

1 Равномерная сходимость последовательности

Практически все задачи решаются следующим образом:

1. Находим кандидата на роль f по формуле $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Предел берется при фиксированном x . f может зависеть от x и может быть разрывным (например, 2751.6)
2. Проверяем, что $\rho(f, f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, где $\rho(f, f_n) = \sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)|$

Методы нахождения супремума:

(a) Прямой: $\sup_{x \in (0, +\infty)} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

(b) Оценка сверху (доказывает равн. сходимость): $\sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{x+x^2}{1+n+x} \right| \leq \frac{2}{1+n} \rightarrow 0$

(c) Оценка снизу (доказывает отсутствие равн. сходимости) — обычно подстановка конкретного x (он может зависеть от n):

$$\sup_x \left| \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right| \stackrel{x:=n}{\geq} \sin(1) \not\rightarrow 0$$

(d) Оценка снизу пределом: $\sup_{g \in E} g(x) \geq \lim_{x \rightarrow A} g(x)$, где A — предельная точка E .

Есть более простой признак отсутствия равн. сходимости:

$$f_n(x) \rightrightarrows f \implies \forall x \in E \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$$

2 Равномерная сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x) \quad S_N \rightrightarrows S \text{ на } E$$

Методы доказательства:

1. По определению (см. равн. сходимость последовательностей) — самый простой вариант, для него нужен способ посчитать частную сумму. Это либо телескоп, либо прогрессия. Иногда из дроби можно получить телескоп разложением на простые дроби.
2. По абсурдности если $u_n(x) \not\rightarrow 0$, то сумма не сходится.
3. Признак Вейерштрасса

$$\sum u_n(x), x \in E:$$

$$(a) \forall x \in E : |u_n(x)| \leq C_n$$

$$(b) \sum C_n - \text{сходится}$$

Тогда ряд равномерно сходится.

Обычно берут $C_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$, но иногда нужно думать про сходимость ряда C_n , т.к. она не очевидна. Вольфрам в помощь.

При придумывании C_n можно найти точку экстремума максимума $|u_n(x)|$ ($x = \dots$) через $u_n(x)'_x$ и подставить такой x .

4. Критерий Больцано-Коши обычно доказывает отсутствие равномерной сходимости, хотя его можно использовать и для обратного.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N, \exists m \in \mathbb{N}, \exists x \quad |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| > \varepsilon$$

Тогда равномерной сходимости нет.

Идея в том, чтобы иметь большие ($\geq \frac{\varepsilon}{n}$) слагаемые, для этого надо придумать соответствующий x . Часто используется оценка суммы $|\sum_{i=n+1}^{n+m} u_i(x)| \geq \min u_i(x) \cdot m$.

Для обратного нужно построить отрицание критерия.

5. Признак Дирихле для $\sum a_n(x)b_n(x)$:

- (a) Частичные суммы $\sum a_n$ равномерно ограничены:

$$\exists C_a \quad \forall N \quad \forall x \in E \quad \left| \sum_{k=1}^N a_k(x) \right| \leq C_a$$

- (b) i. При фиксированном x функция $b_n(x)$ монотонна по n

- ii. $b_n(x) \Rightarrow 0$ на E при $n \rightarrow +\infty$

6. Признак Абеля для $\sum a_n(x)b_n(x)$:

- (a) $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на E

- (b) i. $b_n(x)$ монотонно по n

- ii. $b_n(x)$ равномерно ограничено:

$$\exists C_b \quad \forall N \quad \forall x \in E \quad |b_n(x)| \leq C_b$$

3 Свойства через ряды

1. $\bullet \sum u_n(x) = f(x)$

- $u_n(x)$ непр. в x_0
- Ряд равномерно сходится в $U(x_0)$

Тогда f непр. в x_0

- $\sum u'_n(x) = \varphi(x)$
 - $\sum u'_n(x)$ равномерно сходится в $U(x_0)$

Тогда f — дифф. в x_0 , $f'(x) = \varphi(x)$

- $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$
 - u_n непр. на $[a, b]$

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \sum \int_a^b u_n(x)dx$

Когда требуют равномерную сходимость в $U(x_0) \quad \forall x_0 \in E$, можно пытаться доказать равномерную сходимость в E . Это проще сделать, но не всегда возможно.

4 Степенные ряды

Степенной ряд — ряд вида $\sum a_n(x - x_0)^n$. Он сходится при $|x - x_0| < R$, $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

Верхний предел — наибольший предел из пределов всех подпоследовательностей.

Иногда ответ выдает $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, но не всегда.

И ещё возможно сходится при $x = x_0 \pm R$. Сходимость при таком x находится путём подстановки соответствующего x в ряд. Но этот ряд не простой, в нем не будет работать признак Даламбера и Коши.

Можно решать заменой на эквивалентное (возможно по модулю), если это не помогает, то применяется Лейбниц или Дирихле.

5 Разложение функции

Мы знаем, что если $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$, то это ряд Тейлора, т.е. $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

У нас есть пять основных разложений:

$$\begin{aligned}
 e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots
 \end{aligned}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1, 1]$$

Функции вида $f(x) = (x-x_0)^\alpha \cdot g(x)$, где $g = \sum a_n(x-x_0)^n$, раскладываются по формуле $f = \sum a_n(x-x_0)^{n+\alpha}$, то есть разложение можно домножить на $(x-x_0)^\alpha$.

Композиция сохраняется разложением.

Можно найти разложение производной ($f'(x)$), потом проинтегрировать и найти иско-
мое. Константа находится подстановкой $x = x_0$, при ней ряд после интегриации = 0,
 $f(x_0)$ может не быть 0.

6 Получение функции из ряда

В общем виде задача выглядит как : $f(x) = \sum a_n x^n$, найти $f(x)$ в виде не ряда, но может
быть и такой: $\sum a_n = ?$, тогда можно решить исходную задачу и найти ответ подстанов-
кой $x = 1$. Этот метод называется методом Абеля.

Задача решается взятием производных и интегралов. При интегралах надо не забывать
константу.

7 Вычисление сумм рядов

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$2. e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$3. \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$4. \text{Телескопические } \sum_{n=1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

Трюки

1.

$$\frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$$

2.

$$\left| x e^{-x^2 n} \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

3.

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

4. $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$ сходится при $p > 0$ и расходится при $p \leq 0$

5.

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

6.

$$\sum_{n=1}^N \sin(nx) = \sin \frac{Nx}{2} \sin \frac{(N+1)x}{2} \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

7.

$$\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{x}{2}$$

8.

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{|e^{ix} - 1|}$$

9. Если $u_n(x)$ монотонно по n , то:

$$\left| \sum_{n \geq N} (-1)^n u_n(x) \right| \leq u_N(x)$$

10. Если есть равномерная сходимость ряда в $U(0)$, то $\sum u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sum u_n(0)$.