Примечание. Эти решения проверены только частично через `lean`, верность не гарантируется.

Упражнение (2.d). $\vdash A \& B \to B \& A$

Докажем, что $A \& B \vdash B \& A$, это эквивалентно искомому.

1.	$A \& B$	$(\in \Gamma)$
2.	$A \& B \to A$	(a. 4)
3.	A	(M.P. 1, 2)
4.	$A \& B \to B$	(a. 5)
5.	B	(M.P. 1, 4)
6.	$A \to B \to A \& B$	(a. 3)
7.	$B \to A \& B$	(M.P. 3,6)
8.	$A \& B$	(M.P. 5,7)

Упражнение (2.e). $\vdash A \to \neg\neg A$

Докажем, что $A \vdash \neg\neg A$, это эквивалентно искомому.

1.	A	$(\in \Gamma)$
2.	$A \to (\neg A \to A)$	(a. 1)
3.	$\neg A \to A$	(M.P. 1, 2)
4.	$\neg A \to \neg A$	(доказано ранее)
5.	$(\neg A \to \neg A) \to (\neg A \to A) \to \neg\neg A$	(a. 9)
6.	$(\neg A \to A) \to \neg\neg A$	(M.P. 4,5)
7.	$\neg\neg A$	(M.P. 3,6)

Упражнение (2.f). $A \& \neg A \vdash B$

1.	$A \& \neg A$	$(\in \Gamma)$
2.	$A \& \neg A \to A$	(a. 4)
3.	$A \& \neg A \to \neg A$	(a. 5)
4.	A	(M.P. 1, 2)
5.	$\neg A$	(M.P. 1, 3)
6.	$A \to (\neg B \to A)$	(a. 1)
7.	$\neg B \to A$	(M.P. 4, 6)

8.	$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	(a. 1)
9.	$\neg B \to \neg A$	(M.P. 5, 8)
10.	$(\neg B \to A) \to (\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	(a. 9)
11.	$(\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	(M.P. 7,10)
12.	$\neg\neg B$	(M.P. 9,11)
13.	$\neg\neg B \to B$	(a. 10)
14.	B	(M.P. 12,13)

Упражнение (3.a). $\neg A, B \vdash \neg(A \,\&\, B)$

1.	$A \,\&\, B \to A$	(a. 4)
2.	$\neg A \to (A \,\&\, B) \to \neg A$	(a. 1)
3.	$\neg A$	$(\in \Gamma)$
4.	$A \,\&\, B \to \neg A$	(M.P. 2,3)
5.	$(A \,\&\, B \to A) \to (A \,\&\, B \to \neg A) \to \neg(A \,\&\, B)$	(a. 9)
6.	$(A \,\&\, B \to \neg A) \to \neg(A \,\&\, B)$	(M.P. 1, 5)
7.	$\neg(A \,\&\, B)$	(M.P. 4,6)

Упражнение (3.b). $A, \neg B \vdash \neg(A \,\&\, B)$

1.	$A \,\&\, B \to B$	(a. 4)
2.	$\neg B \to (A \,\&\, B) \to \neg B$	(a. 1)
3.	$\neg B$	$(\in \Gamma)$
4.	$A \,\&\, B \to \neg B$	(M.P. 2,3)
5.	$(A \,\&\, B \to B) \to (A \,\&\, B \to \neg B) \to \neg(A \,\&\, B)$	(a. 9)
6.	$(A \,\&\, B \to \neg B) \to \neg(A \,\&\, B)$	(M.P. 1, 5)
7.	$\neg(A \,\&\, B)$	(M.P. 4,6)

Упражнение (3.c). $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \,\&\, B)$

1.	$A \,\&\, B \to B$	(a. 4)

2.	$\neg B \to (A \mathbin{\&} B) \to \neg B$	(a. 1)
3.	$\neg B$	($\in \Gamma$)
4.	$A \mathbin{\&} B \to \neg B$	(M.P. 2,3)
5.	$(A \mathbin{\&} B \to B) \to (A \mathbin{\&} B \to \neg B) \to \neg(A \mathbin{\&} B)$	(a. 9)
6.	$(A \mathbin{\&} B \to \neg B) \to \neg(A \mathbin{\&} B)$	(M.P. 1, 5)
7.	$\neg(A \mathbin{\&} B)$	(M.P. 4,6)

Упражнение (3.d). $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

1.	$(A \vee B \to A) \to (A \vee B \to \neg A) \to \neg(A \vee B)$	(a. 9)
2.	$(A \to A) \to (B \to A) \to (A \vee B \to A)$	(a. 8)
3.	$A \to A$	(доказано раннее)
4.	$(B \to A) \to (A \vee B \to A)$	(M.P. 2,3)
5.	$\neg A$	($\in \Gamma$)
6.	$\neg B$	($\in \Gamma$)
7.	$\neg A \to \neg B \to B \to A$	(3.g)
8.	$\neg B \to B \to A$	(M.P. 5, 7)
9.	$B \to A$	(M.P. 6, 8)
10.	$A \vee B \to A$	(M.P. 4, 9)
11.	$(A \vee B \to \neg A) \to \neg(A \vee B)$	(M.P. 1, 10)
12.	$\neg A \to (A \vee B \to \neg A)$	(a. 1)
13.	$A \vee B \to \neg A$	(M.P. 5,12)
14.	$\neg(A \vee B)$	(M.P. 11,13)

