

Определение. f — допустимая функция на $[a, b)$

$\int_a^b f$ — абсолютно сходится, если:

1. $\int_a^b f$ сходится
2. $\int_a^b |f|$ — сходится

Теорема 1. f — доп. на $[a, b)$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\int_a^b f$ абсолютно сходится
2. $\int_a^b |f|$ сходится
3. $\int_a^b f^+, \int_a^b f^-$ оба сходятся

Примечание. $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ — тривиально

$$2 \Rightarrow 3 : 0 \leq f^\pm \leq |f|$$

$$3 \Rightarrow 1 : f = f^+ - f^- \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- \quad |f| = f^+ + f^- \Rightarrow \int_a^b |f| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- \quad \square$$

Пример.

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \stackrel{\text{по частям}}{=} \left[\begin{array}{ll} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2} dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right] = -\cos \frac{1}{x} \Big|_{10}^{+\infty} - \int_{10}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Также можно было оставить нижнюю границу 0, но использовать $v = 1 - \cos x$

Первое слагаемое очевидно конечно, а второе конечно по абсолютной сходимости: $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x}$. Тогда искомый интеграл сходится.

Пример.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

- При каких p сходится?
- При каких p абсолютно сходится?

$$1. p > 1 \Rightarrow \text{абсолютно сходится, т.к. } \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| < \frac{1}{x^{p-1}}$$

$$2. p > 0 \Rightarrow \text{сходится, т.к. (по частям):}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} = -\frac{\cos x}{x^p} \Big|_1^{+\infty} - p \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}$$

Первое конечно, второе абсолютно сходится.

3. $p \leq 0$, по критерию Коши:

$$\exists A_n, B_n \rightarrow b \quad \int_{A_n}^{B_n} f \not\rightarrow 0 \Rightarrow \int_a^b f \text{ расходится}$$

$$A_n := 2\pi n, B_n := 2\pi n + \pi \quad \int_{A_n}^{B_n} \frac{\sin x}{x^p} dx \geq (2\pi n)^{-p} \int_{A_n}^{B_n} \sin x \text{ расходится}$$

Итого для $p \leq 0$ расходится.

4. $0 < p \leq 1$, абсолютная сходимость?

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}$$

(a) Первый способ. $A_n := \pi n, B_n := 2\pi n$

$$\int_{A_n}^{B_n} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \frac{1}{(2\pi n)^p} \underbrace{\int_{A_n}^{B_n} |\sin x|}_{\text{площадь } n \text{ арок синуса}} = \frac{2n}{(2\pi n)^p} = Cn^{1-p} \not\rightarrow 0$$

(b) Второй способ.

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} = \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{2x^p} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p}}_{+\infty} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p}}_{\text{При } p > 0 \text{ сходится как в пункте 2}}$$

Итого абсолютной сходимости нет.

Примечание. 1. $\int_a^b f$ — сходится $\not\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0$

$$\int_1^{+\infty} x \sin x^3 dx = \left[\begin{array}{l} t = x^3 \\ x = \sqrt[3]{t} \quad dx = \frac{1}{3} t^{-2/3} dt \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} t^{-1/3} \sin t dt = \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1/3}} dt$$

Этот интеграл сходится, но $f(x) \not\rightarrow 0$

2. $\int_a^b f$ — абсолютно сходится $\not\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0$

Упражнение. $\int_1^{+\infty} x \sin x^3 dx$ не сходится абсолютно

Теорема 2. Признак Абеля-Дирихле.

f — допустима на $[a, b)$, $g \in C^1[a, b)$

Если выполняется 1 или 2, то $\int_a^b fg$ — сходится

1. (a) $F(A) := \int_a^A f(x)dx$, $A \in [a, b)$, F ограничена, т.е.:

$$\exists K : \forall A \in [a, b) \quad \left| \int_a^A f \right| \leq K$$

- (b) $g(x)$ монотонна, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b-0} 0$

2. (a) $\int_a^b f(x)dx$ сходится, необязательно абсолютно

- (b) $g(x)$ монотонна, $g(x)$ ограничена, т.е.: $\exists L \forall x \in [a, b) \quad |g(x)| \leq L$

1 часть — Дирихле, 2 — Абель.

Доказательство. 1.

$$\int_a^b fg = F(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \underbrace{F(x)}_{\text{огр.}} \underbrace{g(x)}_{\text{б.м.}} = 0 \Rightarrow F(x)g(x) \Big|_a^b - \text{конечн.}$$

Покажем абсолютную сходимость, из нее следует обычная сходимость:

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|dx \leq \int_a^b K \int_a^b |g'| =$$

Можно снять модуль, т.к. g монотонна $\Rightarrow \text{sign}(g') = \text{const}$

$$= \pm K \int_a^b g' = \pm K g(x) \Big|_a^b = \pm K \left(\underbrace{\lim_{x \rightarrow b-0} g(x)}_0 - \underbrace{g(a)}_{\text{кон.}} \right)$$

2. $\alpha := \lim_{x \rightarrow b-0} g(x) - \text{кон.}$

$$\int_a^b fg = \underbrace{\int_a^b f\alpha}_{\text{кон. по (a)}} + \underbrace{\int_a^b f(g-\alpha)}_{\text{сходится по 1}}$$

Пояснение насчет сходимости $\int_a^b f(g-\alpha)$:

- (a) $F : A \mapsto \int_a^A f$ — ограничена, т.к. $\int_a^b f$ сходится

- (b) $g \rightarrow \alpha \Rightarrow (g-\alpha) \rightarrow 0$

□

Упражнение.

$$\int_{10}^{+\infty} \sin(x^3 - x) dx = \int_{10}^{+\infty} \underbrace{(3x^2 - 1) \sin(x^3 - x)}_f \underbrace{\frac{1}{3x^2 - 1}}_g dx$$

Сходится по признаку Дирихле.

