$$F' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Теорема 1 (о неявном отображении).

• 
$$F: O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$$

- О откр.
- $F \in C^r(O, \mathbb{R}^n)$
- $(a,b) \in O$
- F(a,b) = 0
- $\det F_y'(a,b) \neq 0$

Тогда:

1. 
$$\exists$$
 откр.  $P \subset \mathbb{R}^m, a \in P$   
 $\exists$  откр.  $Q \subset \mathbb{R}^n, b \in Q$   
 $\exists! \Phi: P \to Q \in C^r: \forall x \in P \ F(x, \Phi(x)) = 0$   
2.  $\Phi'(x) = -\left(F'_v(x, \Phi(x))\right)^{-1} \cdot F'_x(x, \Phi(x))$ 

В терминах системы уравнений: Дана система из n функций,  $f_i \in C^r$ .

$$\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Пусть  $(a,b)=(a_1\dots a_m,b_1\dots b_n)$  — решение системы и  $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right)\neq 0$ . Тогда  $\exists U(a)\subset\mathbb{R}^m$  и  $\exists !$  Ф такие, что  $\forall x\in U(a)\ x,\Phi(x)$  — тоже решение системы.

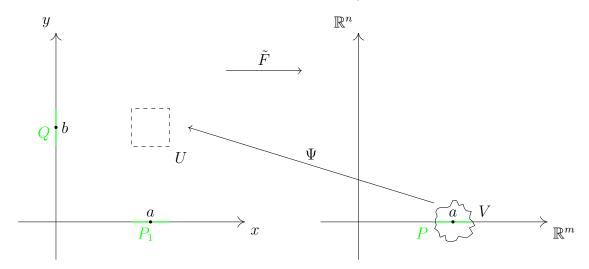
Доказательство.

$$1 \Rightarrow 2$$
:  $F(x, \Phi(x)) = 0 \Rightarrow F'_x(x, \Phi(x)) + F'_y(x, \Phi(x))\Phi'(x) = 0$ 

1: 
$$\tilde{F}: O \to \mathbb{R}^{m+n}: (x,y) \mapsto (x, F(x,y)), \tilde{F}(a,b) = (a,0)$$

$$\tilde{F}' = \left(\begin{array}{c|c} E_m & 0 \\ \hline F_x' & F_y' \end{array}\right)$$

Очевидно  $\det \tilde{F}' \neq 0$  в (a,b), значит  $\exists U(a,b) : \tilde{F}\Big|_{U} -$  диффеоморфизм



- 1.  $U = P_1 \times Q$  можно так считать
- 2.  $V = \tilde{F}(U)$
- 3.  $ilde{F}$  диффеоморфизм на  $U\Rightarrow\exists\Psi= ilde{F}^{-1}:V\to U$
- 4.  $\tilde{F}$  не меняет первые m координат  $\Rightarrow \Psi(u,v) = (u,H(u,v)), H:V \to \mathbb{R}^n.$
- 5. "Ось x"  $\Leftrightarrow$  "ось u", P:= "ось u"  $=\mathbb{R}^m\times a\cap V$ , P- откр. в  $\mathbb{R}^m$ ,  $P=P_1$
- 6.  $\Phi(x) := H(x,0)$

$$F \in C^r \Rightarrow \tilde{F} \in C^r \Rightarrow \Psi \in C^r \Rightarrow H \in C^r \Rightarrow \Phi \in C^r$$

Единственность:  $(x,y) = \Psi(\tilde{F}(x,y)) = \Psi(x,0) = (x,H(x,0)) = (x,\Phi(x))$ 

Определение.

- $M \subset \mathbb{R}^m$
- $k \in \{1 \dots m\}$

M — простое k-мерное (непрерывное) многообразие в  $\mathbb{R}^m$ , если оно гомеоморфно некоторому открытому множеству  $O \subset \mathbb{R}^k$ 

Т.е. 
$$\exists \underbrace{\Phi}_{\text{параметризация}}: \underbrace{O}_{\text{откр.}} \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{сюрьекция}} M$$
 — непр., обратимо и  $\Phi^{-1}$  непрерывно.

Определение.  $M\subset \mathbb{R}^m$  — простое k-мерное  $C^r$ -гладкое многообразие в  $\mathbb{R}^m$ , если:

• 
$$\exists \Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$$

• 
$$\Phi(O) = M$$

• 
$$\Phi \in C^r$$

• 
$$\forall x \in O \operatorname{rg}\Phi'(x) = k$$

Пример.

1. Полусфера в  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ 

$$\Phi: (x,y) \mapsto (x,y,\sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$$

$$\Phi: B(0,r) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\Phi \in C^{\infty}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}, \operatorname{rg}\Phi' = 2$$

2. Цилиндр =  $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, z \in (a,b)\}$ 

$$\Phi: [0, 2\pi] \times (0, h) \to \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi,z)\mapsto (r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)$$
 — не иньективно.

Не существует  $\Phi: \underbrace{O}_{\text{односвязн.}} \subset \mathbb{R}^2 \to$  цилиндр  $\subset \mathbb{R}^3$ , потому что топология: в ци-

линдре есть дырка, в O- нет.

Если мы допускаем дырку в O, то  $(x,y)\mapsto \left(\frac{rx}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{ry}{\sqrt{x^2+y^2}},\sqrt{x^2+y^2}-1\right)$  — параметризация.

3. Сфера в  $\mathbb{R}^3$  без точки

$$\Phi: (0,2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\psi \\ R\sin\varphi\cos\psi \\ R\sin\psi \end{pmatrix}$$

Теорема 2.

