

Лемма 1.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $\Phi \in C^r$
- Φ — параметризация многообразия $U(p) \cap M$, где $p \in M$, M — гладкое k -мерное многообразие $\Rightarrow U(p) \cap M$ — простое многообразие
- $\Phi(t^0) = p$

Тогда образ $\Phi'(t^0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть k -мерное линейное подпространство в \mathbb{R}^m . Оно не зависит от Φ .

$\Phi'(t^0)$ — касательное пространство к M в точке p , обозначается $T_p M$.

Доказательство. $\text{rg} \Phi'(t^0) = k$ по определению параметризации \Rightarrow искомое очевидно. Если взять другую параметризацию Φ_1 , то по следствию о двух параметризациях

$$\Phi = \Phi_1 \circ \Psi$$

$$\Phi' = \Phi'_1 \Psi'$$

$\Psi'(t^0)$ — невырожденный оператор \Rightarrow образ $\Phi' =$ образ Φ'_1

□

Пример. M — окружность в \mathbb{R}^2 , задается параметризацией $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t^0 := \frac{\pi}{4}$



Рис. 1: Синим — касательное пространство к окружности в a . Зеленым — аффинное (“сдвинутое”) линейное подпространство.

$$\Phi'(t^0) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Тогда $h \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} h$ — касательное подпространство.

Определение. Аффинное подпространство $\{p + v, v \in T_p M\}$ называется **аффинным касательным подпространством**.

Примечание.

1. $v \in T_p M$. Тогда \exists путь $\gamma_v : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$, такой что $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$

Доказательство. $u := (\Phi'(t_0))^{-1}(v)$



Определим путь в \mathbb{R}^k :

$$\tilde{\gamma}_v(s) := t_0 + su, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

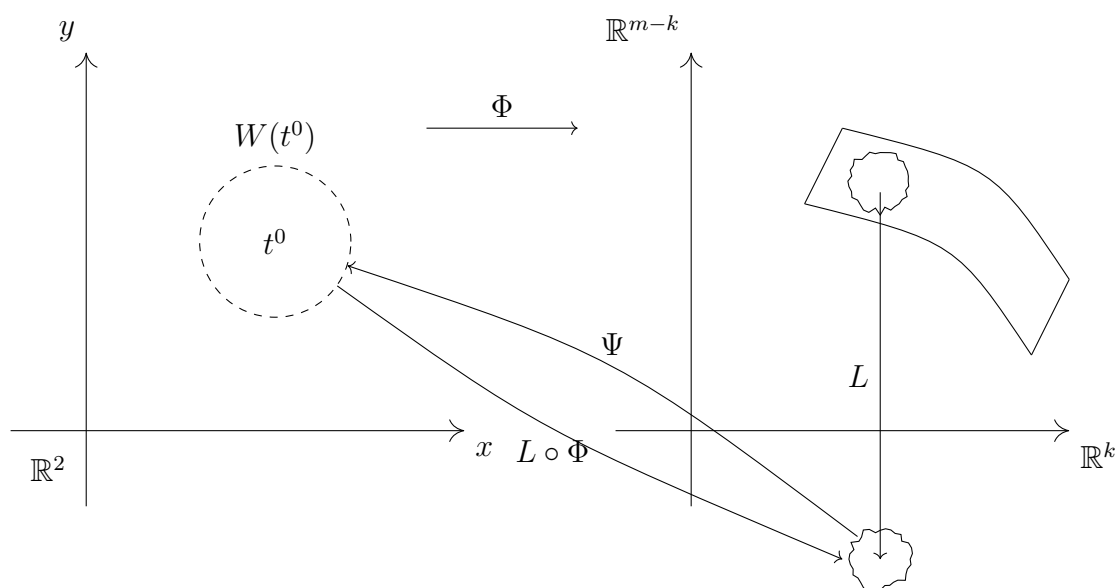
Отобразим этот путь в M и проверим, что такой путь подходит под условие:

$$\gamma_v(s) := \Phi(\tilde{\gamma}_v(s))$$

$$\gamma'_v(0) = \Phi'(\tilde{\gamma}_v(0)) \cdot \tilde{\gamma}'_v(0) = \Phi'(\tilde{\gamma}_v(0)) \cdot u = \Phi'(\tilde{\gamma}_v(0)) (\Phi'(t_0))^{-1}(v) = v$$

