δ все три пути лежат в одной гусенице. □

Определение (Интеграл локального потенциального векторного поля V по непрерывному пути γ). Возьмём $\delta > 0$ из леммы 3.

Пусть $\tilde{\gamma}$ — δ -близкий кусочно-гладкий путь, т.е. $\forall t \quad |\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \delta$.

Полагаем $I(V, \gamma) := I(V, \tilde{\gamma})$.

Корректность (нет произвольности) следует из лемм 3 и 2

Равномерная сходимость функциональных рядов (продолжение)

Теорема 1 (признак Дирихле).

- $\sum a_n(x)b_n(x)$ — вещественный ряд.
- $x \in X$
- Частичные суммы ряда $\sum a_n$ равномерно ограничены :

$$\exists C_a \quad \forall n \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq C_a$$

- $\forall x$ последовательность $b_n(x)$ — монотонна по n и $b_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{X} 0$

Тогда ряд $\sum a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на X

Доказательство. Преобразование Абеля (суммирование по частям)

$$\sum_{M \leq k \leq N} a_k b_k = A_N b_N - A_{M-1} b_{M-1} + \sum_{M \leq k \leq N-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=m}^N a_k(x) b_k(x) \right| &\leq C_A |b_N| + C_A |b_{M-1}| + \sum_{M \leq k \leq N-1} C_A |b_k - b_{k+1}| \\
&\leq C_A \left(|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + \sum_{k=M}^{N-1} |b_k - b_{k+1}| \right) \\
&\leq C_A (2|b_N(x)| + |b_{M-1}(x)| + |b_M(x)|)
\end{aligned} \tag{2}$$

(2) : Все разности одного знака \Rightarrow телескопически $= \pm(b_M - b_N)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K : \forall l > K \quad \forall x \in X \quad |b_l(x)| < \frac{\varepsilon}{4C_A}$$

Значит, при $M, N > K \quad \forall x \in X$:

$$\left| \sum_{k=m}^N a_k(x) b_k(x) \right| < \varepsilon$$

Это критерий Больцано-Коши равномерной сходимости ряда. □

Пример. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$

1. $f(x)$ — непр. на \mathbb{R}

$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \sum \frac{1}{n^2}$ сходится. По признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на $\mathbb{R} \Rightarrow$ ряд f — непр. на \mathbb{R}

2. f — дифф.?

По теореме 3' $\sum f'_n(x)$ — ? равномерно сходится в окрестности x_0 . Если да, то $f \in C^1(V(x_0))$.

$f' = \sum \frac{\cos nx}{n}$, но при $x = 2\pi k$ \sum расходится.

Применим признак Дирихле для $a_n = \cos nx, b_n = \frac{1}{n}, x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

$$\begin{aligned}
|\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx| &= |\Re(e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{nix})| \\
&\leq \left| e^{ix} \frac{e^{nix} - 1}{e^{ix} - 1} \right| \\
&= |e^{ix}| \frac{|e^{nix} - 1|}{|e^{ix} - 1|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{|e^{ix} - 1|} \\
&\leq \frac{2}{e^{i\varepsilon} - 1} \\
&=: C_A
\end{aligned}$$

b_n — монотонно, $\rightarrow 0$, не зависит от x , поэтому $\Rightarrow 0$

Таким образом, признак Дирихле сработал и $f'(x) = \sum \frac{\cos nx}{n}$ при $x \in (0, 2\pi)$

Упражнение. 1. При $x = 2\pi k$ $f(x)$ не дифференцируемая.

2. Существует ли $f''(x)$ при $x \in (0, 2\pi)$?

3. Если $q(x) = \sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x \in (0, 2\pi)$:

(a) Непрерывна?

(b) Дифференцируема?

Степенные ряды

$B(r_0, r) \subset \mathbb{C}$ — открытый круг

Определение. Степенной ряд: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, где $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, z — переменная $\in \mathbb{C}$

Теорема 2 (о круге сходимости степенных рядов).

• $\sum a_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд

Тогда выполняется ровно один из трех случаев:

1. Ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$

2. Ряд сходится только при $z = z_0$

3. $\exists R \in (0, +\infty)$:

(a) при $|z - z_0| < R$ ряд абсолютно сходится

(b) при $|z - z_0| > R$ ряд расходится

Примечание. Ряд не может никогда не сходить, т.к. при $z = z_0$ ряд $= a_0 + 0 + 0 + \dots = a_0$.

Доказательство. Применим признак Коши: $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = r$, если $r < 1$, ряд сходится, если $r > 1$, ряд расходится.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0|^n = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| = |z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

1. $\overline{\lim} = 0$. Тогда $r = 0$, есть абсолютная сходимость при всех z .
2. $\overline{\lim} = +\infty$. Тогда $r = +\infty$ при $z \neq z_0$. При $z = z_0$ сходимость очевидна.
3. $\overline{\lim} \neq 0, +\infty$. Тогда $|z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \stackrel{\text{def}}{=} R$

□

Определение. $\sum a_n(z - z_0)^n$, тогда число $R = \frac{1}{\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}}$. Это формула Адамара.