Оглавление

Лекция 1 8 февраля **2**

1 Интеграл . . . 4

1.1 Измеримые функции . . . 4

1.2 Меры Лебега-Стилтьеса . . . 8

Лекция 2 15 февраля **9**

1.3 Сходимость почти везде и по мере . . . 12

2 Интеграл . . . 16

Лекция 3 22 февраля **18**

2.1 Предельный переход под знаком интеграла . . . 22

Лекция 4 1 марта **26**

3 Плотность одной меры по отношению к другой. Замена переменных в интеграле. . . . 31

Лекция 5 15 марта **34**

4 Возвращаемся в $\mathbb{R}^m$ . . . 36

Лекция 6 22 марта **41**

4.1 Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$ . . . 41

5 Произведение мер . . . 43

Лекция 7 29 марта **48**

6 Поверхностный интеграл . . . 54

6.1 Поверхностный интеграл I рода . . . 54

Лекция 8 5 апреля **56**

6.2 Поверхностный интеграл II рода . . . 56

7 Ряды Фурье . . . 58

7.1 Пространства L^p . . . 58

Лекция 9 12 апреля **61**

8 Формула Грина . . . 61

9 Ряды Фурье *(возвращение)* . . . 64

9.1 Напоминание . . . 65

Лекция 10 19 апреля **68**

Лекция 11 26 апреля **72**

10 Гильбертово пространство . . . 74

Лекция 1

8 февраля

Лемма 1 (о структуре компактного оператора).

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор
- $\det V \neq 0$

Тогда $\exists$ ортонормированные базисы $g_1 \dots g_m$ и $h_1 \dots h_m$, а также $\exists s_1 \dots s_m > 0$, такие что:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad V(x) = \sum_{i=1}^{m} s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

И $|\det V| = s_1 s_2 \dots s_m$.

Примечание. Эта лемма из функционального анализа, что такое компактный оператор — мы не знаем.

Доказательство. $W := V^* V$ — самосопряженный оператор *(матрица симметрична относительно диагонали)*.

Из линейной алгебры мы знаем, что такой оператор имеет:

- Собственные числа: $c_1 \dots c_m$ — вещественные *(возможно с повторениями)*
- Собственные векторы: $g_1 \dots g_m$ — ортонормированные

Примечание. Пока мы в $\mathbb{R}^m$ *(а не в $\mathbb{C}^m$)*, * есть транспонирование. В комплексном случае ещё берется сопряжение.

$$c_i \langle g_i, g_i \rangle \overset{(1)}{=} \langle W g_i, g_i \rangle \overset{(2)}{=} \langle V g_i, V g_i \rangle > 0$$

- (1): т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i.

- (2): из линейной алгебры:

$$W_{kl} = \sum_{i=1}^{m} V_{ik} V_{il}$$

$$\langle W g_i, g_i \rangle = \sum_{k,l,j} V_{jk} V_{jl} g_k^{(i)} g_l^{(i)} = \langle V g_i, V g_i \rangle$$

Таким образом, $c_i > 0$.

$$s_i := \sqrt{c_i}$$

$$h_i := \frac{1}{s_i} V g_i$$

$$\langle h_i, h_j \rangle \overset{\text{def}\, h_i}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle V g_i, V g_j \rangle \overset{(3)}{=} \frac{1}{s_i s_j} \langle W g_i, g_j \rangle \overset{(4)}{=} \frac{c_i}{s_i s_j} \langle g_i, g_j \rangle \overset{(5)}{=} \delta_{ij}$$

- (3): из линейной алгебры, аналогично предыдущему.
- (4): т.к. g_i — собственный вектор для W с собственным значением c_i.
- (5): при $i \neq j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ в силу ортогональности, а при $i = j$ $\langle g_i, g_j \rangle = 1$ в силу ортонормированности и $\frac{c_i}{s_i s_j} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i}\sqrt{c_i}} = 1$

Примечание. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Таким образом, $\{h_i\}$ ортонормирован.

$$V(x) \overset{\text{def}\, x}{=} V\left(\sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle g_i\right) \overset{(6)}{=} \sum_{i=1}^{m} \langle x, g_i \rangle V(g_i) \overset{\text{def}\, h_i}{=} \sum s_i \langle x, g_i \rangle h_i$$

$$(\det V)^2 \overset{(7)}{=} \det(V^* V) \overset{\text{def}\, W}{=} \det W \overset{(8)}{=} c_1 \dots c_m$$

$$|\det V| = \sqrt{c_1} \dots \sqrt{c_m} = s_1 \dots s_m$$

□

Теорема 1 (о преобразовании меры Лебега под действием линейного отображения).

(6): в силу линейности V

(7): в силу мультипликативности det и инвариантности относительно транспонирования.

(8): т.к. det инвариантен по базису и в базисе собственных векторов $\det W = c_1 \dots c_m$.

- $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение

Тогда $\forall E \in \mathfrak{M}^m \ \ V(E) \in \mathfrak{M}^m$ и $\lambda(V(E)) = |\det V| \cdot \lambda E$

Доказательство.

1. Если $\det V = 0 \quad \mathrm{Im}(V)$ — подпространство в $\mathbb{R}^m \Rightarrow \lambda(\mathrm{Im}(V)) = 0$ по следствию 6 лекции 15 третьего семестра. Тогда $\forall E \ \ V(E) \subset \mathrm{Im}(V) \Rightarrow \lambda(V(E)) = 0$

2. Если $\det V \neq 0 \quad \mu E := \lambda(V(E))$ — мера, инвариантная относительно сдвигов. Это было доказано в конце прошлого семестра:

$$\mu(E+a) = \lambda(V(E+a)) = \lambda(V(E) + V(a)) = \lambda(V(E)) = \mu E$$

   $\Rightarrow \exists k : \mu = k\lambda$ по недоказанной теореме из прошлого семестра.

   Мы хотим найти k, для этого нужно что-нибудь померять. Померяем что-то очень простое, например $Q = \{\sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in [0,1]\}$ — единичный куб на векторах g_i.

   $V(g_i) = s_i h_i$. Таким образом, $V(Q) = \{\sum \alpha_i s_i h_i \mid \alpha_i \in [0,1]\}$.

$$\mu Q = \lambda(V(Q)) = s_1 \ldots s_m = |\det V| = |\det V| \underbrace{\lambda Q}_{=1}$$

   Таким образом, $k = |\det V|$

$\square$

1 Интеграл

1.1 Измеримые функции

Определение.

1. E — множество, $E = \bigsqcup\limits_{\text{кон.}} e_i$ — разбиение множества.

2. $f : X \to \mathbb{R}$ — **ступенчатая**, если:

$$\exists \text{ разбиение } X = \bigsqcup_{\text{кон.}} e_i : \forall i \ \ f\Big|_{e_i} = \mathrm{const}_i = c_i$$

   При этом разбиение называется **допустимым** для этой функции.

Пример.

1. Характеристическая функция множества $E \subset X : \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{cases}$

2. $f = \sum\limits_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i}$, где $X = \bigsqcup e_i$

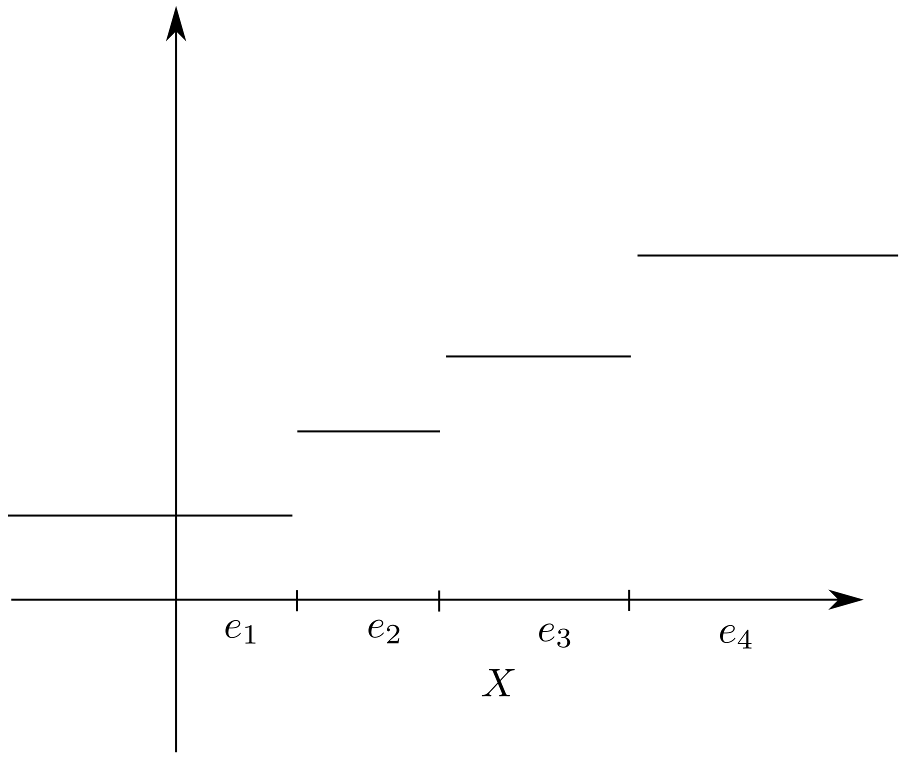


Рис. 1.1: Ступенчатая функция

Свойства.

1. $\forall f, g$ — ступенчатые:

   $\exists$ разбиение X, допустимое и для f, и для g:

$$f = \sum_{\text{кон.}} c_i \chi_{e_i} \quad g = \sum_{\text{кон.}} b_k \chi_{a_k}$$
$$f = \sum_{i,k} c_i \chi_{e_i \cap a_k} \quad g = \sum_{i,k} b_k \chi_{e_i \cap a_k}$$

2. f, g — ступенчатые, $\alpha \in \mathbb{R}$

   Тогда $f + g, \alpha f, fg, \max(f, g), \min(f, g), |f|$ — ступенчатые.

Определение. $f : E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}, a \in \mathbb{R}$

$E(f < a) = \{x \in E : f(x) < a\}$ — лебегово множество функции f

Аналогично можно использовать $E(f \leq a), E(f > a), E(f \geq a)$

Примечание.

$$E(f \geq a) = E(f < a)^c \quad E(f < a) = E(f \geq a)^c$$
$$E(f \leq a) = \bigcap_{b>a} E(f < b) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E\left(f < a + \frac{1}{n}\right)$$

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $E \in \mathfrak{A}$

f **измерима** на множестве E, если $\forall a \in \mathbb{R}\ \ E(f < a)$ измеримо, т.е. $\in \mathfrak{A}$

Вместо "f измерима на X" говорят просто "измерима".

Если $X = \mathbb{R}^m$, мера — мера Лебега, тогда f — измеримо по Лебегу.

Примечание. Эквивалентны:

1. $\forall a\ \ E(f < a)$ — измеримо
2. $\forall a\ \ E(f \leq a)$ — измеримо
3. $\forall a\ \ E(f > a)$ — измеримо
4. $\forall a\ \ E(f \geq a)$ — измеримо

Доказательство. Тривиально по соображениям выше. □

Пример.

1. $E \subset X, E$ — измеримо $\Rightarrow \chi_E$ — измеримо.

$$E(\chi_E < a) = \begin{cases} \varnothing, & a < 0 \\ X \setminus E, & 0 \leq a \leq 1 \\ X, & a > 1 \end{cases}$$

2. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — непрерывно. Тогда f — измеримо по Лебегу.

   Доказательство. $f^{-1}((-\infty, a))$ открыто по топологическому определению открытости, а любое открытое множество измеримо по Лебегу. □

Свойства.

1. f измеримо на $E \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \ E(f = a)$ измеримо.

   В обратную сторону неверно, пример — $f(x) = x + \chi_{\text{неизм.}}$

2. f — измеримо $\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \alpha f$ — измеримо.

   Доказательство. $E(\alpha f < a) = \begin{cases} E(f < \frac{a}{\alpha}), & \alpha > 0 \\ E(f > \frac{a}{\alpha}), & \alpha < 0 \\ E, & \alpha = 0, a \geq 0 \\ \varnothing, & \alpha = 0, a < 0 \end{cases}$ □

3. f — измеримо на $E_1, E_2, \dots \Rightarrow f$ измеримо на $E = \bigcup E_k$
4. f — измеримо на $E, E'_{\text{изм.}} \subset E \Rightarrow f$ измеримо на E'

   Доказательство. $E'(f < a) = E(f < a) \cap E'$ □

5. $f \neq 0$, измеримо на $E \Rightarrow \frac{1}{f}$ измеримо на E.
6. $f \geq 0$, измеримо на $E, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f^\alpha$ измеримо на E.

   Это неверно, т.к. при $f \equiv 0, \alpha = -1 \ \nexists f^\alpha$

Теорема 2. f_n — измеримо на X. Тогда:

1. $\sup f_n, \inf f_n$ измеримо.
2. $\overline{\lim} f_n, \underline{\lim} f_n$ измеримо.
3. Если $\forall x \ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = h(x)$, то $h(x)$ измеримо.

Доказательство.

1. $g = \sup f_n \quad X(g > a) \overset{(9)}{=} \bigcup_n X(f_n > a)$ и счётное объединение измеримых множеств измеримо.

   (9):

   - $X(g > a) \subset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(g > a)$, то $g(x) > a$.

     $$\sup_n f_n(x) = g(x) \neq a \Rightarrow \exists n : f_n(x) > a$$

   - $X(g > a) \supset \bigcup_n X(f_n > a)$, т.к. если $x \in X(f_n > a)$, то $f_n(x) > a$, следовательно $g(x) > a$.

2. $(\overline{\lim} f_n)(x) = \inf_n (s_n = \sup(f_n(x), f_{n+1}(x), \dots))$. Т.к. sup и inf измерим, $\overline{\lim} f_n$ тоже измерим.
3. Очевидно, т.к. если $\exists \lim$, то $\lim = \overline{\lim} = \underline{\lim}$

□

1.2 Меры Лебега-Стилтьеса

$\mathbb{R}, \mathcal{P}^1, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастает, непрерывно.

$\mu[a, b) := g(b) - g(a)$ — σ-конечный объем *(и даже σ-конечная мера на $\mathcal{P}^1$)*

Также можно определить для монотонной, но непрерывной g. Тогда в точках разрыва $\exists g(a + 0), g(a - 0)$. Пусть $\mu[a, b) = g(b - 0) - g(a - 0)$. Такое изменение нужно, потому что исходное μ не является объемом для разрывных функций.

Применим теорему о лебеговском продолжении меры. Получим меру μ_g на некоторой σ—алгебре. Это мера Лебега-Стилтьеса.

Пример. $g(x) = [x]$, тогда мера ячейки — количество целых точек в этой ячейке.

Если μ_g определена на Борелевской σ-алгебре, то она называется мерой Бореля-Стилтьеса.

Лекция 2

15 февраля

Теорема 3 (о характеризации измеримых функций с помощью ступенчатых).