□

2. Пусть $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M, \gamma(0) = p$ — гладкий путь. Тогда $\gamma'(0) \in T_p M$



Доказательство. Из иллюстрации очевидно:

$$\gamma(s) = \Phi \circ \Psi \circ L \circ \gamma(s)$$

$$\gamma'(0) = \Phi'(\Psi(L(\gamma(0))))\Psi'(L(\gamma(0)))L'(\gamma(0))\gamma'(0)$$

Очевидно, что мы попадаем в образ $\Phi'(\dots)$, поэтому $\gamma'(0) \in T_p M$ □

3. $f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, f \in C(O), y = f(x)$ — поверхность в \mathbb{R}^{m+1} , задается точками (x, y) .

Тогда (аффинная) касательная плоскость в точке (a, b) задается уравнением

$$y - b = f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m)$$

Доказательство. $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$

$$\Phi(x) = (x, f(x))$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$. В каких случаях он принадлежит обра-

зу Φ' ?

$$\Phi' \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1} & f'_{x_2} & \dots & f'_{x_m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_1 f'_{x_1} + \dots + x_m f'_{x_m} \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор принадлежит образу, если $\beta = \alpha_1 f'_{x_1} + \dots + \alpha_m f'_{x_m}$

Сместив на a, b , получаем искомое. \square

4. $\Phi(x_1 \dots x_m) = 0$

$$\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(a) = 0$$

Тогда уравнение касательной плоскости $\Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) = 0$

Доказательство. γ — путь в M : $\Phi(\gamma(s)) = 0$, $\Phi'(\gamma(s))\gamma'(s) = 0$. По предыдущим утверждениям такой путь есть, кроме того, любому вектору x в касательном пространстве можно сопоставить $\gamma : \gamma'(s) = x$. Поэтому любой касательный вектор от точки a должен быть подчинён искомому отношению.

Альтернативное доказательство:

По определению дифференцируемости Φ в точке a :

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \Phi'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \Phi'_{x_m}(a)(x_m - a_m) + o(\|x - a\|)$$

Мы игнорируем o , потому что оно компенсируется тем, что мы берем не с поверхности Φ , а с касательной плоскости. Это нестрогое утверждение. \square

Примечание. $y(x) = f(a) + f'_{x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + f'_{x_m}(a)(x_m - a_m) \Leftrightarrow$ дифференцирование, но без o .

Таким образом, $f(x) - y(x) = o(x - a)$

Относительный экстремум

Пример. Найти наибольшее/наименьшее значение выражения $f(x, y) = x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Рассмотрим линии уровня, т.е. $f(x, y) = C$:

M и m — точки минимума и максимума, т.к. M — точка, в которой $f = \max$ и линия уровня касаются. Если они пересекаются, но не касаются, то есть точка больше. Аналогичное верно для минимума.

В более формальных терминах: пусть условие $\Phi(x, y) = 0$.



$$\Phi'_x(x - a) + \Phi'_y(y - b) = 0$$

(Φ'_x, Φ'_y) — вектор нормали к касательной прямой. Тогда (f'_x, f'_y) и (Φ'_x, Φ'_y) — параллельны.

Определение.

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$
- $x_0 \in M_\Phi$

x_0 — точка **локального относительного** max, min, строгий max, строгий min, экстремума, если $\exists U(x_0) \subset \mathbb{R}^{m+n} : \forall x \in U(x_0) \cap M_\Phi \quad f(x_0) \geq f(x)$, остальные — аналогично.

Уравнения $\Phi(x) = 0$ называются **уравнениями связи**.

Как решать задачу нахождения локального относительного чего-то?

Если $\text{rg} \Phi'(x_0) = n$, то есть rg максимален, то выполнено условие теоремы о неявном отображении.

Теорема 1 (необходимое условие относительного экстремума).

