

$$\int_a^b f g' = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g$$

$$\int \leftrightarrow \sum \quad a \leftrightarrow g \quad b \leftrightarrow f \quad \sum_{i=1}^k a_i = A_k \quad f' \leftrightarrow b_{k+1} - b_k$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Это суммирование по частям, оно же правило Абеля суммы.

*Доказательство.*  $\triangleleft b_7$ , посмотрим с какими коэффициентами оно входит в выражения по обе части равенства:

- Левая часть:  $a_7$
- Правая часть:  $A_7 - A_6 = a_7$

Для других случаев тоже верно. □

**Теорема 1. Признак Абеля-Дирихле**

**Дирихле:**

1. Последовательность  $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$  ограничена:  $\exists C_A > 0 \quad \forall k \quad |A_k| < C_A$
2.  $b_k$  монотонна и  $\rightarrow 0$

**Абеля:**

1. Ряд  $\sum a_k$  сходится
2.  $b_k$  монотонна, ограничена:  $\exists C_B > 0 \quad \forall k \quad |b_k| < C_B$

Если хотя бы один из этих признаков состоялся,  $\sum_{k=1}^n a_k b_k$  сходится.

*Доказательство.*

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \underbrace{A_n b_n}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})}_{\substack{\exists \text{ конечный предел,} \\ \text{т.к. ряд абсолютно сходится}}}$$

Докажем Дирихле.

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq C_A \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = \pm C_A \sum_{k=1}^{n-1} b_k - b_{k+1} = \pm \underbrace{C_A (b_1 - b_n)}_{\text{огр.}} \leq C_A C_B$$

Докажем Абеля.

$\exists$  конечный  $\beta = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \beta \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n a_k (b_k - \beta)$$

Второй ряд сходится по признаку Дирихле, первый сходится по условию.  $\square$

Пример.

$$\sum \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$$

Докажем сходимость по признаку Дирихле:  $a_n = \sin n, b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$b_n$  монот.,  $\rightarrow 0$

$$A_k = \left( \sum_{k=1}^n \sin k \right) - \text{огр.}?$$

$$\begin{aligned} |\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n| &= |\Im(e^i + e^{2i} + e^{3i} + \dots + e^{ni})| \leq |e^i + e^{2i} + \dots + e^{ni}| = \\ &= \left| e^i \frac{e^{ni} - 1}{e^i - 1} \right| = |e^i| \frac{|e^{ni} - 1|}{|e^i - 1|} \leq 1 \frac{2}{|e^i - 1|} =: C_A \end{aligned}$$

Итого  $A_k$  ограничено  $\Rightarrow$  искомая последовательность сходится по признаку Дирихле.

## Свойства сходящихся рядов

### 1. Группировка

Теорема 2.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2})}_{b_2} + \dots$$

$$n_1 < n_2 < \dots$$

$$A = \sum a_k \quad b_l = \sum_{i=n_{l-1}+1}^{n_l} a_i \quad B = \sum b_l$$

1. Если  $A$  сходится,  $B$  сходится и имеет ту же сумму
2. Если  $\forall k \ a_k \geq 0$ ,  $A$  и  $B$  имеют одинаковую сумму.

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^m b_i = \sum_{i=1}^{n_m} a_i$$

1.  $A$  сходится  $\Rightarrow \exists$  кон.  $\lim_{i=1}^n a_i$ . Тогда

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^m b_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n_m} a_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n a_i$$

2. **Скипнуто**

□

*Примечание.* 1.  $B$  сходится  $\nRightarrow A$  сходится. Контрпример:  $\sum (-1)^n$

2.  $a_n \rightarrow 0$ , скобки “ограниченного размера”:  $\exists M \forall k |n_k - n_{k-1}| < M$

Тогда  $B$  сходится  $\Rightarrow A$  сходится:

$$|a_n| \rightarrow 0 \quad |a_n| + |a_{n+1}| \rightarrow 0$$

**Скипнуто**

*Пример.*

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{0}{1} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \dots = 0$$

Односторонний предел в  $\mathbb{R}$ :

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f \Big|_{[a, +\infty) \cap D}$$

$f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, D_1 \subset D, a$  — предельная точка  $D, D_1$

$\lim_{x \rightarrow a} f \Big|_{D_1}$  — предел по подмножеству, аналог одностороннего предела

**Определение.** Предел по направлению  $l, |l| = 1$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} f(a + t\vec{l})$$

**Определение.** Предел вдоль пути (непрерывного)  $\gamma : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^m$  функции  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t))$$

1. Если  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , то  $\exists$  и пределы всем направлениям и они равны  $L$ .

