

Теорема 1 (Лагранжа для отображений).

- E открыто
- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- F дифф. на E
- $a, b \in E$
- $[a, b] \in E$

Тогда $\exists c \in [a, b]$ ($c = a + \Theta(b - a)$), $\Theta \in (0, 1)$:

$$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(c)\| |b - a|$$

Доказательство. $f(t) := F(a + t(b - a))$, $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$$

Тогда по теореме Лагранжа для векторнозначных функций

$$|f(1) - f(0)| \leq \|f'(c)\| |1 - 0|$$

$$|F(b) - F(a)| \leq \|F'(a + c(b - a))(b - a)\| |b - a| \leq \|F'(a + c(b - a))\| |b - a|$$

□

Примечание. Особенно удобная оценка происходит, когда E выпукло, тогда

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{x \in E} \|F'(x)\| |b - a|$$

$$\Omega_m := \{L \in \mathcal{L}_{m,m} : \exists L^{-1}\}$$

Лемма 1.

- $B \in \mathcal{L}_{m,m}$
- $\exists c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \quad |Bx| \geq c|x|$

Тогда $B \in \Omega_m$ и $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

Доказательство. B — биекция, т.к. его ядро $\{0_m\} \Rightarrow \exists B^{-1}$.

$$|B^{-1}y| \leq \|B^{-1}\| \cdot |y|$$

$$x := B^{-1}y$$

$$|y| \geq c \cdot |B^{-1}y|$$

$$|B^{-1}y| \leq \frac{1}{c}|y| \Rightarrow \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$$

□

Примечание. Есть геометрическое доказательство, отталкивающее от того, что B сжимает пространство на c .

Примечание. $A \in \Omega_m$. Тогда $\exists c : |Ax| \geq c|x|$

Доказательство.

$$|x| = |A^{-1}Ax| \leq \|A^{-1}\| \cdot |Ax| \quad c := \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

□

Теорема 2 (об обратимости оператора, близкого к обратимому).

- $L \in \Omega_m$ — обратимый
- $M \in \mathcal{L}_{m,m}$
- $\|L - M\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$, т.е. M “близкий” к L

Тогда:

1. $M \in \Omega_m$, т.е. Ω_m открыто в $\mathcal{L}_{m,m}$
2. $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|}$
3. $\|L^{-1} - M^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$

Доказательство. По неравенству треугольника $|a + b| \geq |a| - |b|$:

$$\begin{aligned} |Mx| &= |Lx + (M - L)x| \\ &\geq |Lx| - |(M - L)x| \\ &\geq \frac{1}{\|L\|^{-1}}|x| - \|M - L\| \cdot |x| \\ &\geq (\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|) |x| \end{aligned}$$

Это доказало пункты 1 (M — биекция, т.к. $\text{Ker } M = \{0\}$) и 2, докажем 3:

Аналогично равенству $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ в \mathbb{R} выполняется следующее равенство в Ω_m :

$$M^{-1} - L^{-1} = M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

Это очевидно доказывается домножением на M слева и на L справа:

Доказательство.

$$M^{-1} - L^{-1} \stackrel{?}{=} M^{-1}(L - M)L^{-1}$$

$$E - L^{-1} \stackrel{?}{=} (L - M)L^{-1}$$

$$L - M = L - M$$

□

$$\|M^{-1} - L^{-1}\| = \|M^{-1}(L - M)L^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|L - M\|} \|L - M\|$$

□

Теорема 3 (о непрерывно дифференцируемом отображении).

- $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$
- F дифф. на E

Тогда эквивалентны 1 и 2:

1. $F \in C^1(E)$, т.е. \exists все $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ и они непрерывны на E
2. $F' : E \rightarrow \mathcal{L}_{m,l}$ — непрерывно, т.е.

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) \quad \forall \bar{x} : |\bar{x} - x| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \leq \varepsilon$$

Доказательство.