- $f : X \to \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- f измеримо

Тогда $\exists f_n$ — ступенчатые:

1. $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \dots$
2. $\forall x \;\; f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$

Доказательство.

$$e_k^{(n)} = X\left(\frac{k-1}{n} \leq f < \frac{k}{n}\right) \qquad k = 1 \dots n^2$$

$$e_{n^2+1}^{(n)} := X(n \leq f)$$

$$g_n := \sum_{k=1}^{n^2+1} \frac{k-1}{n} \chi_{e_k^{(n)}}$$

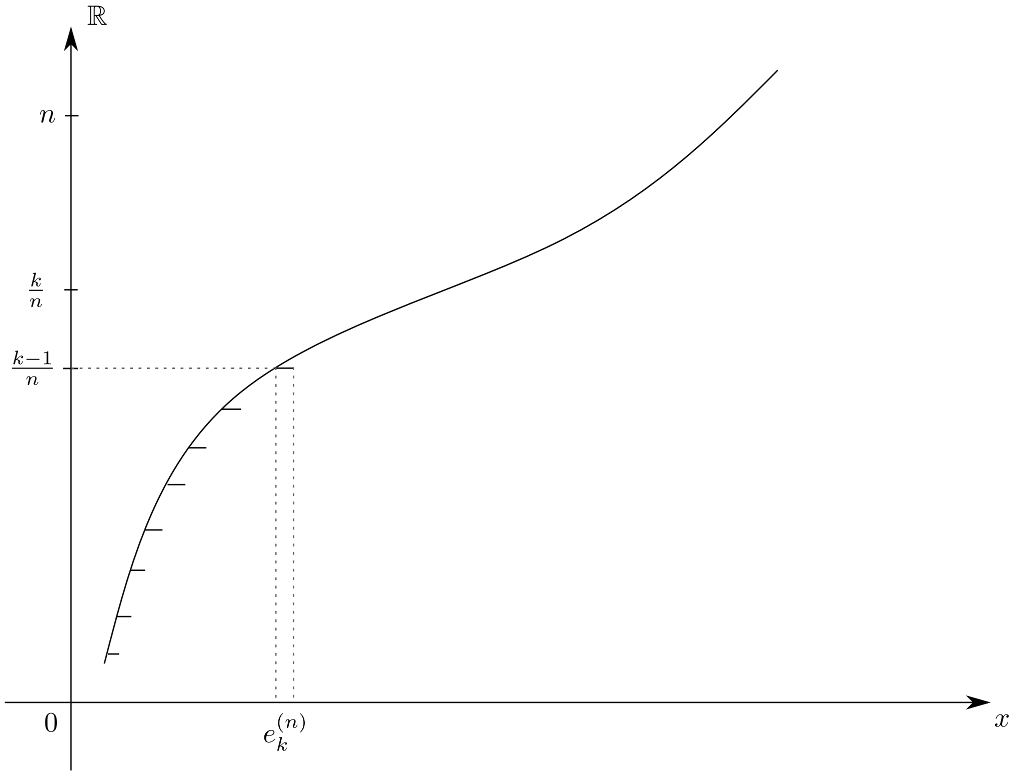
$$g_n \geq 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = f(x) : g_n(x) \leq f(x)$$

Не дописано.

$\square$

Следствие 3.1.



- f — измеримо

Тогда $\exists f_n$ — измеримые : $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ всюду и $|f_n| \leq |f|$

Доказательство. Рассмотрим срезки f^+, f^-, дальше очевидно. ☐

Следствие 3.2.

- f, g — измеримо

Тогда fg — измеримо, если $0 \cdot \infty = 0$.

Доказательство.

$$\underbrace{f_n}_{\text{ступ.}} \to f, \underbrace{g_n}_{\text{ступ.}} \to g$$

$$f_n g_n - \text{ступ.} \quad f_n g_n \to fg$$

Измеримость выполняется в силу измеримости предела. ☐

Следствие 3.3.

- f, g — измеримо

Тогда $f + g$ измеримо.

Примечание. Считаем, что $\forall x$ не может быть одновременно $f(x) = \pm\infty, g(x) = \pm\infty$.

Доказательство.

$$f_n + g_n \to f + g$$

$\square$

Теорема 4 (об измеримости функций, непрерывных на множестве полной меры).

Примечание. $A \subset X$ — **полной меры**, если $\mu(X \setminus A) = 0$.

- $f : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}^m$
- $e \subset E$
- $\lambda_m e = 0$
- f — непрерывно на $E' = E \setminus e$

Тогда f — измеримо.

Доказательство. f — измеримо на E', т.к. $E'(f < a)$ открыто в E' по топологическому определению непрерывности.

$e(f < a) \subset e$, λ_m — полная $\Rightarrow e(f < a)$ — измеримо в E.

$E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$, объединение измеримых множеств измеримо. $\square$

Пример. $E = \mathbb{R}, f = \chi_{\text{Irr}}$, где Irr — множество иррациональных чисел. f непр. на Irr и разрывно на $\mathbb{R}$.

Следствие 4.1.

- $f : E \to \mathbb{R}$
- $e \subset E \subset X$
- $\mu e = 0$
- $E' = E \setminus e$
- f измеримо на E'

Тогда можно так переопределить f на e, что полученная функция $\tilde{f}$ будет измерима.

Доказательство. Пусть $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in E' \\ \text{const}, x \in e \end{cases}$

$$E(\tilde{f} < a) = \underbrace{E'(\tilde{f} < a)}_{E'(f<a)} \subset \underbrace{e(\tilde{f} < a)}_{\varnothing \text{ или } e}$$

$\square$

Следствие 4.2. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — монотонна.

Тогда f измерима.

Доказательство. f — непрерывно на $\langle a, b\rangle$ за исключением, возможно, счётного множества точек. $\square$

Упражнение. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримо.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывна.

Доказать: $x \mapsto \varphi(f(x), g(x))$ — измеримо.

Упражнение. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримо.

Доказать: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ — измеримо.

Упражнение. Доказать, что $\exists$ измеримая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall e \subset \mathbb{R} : \lambda e = 0$, если f непрерывно на e, то полученная $\tilde{f}$ разрывна всюду.

1.3 Сходимость почти везде и по мере

Определение.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $E \in \mathfrak{A}$
- $W(x)$ — высказывание $(x \in X)$

$W(x)$ — верно при почти всех из E = почти всюду на E = почти везде на E = п.в. E, если:

$\exists e \in E : \mu e = 0 \;\; W(x)$ — истинно при $x \in E \setminus e$

Пример. $X = \mathbb{R}, W$ = иррационально.

Пример. $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} f(x)$ при п.в. $x \in E$

Свойства.

1.
   - μ — полная
   - $f_n, f : X \to \overline{R}$ п.в. X
   - f_n измеримо

   Тогда f измеримо.

Доказательство. $f_n \to f$ на X', где $e = X \setminus X', \mu e = 0$

f — измеримо на X

μ — полная $\Rightarrow f$ измеримо на X, т.к. $X(f < a) = \underbrace{X'(f < a)}_{\text{изм.}} \cup \underbrace{e(f < a)}_{\subset e}$ □

2. ???

3. Пусть $\forall n \;\; W_n(x)$ истинно при почти всех x.

   Тогда утверждение "$\forall n \;\; W_n$ истинно" — верно при почти всех X

   Доказательство. $\lhd e_n : \mu(e_n) = 0$. Искомое высказывание верно при $x \in X \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} e_i\right), \mu(\bigcup e_i) = 0$ □

Определение. $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — почти везде конечны.

f_n **сходится к** f **по мере** μ, обозначается $f_n \xRightarrow[\mu]{} f : \forall \varepsilon > 0 \;\; \mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Примечание. f_n и f можно изменить на множестве меры 0, т.е. предел не задан однозначно.

Упражнение. $f_n \xRightarrow[\mu]{} f; f_n \xRightarrow[\mu]{} g$. Тогда f и g эквивалентны.

Пример.

1. $f_n(x) = \frac{1}{nx}, x > 0, X = \mathbb{R}_+, f \equiv 0$

   $f_n \to f$ всюду на $(0, +\infty)$

   $f_n \xRightarrow[\mu]{} f$

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) = X\left(\frac{1}{nx} \geq \varepsilon\right) = X(x \leq \frac{1}{\varepsilon n})$$

$$\lambda(\dots) = \frac{1}{\varepsilon n} \to 0$$

2. $f_n(x) := e^{-(n-x)^2}, x \in \mathbb{R}$

   $f_n(x) \to 0$ при всех x

   $f_n(x) \xRightarrow{} 0$

$$\mu(\mathbb{R}(e^{-(n-x)^2} \geq \varepsilon)) = \text{const} \not\to 0$$

3. $n = 2^k + l, 0 \leq l < 2^k, X = [0, 1], \lambda$

$$f_n(x) := \chi_{[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]}$$

$\lim f_n(x)$ не существует ни при каком x!

$$X(f_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^k} \to 0 \Rightarrow f_n \xRightarrow[\lambda]{} 0$$

Теорема 5 (Лебега).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- μX конечно
- f_n, f — измеримо, п.в. конечно
- $f_n \to f$ п.в.

Тогда $f_n \xRightarrow[\mu]{} f$

Доказательство. Переопределим f_n, f на множестве меры 0, чтобы сходимость была всюду.

Рассмотрим частный случай: $\forall x$ последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает к 0, то есть $f \equiv 0$

$$X(|f_n| \geq \varepsilon) = X(f_n \geq \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geq \varepsilon)$$
$$\bigcap X(f_n \geq \varepsilon)$$

Таким образом, по теореме о непрерывности меры сверху, $\mu X(f_n \geq \varepsilon) \to 0$

Рассмотрим общий случай: $f_n \to f$, $\varphi(x) := \sup\limits_{k \geq n} |f_k(x) - f(x)|$

Тогда $\varphi_n \to 0, \varphi_n \geq 0$ и монотонно, таким образом мы попали в частный случай.

$$X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \subset X(\varphi_n \geq \varepsilon)$$
$$\mu X(|f_n - f| \geq \varepsilon) \leq \mu X(\varphi_n \geq \varepsilon) \to 0$$

□

Теорема 6 (Рисс).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $f_n \xRightarrow[\mu]{} f$.

Тогда $\exists n_k : f_{n_k} \to f$ почти везде.

Доказательство.

$$\forall k \ \ \mu X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right) \to 0$$

$$\exists n_k : \text{при } n \geq n_k \ \ \mu X\left(|f_n - f| \geq \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

Можно считать, что $n_1 < n_2 < n_3$

Проверим, что $f_{n_k} \to f$ почти везде.

$$E_k := \bigcup_{j=k}^{+\infty} X\left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}\right) \quad E = \bigcap E_k$$

$$E_k \supset E_{k+1} \quad \mu E_k \overset{(10)}{\leq} \sum_{j=k}^{+\infty} \mu X\left(|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{j}\right) < \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{2}{2^k} \to 0$$

$$\mu E_k \to \mu E \Rightarrow \mu E = 0$$

Покажем, что при $x \notin E \ \ f_{n_k} \to f$.

$$x \notin E \ \exists N \ \ x \notin E_k \text{ при } k > N \ \ |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

То есть $f_{n_k}(x) \to f(a)$.

Т.к. $\mu E = 0$, искомое выполнено. □

Следствие 6.1. $f_n \xRightarrow[\mu]{} f \ \ |f_n| \leq g$ почти всюду. Тогда $|f| \leq g$ почти всюду.

Доказательство. $\exists n_k \ \ f_{n_k} \to f$ почти всюду.

□

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n(x) \to f(x) \ \ \forall x \Rightarrow f_n \xRightarrow{} f$$

Теорема 7 (Егорова).

- $X, \mathfrak{A}, \mu$
- $\mu X < +\infty$
- f_n, f — почти везде конечно, измеримо

(10): по счётной полуаддитивности меры.

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists e \subset X : \mu e < \varepsilon \quad f_n \underset{X \setminus e}{\rightrightarrows} f$$

Доказательство. Упражнение. □

2 Интеграл

$\lhd (X, \mathfrak{A}, \mu)$ — зафиксировали.

Определение (1).

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}$
- E_k — допустимое разбиение
- $\alpha_k \geq 0$

$$\int_X f d_{\mu(x)} := \sum \alpha_k \mu E_k$$

И пусть $0 \cdot \infty = 0$

Свойства.

1. Не зависит от представления f в виде суммы, т.е.:

   $$f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} = \sum \alpha'_k \chi_{E'_k} = \sum_{k,j} \alpha_k \chi_{E_k \cap E'_j}$$

   Примечание. При $E_k \cap E'_j \neq \varnothing$ $\alpha_k = \alpha_j \Rightarrow$ можно писать любое из них.

   $$\int f = \sum \alpha_k \mu E_k = \sum_{k,j} \alpha_k \mu (E_k \cap E'_j) = \sum \alpha'_k \mu E'_k$$

2. $\underbrace{f}_{\text{ст.}} \leq \underbrace{g}_{\text{ст.}} \Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$

Определение (2).

- $f \geq 0$
- f измеримо

$$\int_X f d\mu := \sup_{\substack{g - \text{ступ.} \\ 0 \leq g \leq f}} \int g d\mu$$

Свойства.

- Если f ступенчатая, то определение 2 = определение 1.
- $0 \le \int_X f \le +\infty$
- $g \le f, f$ — измеримая, g — измеримая $\Rightarrow \int_X g \le \int_X f$

Определение (3).

- f измеримо
- $\int f^+$ или $\int f^-$ конечен

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Требование о конечности необходимо для избегания неопределенностей.

Теорема 8 (Тонелли).

- $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \ge 0$
- f измерима
- Записывается как $f(x, y)$, где $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$
- $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$

Обозначение.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{m+n} \;\; E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\}$$

Тогда:

1. При почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ функция $y \mapsto f(x, y)$ измерима на $\mathbb{R}^n$
2. Функция $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \ge 0$, измерима и корректно задана.
3. $$\int_E f(x, y) d\mu = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E_x} f(x, y) d\lambda_n(y) \right) d\lambda_m(x)$$

Примечание. Неформально говоря, можно разбить $\mathbb{R}^{m+n}$ на $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ и интегрировать сначала по одной переменной, потом по другой.

Лекция 3

22 февраля

Определение. Если оказалось, что $\int_X f^+, \int_X f^-$ оба конечны, то f называется **суммируемой**.

Примечание.

1. Если f измеримо и $\geq$, то интеграл определения 3 = интегралу определения 2.

Определение (4).

- $E \subset X$ — измеримо
- f измеримо на X

$$\int_E f d\mu := \int_X f \cdot \chi_E$$

Примечание.

- $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k} \Rightarrow \int_E f = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E)$
- $\int_E f d\mu = \sup\{\int_E g : 0 \leq g \leq f$ на E, g — ступ.$\}$ и мы считаем, что $g \equiv 0$ вне E.
- $\int_E f$ не зависит от значений f вне множества E.

Свойства. $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \subset X$ — измеримо, g, f — измеримо.

1. Монотонность $f \leq g : \int_E f \leq \int_E g$

   Доказательство.

   (a) При $f, g \geq 0$ — очевидно из определения.

   (b) При произвольных $f, g \quad f^+ \leq g^+$ и $f^- \geq g^-$ *(очевидно из определения)*. Из предыдущего случая $\int_E f^+ \leq \int_E g^+, \int_E f^- \geq \int_E g^-$.

$\square$

2. $\int_E 1 d\mu = \mu E, \int_E 0 d\mu = 0$
3. $\mu E = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$

   Доказательство.