2. Если пределы по направлениям  $\exists$  и не равны, то  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Пример.

$$f = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$l := (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos \varphi t \sin \varphi}{t^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \cos \varphi \sin \varphi \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

**Определение.** Предел вдоль кривой

Скipped

Линейное отображение = линейный оператор

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n - \text{лин.} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

**Определение.** Линейное отображение  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — линейный функционал

Скipped

Линейные отображения образуют линейное пространство, т.е. это множество замкнуто по сложению и умножению на скаляры.

Линейное отображение задается матрицей:

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad f \leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$f(x) = Ax$$

**Теорема 3.**  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  — лин. оператор

Эквивалентны следующие утверждения:

1.  $\mathcal{A}$  — обратим
2.  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$

Линейные отображения “общего вида”:

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \alpha x \quad f \leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \langle x, a \rangle \quad f \leftrightarrow a \in \mathbb{R}^m$
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \quad f(x) = xv \quad f \leftrightarrow v \in \mathbb{R}^m$

## 2. Дифференцирование отображений

**Определение.** 1. Бесконечно малое отображение  $\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$

$x_0$  — предельная точка  $E$

$\varphi$  — бесконечно малое отображение при  $x \rightarrow x_0$   $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$

2.  $o(h)$  (оно же  $o(|h|)$ )

$\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $0$  — предельная точка  $E$

$\varphi(h) = o(h)$  при  $h \rightarrow 0$ , если  $\frac{\varphi(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

По-другому:  $\exists \alpha : E \rightarrow \mathbb{R}^l$  — бесконечно малое при  $h \rightarrow 0$ :

$$\varphi(h) = |h|\alpha(h)$$

**Определение.**  $F : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $a \in \text{Int}E$

$F$  — дифф. в точке  $a$ , если:

$\exists$  лин. оп.  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$   $\exists$  бесконечно малое  $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}^l$  :

$$F(a+h) = F(a) + Lh + |h|\alpha(h), h \rightarrow 0$$

$$F(a+h) = F(a) + Lh + o(h)$$

$$x := a + h$$

$$F(x) = F(a) + L(x-a) + |x-a|\alpha(x-a)$$

**Определение.** Оператор  $L$  из определения — **производный оператор** отображения  $F$  в точке  $a$  (“производная”), обозначается  $F'(a)$ .

Матрица  $F'(a)$  — **матрица Якоби**  $F$  в точке  $a$

**Определение.** Выражение  $F'(a)h$  называется **дифференциалом** отображения  $F$  в точке  $a$ .

Это понимают как:

1. Производный оператор  $h \mapsto F'(a)h$

2. Отображение  $E \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$   $(x, h) \mapsto F'(x) \cdot h$

$$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad a \in \mathbb{C}$$

**Определение.**  $F$  комплексно дифференцируема в точке  $A$ , если  $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ :

$$F(a+h) = F(a) + \lambda h + o(h), h \rightarrow 0$$

$$h = x + iy \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \lambda = a + bi$$

$$h \mapsto \lambda h$$

$$(x + iy) \mapsto (a + bi)(x + iy) = ax - by + i(ay + bx)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Этому соответствует вещественное отображение  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$F(a + h) = F(a) + Lh + o(h)$$

**Лемма 1.** Производный оператор единственный.

*Доказательство.*

$$\exists \delta > 0 \quad \forall h : |h| < \delta \quad a + h \in E$$

Возьмём  $v \in \mathbb{R}^m \quad h := tv, t < \frac{\delta}{|v|}$

По определению дифференциала:

$$F(a + tv) = F(a) + F'(a)tv + |tv|\alpha(tv) = F(a) + tF'(a)v + |t||v|\alpha(tv)$$

$$F'(a)v = \frac{F(a + tv) - F(a)}{t} - \underbrace{\frac{|t|}{t}}_{\pm 1} \overbrace{|v|\alpha(tv)}^{\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \pm |v|0}$$

$$F'(a)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(a + tv) - F(a)}{t}$$

Т.к. по всем направлениям производная равна, оператор единственный. □

*Примечание.* О дифференцировании функций нескольких переменных

$$f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, a \in \text{Int} E$$

$f$  — дифф.  $\exists \lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{R}, \exists \varphi$  бесконечно малая при  $x \rightarrow a$

$$f(x_1 \dots x_m) = f(a_1 \dots a_m) + \lambda_1(x_1 - a_1) + \lambda_2(x_2 - a_2) + \dots + \lambda_m(x_m - a_m) + |x - a|\varphi(x)$$

*Примечание.*  $F$  дифф. в  $a \Rightarrow F$  непр. в  $a$