Упражнение (3.e). $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$

3e)

(e) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$

1) $((A \to B) \to B) \to ((A \to B) \to \neg B) \to \neg(A \to B)$

2) $((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to A \to B) \to ((A \to B) \to B)$

3) $A \to (A \to B) \to A$ 4) A 5) $\cancel{((A \to B) \to \neg B) \to (A \to \neg B) \to \neg A}$ $\alpha = (A \to B)$

5) $\neg B \to A \to \neg B$

6) $((A \to B) \to (A \to B)) \to ((A \to B) \to B)$ (2, 5, MP) 6.5) $\alpha \to \alpha$

7) $(A \to B) \to B$ 8) $((A \to B) \to \neg B) \to \neg(A \to B)$ (1, 7, MP)

9) $\neg B \to (A \to B) \to \neg B$ 10) $\neg B$

11) $(A \to B) \to \neg B$ (9, 10, MP)

12) $\neg(A \to B)$ (8, 11, MP)

$A \to B \vdash A \to B$

$(A \to B) \to (A \to B)$

Упражнение (3.f). $\neg A, B \vdash A \to B$

Докажем $\neg A, B, A \vdash B$, т.к. это эквивалентно по теореме об индукции.

$$1.\quad B \qquad (\in \Gamma)$$

Упражнение (3.g). $\neg A, \neg B \vdash A \to B$

Докажем $\neg A, \neg B, A \vdash B$, т.к. это эквивалентно по теореме об индукции.

1.	A	$(\in \Gamma)$
2.	$\neg A$	$(\in \Gamma)$
3.	$A \to (\neg B \to A)$	(a. 1)
4.	$\neg B \to A$	(M.P. 1, 3)
5.	$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	(a. 1)
6.	$\neg B \to \neg A$	(M.P. 2, 5)
7.	$(\neg B \to A) \to (\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	(a. 9)
8.	$(\neg B \to \neg A) \to \neg\neg B$	(M.P. 4, 7)
9.	$\neg\neg B$	(M.P. 6, 8)
10.	$\neg\neg B \to B$	(a. 10)

11. B (M.P. 9, 10)

Упражнение (3.h). $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$

$$\begin{aligned}
&\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)\\
(A \to B) &\vdash (B \to C) \to (A \to C)\\
(A \to B), (B \to C) &\vdash (A \to C)\\
(A \to B), (B \to C), A &\vdash C
\end{aligned}$$

1. A $(\in \Gamma)$
2. $A \to B$ $(\in \Gamma)$
3. B (M.P. 1,2)
4. $B \to C$ $(\in \Gamma)$
5. C (M.P. 3,4)

Упражнение (3.i). $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (C \to A)$

Это утверждение не тавтология, что проверяется подстановкой $0, 0, 1$. В силу корректности исчисления высказываний из пустого множества можно вывести только тавтологии, таким образом это утверждение не выводится.

Упражнение (3.j). $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$$\begin{aligned}
&\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)\\
(A \to B) &\vdash \neg B \to \neg A\\
(A \to B), \neg B &\vdash \neg A
\end{aligned}$$

1. $A \to B$ $(\in \Gamma)$
2. $\neg B$ $(\in \Gamma)$
3. $\neg B \to A \to \neg B$ (a. 1)
4. $A \to \neg B$ (M.P. 2,3)
5. $(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$ (a. 9)
6. $(A \to \neg B) \to \neg A$ (M.P. 1,5)
7. $\neg A$ (M.P. 4,6)

Упражнение (4.a). $\vdash A \vee \neg A$

1. $A \to A \vee \neg A$ (акс. 6)
2. $\neg A \to A \vee \neg A$ (акс. 7)
3. $\neg\neg(A \vee \neg A) \to \neg A$ (закон контрапозиции)
4. $\neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A$ (закон контрапозиции)
5. $(\neg(A \vee \neg A) \to \neg A) \to (\neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A) \to \neg\neg(A \vee \neg A)$ (акс. 9)
6. $(\neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A) \to \neg\neg(A \vee \neg A)$ (M.P. 4,6)
7. $\neg\neg(A \vee \neg A)$ (M.P. 5,7)
8. $\neg\neg(A \vee \neg A) \to A \vee \neg A$ (акс. 10)
9. $A \vee \neg A$ (M.P. 8,9)

Упражнение (4.b). $\vdash A \,\&\, B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$

