

# 1 Повторение

## 1.1 Пространство ассиметричных ПЛФ

Рассмотрим пространство полилинейных форм  $\Omega_0^p$  и базис  $\{^{s_1 \dots s_p} W\}$ .

$$^{s_1 \dots s_p} F := p! \operatorname{Asym}\{^{s_1 \dots s_p} W\}$$

$$\{^{s_1 \dots s_p} F \mid 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_p \leq n\} - \text{базис} \Rightarrow \dim = C_n^p$$

- $p = 0 \Rightarrow \dim \Lambda^p = 1 \Rightarrow k$
- $p = 1 \Rightarrow \dim \Lambda^p = n \Rightarrow X^*$
- $p = n \Rightarrow \dim \Lambda^p = 1 \Rightarrow \text{псевдоскаляр}$

Единственный элемент базиса:

$$\begin{aligned} ^{1 \dots n} F(x_1 \dots x_n) &= p! \operatorname{Asym}(^{1 \dots n} W)(x_1 \dots x_n) = p! \frac{1}{p!} \sum_{(s_1 \dots s_n)} (-1)^{[s_1 \dots s_n]} ^{s_1 \dots s_n} W(x_{s_1} \dots x_{s_n}) = \\ &= \sum_{(s_1 \dots s_n)} (-1)^{[s_1 \dots s_n]} \xi_{s_1}^1 \xi_{s_2}^2 \dots \xi_{s_n}^n \triangleq \det ||\xi_j^i|| \end{aligned}$$

$$\forall V \subset \Lambda^n \quad V = \alpha ^{1 \dots n} F$$

$$C_n^{n-p} = C_n^p \Rightarrow \Lambda^{n-p} \simeq \Lambda^p$$

## 1.2 Внешнее произведение ПЛФ

$$U \in \Lambda^{p_1}, V \in \Lambda^{p_2} \quad U \cdot V \stackrel{?}{\in} \Lambda^p$$

$$\triangleleft Z = U \cdot V \notin \Lambda^{p_1+p_2}$$

$$Z(x_1 \dots x_{p_1} \dots x_{p_1+p_2}) = U(x_1 \dots x_{p_1}) \cdot V(x_{p_1+1} \dots x_{p_1+p_2})$$

Обычное произведение ПЛФ не замкнуто, но мы хотим сделать алгебру над ПЛФ  $\Rightarrow$  создадим **внешнее произведение**.

$$\in \Lambda^{p_1}, V \in \Lambda^{p_2} \quad U \wedge V := \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \operatorname{Asym}(U \cdot V) \in \Lambda^{p_1+p_2}$$

Свойства:

1.  $p + q > n \Rightarrow U \wedge V = \Theta$ , т.к. пространство  $\Lambda^{p_1+p_2}$  есть нуль-пространство.

$$2. U \wedge V = (-1)^{pq} V \wedge U$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} U \wedge V(x_1 \dots x_{p+q}) &= \frac{(p+q)!}{p!q!} \frac{1}{(p+q)!} \sum_{(i_1 \dots i_{p+q})} U(x_{i_1} \dots x_{i_p}) W(x_{i_{p+1}} \dots x_{i_{p+q}}) (-1)^{[i_1 \dots i_{p+q}]} = \\ &= (-1)^{pq} V \wedge U \end{aligned}$$

□

$$3. U \wedge (V \wedge W) = (U \wedge V) \wedge W = U \wedge V \wedge W = \frac{(p+q+s)!}{p!q!s!} \text{Asym}(U \cdot V \cdot W)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} (U \wedge V) \wedge W &= \left( \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Asym}(U \cdot V) \right) \wedge W = \\ &= \frac{(p+q)!}{p!q!} \frac{(p+q+s)!}{(p+q)!s!} \text{Asym}(\text{Asym}(U \cdot V) \cdot W) = \frac{(p+q+s)!}{p!q!s!} \text{Asym}(U \cdot V \cdot W) = \\ &= U \wedge V \wedge W \end{aligned}$$

□

$$4. U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W$$

$$5. (\alpha U) \wedge V = U \wedge (\alpha V) = \alpha(U \wedge V), \quad \alpha \in K$$

$$6. U \wedge \Theta = \Theta \wedge V = \Theta$$

$$7. \{f^i\}_{i=1}^n - \text{базис } X^*. \text{ Тогда } {}^{s_1 \dots s_p} F = f^{s_1} \wedge \dots \wedge f^{s_p} - \text{базис } \Lambda^p$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} {}^{s_1 \dots s_p} W &= f^{s_1} \cdot \dots \cdot f^{s_p} \\ {}^{s_1 \dots s_p} F &= p! \text{Asym}(f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \dots \cdot f^{s_p}) = p! \frac{2!}{2!} \text{Asym}(f^{s_1} \cdot f^{s_2} \cdot \dots \cdot f^{s_p}) = \\ &= \text{Asym} \left( \frac{p!}{2!} \frac{(1+1)!}{1!1!} \text{Asym}(f^{s_1} \cdot f^{s_2}) \cdot f^{s_3} \dots f^{s_n} \right) = \\ &= \text{Asym} \left( \frac{p!}{2!} f^{s_1} \wedge f^{s_2} \cdot f^{s_3} \dots f^{s_n} \right) = \\ &= \frac{p!}{2!} \text{Asym}(f^{s_1} \wedge f^{s_2} \cdot f^{s_3} \dots f^{s_n}) = \\ &= \frac{p!}{3!} \text{Asym}(f^{s_1} \wedge f^{s_2} \wedge f^{s_3} \dots f^{s_n}) = \\ &= f^{s_1} \wedge \dots \wedge f^{s_p} \end{aligned}$$

