

## Теория меры

**Определение.**  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  — **продолжает**  $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ , если  $\mu|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$

**Теорема 1** (о Лебеговском продолжении меры).

- $\mathcal{P}_0 \subset X$  — полукольцо
- $\mu_0 : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  —  $\sigma$ -конечная мера

Тогда  $\exists \sigma$ -алгебра  $\mathfrak{A} \supset \mathcal{P}_0$ ,  $\exists \mu$  — мера на  $\mathfrak{A}$ :

1.  $\mu$  — продолжение  $\mu_0$  на  $\mathfrak{A}$
2.  $\mu$  — полная мера
3. Если  $\tilde{\mu}$  — полная мера на  $\sigma$ -алгебре  $\tilde{\mathfrak{A}}$  и  $\tilde{\mu}$  — продолжение  $\mu_0$ , то  $\tilde{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}$  и при этом  $\tilde{\mu}$  продолжает  $\mu : \tilde{\mu}|_{\mathfrak{A}} = \mu$
4. Если  $\mathcal{P}$  — полукольцо, такое что  $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P} \subset \mathfrak{A}$  и мера  $\nu$  — продолжение  $\mu_0$  на  $\mathcal{P}$ , то  $\forall A \in \mathcal{P} \quad \nu(A) = \mu(A)$
5.  $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mu A = \inf \left\{ \sum \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} : A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k \right\}$

*Доказательство.* Не будет, это слишком сложно.

Общая идея следующая:  $\forall A \subset X$  положим  $\mu^*(A) = \inf \{ \dots \}$  — не аддитивна.  $A \subset \bigcup A_k \quad \mu^* A = \sum \mu^* A_k$  □

*Следствие 1.1.*

- $A \in \mathfrak{A}$
- $\mu A < +\infty$
- $\varepsilon > 0$

Тогда  $\exists P_k \in \mathcal{P}_0 : A \subset \bigcup P_k \quad \mu A < \sum \mu P_k < \mu A + \varepsilon$

## Мера Лебега

**Теорема 2.**

- $\mu : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathbb{R}$  — классический объем в  $\mathbb{R}^m$

Тогда  $\mu$  это  $\sigma$ -конечная мера

*Доказательство.*  $\sigma$ -конечность очевидна, т.к. можно дизъюнктно разбить  $\mathbb{R}^m$  на ячейки.

Докажем счётную аддитивность  $\mu$ .

Для этого достаточно проверить счётную полуаддитивность:

$$P = [a, b), P_n = [a_n, b_n) \quad P \subset \bigcup P_n \quad \mu P \stackrel{?}{\leq} \sum \mu P_n$$

Если  $P = \emptyset$ , то утверждение тривиально. Пусть  $P$  непустое.

Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Чуть уменьшим координаты вектора  $b$ , так что  $[a, b'] \subset [a, b)$  и  $\mu(P \setminus [a, b')) < \varepsilon$ . Последняя формула некорректна, т.к.  $P \setminus [a, b')$  не обязательно ячейка. Но оно представимо в виде  $\bigsqcup D_j$ , поэтому под  $\mu(P \setminus [a, b'))$  подразумевается  $\sum \mu D_j$ . Также можно было записать  $\mu P - \mu[a, b') < \varepsilon$  вместо этих трюков.

Уменьшим слегка координаты векторов  $a_n$ , так что  $(a'_n, b_n) \supset [a_n, b_n)$ ,  $\mu([a'_n, b_n) \setminus [a_n, b_n)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ . Эта запись также некорректна, поэтому напомним  $\mu[a'_n, b_n) - \mu[a_n, b_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ .

$$\underbrace{[a, b']}_{\text{комп.}} \subset \bigcup (a'_n, b_n) \Rightarrow \exists \text{ конечное подпокрытие: } [a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N (a'_n, b_n) \Rightarrow [a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N [a'_n, b_n)$$

$$\text{Тогда } \mu[a, b') \leq \sum_{n=1}^N \mu[a'_n, b_n)$$

$$\begin{aligned} \mu P - \varepsilon &\leq \sum_{n=1}^N \left( \mu P_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ \mu P - \varepsilon &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu P_n + \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Определение.** Мера Лебега в  $\mathbb{R}^m$  — лебеговское продолжение классического объема.