   (a) f — ступ. Тривиально.

   (b) f — измеримо, $f \geq 0$. $\sup 0 = 0$, поэтому искомое выполнено.

   (c) $\int f^+, \int f^- = 0 \Rightarrow \int f = 0$

   □

   Примечание. f — измерима. Тогда f суммируема $\Leftrightarrow \int |f| < +\infty$

   Доказательство.

   $\Leftarrow$ следует из $f^+, f^- \leq |f|$

   $\Rightarrow$ будет доказано позже на этой лекции.

   □

4. $\int_E (-f) = -\int_E f, \forall c \in \mathbb{R} \quad \int_E cf = c \int_E f$

   Доказательство.

   (a) $(-f)^+ = f^-, (-f)^- = f^+$, тогда искомое очевидно.

   (b) Можно считать $c > 0$ без потери общности, тогда для $f \geq 0$ тривиально.

   □

5. $\exists \int_E f d\mu$. Тогда $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

   Доказательство.

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$$

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

   □

6. $\mu E < +\infty, a \leq f \leq b$. Тогда

$$a\mu E \leq \int_E f \leq b\mu E$$

Следствие 8.1. f — измеримо на E, f — ограничено на E, $\mu E < +\infty$. Тогда f суммируемо на E

7. f суммируема на E. Тогда f почти везде конечна.

   Доказательство.

   (a) $f \geq 0$ и $f = +\infty$ на $A \subset E$. Тогда $\int_E f \geq n\mu A \ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu A = 0$

   (b) В произвольном случае аналогично со срезками.

$\square$

Лемма 2.

- $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ — измеримо
- g — ступенчато
- $g \geq 0$

Тогда

$$\int_A g d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} g d\mu$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\int_A g d\mu &= \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \mu(E_k \cap A) \\ &= \sum_k \sum_i \underbrace{\alpha_k \mu(E_k \cap A_i)}_{\geq 0} \\ &\overset{(11)}{=} \sum_i \sum_k \dots \\ &= \sum_i \int_{A_i} g d\mu\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 9.

- $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо на A
- $f \geq 0$

Тогда

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

(11): переставлять можно, т.к. члены суммы ≥ 0.

Доказательство. Докажем, что части равенства $\leq$ и $\geq$, тогда равенство выполнено.

$\leq$ $\lhd g : 0 \leq g \leq f$

$$\int_A g \overset{(12)}{=} \sum \int_{A_i} g \leq \sum \int_{A_i} f$$

$\geq$

1. $A = A_1 \sqcup A_2$

   $\lhd 0 \leq g_1 \leq f\chi_{A_1}, 0 \leq g_2 \leq f\chi_{A_2}$. Пусть E_k — совместное разбиение, у g_1 коэффициенты α_k, у $g_2 : \beta_k$.

$$\begin{aligned} 0 \leq g_1 + g_2 &\leq f\chi_A \\ \int_{A_1} g_1 + \int_{A_2} g_2 = \int_A (g_1 + g_2) &\leq \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} g_2 &\leq \int_A f \\ \int_{A_1} f + \int_{A_2} f &\leq \int_A f \end{aligned}$$

2. $A = \bigsqcup A_i$ тривиально по индукции.
3. $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cup B_n$, где $B_n = \bigsqcup_{i>n} A_i$

$$\int_A f = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f + \int_{B_n} f \geq \sum_{i=1}^n \int A_i f$$

□

Следствие 9.1. $f \geq 0$ — измеримо. Пусть $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ и $\nu E := \int_E f d\mu$. Тогда ν — мера.

Следствие 9.2 (Счётная аддитивность интеграла). f суммируема на $A = \bigsqcup A_i$ — измеримо. Тогда

$$\int_A f = \sum \int_{A_i} f$$

Доказательство. Очевидно, если рассмотреть срезки. □

Следствие 9.3. $A \subset B, f \geq 0 \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$

(12): по лемме об интеграле.

2.1 Предельный переход под знаком интеграла

Пусть $f_n \to f$. Можно ли утверждать, что $\int_E f_n \to \int_E f$?

Пример (контр).

$$f_n := \frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \quad f \equiv 0 \quad f_n \to f \quad (\text{даже } f_n \rightrightarrows f)$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n}\lambda[0,n] = 1 \not\to 0 = \int_{\mathbb{R}} f$$

Теорема 10 (Леви).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- f_n измеримо
- $\forall n \;\; 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ почти везде.
- $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ — эта функция определена почти везде.

Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Примечание. f задано везде, кроме множества e меры 0. Считаем, что $f = 0$ на e. Тогда f измеримо на X.

Доказательство.

$\leq$ очевидно, т.к. $\int f_n \leq f$ почти везде, таким образом:

$$\int_X f_n = \int_{X\setminus e} f_n + \underbrace{\int_e f_n}_{0} = \int_{X\setminus e} f_n \leq \int_{X\setminus e} f \leq \int_X f$$

$\geq$ достаточно проверить, что $\forall$ ступенчатой $g : 0 \leq g < f$ выполняется следующее $\lim \int_X f_n \geq \int_X g$

Сильный трюк: достаточно проверить, что $\forall c \in (0,1) \;\; \lim \int_X f_n \geq c\int_X g$

$$E_n := X(f_n \geq cg) \quad E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$\bigcup E_n = X$, т.к. $c < 1$

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq c\int_{E_n} g$$

Тогда $\lim \int_X f_n \geq c \cdot \lim \int_{E_n} g \overset{(13)}{=} c\int_X g$

□

Теорема 11.

- $f, g \geq 0$
- f, g измеримо на E

Тогда $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$

Доказательство.

1. f, g — ступенчатые, т.е. $f = \sum \alpha_k \chi_{E_k}, g = \sum \beta_k \chi_{E_k}$

$$\int_E f+g = \sum(\alpha_k+\beta_k)\mu(E_k \cap E) = \sum \alpha_k \mu(E_k \cap E) + \sum \beta_k \mu(E_k \cap E) = \int_E f + \int_E g$$

2. $f \geq 0$, измеримо. $\exists$ступ. $f_n : 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \quad \lim f_n = f$

   $g \geq 0$, измеримо. $\exists$ступ. $g_n : 0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots \quad \lim g_n = g$

$$f_n + g_n \to f + g$$
$$\int_E f_n + g_n \xrightarrow{\text{т. Леви}} \int_E f + g$$
$$\int_E f_n + \int_E g_n \to \int_E f + \int_e g$$

□

Следствие 11.1. f, g суммируемы на E. Тогда $f + g$ суммируемо и $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$. Таким образом, доказано 3.

Доказательство суммируемости. $|f + g| \leq |f| + |g|$. Пусть $h = f + g$. Тогда

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$
$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$$
$$\int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E f^+ + \int_E g^+ + \int_E h^-$$
$$\int_E h^+ - \int_E f^- = \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^-$$

□

(13): по непрерывности снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E g$

Определение. $\mathcal{L}(X)$ — множество суммируемых функций на X

Следствие 11.2 (следствия). $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, а отображение $f \mapsto \int_X f$ это линейный функционал[1] на $\mathcal{L}(X)$, т.е. $\forall f_1 \dots f_n \in \mathcal{L}(X)\ \ \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

???

Теорема 12 (об интегрировании положительных рядов).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $E \in \mathfrak{A}$
- $u_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $u_n \geq 0$ почти везде
- u_n измеримо

Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_E u_n d\mu$$

Доказательство. По теореме Леви:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k \quad 0 \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \dots$$

Пусть $S_n \to S$. Тогда $\int_E S_n \to \int_E S$

□

Следствие 12.1. u_n измеримо и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_E |u_n| < +\infty$. Тогда ряд $\sum u_n(x)$ абсолютно сходится при почти всех x.

Доказательство.

$$S(x) := \sum |u_n(x)|$$

$$\int_E S(X) = \sum \int_E |u_n| < +\infty \Rightarrow S \text{ суммируемо} \Rightarrow S \text{ почти везде конечно}$$

□

Пример. $x_n \in \mathbb{R}$ — произвольная последовательность, $\sum a_n$ абсолютно сходится.

Тогда $\sum \dfrac{a_n}{\sqrt{|x - x_n|}}$ абсолютно сходится при почти всех x.

[1] т.е. функция функций

Доказательство. Достаточно проверить абсолютную сходимость на $[-N, N]$ почти везде.

$$\begin{aligned}\int_{[-N,N]} \frac{|a_n| d\lambda}{\sqrt{|x-x_n|}} &= \int_{-N}^{N} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} dx \\ &= |a_n| \int_{-N-x_n}^{N-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &\le |a_n| \int_{-N}^{N} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &4\sqrt{N}|a_n|\end{aligned}$$

□

Лекция 4

1 марта

Теорема 13 (об абсолютной непрерывности интеграла).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- f суммируемо

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall E$ — изм., $\mu E < \delta : \left| \int_E f \right| < \varepsilon$

Следствие 13.1. f суммируемо на X, $E_n \subset X$, тогда $\mu E_n \to 0 \Rightarrow \int_{E_n} f \to 0$

Доказательство. [1]

$$X_n := X(|f| \geq n)$$

$$X_n \supset X_{n+1} \supset \dots \Rightarrow \mu \left(\bigcap X_n \right) \overset{(14)}{=} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \quad \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

Пусть $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Тогда при $\mu E < \delta$:

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| \overset{(16)}{=} \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} |f| \leq \int_{X_{n_\varepsilon}} |f| + \int_{E \cap X_{n_\varepsilon}^c} n_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\mu E}_{\delta} \cdot n_\varepsilon \leq \varepsilon$$

□

[1] Теоремы, не следствия
(14): Т.к. f на $\bigcap X_n$ бесконечна и f почти везде конечна.
(15): По непрерывности сверху меры $A \mapsto \int_A |f| d\mu$
(16): Т.к. $|f|$ на $E \cap X_{n_\varepsilon}^c$ не превосходит n_ε по построению X_{n_ε}

Примечание. Следующие два свойства не эквивалентны:

1. $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \;\; \mu X(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$
2. $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$

Из 1 не следует 2: пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \lambda)$, $f_n = \frac{1}{nx}$. Тогда $f_n \overset{\lambda}{\Rightarrow} 0$, но $\int |f_n - f| = +\infty$ при всех n.

Из 2 следует 1, т.к.

$$\mu \underbrace{X(|f_n - f| > \varepsilon)}_{X_n} = \int_{X_n} 1 \leq \int_{X_n} \frac{|f_n - f|}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{X_n} |f_n - f| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |f_n - f| \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Теорема 14 (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо и почти везде конечно
- $f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$
- $\exists g$, называемое “суммируемая мажоранта”:
  1. $\forall n \;\; |f_n| \overset{(17)}{\leq} g$ почти везде
  2. g — суммируемо на X

Тогда: f_n, f — суммируемы и $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \to +\infty} 0$, и тем более $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$

Примечание. Почти везде конечность f_n и f следует из (17), поэтому в условии этого можно не требовать.

Доказательство. f_n — суммируемы в силу неравенства (17), f суммируемо в силу следствия теоремы Рисса, тем более $|\int_X f_n - \int_X f| \leq \int_X |f_n - f| \to 0$

1. $\mu X < +\infty$

   Зафиксируем ε. $X_n := X(|f_n - f| > \varepsilon)$

   $f_n \Rightarrow f$, т.е. $\mu X_n \to 0$

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g \tag{18}$$

$$\int_X |f_n - f| = \int_{X_n} + \int_{X_n^c} = \underbrace{\int_{X_n} 2g}_{\xrightarrow[\text{сл. т. об абс. непр.}]{n \to +\infty} 0} + \int_{X_n^c} \varepsilon d\mu < \varepsilon + \varepsilon \mu X$$

2. $\mu X = +\infty$

   Утверждение: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A \subset X$, изм., конечной меры, μA конечно : $\int_{X \setminus A} g < \varepsilon$. Докажем его.

$$\int_X g = \sup\left\{\int g_n, 0 \le g_n \le g, g_n - \text{ступ.}\right\}$$
$$A := \{x : g_n(x) > 0\}$$
$$0 \le \int_X g - \int_X g_n = \int_A g - g_n + \int_{X \setminus A} g < \varepsilon$$
$$\int_X |f_n - f| d\mu = \int_A + \int_{X \setminus A} \le \underbrace{\int_A |f_n - f|}_{\substack{\to 0 \\ \text{по случаю 1}}} + \underbrace{\int_{X \setminus A} 2g}_{<2\varepsilon} < 3\varepsilon$$

□

Теорема 15 (Лебега).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- f_n, f — измеримо
- $f_n \overset{(19)}{\to} f$ почти везде
- $\exists g$, называемое “суммируемая мажоранта”:
  1. $\forall n \;\; |f_n| \le g$ почти везде
  2. g — суммируемо на X

Тогда f_n, f — суммируемы, $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$, и тем более $\int_X f_n \to \int_X f$

Доказательство. Суммируемость f_n, f, а также утверждение “и тем более” доказываются так же, как в теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

$$h_n := \sup(|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, |f_{n+2} - f|, \dots)$$
$$0 \overset{(20)}{\le} h_n \overset{(21)}{\le} 2g$$

h_n монотонно убывает, что очевидно по определению sup.

$$\lim h_n \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim} |f_n - f| \overset{(22)}{=} 0 \text{ почти везде}$$

(20): по построению
(21): по (18)
(22): по (19)

$2g - h_n \geq 0$ и возрастает как последовательность функций, $2g - h_n \to 2g$ почти везде. Тогда по теореме Леви:

$$\int_X 2g - h_n \to \int_X 2g \Rightarrow \int_X h_n \to 0$$

$$\int_X |f_n - f| \leq \int_X h_n \to 0$$

$\square$

Пример. $\sphericalangle x > 0, x_0 > 0$

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\lim_{x \to x_0} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{?}{=} \int_0^{+\infty} t^{x_0 - 1} e^{-t} dt$$

Равенство выполнено, т.к. $t^{x-1}e^{-t} \xrightarrow{x \to x_0} t^{x_0-1}e^{-t}$ при $t > 0$ и суммируемая мажоранта $t^{\alpha-1}e^{-t} + t^{\beta-1}e^{-t}$, где $0 < \alpha < x_0, 0 < \beta$

Теорема 16 (Фату).

- $X, \mathfrak{A}, \mu$ — пространство с мерой
- $f_n \geq 0$
- f_n измеримо
- $f_n \to f$ почти везде
- $\exists C > 0 \ \forall n \ \ \int_X f_n \leq C$

Тогда $\int_X f \leq C$

Примечание. Странность: здесь не требуется, чтобы $\int_X f_n \to \int_X f$ и это может быть неверно.

Пример.

$$f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \to 0 = f \text{ п.в.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \leq 1$$

По теореме Фату $\int_{\mathbb{R}} f \leq 1$, что верно, т.к. $\int_{\mathbb{R}} f = 0 \leq 1$

Пример. Условие $f_n \geq 0$ важно:

$$f_n = -\frac{1}{n}\chi_{[0,n]} \to 0 = f \text{ п.в.} \quad \int_{\mathbb{R}} f_n = -1 \leq -1, \text{но} \int_{\mathbb{R}} f = 0 \not\leq -1$$

Доказательство.

$$g_n := \inf(f_n, f_{n+1}, \dots)$$
$$0 \leq g_n \leq g_{n+1}$$
$$\lim g_n \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lim} f_n = f \text{ п.в.}$$
$$\int_X g_n \leq \int_X f_n \leq C \tag{23}$$
$$\int_X g_n \stackrel{(24)}{\to} \int_X f$$

Значит $\int_X f \leq C$ по предельному переходу в (23) □

Следствие 16.1.