- $M \subset \mathbb{R}^m$
- $1 \leq k \leq m$  (случай k=m тривиален)

M3137y2019

- $1 < r < \infty$
- $p \in M$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- 1.  $\exists U(p) \subset \mathbb{R}^m$  окрестность p в  $\mathbb{R}^m$  :  $M \cap U k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие.
- 2.  $\exists \tilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$  и функции  $f_1, f_2 \dots f_{m-k} : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ , все  $f_i \in C^r$   $x \in M \cap \tilde{U} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) = \dots = 0$ , при этом  $\operatorname{grad} f_1(p) \dots \operatorname{grad} f_{m-k}(p) \operatorname{ЛН3}$ .

Доказательство.

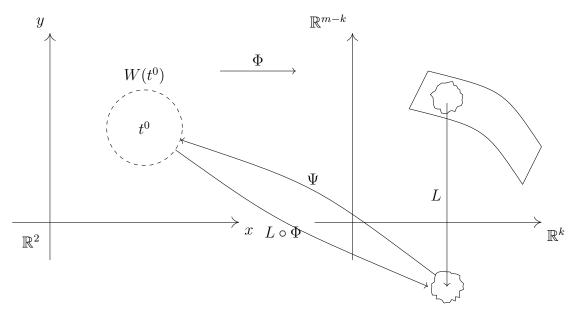
 $1\Rightarrow 2: \ \Phi$  — параметризация  $O\subset\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m, \Phi\in C^r, p=\Phi(t^0)$ 

$$rg\Phi'(t^0) = k$$

Пусть 
$$\det \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(t^0) \right)_{i,j=1\dots k} 
eq 0$$

Пусть  $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$  — проекция на первые k координат:  $(x_1 \dots x_m) \mapsto (x_1 \dots x_k)$ 

Тогда  $(L\circ\Phi)'$  — невырожденный оператор  $\Rightarrow$  локальный диффеоморфизм. Тогда если  $W(t^0)$  — окрестность точки  $t^0$ , то  $L\circ\Phi:W\to V\subset\mathbb{R}^k$  — диффеоморфизм.



Множество  $\Phi(W)$  — график некоторого отображения  $H:V \to \mathbb{R}^{m-k}$ 

Пусть 
$$\Psi = (L \circ \Phi)^{-1}$$

Берем 
$$x' \in V$$
, тогда  $(x', H(x')) = \Phi(\Psi(x'))$ , т.е.  $H \in C^r$ 

Множество  $\Phi(W)$  открыто в M по топологическому определению непрерывности  $\Rightarrow \Phi(W) = M \cap \tilde{U}$ , где  $\tilde{U}$  открыто в  $\mathbb{R}^m$ 

Можно считать, что  $\tilde{U}\subset V\times\mathbb{R}^{m-k}$ , т.к.  $\mathbb{R}^{m-k}$  открыто.

Пусть 
$$f_i: \tilde{U} \to \mathbb{R}, x \mapsto H_i(L(x)) - x_{k+i}$$
. Тогда  $x \in M \cap \tilde{U} (= \Phi(W)) \Leftrightarrow f_i(x) = 0$ 

$$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(p) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_k} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$$rg = k \Rightarrow ЛН3$$

$$2 \Rightarrow 1$$
:  $F := (f_1 \dots f_{m-k})$ 

$$I := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_{m-k}}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix}$$

Градиенты ЛНЗ  $\Rightarrow$  rgI = m - k.

Пусть ранг реализуется на последних m-k столбцах, т.е.

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p)\right)_{i,j=1\dots m-k} \neq 0$$

$$F(x_1 \dots x_k, x_{k+1} \dots x_m) = 0$$
 при  $x \in \tilde{U}$ 

По т. о неявном отображении:

$$\exists P - \text{окр.} (x_1 \dots x_k)$$
 в  $\mathbb{R}^m$ 

$$\exists Q$$
 — окр.  $(x_{k+1} \dots x_m)$  в  $\mathbb{R}^{m-k}$ 

$$\exists H \in C^r: P o Q: F(x',H(x')) \equiv 0$$
 для  $x' \in P$ 

Тогда 
$$\Phi: P \to \mathbb{R}^m: (x_1 \dots x_k) \mapsto (x_1 \dots x_k, H_1(x_1 \dots x_k), H_2(x_1 \dots x_k) \dots H_{m-k}(x_1 \dots x_k))$$

 $\Phi$  — гомеоморфизм P и  $M\cap \tilde{U},$  потому что  $\Phi^{-1}$  — фактически проекция.

Следствие 2.1 (о двух параметризациях).

- $M \subset \mathbb{R}^m k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие
- $p \in M$
- $\exists$  две параметризации:

$$\Phi_1: O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_1(t^0) = p$$

M3137y2019 28.9.2020

$$\Phi_2: O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U(p) \cap M \subset \mathbb{R}^m, \Phi_2(s^0) = p$$

Тогда  $\exists$ диффеоморфизм  $\Psi: O_1 \rightarrow O_2$ , такой что  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$ 

Доказательство.

Частный случай: Пусть  $\mathrm{rg}\Phi_1'(t^0),\mathrm{rg}\Phi_2'(s^0)$  достигается на первых k столбцах.

Тогда 
$$\Phi_1=\Phi_2\circ\underbrace{(L\circ\Phi_2)^{-1}\circ(L\circ\Phi_1)}_{\Theta$$
 – искомый диффеоморфизм



Общий случай:  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ (\Phi_2 \circ L_2)^{-1} \circ (L_2 \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ \Phi_1)$ 

Кажется, в формуле ошибка — см. иллюстрацию.



$$L_2 \circ L_1^{-1} = L_2 \circ \Phi_1 \circ (L_1 \circ \Phi_1)^{-1} \in C^r$$

Гладкость очевидна в силу гладкости всех элементов.

Невырожденность мы не доказали, поэтому то, что это диффеоморфизм — ещё не доказано. Возможно, это будет на следующей лекции.