

1. Обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как  $\vdash_{\text{и}}$ , а выводимость в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как  $\vdash_{\text{е}}$ .

Заметим, что хоть языки этих исчислений и отличаются, мы можем построить преобразование высказываний этих исчислений друг в друга: приняв  $\perp \Rightarrow A \& \neg A$  и  $\neg \alpha \Rightarrow (\alpha \rightarrow \perp)$ . Будем обозначать высказывания в гильбертовском ИИВ обычными греческими буквами, а соответствующие им высказывания в ИИВ натурального вывода — буквами с апострофами:  $\alpha', \beta', \dots$ .

- (а) Пусть  $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$ . Покажите, что  $\Gamma \vdash_{\text{е}} \alpha'$ : предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для одного случая базы и одного случая перехода индукции.

Общая схема: перебираем шаги доказательства в гильбертовом стиле и добавляем соответствующие шаги в естественном выводе в зависимости от происхождения этого шага.

База: рассмотрим случай  $\gamma_1 \in \Gamma$ . Тогда дерево вывода  $\gamma_1 : \overline{\Gamma \vdash \gamma_1, \gamma_1 \in \Gamma}$

Переход: рассмотрим случай МР. Тогда дерево вывода  $\gamma_n : \frac{\overline{\Gamma \vdash \gamma_i \rightarrow \gamma_k} \quad \overline{\Gamma \vdash \gamma_i}}{\Gamma \vdash \gamma_k}$

- (b) Пусть  $\Gamma \vdash_{\text{е}} \alpha'$ . Покажите, что  $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$ .

Докажем по индукции по высоте дерева.

Доказательство. База:  $n = 1$ . Единственный случай — аксиома. Он очевиден.

Переход:

- i.  $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$ . По индукционному предположению  $\Gamma, \varphi \vdash \psi$  и по теореме об индукции  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
- ii.  $\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}$ . По индукционному предположению  $\Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi$ . Объединим два доказательства, припишем аксиому  $\exists \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \& \psi$  и применим дважды МР.
- iii.  $\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$ . По индукционному предположению  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi, \Gamma \vdash \varphi$ . Объединим два доказательства, используем МР.

Прочие случаи аналогичны. □

2. Рассмотрим  $\mathbb{N}_0$  (натуральные числа с нулём) с традиционным отношением порядка как решётку. Каков будет смысл операций  $(+)$  и  $(\cdot)$  в данной решётке, есть ли в ней псевдодополнение, определены ли 0 или 1? Приведите несколько свойств

традиционных определений  $(+)$  и  $(\cdot)$ , которые будут всё равно выполнены при таком переопределении, и несколько свойств, которые перестанут выполняться.

$$a + b = \max(a, b) \quad a \cdot b = \min(a, b)$$

Псевдополнения нет для произвольных элементов, т.к.  $\min(a, c) \leq b$  не ограничивает сверху  $c$  для  $a \leq b$ . Для  $a \not\leq b$   $a \rightarrow b = b$ .

**0** это 0, т.к.  $\forall x \in \mathbb{N}_0 \quad 0 \leq x$

**1** нет, т.к.  $1 + 1 \not\leq 1$

Выполнены:

- (a)  $a \cdot 0 = 0$
- (b)  $a + 0 = a$
- (c)  $a + b + c = a + (b + c)$
- (d)  $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- (e)  $a + b = b + a$
- (f)  $a \cdot b = b \cdot a$

Не выполнены:

- (a)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

### 3. Постройте следующие примеры:

- (a) • непустого частично-упорядоченного множества, не имеющего операций  $(+)$  и  $(\cdot)$  ни для каких элементов;

Такого не существует, т.к.  $\forall a \quad a \leq a$ , следовательно в  $a + a$  все элементы сравнимы с  $a$  и при этом  $a \in (a + a)$ . Таким образом, наименьший —  $a$ . Аналогично можно сказать про  $\cdot$ .

- имеющего операцию  $(+)$  для всех элементов, но не имеющего  $(\cdot)$  для некоторых;

Следующий номер, но наоборот.

- имеющего операцию  $(\cdot)$  для всех элементов, но не имеющего  $(+)$  для некоторых.

$\{1, 2, 3\}$ , упорядоченное по делимости.

- (b) • решётки, не являющейся дистрибутивной решёткой;  
 $\mathbb{N}_0$  со стандартным порядком.