$\mathfrak{M}^m$  —  $\sigma$ -алгебра, на которой задана мера Лебега. Тогда множество называется **измеримым по Лебегу**

Свойства меры Лебега:

1. (a)  $A_1, A_2, \dots$  — измеримы  $\Rightarrow A_1 \cap A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 \cap A_3, \dots, A_1 \cup A_2 \cup A_3, \dots$  — измеримы.
- (b)  $\forall n \quad \lambda A_n = 0 \Rightarrow \lambda(\bigcup A_n) = 0$
- (c)  $\lambda A_n = 0, B \subset A \Rightarrow B$  — измеримо,  $\lambda B = 0$

Пример.  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  — измеримо,  $\lambda_1 \mathbb{Q} = 0$

Доказательство.  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \{x\} = \bigcap_n [x, x + \frac{1}{n})$

$$0 \leq \lambda\{x\} \leq \lambda[x, x + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda\{x\} = 0$$

$\mathbb{Q}$  — объединение одноточечных множеств. □

2.  $\mathfrak{M}^m$  содержит все открытые и замкнутые множества.

**Лемма 1.**

- (a)  $O \subset \mathbb{R}^m$  — открытое. Тогда  $O = \bigsqcup Q_i$ , где  $Q_i$  — ячейки с рациональными координатами. Можно считать, что ячейки кубические.
- (b) Можно считать, что  $\overline{Q_i} \subset O$
- (c)  $E$  — измеримо,  $\lambda E = 0$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \quad E \subset \bigcup Q_i : Q_i \text{ — кубические ячейки и } \sum \lambda Q_i < \varepsilon$

*Примечание.*  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (B_i) \text{ — шары: } E \subset \bigcup B_i, \sum \lambda B_i < \varepsilon$

$$Q\left(x, \frac{R}{\sqrt{m}}\right) \subset B(x, R) \subset Q(x, R)$$

$$\left(\frac{2R}{\sqrt{m}}\right)^m \leq \lambda B \leq \lambda Q(x, R) = (2R)^m$$

*Доказательство.*

- (a, b)  $\forall x \in O$  пусть  $Q(x)$  — какая угодно ячейка с рациональными координатами,  $Q(x) \subset O$  (можно потребовать  $\overline{Q(x)} \subset O$ ,  $Q$  — куб, координаты двоично-рациональны для второго пункта).

$O = \bigcup_{x \in O} Q(x)$  — здесь не более чем счётное множество различных ячеек.

$\Rightarrow O = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q(x_i)$ . Сделаем ячейки дизъюнктными:  $Q_1 := Q(x_1), Q(x_2) \setminus Q(x_1) = \bigcup D_j$ . Переобозначим  $D_j$  как  $Q_2, Q_3 \dots Q_k$ . Аналогично для всех  $Q(x_i)$ .

Можно считать, что координаты всех ячеек двоично рациональны.

Ячейки можно подразбить, чтобы они стали кубическими: пусть  $2^l$  — самый крупный знаменатель. Тогда  $[a_i, b_i]$  — конечное объединение кубических ячеек со стороной  $\frac{1}{2^l}$

- (c) Следует из пункта 5 теоремы о продолжении Лебега:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ ячейки } P_k \quad E \subset \bigcup P_k \quad 0 = \lambda E \leq \sum \lambda P_k \leq \varepsilon$$

$\exists \tilde{P}_k$  — двоично-рациональные ячейки:

$$P_k \subset \tilde{P}_k \quad 0 = \lambda E \leq \sum \lambda_k \tilde{P}_k \leq 2\varepsilon$$

Можно разбить  $\tilde{P}_k$  на конечное число кубов.