- $f_n, f \geq 0$
- f_n, f измеримы
- f_n, f почти везде конечны
- $f_n \rightrightarrows f$
- $\exists C > 0 \ \ \forall n \ \ \int_X f_n \leq C$

Тогда $\int_X f \leq C$

Доказательство.

$$f_n \rightrightarrows f \implies \exists n_k : f_{n_k} \to f \text{ п.в.}$$

По теореме Фату получим искомое. □

Следствие 16.2.

- $f_n \geq 0$
- f_n измеримо

Тогда $\int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n$

Доказательство. Возьмём (23) как в теореме. Выберем $n_k : \int_X f_{n_k} \xrightarrow{n \to +\infty} \underline{\lim} \int_X f_n$

$$\begin{array}{c} \int_X g_{n_k} \leq \int_X f_{n_k} \\ \big\downarrow \\ \int_X \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int_X f_n \end{array}$$

□

(24): по теореме Леви

3 Плотность одной меры по отношению к другой. Замена переменных в интеграле.

$\triangleleft (X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $(Y, \mathfrak{B}, \llcorner\!\lrcorner), \Phi : X \to Y$

Пусть Φ — измеримо в следующем смысле:

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}$$

Упражнение. Проверить, что Φ^{-1} — σ-алгебра.

Для $E \in \mathfrak{B}$ положим $\nu(E) = \mu\Phi^{-1}(E)$. Тогда ν — мера:

$$\nu\left(\bigsqcup E_n\right) = \mu(\Phi^{-1}\left(\bigsqcup E_n\right)) = \mu\left(\bigsqcup \Phi^{-1}(E_n)\right) = \sum \mu\Phi^{-1}E_n = \sum \nu E_n$$

Мера ν называется **образом** μ при отображении Φ и $\nu E = \int_{\Phi^{-1}(E)} 1 d\mu$

Наблюдение 1. $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо относительно $\mathfrak{B}$. Тогда $f \circ \Phi$ — измеримо относительно $\mathfrak{A}$.

$$X(f(\Phi(x)) < a) = \Phi^{-1}(Y(f < a)) \overset{(25)}{\in} \mathfrak{A}$$

Определение. $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}, \omega \geq 0$, измеримо на X.

$$\forall B \in \mathfrak{B} \;\; \nu(B) := \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x) d\mu(x)$$

Тогда ν называется “**взвешенный образ меры** μ”, ω называется **весом**.

Теорема 17 (о вычислении интеграла по взвешенному образу меры).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространство с мерой
- $\Phi : X \to Y$
- $\omega \geq 0$
- ω измеримо на X
- ν взвешенный образ μ при отображении Φ с весом ω

Тогда $\forall$ измеримой относительно $\mathfrak{B}$ f на $Y, f \geq 0$ выполнено следующее:

(25): т.к. $Y(f < a) \in \mathfrak{B}$

1. $f \circ \Phi$ измеримо на X относительно $\mathfrak{A}$
2. $$\int_Y f(y) d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x)) \cdot \omega(x) d\mu(x) \tag{26}$$

То же самое верно для суммируемой f.

Доказательство. Измеримость $f \circ \Phi$ выполнена по наблюдению 1.

0. Пусть $f = \chi_B, B \in \mathfrak{B}$

$$(f \circ \Phi)(x) = f(\Phi(x)) = \begin{cases} 1, & \Phi(x) \in B \\ 0, & \Phi(x) \notin B \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$$

   Тогда (26) это:
$$\mu B \overset{?}{=} \int_X \chi_{\Phi^{-1}(B)} \cdot \omega d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega d\mu$$
   Это выполнено по определению μB

1. Пусть f — ступенчатая

   (26) следует из линейности интеграла.

2. Пусть $f \geq 0$, измеримая

   По теореме о характеризации измеримых функций с помощью ступенчатых и теореме Леви $\exists \{h_i\} : 0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$ — ступенчатые, $h_i \leq f, h_i \to f$

$$\int_Y h_i d\nu = \int_X h_i \circ \Phi \cdot \omega d\mu \xrightarrow{i \to +\infty} (26)$$

3. Пусть f измерима.

   Тогда для $|f|$ выполнено (26); $|f|$ и $|f \circ \Phi| \cdot \omega$ суммируемы одновременно.

$$(f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega \quad (f \circ \Phi \cdot \omega)_+ = f_+ \circ \Phi \cdot \omega$$

   Таким образом, искомое выполнено для f_+ и f_-, а следовательно и для f.

□

Следствие 17.1 (об интегрировании по подмножеству). В условиях теоремы пусть:

- $B \in \mathfrak{B}$
- f суммируемо на Y

Тогда
$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x))\omega d\mu$$

Доказательство. В условие теоремы подставим $f \cdot \chi_B$ $\square$

Определение. Рассмотрим частный случай: $X = Y, \mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \Phi = \mathrm{id}$. Кажется, что мы убили всю содержательность, но это не так — есть ещё ω.

$$\nu(B) = \int_B \omega(x) d\mu$$

В этой ситуации ω называется **плотностью** меры ν относительно меры μ и тогда по теореме о вычислении интеграла по взвешенному образу меры:

$$\int_X f d\nu = \int_X f(x)\omega(x) d\mu$$

Лекция 5

15 марта

Определение.

- $X, \mathfrak{A}, \mu$ — пространство с мерой
- $\nu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера

Плотность меры ν относительно μ есть положительная измеримая функция $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$, такая что:

$$\forall B \in \mathfrak{A} \;\; \nu B = \int_B \Omega d\mu$$

Теорема 18 (критерий плотности).

- $X, \mathfrak{A}, \mu$ — пространство с мерой
- ν — мера
- $\omega : X \to \overline{\mathbb{R}}$
- $\omega \geq 0$
- ω измеримо

Тогда ω — плотность ν относительно $\mu \Leftrightarrow$:

$$\forall A \in \mathfrak{A} \;\; \mu A \cdot \inf_A \omega \leq \nu(A) \leq \mu A \sup_A \omega$$

При этом $0 \cdot \infty$ считается $= 0$.

Пример (отсутствие плотности). $X = \mathbb{R}, \mathfrak{A} = \mathfrak{M}^1, \mu = \lambda_1$

ν — одноточечная мера: $\nu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & 0 \notin A \end{cases}$

Необходимое условие существования плотности — $\mu A = 0 \Rightarrow \nu A = 0$

Это и достаточное условие по теореме Радона-Никодима[1].

Доказательство теоремы критерий плотности.

"$\Rightarrow$" Очевидно.

"$\Leftarrow$" Рассмотрим $\omega > 0$. Общность не умаляется, т.к. пусть $e = X(\omega = 0)$, тогда $\nu(e) \stackrel{\text{def}}{=} \int_e \omega d\mu = 0$, поэтому в случае $A \cap e \neq \varnothing$ всё ещё только лучше.

Фиксируем число $q \in (0, 1)$.

$$A_j := A(q^j \le \omega < q^{j-1}), j \in \mathbb{Z}$$

$$A = \bigsqcup_{j \in \mathbb{Z}} A_j$$

$$\mu A_j \cdot q^j \stackrel{(27)}{\le} \nu A_j \stackrel{(28)}{\le} \mu A_j \sup_{A_j} q^{j-1}$$

$$\mu A_j \cdot q^j \stackrel{(29)}{\le} \int_{A_j} \omega d\mu \stackrel{(30)}{\le} \mu A_j q^{j-1}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} q \cdot \int_A \omega d\mu \le q \cdot \sum \int_{A_j} \omega d\mu \\ &\stackrel{(31)}{\le} \sum q^j \mu A_j \\ &\stackrel{(32)}{\le} \underbrace{\sum \nu A_j}_{\nu A} \\ &\stackrel{(33)}{\le} \frac{1}{q} \sum q^j \mu A_j \\ &\stackrel{(34)}{\le} \frac{1}{q} \sum \int_{A_j} \\ &= \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu \end{aligned}$$

То есть:

$$q \int_A \omega d\mu \le \nu A \le \frac{1}{q} \int_A \omega d\mu$$

[1] Возможно, мы разберём её в конце семестра.

(32): по (27)
(33): по (28)
(34): по (29)
(31): по (30)

Тогда предельный переход при $q \to 1 - 0$ дает искомое.

$\square$

Лемма 3.

- f, g суммируемы
- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
- $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \int_A f = \int_A g$

Тогда $f = g$ почти везде.

Доказательство. $h := f - g$. Дано: $\forall A \quad \int_A h = 0$; доказать — $h = 0$ почти везде.

$$A_+ := X(h \geq 0) \quad A_- := X(h < 0) \quad X = A_+ \sqcup A_-$$
$$\int_{A_+} |h| = \int_{A_+} h = 0 \quad \int_{A_-} |h| = -\int_{A_-} h = 0 \implies \int_X |h| = 0 \implies h = 0 \text{ п.в.}$$

$\square$

Примечание. Если $\mathcal{L}(X)$ — линейное пространство, отображение $l_A : f \mapsto \int_A f$ есть линейный функционал. Таким образом, множество функционалов $\{l_A, A \in \mathfrak{A}\}$ разделяет точки, т.е. $\forall f \neq g \in \mathcal{L}(X) \;\; \exists A : l_A(f) \neq l_A(g)$

Примечание. В $\mathbb{R}^m$ $a = (a_1 \dots a_m)$, $l_a : x \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. Тогда $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \;\; \exists a : l_a(x) =$ [2] $l_a(y)$.

4 Возвращаемся в $\mathbb{R}^m$

Лемма 4 (о мере образа малых кубических ячеек).

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- O открыто
- $a \in O$
- $\Phi \in C^1$
- $c > |\det \Phi'(a)| \neq 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \;\; \forall$ куба $Q \subset B(a, \delta), a \in Q$ выполняется неравенство $\lambda\Phi(Q) < c\lambda Q$

Примечание. Здесь можно считать, что Q — замкнутые кубы.

[2] Кажется, здесь должно быть “$\neq$”

Доказательство. $L := \Phi'(a)$ — обратимо[3]

$$\Phi(x) = \Phi(a) + L(x-a) + o(x-a)$$

$$\underbrace{a + L^{-1}(\Phi(x) - \Phi(a))}_{\Psi(x)} = x + o^{4}(x-a)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \text{ шар } B_{\varepsilon^{5}}(a) \ \forall x \in B_\varepsilon(a) \ |\Psi(x) - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x-a|$$

Пусть $Q \subset B_\varepsilon(a), a \in Q, Q$ — куб со стороной h.

При $x \in Q$:

$$|x-a| \le \sqrt{m}h$$

$$|\Psi(x) - x| \overset{(35)}{<} \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}|x-a| \le \varepsilon h$$

Тогда $\Psi(Q) \subset$ куб со стороной $(1+2\varepsilon)h$, т.к. при $x, y \in Q$

$$\begin{aligned} |\Psi(x)_i - \Psi(y)_i| &\le |\Psi(x)_i - x_i| + |x_i - y_i| + |\Psi(y)_i - y_i| \\ &\le |\Psi(x) - x| + h + |\Psi(y) - y| \\ &\le (1+2\varepsilon)h \end{aligned}$$

$$\lambda(\Psi(Q)) \le (1+2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Ψ и Φ отличаются только сдвигом и линейным отображением.

$$\lambda\Phi(Q) = |\det L| \cdot \lambda\Psi(Q) \le |\det L|(1+2\varepsilon)^m \cdot \lambda Q$$

Выбираем ε такое, чтобы $|\det L|(1+2\varepsilon)^m < c$, потом берём $\delta =$ радиус $B_\varepsilon(a)$ □

Лемма 5.

- $f : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- O открыто
- f непрерывна

[3] Т.к. $\det \Phi'(a) \neq 0$.

[4] Это не то же самое o, что строчкой выше.

[5] Это не радиус шара, а параметр.

(35): т.к. $x \in B_\varepsilon(a)$

- A измеримо
- $A \subset Q \subset \overline{Q} \subset O$
- Q — кубическая ячейка

Тогда:

$$\inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ откр. } \subset O}} \lambda(G) \cdot \sup_G f = \lambda A \cdot \sup_A f$$

Доказательство. Упражнение. □

Теорема 19.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- Φ диффеоморфизм

Тогда

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m, A \subset O \ \ \lambda\Phi(A) = \int_A |\det \Phi'(x)| d\lambda(x)$$

Доказательство.

Обозначение.

- $J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$
- $\nu A := \lambda \Phi(A)$ — мера

Надо доказать, что J_Φ — плотность ν относительно λ.

Достаточно проверить условие теоремы критерий плотности, что $\forall$ измеримого A:

$$\inf_A J_\Phi \cdot \lambda A \leq \nu(A) \overset{(36)}{\leq} \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A$$

Достаточно проверить только правое неравенство, т.к. левое неравенство — правое неравенство для $\Phi(A)$ и о��бражения Φ^{-1}

$$\inf \frac{1}{|\det(\Phi')|} \cdot \lambda \Phi(A) \leq \lambda A$$

1. Проверяем (36) для случая A — кубическая ячейка, $A \subset \overline{A} \subset O$

   От противного: $\lambda Q \cdot \sup_Q J_\Phi < \nu(Q)$

   Возьмём $C > \sup_Q J_\Phi : C \cdot \lambda Q < \nu(Q)$.

Запускаем половинное деление: режем Q на 2^m более мелких кубических ячеек. Выберем "мелкую" ячейку $Q_1 \subset Q : C \cdot \lambda Q_1 < \nu Q_1$. Опять делим на 2^m частей, берём $Q_2 \cdot \lambda Q_2 < \nu Q_2$ и т.д.

$a \in \bigcap \overline{Q}_i$

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \qquad \forall n \;\; C \cdot \lambda Q_n < \nu Q_n \tag{37}$$

$C > \sup_Q J_\Phi = \sup_{\overline{Q}} J_\Phi$, в частности $c > |\det \Phi'(a)|$. Мы получили противоречие с леммой о мере образа малых кубических ячеек: в сколько угодно малой окрестности a имеются кубы $\overline{Q}_n$, где выполнено (37)

2. Проверяем (36) для случая A открыто.

   Это очевидно, т.к. $A = \bigsqcup Q_j, Q_j$ — кубическая ячейка, $Q_j \subset \overline{Q}_j \subset A$

$$\nu A = \sum \lambda Q_j \le \sum \mu Q_j \sup_{Q_j} J_\Phi \le \sup_A J_\Phi \cdot \sum \mu Q_j = \sup_A J_\Phi \cdot \lambda A \tag{38}$$

3. По лемме 5 неравенство (36) выполнено для всех измеримых A:

   $O = \bigsqcup Q_j$ — кубы $Q_j \subset \overline{Q}_j \subset O$, $A = \bigsqcup \underbrace{A \cap Q_j}_{A_j}$

$$\nu A_j \le \nu G \le \sup_G J_\Phi \cdot \lambda G \Rightarrow \nu A_j \le \inf_G (\sup J_\Phi \cdot \lambda G) = \sup_{A_j} f \cdot \lambda A_j$$

   Аналогично формуле (38) получаем $\nu A \le \sup_A f \cdot \lambda A$

□

Теорема 20.

