

Определение предела дает функцию  $N(\varepsilon)$ , хорошо приспособленную для изучения неравенства  $\rho(x_n, a) < \varepsilon$  для  $n \in (N; +\infty)$ . Кроме того, для последовательности  $r_n = \rho(x_n, a) \quad |r_n| < \varepsilon$ .

**Теорема 1. О единственности предела.**  $(X, \rho)$  — метрическое пр-во,  $a, b \in X$ ,  $(x_n)$  — послед. в  $X$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ ,  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ , тогда  $a = b$

*Доказательство.*

Докажем от противного — пусть  $a \neq b$ . Возьмем  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\rho(a, b)$

$$\exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \quad \forall n > K(\varepsilon) \quad \rho(x_n, b) < \varepsilon$$

При  $n > \max(N(\varepsilon), K(\varepsilon)) \quad \rho(a, b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(b, x_n) < 2\varepsilon < \rho(a, b)$  — противоречие

□

**Определение.**  $A \subset X$  — **ограничено**, если  $\exists x_0 \in X \quad \exists R > 0 \quad A \subset B(x_0, R)$

Пусть  $b \in X$ .  $A$  — **огр.**  $\Leftrightarrow \exists r > 0 \quad A \subset B(b, r)$

$$A \subset B(x_0, R) \Rightarrow A \subset B(b, \rho(x_0, b) \pm R)$$

**Теорема 2.** Если  $(x, \rho)$  — метрическое пр-во,  $(x_n)$  — послед. в  $X$ ,  $x_n$  сходится, тогда  $x_n$  — ограничен.

*Доказательство.*

$$\text{Пусть } a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

$$\forall U(a) \quad \exists N \quad \forall n > N \quad x_n \in U(a)$$

$$U(a) = B(a, \varepsilon)$$

$$r := \max(\varepsilon, \rho(x_1, a), \rho(x_2, a) \dots \rho(x_N, a)) + 1$$

$$\text{тогда } \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in B(a, r)$$

□

## Порядковые свойства предела

**Теорема 3. О предельном переходе в неравенствах для  $\mathbb{R}$ .** Если  $(x_n), (y_n)$  — вещественные последовательности  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b, \forall n \quad x_n \leq y_n$ , тогда  $a \leq b$ .

*Доказательство.*

Докажем от противного. Пусть  $a > b, 0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2}$ .

$$\exists N(\varepsilon) \forall n > N \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\exists K(\varepsilon) \forall n > K \quad b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

При  $n > \max(N, K)$   $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$  — противоречие

□

*Примечание.* Если вместо " $\forall n \quad x_n \leq y_n$ " потребовать: " $\exists M \quad \forall n > M \quad x_n \leq y_n$ " то утв. по-прежнему верно

*Примечание.*  $x_n = -\frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n}$ . тогда  $x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0$ .  $x_n < y_n$ , но пределы совпадают. То есть даже если  $x_n < y_n$  строго,  $a \leq b$  — нестрого.

*Следствие 3.1.*  $(x_n)$  — вещественная последовательность,  $a, b \in \mathbb{R}$

1.  $\forall n \quad x_n \leq a \Rightarrow \lim x_n \leq a$
2.  $\forall n \quad x_n \geq b \Rightarrow \lim x_n \geq b$
3.  $\forall n \quad x_n \in [a, b] \Rightarrow \lim x_n \in [a, b]$

**Теорема 4. О двух городских (о сжатой последовательности).** Если  $(x_n), (y_n), (z_n)$  — вещ. посл.,  $\forall n \quad x_n \leq y_n \leq z_n, \lim x_n = \lim z_n = a$ , тогда  $\exists \lim y_n = a$

*Доказательство.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall n > K \quad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = \max(N, K) \quad \forall n > N_0 \quad a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

По определению  $\lim y_n = a$

□

*Следствие 4.1.*  $(y_n), (z_n) \quad \forall n \quad |y_n| \leq z_n, \quad \exists \lim z_n = 0$ , тогда  $y_n \rightarrow 0$ . Доказательство тривиально, т.к.  $y_n$  ограничено  $z_n$  и  $-z_n$ .

**Определение.**  $(x_n)$  — вещ. посл. называется бесконечно малой, если  $x_n \rightarrow 0$

**Теорема 5.** Если  $(x_n), (y_n)$  — вещ. посл.,  $x_n$  — беск. мал.,  $y_n$  — огр., тогда  $x_n y_n$  — беск. мал.

*Доказательство.*

$$\exists R \quad \forall n \quad |y_n| < R, \text{ т.к. } y_n \text{ — огр.}$$

$$|x_n y_n| \leq R |x_n|, R |x_n| \rightarrow 0 \Rightarrow y_n \rightarrow 0$$

□

## Нормированные пространства

**Определение.** Если  $K$  — поле ( $K = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ),  $X$  — множество, то  $X$  называется линейным пространством над полем  $K$  (и тогда  $K$  называется полем скаляр), если определены следующие две операции:

1.  $+$  :  $X \times X \rightarrow X$  — сложение векторов
2.  $\cdot$  :  $K \times X \rightarrow X$  — умножение векторов на скаляры

Для этих операций выполняются соответствующие аксиомы (здесь  $A, B, C \in X$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ):

Аксиомы сложения векторов

1.  $A + B = B + A$
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
3.  $\exists 0 \in X : A + 0 = A$

Аксиомы умножения векторов на скаляры

1.  $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$
2.  $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$
3.  $(ab) \cdot A = a(b \cdot A)$
4.  $\exists 1 \in X : 1 \cdot a = a$

Ещё есть аксиома  $\exists -A \in X : A + (-A) = 0$ , но у нас её не было.