- $1 \Rightarrow 2$:

Берем x, ε . $\exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \quad \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{ml}}$ для всех i, j .

$$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\varepsilon^2}{ml}} = \varepsilon$$

- $2 \Rightarrow 1$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \bar{x} : |x - \bar{x}| < \delta \quad \|F'(x) - F'(\bar{x})\| < \varepsilon$$

$$\triangleleft h = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| \leq \|F'(x) - F'(\bar{x})\| \cdot |h| < \varepsilon$$

$$|F'(x)h - F'(\bar{x})h| = \sqrt{\sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^l \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2} < \varepsilon \Rightarrow \forall i \quad \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right| < \varepsilon$$

□

1 Экстремумы

Определение. $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in E$ — локальный максимум, если

$$\exists U(a) \subset E \quad \forall x \in U(a) \quad f(x) \leq f(a)$$

Аналогично определяется строгий локальный максимум, локальный минимум и строгий локальный минимум

Теорема 4 (Ферма).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $a \in \text{Int}E$
- a — точка локального экстремума
- f — дифф. в точке a

Тогда $\forall u \in \mathbb{R}^m : |u| = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0$

Доказательство. Для $f|_{\text{прямая}(a,u)}$ a остается локальным экстремумом, выполняется одномерная теорема Ферма. □

Следствие 4.1 (необходимое условие экстремума). a — локальный экстремум $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$

Следствие 4.2 (теорема Ролля).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
- $K \subset E$ компакт
- f дифф. в $\text{Int}K$
- f непрерывно на K

$$\bullet \quad f \Big|_{\text{граница } K} = \text{const}$$

Тогда $\exists a \in \text{Int} K : f'(a) = \vec{0}$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса f достигает минимального и максимального значения на компакте. Тогда либо f на K const, либо $\exists a \in \text{Int} K$ — точка экстремума. В первом случае $f' \equiv 0$, во втором по т. Ферма $f'(a) = 0$ \square

Определение. Квадратичная форма $Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q(h) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} a_{ij} h_i h_j$$

Определение. Положительно определенная кв. форма: $\forall h \neq 0 \quad Q(h) > 0$

Определение. Отрицательно определенная кв. форма: $\forall h \neq 0 \quad Q(h) < 0$

Определение. Незнакоопределенная кв. форма: $\exists \bar{h} : Q(\bar{h}) < 0, \exists \tilde{h} : Q(\tilde{h}) > 0$

Определение. Полуопределенная (положительно определенная вырожденная) кв. форма: $Q(h) \geq 0 \quad \exists \bar{h} \neq 0 : Q(\bar{h}) = 0$

Лемма 2 (об оценке формы).

- Q — положительно определенная

Тогда $\exists \gamma_Q > 0 \quad \forall h \quad Q(h) \geq \gamma_Q |h|^2$

Доказательство. $S^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ — компакт в \mathbb{R}^m , поэтому min и max достигается по т. Вейерштрасса.

$$\gamma_Q := \min_{h \in S^{m-1}} Q(h) > 0$$

$$Q(h) = Q\left(|h| \frac{h}{|h|}\right) \stackrel{(*)}{=} |h|^2 \underbrace{Q\left(\frac{h}{|h|}\right)}_{\text{ед. вектор}} \geq \gamma_Q |h|^2$$

Переход $(*)$ работает, т.к. Q - квадратичная форма, поэтому:

$$\sum_{i,j} a_{ij} h_i h_j = \sum_{i,j} a_{ij} |h| \frac{h_i}{|h|} |h| \frac{h_j}{|h|} = |h|^2 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{h_i}{|h|} \frac{h_j}{|h|}$$

\square

Лемма 3 (об эквивалентных нормах).

- $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — норма

Тогда $\exists C_1, C_2 > 0 \quad \forall x \quad C_2|x| \leq p(x) \leq C_1|x|$

Доказательство.

$$C_1 := \max_{x \in S^{m-1}} p(x) \quad C_2 := \min_{x \in S^{m-1}} p(x)$$

$$p(x) = p\left(|x| \frac{x}{|x|}\right) = |x| p\left(\frac{x}{|x|}\right) \begin{cases} \geq C_2|x| \\ \leq C_1|x| \end{cases}$$

Существование C_1 и C_2 гарантируется теоремой Вейерштрасса, но она требует непрерывности $p(x)$.