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$
- Φ дифференцируемо

Тогда $\forall$ измеримой $f \ge 0$, заданной на $O' = \Phi(O)$:

$$\int_{O'} f(y) d\lambda = \int_O f(\Phi(x)) \cdot J_\Phi \cdot d\lambda, J_\Phi(x) = |\det \Phi'(x)|$$

То же самое верно для суммируемой f.

Доказательство. Применяем теорему о вычислении интеграла по взвешенному образу меры при $X = Y = \mathbb{R}^m, \mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{M}^m, \mu = \lambda, \nu(A) = \lambda(\Phi(A))$:

$$\int_B f d\nu = \int_{\Phi^{-1}B} f(\Phi(x)) \omega(x) d\mu$$

По теореме 19 $\lambda(B) = \int_{\Phi^{-1}(O)} J_\Phi d\lambda$, т.е. λ — взвешенный образ исходной меры по отношению к Φ. $\square$

Пример.

1. Полярные координаты в $\mathbb{R}^2$:

$$\Phi = \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \Phi : \{(r,\varphi), r > 0, \varphi \in (0, 2\pi)\} \to \mathbb{R}^2$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \det\Phi' = r \quad J_\Phi = r$$

$$\iint_\Omega f(x,y)d\lambda_r = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r d\lambda_2$$

2. Сферические координаты в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r > 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi) \\ \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{pmatrix} \quad J_\Phi = r^2\cos\psi$$

$$\det\Phi' = r^2(\sin^2\psi\cos\psi + \cos^3\psi) = r^2\cos\psi$$

Лекция 6

22 марта

4.1 Сферические координаты в $\mathbb{R}^m$

Координаты задаются $r, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}$. Зададим их по индукции:

- φ_1 — угол между $\overline{e}_1$ и $\overline{OX} \in [0, \pi]$
- φ_2 — угол между $\overline{e}_2$ и $P_{2_{(e_2 \dots e_n)}}(x) \in [0, \pi]$
- $\vdots$
- φ_{m-1} — полярный угол в $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \varphi_1 \\
x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
x_3 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \cos \varphi_{m-1} \\
x_n &= r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{m-2} \sin \varphi_{m-1}
\end{aligned}$$

$$J = r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}$$

Примечание. В $\mathbb{R}^3$ “географические” координаты имеют якобиан $J = r^2 \cos \psi$

Поймём, почему якобиан именно такой. Можно его посчитать руками, но это трудно.

1 шаг

$$x_m = \rho_{m-1} \sin \varphi_{m-1}$$

$$x_{m-1} = \rho_{m-1} \cos \varphi_{m-1}$$

$$(x_1 \dots x_m) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1})$$
$$J = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & J_2 \end{vmatrix} = \rho_{m-1}$$

2 шаг

$$\rho_{m-1} = \rho_{m-2} \sin \varphi_{m-2}$$
$$x_{m-2} = \rho_{m-2} \cos \varphi_{m-2}$$

$$(x_1 \dots x_{m-2}, \rho_{m-1}, \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (x_1 \dots x_{m-3}, \rho_{m-2}, \varphi_{m-2}, \varphi_{m-1})$$

последний шаг

$$(x_1 \rho_2, \varphi_2 \dots \varphi_{m-1}) \rightsquigarrow (r, \varphi_1 \dots \varphi_{m-1})$$

$$\rho_2 = r \sin \varphi_1$$
$$x_1 = r \cos \varphi_1$$

$$\begin{aligned}
\lambda_m(\Omega) &= \int_\Omega 1 d\lambda_m \\
&\overset{1\text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_1} \rho_{m-1} \\
&\overset{2\text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_2} \rho_{m-2}^2 \sin \varphi_{m-2} \\
&\overset{3\text{ шаг}}{=} \int_{\Omega_3} \rho_{m-3}^3 \sin^2 \varphi_{m-3} \sin \varphi_{m-2} \\
&= \dots \\
&= \int_{\Omega_{m-1}} r^{m-1} \sin^{m-2} \varphi_1 \sin^{m-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2} d\lambda
\end{aligned}$$

Тогда по теореме о единственности плотности искомое верно.

5 Произведение мер

$\lhd (X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой

Лемма 6. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — полукольца $\Rightarrow$ $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B \subset X \times Y : A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}$ — полукольцо.

Доказательство. Тривиально. $\square$

Обозначение. $\mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ — называем **измеримыми прямоугольниками**.

$m_0(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$, при этом $0 \cdot \infty$ принимаем за 0.

Теорема 21.

1. m_0 — мера на $\mathcal{P}$
2. μ, ν — σ-конечны $\Rightarrow$ m_0 тоже σ-конечно.

Доказательство.

1. Проверим счётную аддитивность m_0, т.е. $m_0 P = \sum_{k=1}^{+\infty} m_0 P_k$[1], если $A \times B = P = \bigsqcup P_k$, где $P_k = A_k \times B_k$

   Заметим, что $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$.

   Тогда $\chi_P = \sum \chi_{P_k}$, где $\forall x \in X, y \in Y \ \ \chi_A(x)\chi_B(y) = \sum \chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)$

   Проинтегрируем по y по мере ν по пространству Y:

   $$\chi_A(x)\nu B = \sum \chi_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

   Проинтегрируем по x по мере μ по пространству X:

   $$\mu A \mu B = \sum \mu A_k \nu B_k$$

   Это и есть искомое.

2. Очевидно, т.к.:

   - μ σ-конечно $\Rightarrow X = \bigcup X_k, \mu X_k$ — конечно $\forall k$
   - ν σ-конечн�� $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n, \nu Y_n$ — конечно $\forall k$

   Тогда $X \times Y = \bigcup X_k \times Y_n, m_0(X_k \times Y_n) = \mu X_k \nu Y_n$. Конечное произведение конечных конечно, поэтому m_0 σ-конечно.

$\square$

[1] Прочие суммы/объединения также счётны в рамках данного доказательства.

Определение.

- $\triangleleft(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с мерой
- μ, ν σ-конечны

Пусть m — лебеговское продолжение меры m_0 на σ-алгебру, которую будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$[2]

Обозначение. $m = \mu \times \nu$

$(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ — **произведение пространств с мерой** $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$

Примечание.

- Это произведение ассоциативно.
- σ-конечность нужна для единственности произведения.

Теорема 22. $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$

Доказательство. Не будет. □

Определение. X, Y — множества, $C \subset X \times Y$

$$\forall x \in X \;\; C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$$
$$\forall y \in Y \;\; C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$$

C_x, C^y называется **сечением**.

Примечание.

$$\left(\bigcup_\alpha C_\alpha\right)_x = \bigcup (C_\alpha)_x \quad \left(\bigcap C_\alpha\right)_x = \bigcup (C_\alpha)_x \quad (C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$$

Теорема 23 (принцип Кавальери[3]).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- μ, ν — σ-конечны.
- μ, ν — полные.
- $m = \mu \times \nu$

[2] $\otimes$ — не тензорное произведение

[3] Кавальери имеет к этой теореме косвенное отношение, т.к. он жил за пару веков до появления теории меры.

- $C \in A \otimes B$

Тогда:

1. $C_x \in \mathfrak{B}$ при почти всех x
2. $x \mapsto \nu(C_x)$ — измеримая[4] функция на X
3. $mC = \int_X \nu(C_x) d\mu(x)$

Аналогичное верно для C^y.

Пример. ???

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}$ — система множеств, для которых выполнено 1.-3.

1. $C = A \times B \Rightarrow C \in \mathfrak{D}$
   (a) $C_x = \begin{cases} \varnothing, x \notin A \\ B, x \in A \end{cases}$
   (b) $x \mapsto \nu(C_x)$ — функция $\nu B \cdot \chi_A$
   (c) $\int \nu(C_x) d\mu = \int_X \nu B \cdot \chi_A d\mu = \nu B \cdot \mu A = mC$
2. $E_i \in \mathfrak{D}$, дизъюнктны $\Rightarrow \bigsqcup E_i \in \mathfrak{D}$. Обозначим $E = \bigsqcup E_i$

   $E_i \in \mathfrak{D} \Rightarrow (E_i)_x$ измерим�� почти везде $\Rightarrow$ при почти всех x все $(E_i)_x$ измеримы.

   Тогда при этих x $E_x = \bigsqcup (E_i)_x \in \mathfrak{B}$ — это 1.

   $\nu E_x = \sum \underbrace{\nu(E_i)_x}_{\substack{\text{измеримая} \\ \text{функция}}} \Rightarrow$ Функция $x \mapsto \nu E_x$ измеримо — это 2.

   $\int_X \nu E_x d\mu = \sum_i \int_X \nu(E_i)x = \sum_i mE_i = mE$ — это 3.
3. $E_i \in \mathfrak{D}, E_1 \supset E_2 \supset \ldots, E = \bigcap_i E_i, \mu E_i < +\infty$. Тогда $E \in \mathfrak{D}$.

   $\int_X \nu(E_i)_x d\mu = mE_i < +\infty \Rightarrow \nu(E_i)_x$ — конечно при почти всех x.

   $\forall x$ верно $(E_1)_x \supset (E_2)_x \supset \ldots, E_x = \bigcap (E_i)_x$

   Тогда E_x измеримо *(это 1.)* и $\lim_{i \to +\infty} \nu(E_i)_x = \nu E_x$ при п.в. x.

   Таким образом, $x \mapsto \nu E_x$ измерима — это 2.

   $\int_x \nu E_x d\mu = \lim \int_X \nu(E_i)_x d\mu = \lim mE_i = mE$ — это 3.

   По теореме Лебега $|\nu(E_i)x| \le \nu(E_i)x$ суммируемо.

   Итого: Если $A_{ij} \in \mathcal{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то $\bigcap \bigcup A_{ij} \in \mathfrak{D}$

[4] Функция задана при почти всех X; она равна п.в. некоторой измеримой функции, заданной всюду.

4. $mE = 0 \Rightarrow E \in \mathfrak{D}$

   $mE = \inf\{\sum m_0 P_k : E \subset \bigcup P_k, P_k \in \mathcal{P}\}$ — из пункта 5 теоремы о лебеговском продолжении.

   $\exists$ множество H вида $\bigcap_l \bigsqcup_k P_{kl}$, т.е. $H \in \mathfrak{D}$.

   $E \subset H, mH = mE = 0$

   $0 = mH = \int_X \underbrace{\nu H_x}_{\geq 0} d\mu \Rightarrow \nu H_x = 0$ про почти всех x.

   $E_x \subset H_x, \nu$ — полная $\Rightarrow E_x$ — измеримо при почти всех x — это 1 и $\nu E_x = 0$ почти везде, это 2.

   $\int \nu E_x d\mu = 0 = mE$ — это 3.

5. C — измеримо, $mC < +\infty$. Тогда $C \in \mathfrak{D}$.

   $C = H \setminus e$, где H имеет вид $\bigcap \bigcup P_{k_l}, me = 0$

   $mC = mH$

   (a) $C_x = H_x \setminus e_x$ — измеримо при почти всех x

   (b) $\nu e_x = 0$ при почти всех $x \Rightarrow \nu C_x = \nu H_x - \nu E_x = \nu H_x \Rightarrow$ измеримо.

   (c) $\int_X \nu C_x d\mu = \int_X \nu H_x d\mu = mH = mC$

6. C — произвольное измеримое множество в $X \times Y \Rightarrow C \in \mathfrak{D}$

   $X = \bigsqcup X_k, \mu X_k < +\infty, Y = \bigsqcup Y_j, \nu Y_j < +\infty$

   $C = \bigsqcup \underbrace{(C \cap (X_k \times Y_j))}_{???<+\infty}$???

$\square$

Следствие 23.1. C измеримо в $X \times Y$. Пусть $P_1(C) = \{x \in X, C_x \neq \varnothing\}$ — проекция C на X.

Если $P_1(C)$ измеримо, то:

$$mC = \int_{P_1(C)} \nu(C_x) d\mu$$

Доказательство. При $x \notin P_1(C)$ $\nu(C_x) = 0$ $\square$

Примечание.

1. C измеримо $\not\Rightarrow P_1(C)$ измеримо.
2. C измеримо $\not\Rightarrow \forall x$ C_x измеримо.

3. $\forall x, \forall y \;\; C_x, C^y$ измеримо $\not\Rightarrow C$ измеримо.

   Пример Серпинского.

Лекция 7

29 марта

Следствие 23.2.

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
- f непрерывно

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$

Доказательство. Рассмотрим случай $f > 0$. ПГ[1]($f_{???}[a, b]$) — измеримое в $\mathbb{R}^2$ множество. Доказать это — упражнение.

$C_x = [0, f(x)]$, $\lambda_1(C_x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda_2(\text{ПГ}) = \int_{[a,b]} f d\lambda_1$$

□

Примечание.

- λ_2 можно продолжить на множество $2^{\mathbb{R}^2}$ с сохранением конечной аддитивности и это продолжение можно сделать не единственным образом.
- Для $\lambda_m, m > 2$ аналогичным образом продолжить невозможно.

Для обоих случаев требуется инвариантность меры относительно движения $\mathbb{R}^m$.

В множествах размерности > 2 действует парадокс Хаусдорфа-Банаха-Тарского, вследствие чего аддитивность невозможна.

Определение.

[1] подграфик

- $C \subset X \times Y$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$

$\forall x \in X \;\; f_x$ — функция $f_x(y) = f(x,y)$

$\forall y \in Y \;\; f_y$ — функция $f_y(x) = f(x,y)$

Теорема 24 (Тонелли).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- μ, ν — σ-конечные, полные
- $m = \mu \times \nu$
- $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$
- $f \geq 0$
- f измеримо относительно $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

Тогда:

1. При почти всех x f_x измерима на Y.
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x,y) d\nu(y)$ — измерима[2] на X
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Аналогичные утверждения верны, если поменять местами X и Y:

1. f^y измеримо на X почти везде.
2. $y \mapsto \psi(y) = \int_X f^y d\mu$ — измерима[3] на Y
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_Y \psi d\mu = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Доказательство.

1. $f = \chi_C, C \subset X \times Y$, измеримо. Тогда $f_x(y) = \chi_C(y)$

   C_x измеримо при почти всех x по принцип Кавальери[4] $\Rightarrow$ f_x измеримо при почти всех x

[2] почти везде

[3] почти везде

[4] Кавальери имеет к этой теореме косвенное отношение, т.к. он жил за пару веков до появления теории меры.

$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \nu C_x$ — измерима[5] функция по принцип Кавальери[6]

$$\int_X \varphi(x) d\mu = \int_X \nu C_x d\mu \overset{(39)}{=} mC = \int_{X\times Y} f dm$$

2. f — ступенчатая, $f \geq 0$, $f = \sum_{\text{кон.}} \alpha_k \chi_{C_k}$, $f_x = \sum \alpha_k \chi_{(C_k)_x}$ — измеримо почти везде.