- дистрибутивной, но не импликативной решётки;

$\mathbb{Z}$  и его конечные подмножества с отношением  $\subset$ , т.е.  $\{X \mid X \subset \mathbb{Z}, |X| \in \mathbb{N}_0\}$ . Дистрибутивность тривиальна из теории множеств, как и то, что это решетка. Нет  $\{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ , т.к.  $\{c \mid \{0\} \cdot c \leq \mathbb{Z}\}$  есть все конечные подмножества, а среди них нет наибольшего.

- импликативной решётки без 0.

$$-\mathbb{N}_0, \leq$$

4. Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:

- (а) ассоциативность:  $a + (b + c) = (a + b) + c$  и  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ;

Тривиально из теории множеств.

- (b) монотонность: пусть  $a \preceq b$  и  $c \preceq d$ , тогда  $a + c \preceq b + d$  и  $a \cdot c \preceq b \cdot d$ ;

$a \preceq b \Rightarrow a \leq b + d, c \leq d \Rightarrow c \leq b + d$ . Таким образом,  $a + c \leq b + d$ .

Вторая часть аналогично.

- (c) Законы поглощения:  $a \cdot (a + b) = a$ ;  $a + (a \cdot b) = a$ ;

i.  $a \cdot (a + b) = a$

$a + b$  либо  $= a$ , либо  $\leq a$ . В обоих случаях  $a \cdot (a + b) = a$

ii.  $a + (a \cdot b) = a$

$a + b$  либо  $= a$ , либо  $\geq a$ . В обоих случаях  $a + (a \cdot b) = a$

- (d)  $a \preceq b$  выполнено тогда и только тогда, когда  $a \rightarrow b = 1$ ;

$$a \rightarrow b = 1 \Leftrightarrow 1 \in \{c \mid a \cdot c \leq b\} \Leftrightarrow a \cdot 1 \leq b \Leftrightarrow a \leq b$$

- (e) из  $a \preceq b$  следует  $b \rightarrow c \preceq a \rightarrow c$  и  $c \rightarrow a \preceq c \rightarrow b$ ;

$$a \cdot (b \rightarrow c) \leq b \cdot (b \rightarrow c) \leq c$$

$$b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$$

$$c \cdot (c \rightarrow a) \leq a \leq b$$

$$c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$$

- (f) из  $a \preceq b \rightarrow c$  следует  $a \cdot b \preceq c$ ;

$$a \leq b \rightarrow c \Rightarrow \exists d : \begin{cases} d \geq a \\ b \cdot d \leq c \end{cases} \Rightarrow b \cdot a \leq c$$

Так как множество, из которого берется  $b \cdot a$  есть подмножество " $b \cdot d$ "

$$(g) \ b \leq a \rightarrow b \text{ и } a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1;$$

$$\begin{aligned} b \cdot a &\leq b \\ a \cdot b &\leq b \\ b &\leq a \rightarrow b \end{aligned}$$

$a \leq b \rightarrow a$  по пункту d.

$$(h) \ a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c));$$

$$(i) \ a \leq b \rightarrow a \cdot b \text{ и } a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$$

$$(j) \ a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$$

5. Покажите, что импликативная решётка дистрибутивна.

Пусть  $d = a \cdot b + a \cdot c$ . Рассмотрим  $a \rightarrow d$ .

$$a \cdot b \leq d \tag{1}$$

$$b \leq a \rightarrow d \tag{2}$$

$$a \cdot c \leq d \tag{3}$$

$$c \leq a \rightarrow d \tag{4}$$

$$b + c \leq a \rightarrow d \tag{5}$$

$$a \cdot (b + c) \leq a \cdot (a \rightarrow d) \tag{6}$$

$$\leq d \tag{7}$$

$$= a \cdot b + a \cdot c \tag{8}$$

- (1) и (3): по построению  $d$
- (2) и (4): по определению  $\rightarrow$
- (5): из (2) и (4)

Итого  $a \cdot (b + c) \leq a \cdot b + a \cdot c$ , покажем, что  $a \cdot (b + c) \geq a \cdot b + a \cdot c$

$$a \cdot b \leq a \tag{9}$$

$$a \cdot b \leq b \leq b + c \tag{10}$$

$$a \cdot b \leq a \cdot (b + c) \tag{11}$$

$$a \cdot c \leq a \cdot (b + c) \quad (12)$$

$$a \cdot b + a \cdot c \leq a \cdot (b + c) \quad (13)$$

- (12): аналогично (11)