□

**Определение.**  $\mathfrak{B}$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра (в  $\mathbb{R}^m$  или в метрическом пространстве) — минимальная  $\sigma$ -алгебра, которая содержит все открытые множества.

$$\mathfrak{M}^m \supset \mathfrak{B}$$

*Пример.* Канторово множество в  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} K_0 &= [0, 1] \\ K_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ K_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &\vdots \end{aligned}$$


Рис. 1: Множество Кантора

$$\mathcal{K} = \bigcup K_i \text{ — измеримо, } \lambda \mathcal{K} = 0, \lambda(K_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^i$$

Также можно задать множество Кантора следующим образом:

$$\mathcal{K} = \{x \in [0, 1] : \text{троичная запись } x \text{ содержит только цифр } 0 \text{ и } 2\}$$

3.  $\exists$  неизмеримые по Лебегу множества, т.е. не принадлежащие  $\mathfrak{M}$

Зададим отношение  $\sim$  на  $\mathbb{R}$ :  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Q} = A$  — из каждого класса эквивалентности взяли по одной точке. Можно считать, что  $A \subset [0, 1]$

Очевидно, что  $\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (A + q) = \mathbb{R}$

$$[0, 1] \stackrel{(1)}{\subset} \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (A + q) \stackrel{(2)}{\subset} [-1, 2]$$

Измеримо ли  $A$ ? Предположим, что да.

Очевидно  $\forall q \quad \lambda A = \lambda(A + q)$  по пункту 5 теоремы о продолжении меры.

Из (1):

$$\lambda[0, 1] = 1 \leq \sum_q \lambda(A + q) = \sum_q \lambda(A) \Rightarrow \lambda A > 0$$

Из (2):

$$\lambda\left(\bigcup_q (A + q)\right) = \sum_q \lambda A \leq \lambda[-1, 2] = 3 \Rightarrow \lambda A = 0$$

Противоречие  $\Rightarrow A$  неизмеримо.

4.  $A \in \mathfrak{M}$

- $A$  — ограничено  $\Rightarrow \lambda A < +\infty$
- $A$  — открыто  $\Rightarrow \lambda A > 0$  — из леммы.
- $\lambda A = 0 \Rightarrow A$  не имеет внутренних точек.

5.  $A \in \mathfrak{M}^m$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0$

- $\exists$  открытое  $G_\varepsilon \supset A : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
- $\exists$  замкнутое  $F_\varepsilon \subset A : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство.

(a)  $\lambda A$  — кон.

$$\lambda A = \inf \left\{ \sum_i \lambda P_i : A \subset \bigcup P_i, P_i \in \mathcal{P} \right\}$$

Чуть “раздуем” эти  $P_i = [a_i, b_i) \rightsquigarrow (a'_i, b_i) \subset [a'_i, b_i]$

$$\lambda[a'_i, b_i] \leq \lambda P_i + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$A \subset \underbrace{\bigcup (a'_i, b_i)}_{G_{2\varepsilon}} \subset [a'_i, b_i]$$

$$\lambda A \leq \lambda G_{2\varepsilon} \leq \sum \lambda[a'_i, b_i] \leq \sum \left( \lambda P_i + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \leq \lambda A + 2\varepsilon$$

(b)  $\lambda A = +\infty$ . Используем  $\sigma$ -конечность:  $\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{j=1}^{+\infty} Q_j$

$$\exists G_{\varepsilon,j} - \text{откр. } (A \cap Q_j) \subset G_{\varepsilon,j} \quad \lambda(G_{\varepsilon,j} \setminus (A \cap Q_j)) < \frac{\varepsilon}{2^j}$$

$$A = \bigsqcup (A \cap Q_j) \subset \bigcup G_{\varepsilon,j} =: G_\varepsilon$$

$$\lambda(G_\varepsilon \setminus A) \leq \sum \lambda(G_{\varepsilon,j} \setminus (A \cap Q_j)) \leq \varepsilon$$

Очевидно:  $G_\varepsilon \setminus A \subset \bigcup_j (G_{\varepsilon,j} \setminus (A \cap Q_j))$

(с) Для  $F_\varepsilon$  — переходим к дополнению:

Для  $A^c$  подбираем  $G_\varepsilon$ ,  $A^c \subset G_\varepsilon$

$$A \supset (G_\varepsilon)^c =: F_\varepsilon$$

$$G_\varepsilon \setminus A^c = A \setminus (G_\varepsilon)^c$$

$$\lambda(G_\varepsilon \setminus A^c) < \varepsilon \Rightarrow \lambda(A \setminus F) < \varepsilon$$

□