- $f : O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкое в O
- $M_\Phi \subset O := \{x : \Phi(x) = 0\}$ — гладкое в O
- $a \in O$ — точка относительного локального экстремума
- $\Phi(a) = 0$
- $\text{rg} \Phi'(a) = n$

$$\text{Тогда } \exists \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} f'(a) + \lambda \Phi'(a) = 0 \\ \Phi(a) = 0 \end{cases}$$

Второе условие дописано для удобства, оно не содержательно, т.к. оно уже дано.

$$\text{В координатах: } \begin{cases} f'_{x_1} + \lambda_1(\Phi_1)'_{x_1} + \lambda_2(\Phi_2)'_{x_1} + \dots + \lambda_n(\Phi_n)'_{x_1} = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_{m+n}} + \lambda_1(\Phi_1)'_{x_{m+n}} + \lambda_2(\Phi_2)'_{x_{m+n}} + \dots + \lambda_n(\Phi_n)'_{x_{m+n}} = 0 \\ \Phi_1(a) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_n(a) = 0 \end{cases}$$

Здесь неизвестны $a_1 \dots a_{m+n}, \lambda_1 \dots \lambda_n$, поэтому, если уравнения не вырождены, то решение есть.

Доказательство. $\text{rg} \Phi'(a) = n$. Пусть ранг реализуется на столбцах $x_{m+1} \dots x_{m+n}$.

Обозначим $y_1 = x_{m+1} \dots y_n = x_{m+n}$.

$$(x_1 \dots x_{m+n}) \leftrightarrow (x, y), a \leftrightarrow (a_x, a_y).$$

$\det \frac{\partial \Phi}{\partial y}(a) \neq 0$. Тогда по теореме о неявном отображении $\exists U(a_x) \exists V(a_y) \exists \varphi : U(a_x) \rightarrow V(a_y) : \Phi(x, \varphi(x)) \equiv 0$ и отображение $x \mapsto (x, \varphi(x))$ есть параметризация простого гладкого многообразия $M_\varphi \cap (U(a_x) \times V(a_y))$.

a — точка относительного локального экстремума $\Rightarrow a_x$ — точка локального экстремума функции $g(x) = f(x, \varphi(x))$, потому что $(x, \varphi(x)) \in U(a)$.

Необходимое свойство экстремума для a_x :

$$(f'_x + f'_y \cdot \varphi')(a_x) = 0 \quad (1)$$

Примечание. Здесь и далее в этом доказательстве в функции и производные операторы подставляется a и a_x , но не записывается ради краткости и запутанности.

$$\begin{aligned} \Phi(x, \varphi(x)) &\equiv 0 \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot \varphi' &= 0 \end{aligned}$$

Тогда $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda \Phi'_x + \lambda \Phi'_y \cdot \varphi' = 0 \quad (2)$$

$$f'_x + \lambda \Phi'_x + (f'_y + \lambda \Phi'_y) \varphi' = 0 \quad (3)$$

(3) это (2) + (1)

Пусть $\lambda = -f'_y \cdot (\Phi'_y(a))^{-1}$.

Тогда $f'_y + \lambda \Phi'_y = f'_y - f'_y(\Phi'_y(a))^{-1} \Phi'_y(a) = 0$ и $f'_x + \lambda \Phi'_x = 0$ в силу (3). Итого (3) выполнено, мы предъявили λ , подходящее под искомое. \square

Определение. $G := f - \lambda_1 \Phi_1 - \lambda_2 \Phi_2 - \dots - \lambda_n \Phi_n$ — функция Лагранжа.

$$f'(a) - \lambda \Phi'(a) = 0 \Leftrightarrow G'(a) = 0$$

Примечание. В определении выше можно писать “+” вместо “−”.

Пример. $A = (a_{ij})$ — матрица $m \times n$, симметричная и вещественная.

$f(x) := \langle Ax, x \rangle, x \in \mathbb{R}^m$ — квадратичная форма.

Найдём $\max f(x)$, когда $x \in S^{m-1}$ (единичной сфере в \mathbb{R}^m).

Такой $\max \exists$ по теореме Вейерштрасса.

$$G(x) = \sum_i^m \sum_j^n a_{ij} x_i x_j - \lambda \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 - 1 \right)$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ \vdots \\ 2x_m \end{pmatrix}. \text{ На сфере } \operatorname{rg} \Phi' = 1.$$

$$G'_{x_k} = 2 \sum_{j=1}^m a_{kj} x_j - 2\lambda x_k \quad \forall k = 1 \dots m = 0$$

То есть $Ax = \lambda x \Rightarrow \lambda$ — собственное число A , x — собственный единичный вектор.