1. $A\&B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$ (т. о дедукции)
2. $(\neg A \vee \neg B \to A) \to (\neg A \vee \neg B \to \neg A) \to \neg(\neg A \vee \neg B)$ (акс.9)
3. $A\&B \to A$ (акс. 4)
4. $A\&B \to B$ (акс. 5)
5. A (M.P. 3, 1)
6. B (M.P. 4, 1)
7. $A \to (\neg A \vee \neg B) \to A$ (акс.1)
8. $(\neg A \vee \neg B) \to A$ (M.P. 7, 5)
9. $(\neg A \vee \neg B \to \neg A) \to \neg(\neg A \vee \neg B)$ (M.P. 2, 8)
10. $(\neg A \to \neg A) \to (\neg B \to \neg A) \to (\neg A \vee \neg B \to \neg A)$ (акс. 8)
11. $(\neg B \to \neg A) \to (\neg A \vee \neg B \to \neg A)$ (M.P. 8 и известный факт)
12. $B, A \vdash \neg B \to \neg A$ равносильно $B, A, \neg B \vdash \neg A$ (т. о дедукции)
13. $(A \to B) \to (A \to \neg B) \to \neg A$ (акс.9)
14. $\neg A$ (дважды аксиома 1 из B и $\neg B$)
15. $\neg B \to \neg A$ (доказали по дедукции)
16. $(\neg A \vee \neg B \to \neg A)$ (M.P. 11, 15)
17. $\neg(\neg A \vee \neg B)$ (M.P. 9, 16)

Упражнение (4.c). $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to A \vee B$

1.	$\vdash A \to (A \vee B)$	(акс. 6)
2.	$\vdash \neg(A \vee B) \to \neg A$	(контрапозиция)
3.	$\vdash B \to (A \vee B)$	
4.	$\vdash \neg(A \vee B) \to \neg B$	
5.	$\neg(A \vee B) \vdash \neg A$	
6.	$\neg(A \vee B) \vdash \neg B$	
7.	$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \to \neg B \to \neg A \,\&\, \neg B$	
8.	$\neg(A \vee B) \vdash \neg B \to \neg A \,\&\, \neg B$	
9.	$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \,\&\, \neg B$	
10.	$\vdash \neg(A \vee B) \to \neg A \,\&\, \neg B$	
11.	$\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to \neg\neg(A \vee B)$	
12.	$\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \vdash \neg\neg(A \vee B)$	
13.	$\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \vdash \neg\neg(A \vee B) \to A \vee B$	
14.	$\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \vdash A \vee B$	
15.	$\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to A \vee B$	

Упражнение (4.d). $\vdash A \,\&\, \neg A \to A \vee B$

$$\vdash A \,\&\, \neg A \to A \vee B$$
$$A \,\&\, \neg A \vdash A \vee B$$

1.	$A \,\&\, \neg A$	$(\in \Gamma)$
2.	$A \,\&\, \neg A \to A$	(a. 4)
3.	A	(M.P. 1,2)
4.	$A \to A \vee B$	(a. 6)
5.	$A \vee B$	(M.P. 3,4)

Упражнение (4.e). $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

Идея решения — рассмотрим три случая : $A \in \Gamma; \neg A, B \in \Gamma; \neg A, \neg B \in \Gamma$

Упражнение (5). Даны высказывания α и β, причём $\vdash \alpha \to \beta$ и $\alpha \not\equiv \beta$. Укажите способ построения высказывания γ, такого, что $\vdash \alpha \to \gamma$ и $\vdash \gamma \to \beta$, причём $\alpha \not\equiv \gamma$ и $\beta \not\equiv \gamma$.

Решение, рассказанное на паре $\gamma := \alpha \mathbin{\&} \beta$, неверное, т.к. при тавтологии β выполняется $\alpha \equiv \gamma$.

Верное решение: пусть множество подстановок, на которых α выполняется — $\mathcal{A}$, для β — $\mathcal{B}$. Несложно заметить, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, при этом $|\mathcal{A}| < |\mathcal{B}|$. Если $|\mathcal{A}| < |\mathcal{B}| - 1$, то можно найти множество между ними, т.е. $\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Если $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| - 1$, то нужно ввести новую переменную, чтобы разница стала больше.

Упражнение (6). $\alpha \vdash \beta, \neg\alpha \vdash \beta \Rightarrow \vdash \beta$

1.	α	$(\in \Gamma)$
2.	$\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$	(a. 1)
3.	$\neg\beta \to \alpha$	(M.P. 1,2)
4.	$\neg\alpha$	$(\in \Gamma)$
5.	$\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	(a. 1)
6.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	(M.P. 4,5)
7.	$(\neg\beta \to \alpha) \to (\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\neg\beta$	(a. 9)
8.	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\neg\beta$	(M.P. 3,7)
9.	$\neg\neg\beta$	(M.P. 6,8)
10.	$\neg\neg\beta \to \beta$	(a. 10)
11.	β	(M.P. 9,10)