   $\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \sum \alpha_k \nu(C_k)_x$ — измерима[8]

$$\int_X \varphi(x) = \sum \int_X \alpha_k \nu(C_k)_x = \sum \alpha_k m C_k = \int_{X\times Y} f dm$$

3. $f \geq 0$, измеримо.

   $f = \lim g_n, g_n \uparrow f, g_n \geq 0$, ступенчатые

   $f_x = \lim\limits_{n\to+\infty} (g_n)_x \Rightarrow f_x$ — измеримо на y.

$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\nu \overset{(40)}{=} \lim \underbrace{\int_Y (g_n)_x d\nu}_{\varphi_n(x)} \implies \varphi \text{ — измерима}^{9}$$

   $\varphi_n(x)$ измерима почти везде, поэтому φ измерима почти везде.

$$\int_X \varphi(x) \overset{(41)}{=} \lim \int_X \varphi_n = \lim \int_{X\times Y} g_n \overset{(42)}{=} \int_{X\times Y} f dm$$

□

Следствие 24.1. Если в условиях теоремы Тонелли $C \subset X \times Y, P_1(C)$ измеримо, то $\int_C f dm = \int_{P_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x,y) d\nu(y)\right) d\mu(x)$

Доказательство. Очевидно, т.к. вместо f можно взять $f \cdot \chi_C$ □

Теорема 25 (Фубини).

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$

[5] почти везде

[6] Кавальери имеет к этой теореме косвенное отношение, т.к. он жил за пару веков до появления теории меры.

(39): по принцип Кавальери[7]

[8] почти везде

(40), (41), (42): по теореме Леви

- $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$
- μ, ν — σ-конечные, полные
- $m = \mu \times \nu$
- f — суммируемо на $X \times Y$

Тогда:

1. f_x — суммируема на Y при почти всех x
2. $x \mapsto \varphi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x,y) d\nu(y)$ — суммируема на Y
3. $\int_{X\times Y} f dm = \int_X \varphi d\mu = \int_X \left(\int_y f(x,y) d\nu(y)\right) d\mu(x)$

Доказательство. Слишком неинтересно.

Общий подход: берём f_+ и f_-. □

Пример. $B(s,t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx,\ s,t>0.$

Тогда $B(s,t) = \dfrac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$, где $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(t) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\left(\int_0^{+\infty} y^{t-1}e{-y}dy\right)dx \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x^{s-1}y^{t-1}e^{-x}e^{-y}dy\right)dx \\
y := u - x & \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}du\right)dx \\
&= \int \dots d\lambda_2 \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{u} x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}dx\right)du \\
x := u\cdot v &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{1} (uv)^{s-1}(u-uv)^{t-1}e^{-u}\cdot udv\right)du \\
&= \int_0^{+\infty} u^{s+t-1}e^{-u}\left(\int_0^{1} v^{s-1}(1-v)^{t-1}dv\right)du \\
&= B(s,t)\Gamma(s+t)
\end{aligned}$$

□

Пример (Объём[10] шара в $\mathbb{R}^m$). $\alpha_m := \lambda_m(B(0,1)), \lambda_m(B(0,r)) = r^m \cdot \alpha_m$ — получается заменой координат.

$$B(0,1) \overset{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \le 1 \right\}$$

$$B(0,1)_{x_m} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 \le 1 - x_m^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= \int_{-1}^{1} \lambda_{m-1}\left(B\left(0, \sqrt{1-y^2}\right)\right) \\
&= \int_{-1}^{1} \alpha_{m-1}(1-y^2)^{\frac{m-1}{2}} dy \\
&= 2\alpha_{m-1} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \alpha_{m-1} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \alpha_{m-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_m &= \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} \underbrace{\alpha_1}_{=2} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)^{m-1}} \cdot 2 \\
&= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}
\end{aligned}$$

В случае $m = 3$ $\alpha_3 = \frac{4}{3}\pi$

Примечание.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx}_{I}$$

[10] на самом деле мера

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy\right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} \cdot r dr \\
&= \frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Переход в полярные координаты:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \varphi_1 \\
x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
&\vdots \\
x_{m-1} &= r \sin \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{m-1} \\
x_m &= r \sin \varphi_1 \ldots \cos \varphi_{m-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_m(B(0,R)) &= \int_{B(0,R)} 1 d\lambda_m \\
&= \int_0^R dr \int_0^\pi d\varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \cdots \int_0^\pi d\varphi_{m-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{m-1} \cdot r^{m-1} \cdot \sin^{m-2} \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{m-2} \\
&\overset{(44)}{=} 2\pi \frac{R^m}{m} \prod_{k=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \\
&= \pi \frac{R^m}{m} \frac{\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}+1\right)} \\
&\overset{(43)}{=} \frac{\pi^{\frac{m}{2}} R^m}{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}+1\right)}
\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \sin^k \alpha d\alpha = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} t = \sin^2 \alpha \\ dt = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \end{bmatrix} = B\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{44}$$

Мы потеряли двойку в (43).

6 Поверхностный интеграл

6.1 Поверхностный интеграл I рода

Определение.

- $M \subset \mathbb{R}^3$ — простое двумерное гладкое многообразие
- $\varphi : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация M

$E \subset M$ — **измеримо по Лебегу**, если $\varphi^{-1}(E)$ измеримо в $\mathbb{R}^2$ по Лебегу.

Обозначение. $\mathfrak{A}_M = \{E \subset M : E \text{ изм.}\} = \{\varphi(A), A \in \mathfrak{M}^2, A \subset G\}$

Определение (Мера на $\mathfrak{A}_M$).

$$S(E) := \iint_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'_u \times \varphi'_v| du dv$$

т.е. это взвешенный образ меры Лебега при отображении φ.

Примечание.

1. $\mathfrak{A}_m$ — σ-алебра, S — мера.
2. $E \subset M$ — компакт $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(E)$ — компакт $\Rightarrow$ измерим $\Rightarrow$ замкнутые множества измеримы $\Rightarrow$ открытые относительно себя множества измеримы.
3. $\mathfrak{A}_m$ не зависит от параметризации φ по теореме о двух параметризациях.
4. S не зависит от φ!

$$\begin{aligned} |\vec{\varphi}'_s \times \vec{\varphi}'_t| &= |(\vec{\varphi}'_u \cdot u'_s + \vec{\varphi}'_v \cdot v'_s) \times (\vec{\varphi}'_i \cdot u'_t + \vec{\varphi}'_v \cdot v'_t)| \\ &= |\overrightarrow{(\varphi'_u \times \varphi'_v)}(u'_s v'_t - v'_s u'_t)| \\ &= |\varphi'_u \times \varphi'_v| \cdot |\det \begin{pmatrix} u'_s & u'_t \\ v'_s & v'_u \end{pmatrix}| \end{aligned}$$

5. $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, если $M(f < a)$ измеримо относительно $\mathfrak{A}_m$, что в свою очередь $\Leftrightarrow M(f \circ \varphi < a)$ измеримо относительно $\mathfrak{M}^2$.

   f измеримо относительно $\mathfrak{A}_m \Leftrightarrow f \circ \varphi$ измеримо относительно $\mathfrak{M}^2$.

Определение (поверхностный интеграл первого рода).

- M — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$
- φ — параметризация M
- $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемо по мере S на M

Тогда $\iint_M f dS = \iint_M f(x,y,z)dS$ называется **интегралом первого рода** от f по многообразию M.

Примечание. Как вычислять этот интеграл? По теореме о вычислении интеграла по взвешенному образу меры:

$$\iint_M f dS = \iint_G f(\varphi(u,v))|\varphi'_u \times \varphi'_v| du dv$$

$$\varphi'_u \times \varphi'_v = \begin{vmatrix} i & x'_u & x'_v \\ j & y'_u & y'_v \\ k & z'_u & z'_v \end{vmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = |\varphi'_u||\varphi'_v| \sin\alpha = \sqrt{|\varphi'_u|^2|\varphi'_v|^2(1-\cos^2\alpha)} = \sqrt{EG - F^2}$$

$$F = \langle \varphi'_u, \varphi'_v \rangle = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$$

Пример. M — график функции $f = \{(x,y,z) : (x,y) \in G, z = f(x,y)\}$

$$\varphi : G \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} \quad \varphi'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_u \end{pmatrix} \quad \varphi'_v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_v \end{pmatrix}$$

$$|\varphi'_u \times \varphi'_v| = \sqrt{1 + f'^2_u + f'^2_v}$$

$$\iint_M g dS = \iint_G g(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} dx dy$$

Лекция 8

5 апреля

Определение. $M \subset \mathbb{R}^3$ — **кусочно-гладкое двумерное многообразие**, если M — конечное объединение:

- Простых гладких многообразий M_i
- Гладких кривых
- Точек

Определение. $E \subset M$ измеримо, если $E \cap M_i$ измеримо.

$$S(E) := \sum_i S(E \cap M_i)$$

$$\int_E f ds := \sum_i \int_{E \cap M_i} f ds$$

6.2 Поверхностный интеграл II рода

Обозначение. Будем называть простое двумерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^3$ поверхностью.

Определение. **Сторона поверхности** есть непрерывное семейство единичных нормалей к этой поверхности.

Определение.

- M — поверхность в $\mathbb{R}^3$
- n_0 — сторона
- γ — конутр *(петля)* в M, ориентированная

Говорят, что сторона поверхности n_0 согласована с ориентацией γ, если:

$$(\gamma' \times N_{\text{внутр.}}) \parallel n_0$$

Т.е. если ориентация γ задаёт сторону n_0.

Определение (интеграл II рода).

- M — простое двумерное гладкое многообразие
- n_0 — сторона M
- $F : M \to \mathbb{R}^3$ — непрерывное векторное поле

Тогда $\int_M \langle V, n_0 \rangle \, dS$ — интеграл II рода векторного поля F по поверхности M.

Примечание.

- Смена стороны = смена знака
- Не зависит от параметризации
- $F = (P, Q, R)$, тогда интеграл обозначается $\iint Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$
- $\Phi, n = \Phi'_u \times \Phi'_v \rightsquigarrow n_0$

  Пусть $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$$\begin{aligned}
\int_M \langle F, n_0 \rangle \, ds &= \int_O \left\langle F, \frac{\Phi'_u \times \Phi'_v}{|\Phi'_u \times \Phi'_v|} \right\rangle |\Phi'_u \times \Phi'_v| dudv \\
&= \int_O \underbrace{\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle}_{\substack{\text{смешанное} \\ \text{произведение: (45)}}} dudv \\
&= \int_O P \cdot \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} + Q \cdot \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} + R \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} dudv
\end{aligned}$$

$$\langle F, \Phi'_u \times \Phi'_v \rangle = \begin{vmatrix} P & x'_u & x'_v \\ Q & y'_u & y'_v \\ R & z'_u & z'_v \end{vmatrix} \tag{45}$$

Сторона поверхности учитывается в порядке переменных u, v.

Пример. Рассмотрим график функции $z(x, y)$ над областью G по верхней стороне.

$$n_0 = \begin{pmatrix} -\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} & -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} & \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} \end{pmatrix}$$

$$\int_{\Gamma_z} Rdxdy = \int_{\Gamma_z} 0dydz + 0dzdx + R(x, y, z)dxdy$$

$$\begin{aligned}&\stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\Gamma_z} R(x,y,z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} dS \\ &= \iint_G R(x,y,z(x,y))dxdy \\ &= \iint_G Rdxdy\end{aligned}$$

Т.е. этот интеграл II рода равен интегралу по проекции.

Следствие. $V \subset \mathbb{R}^3, M = \partial V$ — гладкая двумерная поверхность, n_0 — внешняя нормаль.

$$\lambda_3 V = \iint_{\partial V} zdxdy = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

Следствие. Ω — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, M — цилиндр над Ω, т.е. $M = \Omega \times [z_0, z_1]$

Тогда $\int_M Rdxdy = 0$ по любой стороне.

Доказательство. $n_0 \perp (0,0,R)$ □

7 Ряды Фурье

7.1 Пространства L^p

1.
   - $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой
   - $f : X \to \mathbb{C}$, т.е. $x = f(x) = u(x) + iv(x), u = \Re f, v = \Im f$

   f **измеримо**, если u и v измеримы[1].

   f **суммируемо**, если u и v суммируемы.

   Если f суммируемо, то $\int_E f = \int_E u + i \int_E v$

2. Неравенство Гёльдера.
   - $p, q, > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
   - $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
   - E — измеримо
   - $f, g : E \to \mathbb{C}$
   - f, g — измеримы

   Тогда $\int_E |fg| d\mu \le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

[1] Или измеримы почти везде.

Доказательство. Не будет, но общая идея следующая:

(a) Для ступенчатых функций — из неравенства Гёльдера[2]

(b) Для суммируемых функций — по теореме Леви.

□

3. Неравенство Минковского.

   В тех же условиях $\left(\int_E |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

   Доказательство. Не будет, можно вывести аналогично выводу во втором семестре. □

4. Определение пространства $L^p, 1 \le p < +\infty$

   - $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
   - $E \subset X$ — измеримо.

   $\mathcal{L}^p(E,\mu) := \{f$: почти везде $E \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}$[3]$), f$ — изм., $\int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$ — это линейное пространство по неравенству Минковского.

   Зададим отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathcal{L}^p(E,\mu)$: $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ почти везде.

   $\mathcal{L}^p/_\sim = L^p(E,\mu)$ — линейное пространство.

   Задаём норму на L^p: $||f||_{L^p(E,\mu)} = \left(\int_E |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, обозначается $||f||_p$

5. $L^\infty(E,\mu)$

   - $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой.
   - $E \subset X$ — измеримо.
   - f : почти везде $\to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримо

   Определение (существенный супремум).

   $$\operatorname{ess\,sup}_{x\in E} f = \inf\{A \in \overline{\mathbb{R}}, f \le A \text{ почти везде}\}$$

   При этом A называется существенной вещественной границей.

   Свойства.

   - $\operatorname{ess\,sup} f \le \sup f$ — очевидно.
   - $f \le \operatorname{ess\,sup} f \le$ почти везде — пусть $B = \operatorname{ess\,sup} f$, тогда $\forall n\ \ f \le B + \frac{1}{n}$ почти везде.

[2] Мы его рассматривали во втором семестре.
[3] $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

- f — суммируемо, $\operatorname{ess\,sup}_E |g| < +\infty$. Тогда $|\int_E fg| \le \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot \int_E |f|$

  Доказательство.

$$\left|\int_E fg\right| \le \int_E |fg| \le \int_E \operatorname{ess\,sup} |g| \cdot |f| \tag{46}$$

$\square$

$L^\infty(E, \mu) = \{f : \text{почти везде } E \to \overline{\mathbb{R}}(\overline{\mathbb{C}}), \text{ изм.}, \operatorname{ess\,sup} |f| < +\infty\}/_\sim$ — линейное пространство.

$||f||_{L^\infty(E,\mu)} := \operatorname{ess\,sup}_E |f| = ||f||_\infty$

Примечание.

(a) В новых обозначениях неравенство Гёльдера: $||fg||_1 \le ||f||_p \cdot ||g||_q$ — здесь можно брать $p = 1, q = +\infty$ — это (46).

(b) $f \in L^p \Rightarrow f$ — почти везде конечно, если $1 \le p \le +\infty \Rightarrow$ можно считать, что f задана всюду на E и всюду конечна.