6. Покажите, что в дистрибутивной решётке (всегда  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ ) также выполнено и  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ .

$$(a + b) \cdot (a + c) = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot c \quad (14)$$

$$= a + (a + b) \cdot c \quad (15)$$

$$= a + a \cdot c + b \cdot c \quad (16)$$

$$= a + b \cdot c \quad (17)$$

- (14): по дистрибутивности

7. Рассмотрим топологическое пространство  $\langle X, \Omega \rangle$ , упорядочим его топологию  $\Omega$  отношением  $\subseteq$ . Покажите, что такая конструкция является псевдобулевой алгеброй, а если топология — дискретная (любое подмножество  $X$  открыто), то булевой алгеброй.

Это решетка, т.к. топология замкнута по  $\cap, \cup$  и  $a + b = a \cup b, a - b = a \cap b$ .

Решетка импликативна, т.к.  $c = a \rightarrow b \Rightarrow a \cap c \subset b \Rightarrow c = (b \cup (X \setminus a))^\circ$ , а оно определено однозначно, т.е.  $\exists$ .

Ноль в этой решетке есть  $\emptyset$ , таким образом это псевдобулева алгебра.

$$a + (a \rightarrow 0) = a \cup \emptyset \cup (X \setminus a)^\circ \stackrel{\text{дискр.}}{=} a \cup (X \setminus a) = X = 1$$

8. Докажите, что ИИВ корректно, если в качестве модели выбрать псевдобулеву алгебру, а функции оценок определить так:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \&\beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \neg \alpha \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow 0 \\ \llbracket \perp \rrbracket &= 0 \end{aligned}$$

Разберем случаи:

| $\llbracket \alpha \rrbracket$ | $\llbracket \beta \rrbracket$ | $\llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket$ |
|--------------------------------|-------------------------------|--|
| 0                              | 0                             | 0  |
| 0                              | 1                             | 0  |
| 1                              | 0                             | 0  |
| 1                              | 1                             | 1  |

| $\llbracket \alpha \rrbracket$ | $\llbracket \beta \rrbracket$ | $\llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket$ |
|--------------------------------|-------------------------------|--|
| 0                              | 0                             | 0  |
| 0                              | 1                             | 1  |
| 1                              | 0                             | 1  |
| 1                              | 1                             | 1  |

| $\llbracket \alpha \rrbracket$ | $\llbracket \beta \rrbracket$ | $\llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket$ |
|--------------------------------|-------------------------------|--|
| 0                              | 0                             | 1  |
| 0                              | 1                             | 1  |
| 1                              | 0                             | 0  |
| 1                              | 1                             | 1  |

| $\llbracket \alpha \rrbracket$ | $\llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow 0$ |
|--------------------------------|--|
| 0                              | 1  |
| 1                              | 0  |

Тогда несложно заметить, что с  $V = \{0, 1\}$  оценки на псевдобулевой алгебре эквивалентны оценкам обычной интуиционистской логики, а она корректна.

9. Пусть задано отношение *предпорядка*  $R$  (транзитивное и рефлексивное, но необязательно антисимметричное) на множестве  $A$ . Напомним несколько определений:

- определим отношение  $R^- := \{\langle x, y \rangle \mid xRy \text{ и } yRx\}$ ;
- $[a]_{R^-} := \{x \mid aR^-x\}$  — класс эквивалентности, порождённый элементом  $a$ ;
- фактор-множество  $A/R^- := \{[a]_{R^-} \mid a \in A\}$ ;
- на  $A/R^-$  можно перенести отношение  $R^* := \{\langle [a], [b] \rangle \mid aRb\}$ .

Покажите, что: отношение  $R^-$  — отношение эквивалентности; если  $x \in [a]_{R^-}$ ,  $y \in [b]_{R^-}$  и  $aRb$ , то  $xRy$ ; отношение  $R^*$  — отношение порядка на  $A/R^-$ .

*Доказательство.* Рефлексивность и симметричность очевидны из определения  $R^-$ .

