

Теорема 1 (Общее решение уравнения 1-го порядка). $p, q \in C(a, b)$

$$y = \left(C + \int q(x) e^{-\int p(x) dx} \right) e^{\int p(x) dx}, \quad x \in (a, b), C \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$q(x) e^{-\int p(x) dx} e^{\int p(x) dx} + \underbrace{\left(C + \int q(x) e^{-\int p(x) dx} \right) e^{\int p(x) dx}}_y p(x) \equiv p(x)y + q \quad \forall x \in (a, b)$$

Докажем, что других решений нет.

φ — решение на $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Пусть это решение проходит через (x_0, y_0) . Через эту точку также проходит решение f , описываемой теоремой.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = p(x) \in C((a, b) \times \mathbb{R}) \Rightarrow \text{по теореме Пикара } y \equiv \varphi \text{ на } (\alpha, \beta). \quad \square$$

Метод Лагранжа

1. Записываем решение однородного: $y = C e^{\int p(x) dx}$
2. Подставим $y = C(x) e^{\int p(x) dx}$ в линейное уравнение первого порядка:

$$C^1 e^{\int p(x) dx} + C e^{\int p(x) dx} p(x) = p C e^{\int p(x) dx} + q$$

3. Подставим $C(x)$ вместо постоянной C .

2.5 Уравнение Бернулли и Риккати

Определение (уравнение Бернулли). $y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \alpha \notin \{0, 1\}$

Замена $z = y^{1-\alpha}$ сводит это уравнение к линейному:

$$\begin{aligned} z' &= (1 - \alpha) y^{-\alpha} \\ \frac{y'}{y^\alpha} &= p(x) y^{1-\alpha} + q(x) \\ \frac{z'}{1 - \alpha} &= p(x) z + q(x) \end{aligned}$$

Определение (уравнение Риккати). $y' = \underbrace{p(x)y^2 + q(x)y + r(x)}_{\text{квадратичное по } y}$

Частный случай уравнения Риккати $y' = y^2 + x^\alpha$ интегрируется в квадратурах только при определенных α .

Если φ — решение уравнения Риккати, то замена $y = \varphi + z$ сводит искомое к уравнению Бернулли. φ необходимо угадывать.

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\varphi + z)' &= p(\varphi + z)^2 + q(\varphi + z) + r(x) \\ \varphi' + z' &= p\varphi^2 + q\varphi + 2p\varphi z + qz + r + pz^2 \\ z' &= 2p\varphi z + qz + pz^2\end{aligned}$$

□

2.6 Уравнение в полных дифференциалах

Определение. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ — уравнение в полных дифференциалах, если $\exists u(x, y) : du = Pdx + Qdy$

Теорема 2 (Общее решение УПД). $\triangleleft P, Q \in C(G)$

1. y — решение на (a, b)

Тогда $\exists C \in \mathbb{R} : u(x, y) = C$ неявно задает y .

2. $u(x, y) = C$ определяет $y \in C^1(a, b)$

Тогда y — решение.

Доказательство. 1. $\triangleleft y$ — решение на $(a, b) \Rightarrow$

$$P(x, y(x)) + Q(x, y(x)), y'(x) \equiv 0$$

$$\text{Левая часть} = \frac{d}{dx}u(x, y(x))$$

$$\frac{du(x, y)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow u(x, y(x)) \equiv C$$

2. $\triangleleft y' : u(x, y(x)) \equiv C$

Продифференцируем.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' \equiv 0$$

$$P + Qy' \equiv 0$$

□

$u(x, y)$ находится следующим образом:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Найдем необходимое условие для $\exists du$:

$$\begin{aligned} \triangleleft du &= Pdx + Qdy, \quad P, Q \in C^1(G) \\ \Rightarrow P &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned}$$

Это условие и достаточно для $\exists du$, если G — односвязная область.

Пример. $\underbrace{e^{-y}}_P dx - \underbrace{(2y + xe^{-y})}_Q dy = 0$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -e^{-y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -e^{-y} \end{aligned}$$

Частные производные совпали, область односвязна \Rightarrow УПД.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = e^{-y} \Rightarrow U(x, y) = \int e^{-y} dy + C(y) = xe^{-y} + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{-y}(-1) + C'(y) = -(2y + xe^{-y})$$

$$C'(y) = -2y$$

$$C = -y^2 + A$$

$$u(x, y) = xe^{-y} - y^2 + A$$

Ответ: $xe^{-y} - y^2 = C$

Геометрический смысл

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

$$\triangleleft \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad - \text{интегральная кривая.}$$

$$\begin{aligned}
 (x_0, y_0) &= (\varphi(t_0), \psi(t_0)) \\
 P(\varphi, \psi)\varphi' + Q(\varphi, \psi)\psi' &= 0 \\
 P(x_0, y_0)\varphi'(t_0) + Q(x_0, y_0)\psi'(t_0) &= 0
 \end{aligned}$$

Таким образом, (φ', ψ') перпендикулярно (P, Q) при $t = t_0$, т.е. мы ищем перпендикуляры к данному векторному полю.

Определение. $\mu(x, y)$ — интегрирующий множитель для уравнения $Pdx + Qdy = 0$, если $\mu \neq 0$ и $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$

Домножая на μ , можно свести диффур к УПД.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \\
 y' &= p(x)y + q(x) \\
 dy - (p(x)y + q(x))dx &= 0 \\
 \frac{\partial\mu}{\partial y}(-p(x)y - q(x)) + \mu(-\varphi) &= \frac{\partial\mu}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Предположим, что μ зависит только от x .

$$\begin{aligned}
 \mu(-\varphi) = \mu' &\Rightarrow \mu = Ce^{-\int p(x)dx} \\
 \mu(dy - (p(x)y + q(x))dx) &= 0 \\
 e^{-\int p(x)dx}dy - (p(x)y + q(x))e^{-\int p(x)dx}dx &= 0 \\
 e^{-\int p(x)dx}dy - p(x)ye^{-\int p(x)dx}dx &= q(x)e^{-\int p(x)dx}dx
 \end{aligned}$$

Дорешать — упражнение