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda x^2 = \lambda$$

Теорема 2.

$$\bullet A \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

Тогда $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ — собственное число } A^T A\}$

Такое число существует, т.к. $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle \Rightarrow \langle A^T Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$.

Доказательство. $x \in S^{m-1}$.

$$|Ax|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \underbrace{\langle A^T A x, x \rangle}_{\text{симм.}}$$

$$\max |Ax|^2 = \max \langle A^T A x, x \rangle = \lambda_{\max}$$

□

Функциональные последовательности и ряды

Равномерная сходимость последовательностей и функций

Определение. Последовательность функций $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$ — пространство функций, $n \mapsto f_n$

Определение. $\mathcal{F} = \{f : \underbrace{X}_{\text{метрическое пространство}} \rightarrow \mathbb{R}\}$

Определение. Пусть $E \subset X$. Последовательность f_n **сходится поточечно** к f на множестве E , если $\forall x \in E \quad f_n(x) \rightarrow f(x)$, т.е.:

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Пример. $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{n}$

Если $E = [0, 1] \Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0$ — тождественный ноль, не ноль.

Если $E \cap (1, +\infty) \neq \emptyset$, то нет поточечной сходимости ни к какой функции.

Пример. $f_n = \frac{n^\alpha x}{1+n^2 x^2}, x \in [0, 1], 0 < \alpha < 2$.

Ясно, что $f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall \alpha$, поточечно сходится на $[0, 1]$.

$$\max_{x \in [0, 1]} \frac{n^\alpha x}{1+n^2 x^2} = n^\alpha \max \frac{x}{1+n^2 x^2} = n^\alpha \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} n^{\alpha-1}$$

При $\alpha > 1 \quad \frac{1}{2} n^{\alpha-1} \rightarrow +\infty$. Это странно.

Теперь мы видим, что функции стремятся к тождественному нулю, хотя $\exists x : f(x) \rightarrow +\infty$. Придумаем определение, которое это запрещает.



Определение. f_n равномерно сходится к f на $E \subset X$, если $M_n := \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\forall \varepsilon \exists N \forall n > N \quad 0 \leq M_n < \varepsilon \text{ т.е. } \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначается $f_n \xrightarrow[E]{} f$

Примечание.

- $x_0 \in E$
- $f_n \xrightarrow[E]{} f$

Тогда $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$. То есть равномерная сходимость \Rightarrow поточечная сходимость и предел.

Примечание.

- $E_0 \subset E$
- $f_n \xrightarrow[E]{} f$

Тогда $f_n \xrightarrow[E_0]{} f$

Примечание.

- $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} - \text{огр. функции}\}$

Тогда $\rho(f_1, f_2) := \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|$ — метрика в \mathcal{F} . Называется Чебышевское расстояние.

Доказательство. 1. $\rho(f_1, f_2) \geq 0, \rho(f_1, f_2) = 0 \Leftrightarrow f_1 = f_2$ — очевидно

$$2. \rho(f_1, f_2) = \rho(f_2, f_1) - \text{очевидно}$$

$$3. \rho(f_1, f_2) \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x$$

$$\begin{aligned} \rho(f_1, f_2) - \varepsilon &= \sup |f_1 - f_2| - \varepsilon \\ &< |f_1(x) - f_2(x)| \\ &\leq |f_1(x) - f_3(x)| + |f_2(x) - f_3(x)| \\ &\leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3) \end{aligned}$$

□

$$f_n \xrightarrow[E]{} f \Leftrightarrow f_n \rightarrow f \text{ по метрике } \rho_E.$$

Можем заметить, что в \mathcal{F} при различных метриках происходит различная сходимость или расходимость, в отличие от \mathbb{R}^m .

Примечание.

$$\bullet E = E_1 \cup E_2$$

$$\left. \begin{array}{l} f_n \xrightarrow[E_1]{} f \\ f_n \xrightarrow[E_2]{} f \end{array} \right\} \Rightarrow f_n \xrightarrow[E]{} f$$