Докажем, что p непрерывна.

Введем базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} p(x - y) &= p\left(\sum (x_k - y_k)e_k\right) \\ &\leq \sum p((x_k - y_k)e_k) \\ &= \sum |x_k - y_k| p(e_k) \\ &\leq |x - y| \sqrt{\sum p(e_k)^2} \\ &\leq |x - y| M \end{aligned}$$

□

Напоминание

$$d^2 f(a, h) = f''_{x_1 x_1}(a) h_1^2 + \dots + f''_{x_m x_m}(a) h_m^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} f''_{x_i x_j} h_i h_j$$

Формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = f(a) + df(a, x - a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a, x - a) + o(|x - a|^2)$$

Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа:

$$f(a + h) = f(a) + df(a, h) + \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta h, h) \quad 0 \leq \Theta \leq 1$$

Теорема 5 (достаточное условие экстремума).

- $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

- $a \in \text{Int}E$
- $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$
- $Q(h) := d^2 f(a, h)$
- $f \in C^2(E)$

Тогда:

- Если $Q(h)$ положительно определена, a — локальный минимум
- Если $Q(h)$ отрицательно определена, a — локальный максимум
- Если $Q(h)$ не знакоопределена, a — не экстремум
- Если $Q(h)$ положительно определена, но вырождена, недостаточно информации.

Доказательство. Для положительно определенной формы:

$$\begin{aligned}
 f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta h, h) \\
 &= \frac{1}{2} (Q(h) + (d^2 f(a + \Theta h, h) - Q(h))) \\
 &= \frac{1}{2} \left(Q(h) + \overbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i^2}_{\leq |h|^2}}^{o(|h|^2) \Leftrightarrow < \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2} + 2 \sum_{i < j} \underbrace{(f''_{x_i x_i}(a + \Theta h) - f''_{x_i x_i}(a))}_{\rightarrow 0} \underbrace{h_i h_j}_{\substack{\leq |h|^2 \\ \text{по модулю}}} \right)
 \end{aligned}$$

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \left(\gamma_Q |h|^2 - \frac{\gamma_Q}{2} |h|^2 \right) \geq \frac{1}{4} \gamma_Q |h|^2 > 0$$

Аналогично для отрицательно определенной формы.

Для не знакоопределенной формы:

$$\begin{aligned}
 \angle \bar{h} : Q(\bar{h}) > 0 &\Rightarrow f(a + t\bar{h}) - f(a) = \frac{1}{2} d^2 f(a + \Theta t\bar{h}, \bar{h}) t^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\underbrace{t^2 Q(\bar{h})}_{Q(t\bar{h})} + t^2 \underbrace{\left(\sum (f''_{x_i x_i}(a + \Theta t\bar{h}) - f''_{x_i x_i}(a)) \bar{h}_i^2 + 2 \sum_{i < j} \dots \right)}_{\text{б.м. при } t \rightarrow 0} \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} t^2 (Q(h) - \frac{1}{2} Q(h)) > 0
 \end{aligned}$$

Т.е. $f(a + t\bar{h}) > f(a)$ при t , близких к 0.

Аналогично $f(a + t\bar{h}) < f(a)$ при t , близких к 0.

Это доказывает первые три пункта теоремы. Докажем последний пункт примером.

$$f(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 - x_2^4 - x_3^4 \dots$$

$$\bar{f}(x_1, x_2 \dots) = x_1^2 + x_2^4 + x_3^4 \dots$$

$$a = (0, 0, \dots)$$

$$f'_{x_1}(a) = 0, f'_{x_2}(a) = 0, \dots$$

$$d^2 f(a, h) = 2h_1^2$$

$$d^2 \bar{f}(a, h) = 2h_1^2$$

Итого f не имеет экстремума в a , но для \bar{f} a — локальный минимум. □

Примечание. Если f подходит под условие теоремы и $d^2 f(a, h)$ — положительно определенный вырожденный $\Rightarrow a$ — не точка максимума.