Лекция 9

12 апреля

Определение (мера Лебега на k-мерном многообразии в $\mathbb{R}^m$).

- $\Phi : O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
- $\exists \Phi'_1 \dots \Phi'_k$

λ_k(ПРЛП[1]$(\Phi'_1 \dots \Phi'_k)$) — это и будет плотность меры.

8 Формула Грина

Теорема 26.

- $D \subset \mathbb{R}^2$ — компактное, связное, односвязное[2], ограниченное множество.
- D ограничено кусочно-гладкой кривой ∂D
- (P, Q) — гладкое векторное поле в окрестности D

Пусть ∂D ориентроиванно согласованно с ориентацией D *(против часовой стрелки)* — обозначим ∂D^+. Тогда:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + Qdy$$

Доказательство. Ограничимся случаем D — “криволинейный четырёхугольник”.

∂D состоит из путей $\gamma_1 \dots \gamma_4$, где γ_2 и γ_4 — вертикальные отрезки[3], γ_1 и γ_3 — гладкие кривые — можно считать, что это графики функций $\varphi_1(x), \varphi_3(x)$.

Аналогично можно описать ∂D по отрезкам, параллельным оси OY.

[1] Площадь параллелипипеда
[2] Любая петля стягиваема
[3] Возможно, вырожденные

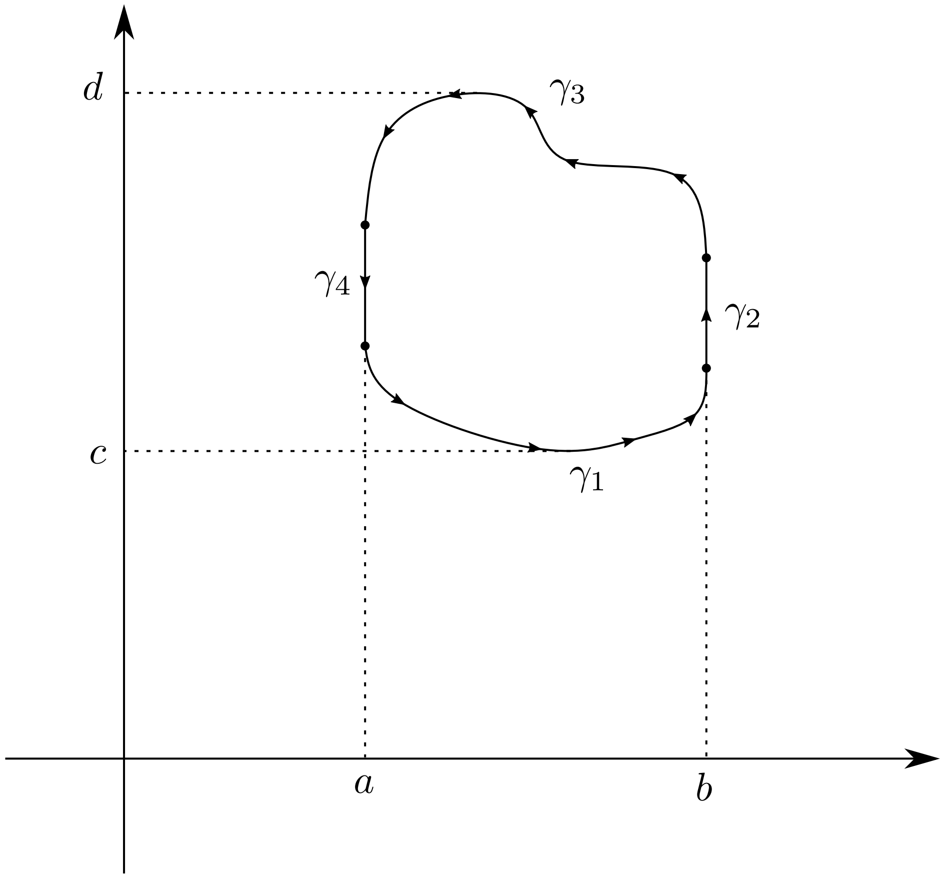


Рис. 9.1: Криволинейный четырёхугольник с ∂D

Проверим, что $-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial D^+} Pdx + 0dy$

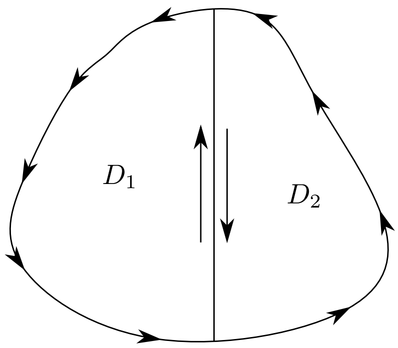
$$\begin{aligned}
-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= -\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\
&= -\int_a^b P(x, \varphi_3(x)) - P(x, \varphi_1(x)) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D^+} Pdx + 0dy &= \int_{\varphi_1} + \underbrace{\int_{\varphi_2}}_{0} + \int_{\varphi_3} + \underbrace{\int_{\varphi_4}}_{0} \\
&= \int_a^b P(x, \varphi_1(x))dx - \int_a^b P(x, \varphi_3(x))dx
\end{aligned}$$

Таким образом, искомое доказано. $\square$

Примечание. Теорема верна для любой области D с кусочно-гладкой границей, которую можно разрезать на криволинейные четырёхугольники.

Такой разрез — безобидное действие, которое можно выполнить вертикальным разрезанием по середине:



Кажется, такими разрезами можно достичь искомого в любой области, но мы не будем это утверждать.

Теорема 27 (формула Стокса).

- Ω — простое гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$ *(двустороннее)*
- $\Phi : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — параметризация Ω
- L^+ – граница G
- n_0 — сторона Ω
- $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая кривая
- $\partial\Omega^+$ — кривая с согласованной ориентацией
- (P, Q, R) — гладкое векторное поле в окрестности Ω

Тогда:

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx+Qdy+Rdz = \iint_\Omega \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Примечание. $dxdy = -dydx, dxdx = 0$

$$dPdx + dQdy + dRdz = (P'_x dx + P'_y dy + P'_z dz)dx + \dots$$

Доказательство. Ограничимся случаем $\Omega \subset C^2$.

Достаточно показать, что:

$$\int_{\partial\Omega^+} Pdx = \iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Пусть $\Phi = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega^+} Pdx &= \int_a^b P\left(\frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v'\right)dt \\ &= \int_a^b P\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega^+} Pdx &= \int_{L^+} P\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) \\ &= \iint_G \frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)dudv \\ &= \iint_G (P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u)x'_v + P\cdot x''_{uv} - (P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v)x'_u - Px''_{uv}dudv \\ &= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}(z'_u x'_v - z'_v x'_u) - \frac{\partial P}{\partial y}(x'_u y'_v - x'_v y'_u)dudv \\ &= \iint_G \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial x}dxdy\end{aligned}$$

□

9 Ряды Фурье *(возвращение)*

Теорема 28.

- $\mu E < +\infty$
- $1 \le s < r < +\infty$

Тогда:

1. $L^r(E, \mu) \subset L^s(E, \mu)$
2. $||f||_S \le \mu E^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}} \cdot ||f||_r$

Доказательство. 1 следует из 2. Докажем 2.

При $r = \infty$ очевидно:

$$\left(\int_E |f|^S d\mu\right)^{\frac{1}{s}} \le \text{ess sup}\,|f| \cdot \mu E^{\frac{1}{s}}$$

При $r < +\infty$ $p := \frac{r}{s}, q := \frac{r}{r-s}$

$$\begin{aligned}||f||_s^s &= \int_E |f|^s d\mu \\ &= \int_E |f|^s \cdot 1 d\mu \\ &\le \left(\int_E |f|^{s\cdot\frac{r}{s}} d\mu\right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\int_E 1^{\frac{r}{r-s}} d\mu\right)^{\frac{r-s}{r}} \\ &\le ||f||_r^s \mu E^{1-\frac{s}{r}}\end{aligned}$$

□

Следствие 28.1. $\mu E < +\infty, 1 \le s, r \le +\infty, f_n \xrightarrow{L^r} f$. Тогда $f_n \xrightarrow{L^s} f$

Доказательство. $||f_n - f||_s \le \mu E^{\frac{1}{s}-\frac{1}{r}} \cdot ||f_n - f||_r \to 0$ □

Теорема 29 (о сходиомсти в L^p и по мере).

- $1 \le p < +\infty$
- $f_n \in L^p(X, \mu)$

Тогда

1. $f \in L^p, f_n \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow f_n \overset{\mu}{\Rightarrow} f$
2. Не дописано

9.1 Напоминание

- Фундаментальная последовательность : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ \forall k, n > N \ \ ||f_n - f_k|| < \varepsilon$, т.е. $||f_n - f_k|| \xrightarrow{n,m\to+\infty} 0$
- $f_n \to f \Rightarrow (f_n)$ — фундаментальная, $||f_n - f_k|| \le ||f_n - f|| + ||f - f_k||$
- $C(K)$ — пространство непрерывных функций на компакте K.

  $||f|| = \max_K |f|$. Утверждение: $C(K)$ — полное.

Упражнение. $L^\infty(X, \mu)$ — полное

Теорема 30. $L^p(X, \mu), 1 \le p < +\infty$ — полное.

Доказательство. Рассмотрим f_n — фундаментальную. Куда бы она могла сходиться?

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда $\exists N_1 \ \ \forall n_1, k > N_1 \ \ ||f_{n_1} - f_k||_p < \frac{1}{2}$. Зафиксируем какой-либо n_1.

Аналогично для $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

В общем случае $\sum_k ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \le \sum_k \frac{1}{2^k} = 1$. Рассмотрим ряд $S(x) = \sum |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$, $S(x) \in [0, +\infty]$ и его частичный суммы S_N.

$$||S_N||_p \le \sum_{k=1}^{N} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p < 1$$

Таким образом, $\int_X S_N^p < 1$. По теореме Фату $\int_X S^p d\mu < 1$, т.е. S^p — суммируемо $\Rightarrow S$ почти везде конечно.

$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ — его частичные суммы это $f_{n_{N+1}}(x)$, т.е. сходимость этого ряда почти везде означает, что $f_{n_k} \to f$ почти везде. Таким образом, кандидат — f. Проверим, что $||f_n - f||_p \to 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ \ ||f_n - f_m||_p < \varepsilon$$

Берём $m = n_k > N$.

$$||f_n - f_{n_k}||_p^p = \int_X |f_n - f_{n_k}|^p d\mu < \varepsilon^p$$

Это выполнено при всех достаточно больших k. Тогда по теореме Фату $\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$, т.е. $||f_n - f||_p < \varepsilon$. $\square$

Теорема 31. Y — метрическое пространство, $A \subset Y$, A — ***(всюду)* плотно** в Y, если:

$$\forall y \in Y \ \ \forall U(y) \ \ \exists a \in A : a \in U(y)$$

Пример. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Лемма 7.

- $(X, \mathfrak{A}, \mu)$
- $1 \le p \le +\infty$

Множество ступенчатых функций *(из L^p)* плотно в L^p.

Доказательство.

1. $p = \infty$

   $\triangleleft f \in L^\infty$. Изменив f на множестве меры 0, считаем, что $|f| \le ||f||_\infty$.

   Тогда $\exists$ ступенчатые функции $0 \le \varphi \rightrightarrows f^+$ и $0 \le \psi_n \rightrightarrows f^-$

   Тогда сколь угодно близко к f можно найти ступенчатую функцию вида $\varphi_n + \psi_n$.

2. $p < +\infty$. Пусть $f \geq 0$.

   $\exists \varphi_{n \geq 0}$ ступенчатая : $\varphi \uparrow f$

$$||\varphi_n - f||_p^p = \int_X |\varphi_n - f|^p \xrightarrow{\text{т. Лебега}} 0$$

□

Примечание. $\varphi \in L^p$ — ступенчатая $\Rightarrow \mu X(\varphi \neq 0) < +\infty$

Определение. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — **финитная**, если $\exists B(0,r) : f \equiv 0$ вне $B(0,r)$.

Обозначение. $C_0(\mathbb{R}^m)$ — непрерывные финитные функции

Очевидно, что $\forall p \geq 1 \;\; C_0(\mathbb{R}^m) \subset L^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$

Определение. Топологическое пространство X **нормальное**, если:

1. Точки X суть замкнутые множества
2. $\forall F_1, F_2 \subset X$ – замкнуты $\exists U(F_1), U(F_2)$ — открыты, $U(F_1) \cap U(f_2) = \varnothing$

Загадка: $\mathbb{R}^m$ — нормальные.

Лекция 10

19 апреля

Теорема 32 (Формула Остроградского для ...).

- $V = \{(x, y, z) : (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2 \;\; f(x, y) \leq z \leq F(x, y)\}$
- G — компакт
- ∂G — кусочно-гладкое
- $f, F \in C^1$

Фиксируем внешнюю сторону поверхности, $\mathbb{R}$: окрестность $V \to \mathbb{R}, \mathbb{R} \in C^1$

Тогда

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{\partial V_{\text{внешн.}}} Rdxdy = \iint_{\partial V} 0dydz + 0dzdx + Rdxdy$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} &= \iint_G dxdy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\
&= \iint_G R(x, y, F(x, y))dxdy - \iint_G R(x, y, f(x, y))dxdy \\
&= \iint_{\Omega_F} R(x, y, z)dxdy + \iint_{\Omega_f} Rdxdy + \underbrace{\iint_\Omega Rdxdy}_{0}
\end{aligned}$$

□

Следствие 32.1 (обощенная формула Остроградского).

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{\partial V_{\text{внеш.}}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

Определение. V — гладкое векторное поле. Тогда **дивергенция** $\text{div } V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Наблюдение:

$$\text{div } V(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iiint_{B(a,\varepsilon)} \text{div } V dxdydz = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \iint_{S(a,\varepsilon)} \langle V, \pi_0 \rangle \, dS$$

, не зависит от координат.

Физический смысл — мы измеряем поток воды и обнаруживаем, что поток по замкнутой поверхности пропадает или же появляется. Тогда $\text{div } V$ — мера[1] интенсивности стока/истока.

Следствие 32.2. $l \in \mathbb{R}^3, f \in C^1(\text{окр.}(V))$

$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial l} dxdydz = \iint_{\partial V} f \cdot \langle l, n_0 \rangle \, dS$$

Доказательство. Загадка. □

Определение. **Ротор *(вихрь)***

$$\text{rot } V = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Примечание. Поле $V = (P, Q, R)$ — потенциально $\Leftrightarrow \exists f : V = \nabla f$. По теореме Пуанкаре при Ω — односвязной: V — потенциально $\Leftrightarrow \text{rot } V = 0$, т.к. $\text{rot } (\nabla f) \equiv 0$

Определение. Векторное поле $A = (A_1, A_2, A_3)$ **соленоидально** в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, если $\exists$ гладкое векторное поле B в Ω, такое что $A = \text{rot } B$.

Теорема 33 (Пуанкаре′).

- Ω — открытое ???
- A — векторное поле в Ω
- $A \in C^1$

Тогда A — соленоидально $\Leftrightarrow \text{div } A = 0$

Доказательство. $\Rightarrow$ $\text{div rot } B \equiv 0$

$\Leftarrow$ Дано: $A'_{1x} + A'_{2y} + A'_{3z} = 0$. Найдём векторный потенциал $B = (B_1, B_2, B_3)$, где $A = \text{rot } B$.