□

## 2 Определители и их свойства

**Определение.**  $\det\{x_1 \dots x_n\} = {}^{1\dots n}F(x_1 \dots x_n) = f^1 \wedge \dots \wedge f^n(x_1 \dots x_n)$

$$x_i = \sum_{j_i=1}^n \xi_i^{j_i} e_{j_i} - \text{разложение} \Rightarrow \det\{x_1 \dots x_n\} = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_1^{j_1} \dots \xi_n^{j_n}$$

$$\triangleleft C = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Свойства:

$$1. \det C = \det C^T$$

$$\text{Доказательство. } \det C = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n} = \sum_{(j_1 \dots j_n)} (-1)^{[j_1 \dots j_n]} \xi_{j_1}^1 \xi_{j_2}^2 \dots \xi_{j_n}^n = \det C^T \quad \square$$

$$2. \det\{x_1 \dots x_s \dots x_t \dots x_n\} = -\det\{x_1 \dots x_t \dots x_s \dots x_n\}$$

$$3. \{x_i\}_{i=1}^n - \text{ЛЗ} \Rightarrow \det\{x_1 \dots x_n\} = 0$$

$$4. \det\{x_1 \dots x_s + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \dots x_n\} = \det\{x_1 \dots x_n\}$$

5.

$$\begin{aligned} \det\{x_1 \dots x_k \dots x_n\} &= f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n(x_1 \dots \sum_{m=1}^n \xi_k^m e_m \dots x_n) = \\ &= \sum_{m=1}^n \xi_k^m f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n(x_1 \dots e_m \dots x_n) = \sum_{m=1}^n \xi_k^m (-1) = \dots \end{aligned}$$

$$\text{Примечание. } f^1 \cdot f^2 \cdot \dots \cdot f^n(x_1 \dots x_k \dots x_n) = f^1(x_1) f^1(x_2) \dots f^k(x_k) \dots f^n(x_n)$$

$$\begin{aligned} \triangleleft \text{Asym}(f^1 \cdot f^2 \cdot \dots \cdot f^n(x_1 \dots x_n)) &= \frac{1}{n!} \sum_{(s_1 \dots s_n)} (-1)^{[s_1 \dots s_n]} f^1 \cdot \dots \cdot f^n(x_{s_1} \dots x_{s_n}) = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{(s_1 \dots s_n)} (-1)^{[s_1 \dots s_n]} f^{s_1} \cdot \dots \cdot f^{s_n}(x_1 \dots x_n) \end{aligned}$$

Заметим, что если  $m \neq k$ , то результат 0. Когда  $m = k$ , остается  $n$  вариантов.

$$\begin{aligned} \dots &= \sum_{m=1}^n \xi_k^m (-1)^{|m-k|} f^1 \wedge \dots \wedge f^{k-1} \wedge f^{k+1} \wedge \dots \wedge f^n(x_1 \dots x_{k-1}, x_{k+1} \dots x_n) = \\ &= \sum_{m=1}^n \xi_k^m (-1)^{|m-k|} M_k^m \end{aligned}$$

**Определение.** Минор элемента  $\xi_k^m = \det M_k^m$  матрицы, полученной из матрицы  $C$  вычеркиванием столбца номер  $K$  и строки с номером  $m$ .

**Определение.** Алгебраическим дополнением элемента  $\xi_k^m$  называется число  $(-1)^{m+k} M_k^m$

$$\det C = \sum_{k=1}^n \xi_k^m A_k^m$$

$$\det C = \sum_{k=1}^n \xi_m^k A_m^k$$

**Теорема 1.** Лапласа

$$\det C = \sum_{k_1 \dots k_s} (-1)^{m_1+k_1+m_2+k_2+\dots+m_s+k_s} = L_{k_1 \dots k_s}^{m_1 \dots m_s} M_{k_1 \dots k_s}^{m_1 \dots m_s}$$

$L$  — минор порядка  $s$ ,  $M$  — доп. минор порядка  $n - s$ .

*Следствие 1.1.*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

**Теорема 2.** Критерий линейной зависимости набора векторов

$$\{x_i\}_{i=1}^k - \text{ЛЗ} \Leftrightarrow \forall V \in \Lambda^k \quad V(x_1 \dots x_k) = 0$$

*Доказательство.* “ $\Leftarrow$ ” очевидно

“ $\Rightarrow$ ” докажем от противного.

$$\{x_i\}_{i=1}^k - \text{ЛНЗ} : \forall V \in \Lambda^k \quad V(x_1 \dots x_k) = 0$$

$$\langle \{x_1 \dots x_k, y_1 \dots y_{n-k}\} - \text{базис } X$$

$$\{f^1 \dots f^n\} - \text{базис } X^*$$

$$\langle \{f^j\}_{j=1}^k \quad f^1 \wedge \dots \wedge f^k(x_1 \dots x_k) = \tilde{C} \neq 0 \Rightarrow \text{противоречие.}$$

□