$\langle xR^-y, yR^-z \Rightarrow xRy, yRz \Rightarrow xRz$  и аналогично  $zRx \Rightarrow xR^-z$ , получили транзитивность.

$$aRb, aR^-x, bR^-y \Rightarrow aRx, bRy. \begin{cases} xRa \\ aRb \\ bRy \end{cases} \Rightarrow xRy$$

- Рефлексивность:  $aR^*a \Leftarrow aRa$ , что выполнено по рефлексивности  $R$
- Антисимметричность:  $aR^*b, bR^*a \Rightarrow aRb, bRa \Rightarrow a, b \in [a]_{R^-} \text{ и } [b]_{R^-}$ , но классы эквивалентности не пересекаются  $\Rightarrow a = b$ .
- Транзитивность: по транзитивности  $R$ .

□

10. Покажем, что конструкция из определения алгебры Линденбаума действительно является решёткой:

(а) Покажите, что отношение  $(\approx)$  — отношение эквивалентности (напомним, что  $\alpha \preceq \beta$ , если  $\alpha \vdash \beta$ , а  $\alpha \approx \beta$ , если  $\alpha \vdash \beta$  и  $\beta \vdash \alpha$ ). Подсказка: воспользуйтесь предыдущим заданием.

Покажем, что  $\vdash$  есть предпорядок.

- Рефлексивность:  $\alpha \vdash \alpha$
- Транзитивность:  $\alpha \vdash \beta, \beta \vdash \gamma$  — верно по МР и теореме о дедукции. Также можно без них — берем вывод  $\beta$ , приписываем вывод  $\gamma$ , но удаляем шаги  $\beta \in \Gamma$ .

$\vdash$  это предпорядок, а  $\approx$  есть его  $R^\equiv$ . По предыдущему номеру  $\approx$  — отношение эквивалентности.

(b) Покажите, что  $[\alpha]_\approx \cdot [\beta]_\approx = [\alpha \& \beta]_\approx$ . Для этого, например, можно показать:

- $\alpha \& \beta \preceq \alpha$ :  $\alpha \& \beta \vdash \alpha$  — очевидно (аксиома 4 и МР).
- если  $\gamma \preceq \alpha$  и  $\gamma \preceq \beta$ , то  $\gamma \preceq \alpha \& \beta$ ; (аксиома 3 и МР дважды)
- операция однозначно определена для всех элементов решётки (то есть определена для всех классов эквивалентности и не зависит от выбора представителей). Подсказка: воспользуйтесь предыдущим заданием.

Покажем независимость от выбора представителей:

Если  $\alpha \approx \gamma$ , то  $\alpha \& \beta \approx \gamma \& \beta$ , т.к.:

$$\alpha \& \beta \approx \gamma \& \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \& \beta \vdash \gamma \& \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \& \beta \vdash \alpha, \beta \\ \alpha \vdash \gamma \end{cases} \\ \gamma \& \beta \vdash \alpha \& \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \& \beta \vdash \alpha, \beta \\ \gamma \vdash \alpha \end{cases} \end{cases}$$

$\beta \approx \gamma \Rightarrow \alpha \& \beta \approx \alpha \& \gamma$  аналогично.

Определенность для всех классов была показана в предыдущих пунктах.

(с) Покажите, что  $[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta]$ .

- $\alpha \preceq \alpha \vee \beta$  и  $\beta \preceq \alpha \vee \beta$  — очевидно по аксиомам 6, 7.

- Если  $\alpha \preceq \gamma$  и  $\beta \preceq \gamma$ , то  $\alpha \vee \beta \preceq \gamma$

$$\begin{cases} \alpha \vdash \gamma \\ \beta \vdash \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vdash \alpha \rightarrow \gamma \\ \vdash \beta \rightarrow \gamma \end{cases} \xrightarrow{\text{акс. 8, М.Р.}} \alpha \vee \beta \vdash \gamma$$

- Независимость от выбора представителей

Если  $\alpha \approx \gamma$ , то  $\alpha \vee \beta \approx \gamma \vee \beta$ , т.к.:

$$\alpha \vee \beta \approx \gamma \vee \beta \Leftarrow \begin{cases} \alpha \vee \beta \vdash \gamma \vee \beta \\ \gamma \vee \beta \vdash \alpha \vee \beta \end{cases}$$

$$\Gamma := \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \gamma$$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma, \alpha \vdash \alpha} \quad \overline{\Gamma, \alpha \vdash \alpha \rightarrow \gamma}}{\Gamma, \alpha \vdash \gamma}}{\Gamma, \alpha \vdash \gamma \vee \beta} \quad \frac{\overline{\Gamma, \beta \vdash \beta}}{\Gamma, \beta \vdash \gamma \vee \beta} \quad \overline{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}}{\Gamma \vdash \gamma \vee \beta}$$

Аналогично для  $\gamma \vee \beta \vdash \alpha \vee \beta$

(d) Покажите, что  $[\alpha] \rightarrow [\beta] = [\alpha \rightarrow \beta]$ .