Дальше в лекции была проверка на абсолютную сходимость.

Пример. Интеграл Дирихле.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство.

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

Проверим формулу:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \cos x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cos nx &= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin \frac{x}{2} \\ \sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x + \dots + \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x &= \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin \frac{x}{2} \\ \int_0^\pi \cos kx &= \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

Проинтегрируем исходное выражение по $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi \dots = \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx - \frac{\pi}{2} \\ \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx &= \frac{\pi}{2} \\ \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{x} dx &= \left[\begin{array}{l} y = \left(n + \frac{1}{2}\right)x \\ x = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}y \quad dx = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}dy \end{array} \right] = \\ &= \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{\frac{1}{n + \frac{1}{2}}y} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} dy = \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y} dy \end{aligned}$$

Итого:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{x} dx = \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin y}{y} dy$$

Проверим:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx - \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ & \int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x h(x) dx \\ & h(x) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{x} = \frac{x - 2 \sin \frac{x}{2}}{2x \sin \frac{x}{2}} = \frac{\mathcal{O}(x^3)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ & \int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x h(x) dx = \left[\begin{array}{l} f = h(x) \\ g' = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \end{array} \right] = \\ & = \frac{-1}{n + \frac{1}{2}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x h(x) \Big|_0^\pi + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) h'(x) dx \\ & h'(x) = -\frac{\cos \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 \cos \frac{x}{2} - 4 \sin^2 \frac{x}{2}}{4x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)\right) - 4 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right)}{4x^2 \sin^2 \frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{const} \\ & \Rightarrow h'(0) = \text{const (той, которая lim)} \text{ и } h \in C^1[0, \pi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x h(x) dx &= \underbrace{\frac{-1}{n + \frac{1}{2}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x h(x) \Big|_0^\pi}_{\substack{\text{огр.} \\ \rightarrow 0}} + \underbrace{\frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) h'(x) dx}_{\substack{\text{огр., т.к. } h' \in C^1 \\ \text{огр., непр.} \\ \text{огр. как ф-ция от } n \\ \rightarrow 0}} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx}_{\rightarrow \text{инт. Дирихле}} = \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx}_{\rightarrow 0} + \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} dx \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

□

Верхний предел и нижний предел последовательности

Определение. Частичный предел вещественной последовательности x_n — предел вдоль подпоследовательности n_k :

$$n_k \rightarrow +\infty, n_1 < n_2 < \dots \quad \lim x_{n_k} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Пример. $x_n = (-1)^n, n_i = 2i$

Определение. Дана последовательность x_n .

- $y_n := \sup(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$
- $z_n := \inf(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$

Примечание. 1. $y_n \downarrow, z_n \uparrow$

2. $z_n \leq x_n \leq y_n$

3. Если изменить конечное число элементов x_n , то изменится конечное число элементов y_n, z_n

Пример. 1. $x_n = (-1)^n, y_n \equiv 1, z_n \equiv -1$

2. $x_n = (1 + (-1)^n)n, y_n \equiv +\infty, z_n \equiv 0$

- **Верхний предел** x_n : $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$
- **Нижний предел** x_n : $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$

Верхний и нижний пределы всегда существуют.

Теорема 3. Свойства верхнего и нижнего пределов

1. $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$
2. $\forall n \quad x_n \leq \tilde{x}_n \Rightarrow$:
 - (a) $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} \tilde{x}_n$
 - (b) $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} \tilde{x}_n$
3. $\lambda \geq 0 \Rightarrow \overline{\lim}(\lambda x_n) = \lambda \overline{\lim} x_n; \underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$, считаем что $0 \cdot (\pm\infty) = 0$
4. $\overline{\lim} -x_n = -\underline{\lim} x_n; \underline{\lim} -x_n = -\overline{\lim} x_n$
5. $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$, если правая часть имеет смысл, т.е. нет ситуации вида $+\infty - \infty$

$$\underline{\lim}(x_n + y_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n$$
6. $t_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + l$
7. $t_n \rightarrow l \in (0, +\infty) \Rightarrow \overline{\lim}(t_n x_n) = l \overline{\lim} x_n$

Доказательство. 1. $y_n \leq x_n \leq z_n$, по предельному переходу тривиально.

2. $z_n = \sup(x_n, x_{n+1}, \dots), \tilde{z}_n = \sup(\tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \dots) \Rightarrow z_n \leq \tilde{z}_n$

3. $\sup \lambda E = \lambda \sup E$

4. $\sup -E = -\inf E$

$$5. \sup(x_n + y_n, x_{n+1} + y_{n+1}, \dots) \leq \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) + \sup(y_n, y_{n+1}, \dots)$$

$$6. \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \forall k > N_0 \quad x_k + l - \varepsilon < x_k + t_k < x_k + l + \varepsilon$$

$\forall N > N_0$, перейдем к \sup по $k \geq N$:

$$y_N + l - \varepsilon < \sup(x_N + t_N, x_{N+1} + t_{N+1}, \dots) \leq y_N + l + \varepsilon$$

Предельный переход:

$$\overline{\lim} x_N + l - \varepsilon \leq \overline{\sup}(x_N + t_N) \leq \overline{\lim} x_N + l + \varepsilon$$

$$\lim(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + l$$

7. То же самое.

□