Пусть $B_3 \equiv 0$.

$$\begin{cases} B'_{3y} - B'_{2z} = A_1 \\ B'_{1z} - B'_{3x} = A_2 \\ B'_{2x} - B'_{1y} = A_3 \end{cases}$$

[1] Не та, что в теории меры; “измерение”

$$-B'_{2z} = A_1 \tag{47}$$
$$-B'_{1z} = A_2 \tag{48}$$
$$B'_{2x} - B'_{2y} = A_3 \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
(47) \quad & B_2 = -\int_{z_0}^{z} A_1 dz + \varphi(x, y) \\
(48) \quad & B_1 = \int_{z_0}^{z} A_2 dz \\
(49) \quad & A_3 = -\int_{z_0}^{z} A'_1 x dz + \varphi'_x - \int_{z_0}^{z} A'_{2y} dz
\end{aligned}$$

$$\int_{z_0}^{z} A'_{3z} + \varphi'_x = A_3 \Leftrightarrow A_3(x, y, z) - A_3(x, y, z_0) + \varphi'_x = A_3(x, y, z) \Leftrightarrow \varphi'_x = A_3(x, y, z_0)$$

Отсюда найдём $\varphi = \int_{x_0}^{x} A_3(x, y, z_0) dx$

□

Лемма 8 (Урысона).

- X нормальное
- $F_0, F_1 \subset X$ — замкнутые
- $F_0 \cap F_1 = \varnothing$

Тогда $\exists f : X \to \mathbb{R}$ непрерывное, $0 \le f \le 1$, $f\Big|_{F_0} \equiv 0$, $f\Big|_{F_1} \equiv 1$

Доказательство. Переформулируем нормальность: если $F \subset G$, F замкнутое, G открытое, то $\exists U(F)$ — открытое, такое что $F \subset U(F) \subset \overline{U(F)} \subset G$

$$F \leftrightarrow F_0 \quad G \leftrightarrow (F_1)^c \quad F_0 \subset \underbrace{U(F_0)}_{G_0} \subset \underbrace{\overline{U(F_0)}}_{\overline{G_0}} \subset \underbrace{F_1^c}_{G_1}$$

Строим $G_{\frac{1}{2}}$:

$$G_0 \subset \overline{G_0} \subset \underbrace{U(\overline{G_0})}_{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{\overline{U(\overline{G_0})}}_{\overline{G_{\frac{1}{2}}}}$$

Строим $G_{\frac{1}{4}}$:

$$\overline{G_{\frac{1}{2}}} \subset \underbrace{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}_{G_{\frac{1}{4}}} \subset \overline{U(\overline{G_{\frac{1}{2}}})}$$

Таким образом, $\forall$ двоично рациональной $\alpha \in [0,1]$ задаётся открытое множество G_α.

$$f(x) := \inf\{\alpha - \text{двоично рациональная } : x \in G_\alpha\}$$

f — непрерывно $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $f^{-1}(a,b)$ — всегда открыто.

Достаточно проверить:

1. $\forall b \ \ f^{-1}(-\infty, b)$ — открыто
2. $\forall a \ \ f^{-1}(-\infty, a]$ — замкнуто

1. $f^{-1}(-\infty,b) = \bigcup\limits_{\substack{q<b \\ q \text{ дв. рац.}}} G_q$ — открыто. Почему это так?

   $f^{-1}(-\infty,b) \subset \bigcup$, т.к. $f(x) = b_0 < b$. Возьмём $q : b_0 < q < b$. Тогда $x \in G_q$

   $f^{-1}(-\infty,b) \supset \bigcup$ очевидно, т.к. при $x \in G_q \ \ f(x \le q < b)$.
2. Не дописано

$\square$

Лекция 11

26 апреля

Соглашение. $L^p[0,T], T \in \mathbb{R}$ можно понимать как пространство T-периодических функций, т.е. $\forall x \quad f(x) = f(x+T)$.

???

Удобство: $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$.

Соглашение. $f \in C[a,b] \Rightarrow ||f|| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

$\widetilde{C}[0,T]$ — непрерывные T-периодические функции.

- $f \in C[0,T], f \in \widetilde{C}[0,T] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна.
- В $L^p[0,T]$ функции из $\widetilde{C}$ образуют плотное множество.

Линейная функция на $L^p(X,\mu), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Берём $g \in L^q(x,\mu)$ и строим отображение $L^p \to \mathbb{R}, \alpha : f \mapsto \int_X fg d\mu$. Нам известно неравенство $|\int_X fg| \le (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int |g|^p)^{\frac{1}{q}}$. Непрерывно ли α? Сходится ли $\alpha(f_n)$?

$$|\alpha(f_n) - \alpha(f)| = \left| \int_X (f_n - f) \cdot g \right| \le ||f_n - f||_p \cdot ||g||_q$$

Определение.

- $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
- $h \in \mathbb{R}^m$

$f_h(x) := f(x+h)$ — сдвиг.

Теорема 34 (о непрерывности сдвига).

1. f — равномерно непрерывно на $\mathbb{R}^m$. Тогда $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$[1]
2. $f \in L^p(\mathbb{R}^m), 1 \leq p < +\infty$. Тогда $||f_n - f||_p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$
3. $f \in \widetilde{C}[0,T]$. Тогда $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$[2]
4. $1 \leq p < +\infty, f \in L^p[0,T] \Rightarrow ||f_n - f||_p \to 0$

Примечание.

1. Для L^∞ непрерывности сдвига нет: $f = \chi_{[0,1]}, f_n = \chi_{[-h,1-h]}, \text{ess sup}\,|f - f_n| = 1$
2. Во всех упомянутых случаях 2 и 4 $h \mapsto ||f_n - f||_p$ непрерывно в нуле $\Rightarrow$ непрерывно всюду.

$$|||f_n - f||_p - ||f_{h_0} - f||_p| \leq ||f_n - f_{h_0}||_p = ||f_{h-h_0} - f||_p \xrightarrow[h\to h_0]{} 0$$

Доказательство. Пункты 1 и 3 очевидны по определению равномерной непрерывности.

Докажем пункты 2 и 4:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall f \in L^p[0,T] \;\; \exists g - \text{непр.} \in \widetilde{C}[0,T] \;\; ||f - g||_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

4:

$$\begin{aligned} ||g_h - g||_p &= \left(\int_0^T |g(x+h) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(||g_h - g||_\infty^p \cdot \int_0^T 1dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= T^{\frac{1}{p}} ||g_h - g||_\infty \end{aligned}$$

2: g — финитное, носитель[3] $g \subset B(0,R)$

$$||g_h - g||_p \leq ||g_h - g||_{L^p(B(0,R+1),\lambda_m)} \leq ||g_n - g||_\infty (\lambda_m(B))^{\frac{1}{p}}$$

$\square$

[1] Т.е. $\sup_x |f(x+h) - f(x)| \to 0$
[2] Или $||f_n - f||_{\widetilde{C}} \to 0$
[3] Множество точек, где $g \neq 0$

10 Гильбертово пространство

Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{R}$[4] со скалярным произведением $X \times X \to \mathbb{R}$[5] со следующими свойствами:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$
4. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ или $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ в $\mathbb{C}$.

Нам известно неравенство Коши-Буняковского: $| \langle x, y \rangle |^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

$||x|| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма порожденная, скалярным произведением.

Определение. $\mathcal{H}$ — линейное пространство, в котором задано скалярное произведение и соответствующая норма. Если при этом $\mathcal{H}$ — полное, то оно называется **Гильбертовым.**

Пример.

1. $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}^m$
2. $L^2(X, \mu), \langle f, g \rangle := \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu(x)$

   Корректно по неравенству КБШ для интегралов: $| \int_X f\overline{g}| \leq \left(\int_X |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |\overline{g}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

   Это скалярное произведение:

$$\langle g, f \rangle = \int_X g\overline{f} = \overline{\left(\int_X fg\right)}$$

   $||f|| = \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$ — норма порожденная, скалярным произведением. Именно эту норму мы и рассматривали с самого начала.

3. Антипример: $L^p, p \neq 2$ не Гильбертово.
4. $l^2 = \{(x_n)_{n=1}^{+\infty}, x_j \in \mathbb{R}(\text{или } \mathbb{C})\} : \sum |x_j|^2 < +\infty$

$$\langle x, y \rangle := \sum_j x_j \overline{y_j}$$

$$||x|| = \sqrt{\sum |x_j|^2}$$

Определение. Сходящийся ряд: $\sum a_n, a_n \in \mathcal{H}$: $S_N := \sum_{1 \leq n \leq N}$, если $\exists S \in \mathcal{H} : S_N \underset{\text{в } \mathcal{H}}{\longrightarrow} S$

[4] или над $\mathbb{C}$
[5] или $\mathbb{C}$

Определение. $x, y \in \mathcal{H}$. x **ортогонален** y, если $\langle x, y\rangle = 0$ и обозначается $x \perp y$

Определение. $A \subset \mathcal{H}$ $x \perp A : \forall a \in A \quad \langle x, a\rangle = 0$

Определение. Ряд $\sum a_k$ **ортогональный**, если $\forall k, l \;\; a_k \perp a_l$.

Пример. $a_k \in l^2 : (0 \dots 0, \frac{1}{k}, 0 \dots)$

Теорема 35 (свойства сходимости в Гильбертовом пространстве).

1. $x_n \to x, y_n \to y$ в $\mathcal{H}$. Тогда $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$, т.е. скалярное произведение непрерывно в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.
2. $\sum x_k$ сходится. Тогда:
$$\forall y \in \mathcal{H} \quad \left\langle \sum x_k, y \right\rangle = \sum \langle x_k, y\rangle \tag{50}$$
3. $\sum x_k$ – ортогональный ряд. Тогда $\sum x_k$ сходится $\Leftrightarrow \sum ||x_k||^2$ сходится.

Доказательство.

1.
$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &\le |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\le \underbrace{||x_n - x||}_{\text{бесконечно малое}} \cdot \underbrace{||y_n||}_{\text{огр.}} + \underbrace{||x||}_{\text{const}} \cdot \underbrace{||y_n - y||}_{\text{бесконечно малое}} \to 0 \end{aligned}$$

2. $S_N = \sum_{k=1}^N x_k \xrightarrow[N \to +\infty]{} S$
$$\langle S_n, y\rangle \to \langle S, y\rangle = \left\langle \sum x_n, y \right\rangle$$
$$\langle S_n, y\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^N x_k, y \right\rangle = \sum_{k=1}^N \langle x_k, y\rangle$$
Это член суммы ряда из правой части (50).

3. $S_N = \sum_{k=1}^N x_k$
$$||S_N||^2 = \left\langle \sum_{k=1}^N x_k, \sum_{j=1}^N x_j \right\rangle = \sum_{k,j} \langle x_k, x_j\rangle = \sum_{k=1}^n ||x_k||^2 =: C_N$$

$\Rightarrow$ Очевидно

$\Leftarrow$ Аналогично формуле выше: $||S_M - S_N||^2 = |C_M - C_N|$. Таким образом, если C_N сходится, то C_N фундаментально $\Rightarrow S_N$ фундаментально в $\mathcal{H}$.

Не дописано, возможно.

□

Определение. $\{e_k\} \subset \mathcal{H}$ — **ортогональное семейство**, если:

1. $\forall k, l \ \ e_k \perp e_l$
2. $\forall k \ \ e_k \neq 0$

Если потребовать $||e_k|| = 1$, то такое семейство называется **ортонормированным**.

Примечание. $\{e_k\}$ — ортогональное семейство $\Rightarrow \{\frac{e_k}{||e_k||}\}$ — ортонормированное семейство.

Пример.

1. $l^2, e_k := (0 \dots 0, 1, 0 \dots)$ — ортонормированное семейство.
2. L^2 над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}$ — ортогональное семейство:

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cdot \cos lt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(kt - lt) + \cos(kt + lt)dt = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \pi, & k = l \end{cases}$$

   Можно разобрать остальные случаи и подтвердить искомое.

   Если поделить все элементы[6] на $\sqrt{\pi}$, то мы получим ортонормированное семейство.

3. $L^2[0, 2\pi]$ над $\mathbb{C}$, $\{\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\}$ — ортогонормированное семейство.

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-ilt}}{\sqrt{2\pi}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t}dt \overset{k\neq l}{=} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(k-l)i}e^{i(k-l)t}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

4. $L^2[0, 2\pi], \{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos t, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2t \dots\}$ — ортонормированное семейство.

Теорема 36.

- $\{e_k\}$ — ортогональное семейство в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, где $c_k \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

Тогда:

1. $\{e_k\}$ — ЛНЗ

[6] Кроме единицы, её на $\sqrt{2\pi}$

2. $c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$
3. $c_k e_k$ — проекция x на прямую $\{te_k, t \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\}$. $x = c_k e_k + z, z \perp e_k$.

Доказательство.

1. $\sum_{k=1}^{N}$ Не дописано

$\square$

Определение.

- $\{e_k\}$ — ортогональное семейство в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$

$c_k := \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2}$ — называется **коэффициентом Фурье** по системе $\{e_k\}$.w

$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x) e_k$ — ряд Фурье вектора x по системе e_k.

Примечание. При замене ортогонального семейства на ортонормированное семейство $\{\frac{e_k}{||e_k||} = \tilde{e}_k\}$ ряд Фурье не изменится.

$$\tilde{c}_k = \frac{\langle x, \tilde{e}_k \rangle}{||\tilde{e}_k||^2} = \frac{\left\langle x, \frac{e_k}{||e_k||} \right\rangle}{1} = \frac{x, e_k}{||e_k||}$$

$$\tilde{c}_k \cdot \tilde{e}_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||} \cdot \frac{e_k}{||e_k||} = \frac{\langle x, e_k \rangle}{||e_k||^2} \cdot e^k = c_k(x) \cdot e_k$$

Теорема 37 (о свойствах частичных сумм ряда Фурье).

- $\{e_k\}$ — ортогональное семейство в $\mathcal{H}$
- $x \in \mathcal{H}$
- $n \in \mathbb{N}$
- $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) e_k$
- $\mathcal{L}_n = \mathrm{Lin}(e_1 \dots e_n)$

Тогда:

1. S_n — проекция x на $\mathcal{L}_n$, т.е. $x = S_n + z \Rightarrow z \perp \mathcal{L}_n$
2. S_n — элеменрт наилучшего приближения дял x в $\mathcal{L}_n$:

$$||x - S_n|| = \min_{y \in \mathcal{L}_n} ||x - y||$$

3. $||S_n|| \le ||x||$

Доказательство.

1. $k = 1 \dots n$
$$\langle z, e_k \rangle = \langle x - S_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - c_k(x)||e_k||^2 = 0$$

2. $x = S_n + z$
$$||x-y||^2 = ||\underbrace{(S_n - y)}_{\in \mathcal{L}_n} + \underbrace{z}_{\perp \mathcal{L}_n}|| = ||S_n - y||^2 + ||z||^2 \ge ||z||^2 = ||x - S_n||^2$$

3. $||x||^2 = ||S_n||^2 + ||z||^2 \ge ||S_n||^2$

$\square$