- $\alpha \& (\alpha \rightarrow \beta) \preceq \beta$  — по аксиомам 4, 5 и М.Р.
- Если  $\alpha \& \gamma \preceq \beta$ , то  $\gamma \preceq \alpha \rightarrow \beta$

$$\begin{aligned} \alpha \& \gamma \rightarrow \beta & \vdash \gamma \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \& \gamma \rightarrow \beta, \gamma & \vdash \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \& \gamma \rightarrow \beta, \gamma, \alpha & \vdash \beta \end{aligned}$$

Это доказывается через аксиому 3 и М.Р.

- Независимость от выбора представителей

Если  $\gamma \approx \alpha$ , то:

$$\text{i. } \alpha \rightarrow \beta \approx \gamma \rightarrow \beta$$

$$\Gamma := \alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \alpha$$



$$\frac{\frac{\overline{\Gamma, \gamma \vdash \gamma} \quad \overline{\Gamma, \gamma \vdash \gamma \rightarrow \alpha}}{\Gamma, \gamma \vdash \alpha} \quad \overline{\Gamma, \gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}}{\Gamma, \gamma \vdash \beta} \quad \frac{\Gamma, \gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \gamma \rightarrow \beta}$$

Аналогично  $\gamma \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

ii.  $\beta \rightarrow \alpha \approx \beta \rightarrow \gamma$

$\Gamma := \beta \rightarrow \alpha, \alpha \rightarrow \gamma$

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma, \beta \vdash \beta} \quad \overline{\Gamma, \beta \vdash \beta \rightarrow \alpha}}{\Gamma, \beta \vdash \alpha} \quad \overline{\Gamma, \beta \vdash \alpha \rightarrow \gamma}}{\Gamma, \beta \vdash \gamma} \quad \frac{\Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma}$$

(е) Найдите классы эквивалентности для 0 и 1.

$\forall \alpha \ 0 \preceq \alpha$

$$\begin{aligned} 0 &\vdash \alpha \\ &\vdash 0 \rightarrow \alpha \\ &\vdash 0 \rightarrow \neg \alpha \\ &\vdash (0 \rightarrow \alpha) \rightarrow (0 \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow \neg 0 \\ &\vdash \neg 0 \end{aligned}$$

Итого  $\forall \alpha \ 0 \preceq \alpha \Rightarrow \vdash \neg 0$ . Докажем “ $\Leftarrow$ ”.

$$\frac{\overline{\neg 0, 0 \vdash 0} \quad \overline{\neg 0, 0 \vdash 0 \rightarrow \perp}}{\neg 0, 0 \vdash \perp} \quad \frac{\neg 0, 0 \vdash \perp}{\neg 0, 0 \vdash \alpha} \quad \frac{\neg 0, 0 \vdash \alpha}{\neg 0 \vdash 0 \rightarrow \alpha}$$

Итого  $[0]_{\approx}$  есть множество формул  $\beta$ , таких что  $\vdash \neg \beta$ .

$\forall \alpha \ \alpha \preceq 1$

Рассмотрим  $\alpha = \beta \rightarrow \beta$ . По построению 1 получается  $\beta \rightarrow \beta \vdash 1$ . Рассмотрим такое доказательство. Если в нём используется  $\beta \rightarrow \beta$  с обоснованием  $\in \Gamma$ , вставим доказательство  $\beta \rightarrow \beta$  и удалим такой шаг. Доказательство останется верным, но не будет использовать факт  $\beta \rightarrow \beta \in \Gamma$ , следовательно  $\vdash 1$ .

Итого  $\forall \alpha \ \alpha \preceq 1 \Rightarrow \vdash 1$ . Докажем “ $\Leftarrow$ ”. Этот факт очевиден, т.к. доказательство  $\vdash 1$  есть доказательство  $\alpha \vdash 1$ .