**Определение.** Норма — отображение  $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ , если  $X$  — линейное пространство (над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ) и выполняется следующее:

1.  $\forall x \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. Неравенство треугольника:  $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Определение.** Полунорма — норма без свойства  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**Определение.** Нормированное пространство —  $(X, \|\cdot\|)$ , где  $\|\cdot\|$  — норма

**Лемма 1.** О свойстве полунормы.

1.  $p\left(\sum_{finite} \lambda_k x_k\right) \leq \sum \lambda_k p(x_k)$
2.  $p(0) = 0$  — тут  $0 \in X$
3.  $p(-x) = p(x)$

$$4. |p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$$

*Доказательство.* 1.  $p(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots) \leq p(\lambda_1 x_1) + p(\lambda_2 x_2 + \dots)$

2. тривиально

3. тривиально

$$4. -p(x - y) \leq p(x) - p(y) \leq p(x - y) \\ p(x) = p(y + (x - y)) \leq p(y) + p(x - y)$$

□

Примеры норм:

$$1. X = \mathbb{R}^m \quad \|x\| = \sqrt{\sum_i^m x_i^2} \\ X = \mathbb{C}^m \quad \|x\| = \sqrt{\sum_i^m |x_i|^2}$$

$$2. (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty) \quad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|)$$

$$3. (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1) \quad \|x\|_1 = \sum_i^m |x_i|$$

(a)  $p(x) = |x_1|$  — полунорма, но не норма

*Примечание.* Если  $(X, \|\cdot\|)$  — норм. пр-во, тогда  $\rho(x, y) := \|x - y\|$  — метрика, порожденная нормой. Не все метрики порождены нормами, например  $\rho = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ .

## Арифметические свойства предела

**Теорема 6.** Об арифметических свойствах предела в нормированном пространстве.

Если  $(X, \|\cdot\|)$  — норм. пр-во,  $(x_n), (y_n)$  — посл. в  $X$ ,  $\lambda_n$  — посл. скаляров, и  $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0, \lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , тогда:

$$1. x_n \pm y_n \rightarrow x_0 \pm y_0$$

$$2. \lambda_n x_n \rightarrow \lambda_0 x_0$$

$$3. \|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$$

*Доказательство.* 1.  $\forall \varepsilon \exists N_1 \forall n > N_1 \quad \|x_n - x_0\| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon \exists N_2 \forall n > N_2 \quad \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$

$$N := \max(N_1, N_2)$$

$$\forall \varepsilon \forall n > N \quad \|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \leq 2\varepsilon$$

2.  $\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0 + \lambda_0 x_n - \lambda_0 x_n\| = \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n + (x_n - x_0)\lambda_0\| \leq \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n\| + \|(x_n - x_0)\lambda_0\| = \|x_n\|\|\lambda_n - \lambda_0\| + \|x_n - x_0\|\|\lambda_0\|$
- $\|\lambda_n - \lambda_0\|$  и  $\|x_n - x_0\|$  — бесконечно малые,  $\|x_n\|$  и  $\|\lambda_n\|$  — ограниченные  $\Rightarrow \|x_n\|\|\lambda_n - \lambda_0\| + \|x_n - x_0\|\|\lambda_0\|$  — бесконечно малая
3. Докажем, что  $|||x_n|| - ||x_0||| \leq \|x_n - x_0\|$ .

$$\|x_n\| = \|x_0 + (x_n - x_0)\| \leq \|x_0\| + \|x_n - x_0\| \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \leq \|x_n - x_0\|$$

Аналогично  $|||x_0|| - ||x_n||| \leq \|x_n - x_0\|$ .

Тогда  $|||x_n|| - ||x_0||| \leq \|x_n - x_0\|$

□

**Теорема 7. Об арифметических свойствах пределов в  $\mathbb{R}$ .**

Для  $(x_n), (y_n)$  — вещ. посл.,  $\forall n \ y_n \neq 0, y_0 \neq 0$ :

4.  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x_0}{y_0}$

**Доказательство взято из воздуха.**

*Доказательство.* Докажем, что  $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{y_0}$ , если  $\forall n \ y_n \neq 0, y_0 \neq 0$ .

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \left| \frac{y_0 - y_n}{y_n y_0} \right|$$

В числителе бесконечно малая последовательность, в знаменателе ограниченная  $\Rightarrow$  дробь — бесконечно малая последовательность. □