

1. Обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как $\vdash_{\text{и}}$, а выводимость в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как $\vdash_{\text{е}}$.

Заметим, что хоть языки этих исчислений и отличаются, мы можем построить преобразование высказываний этих исчислений друг в друга: приняв $\perp \Rightarrow A \& \neg A$ и $\neg \alpha \Rightarrow (\alpha \rightarrow \perp)$. Будем обозначать высказывания в гильбертовском ИИВ обычными греческими буквами, а соответствующие им высказывания в ИИВ натурального вывода — буквами с апострофами: α', β', \dots .

- (а) Пусть $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$. Покажите, что $\Gamma \vdash_{\text{е}} \alpha'$: предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для одного случая базы и одного случая перехода индукции.

Общая схема: перебираем шаги доказательства в гильбертовом стиле и добавляем соответствующие шаги в естественном выводе в зависимости от происхождения этого шага.

База: рассмотрим случай $\gamma_1 \in \Gamma$. Тогда дерево вывода $\gamma_1 : \overline{\Gamma \vdash \gamma_1, \gamma_1 \in \Gamma}$

Переход: рассмотрим случай МР. Тогда дерево вывода $\gamma_n : \frac{\overline{\Gamma \vdash \gamma_i \rightarrow \gamma_k} \quad \overline{\Gamma \vdash \gamma_i}}{\Gamma \vdash \gamma_k}$

- (b) Пусть $\Gamma \vdash_{\text{е}} \alpha'$. Покажите, что $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$.

Докажем по индукции по высоте дерева.

Доказательство. База: $n = 1$. Единственный случай — аксиома. Он очевиден.

Переход:

- i. $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$. По индукционному предположению $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ и по теореме об индукции $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
- ii. $\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \& \psi}$. По индукционному предположению $\Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi$. Объединим два доказательства, припишем аксиому $\exists \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi \& \psi$ и применим дважды МР.
- iii. $\frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$. По индукционному предположению $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi, \Gamma \vdash \varphi$. Объединим два доказательства, используем МР.

Прочие случаи аналогичны. □

2. Рассмотрим \mathbb{N}_0 (натуральные числа с нулём) с традиционным отношением порядка как решётку. Каков будет смысл операций $(+)$ и (\cdot) в данной решётке, есть ли в ней псевдодополнение, определены ли 0 или 1? Приведите несколько свойств

традиционных определений $(+)$ и (\cdot) , которые будут всё равно выполнены при таком переопределении, и несколько свойств, которые перестанут выполняться.

$$a + b = \max(a, b) \quad a \cdot b = \min(a, b)$$

Псевдополнения нет для произвольных элементов, т.к. $\min(a, c) \leq b$ не ограничивает сверху c для $a \leq b$. Для $a \not\leq b$ $a \rightarrow b = b$.

0 это 0, т.к. $\forall x \in \mathbb{N}_0 \quad 0 \leq x$

1 нет, т.к. $1 + 1 \not\leq 1$

Выполнены:

- (a) $a \cdot 0 = 0$
- (b) $a + 0 = a$
- (c) $a + b + c = a + (b + c)$
- (d) $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- (e) $a + b = b + a$
- (f) $a \cdot b = b \cdot a$

Не выполнены:

- (a) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

3. Постройте следующие примеры:

- (a) • непустого частично-упорядоченного множества, не имеющего операций $(+)$ и (\cdot) ни для каких элементов;

Такого не существует, т.к. $\forall a \quad a \leq a$, следовательно в $a + a$ все элементы сравнимы с a и при этом $a \in (a + a)$. Таким образом, наименьший — a . Аналогично можно сказать про \cdot .

- имеющего операцию $(+)$ для всех элементов, но не имеющего (\cdot) для некоторых;

Следующий номер, но наоборот.

- имеющего операцию (\cdot) для всех элементов, но не имеющего $(+)$ для некоторых.

$\{1, 2, 3\}$, упорядоченное по делимости.

- (b) • решётки, не являющейся дистрибутивной решёткой;
 \mathbb{N}_0 со стандартным порядком.

- дистрибутивной, но не импликативной решётки;

\mathbb{Z} и его конечные подмножества с отношением \subset , т.е. $\{X \mid X \subset \mathbb{Z}, |X| \in \mathbb{N}_0\}$. Дистрибутивность тривиальна из теории множеств, как и то, что это решетка. Нет $\{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$, т.к. $\{c \mid \{0\} \cdot c \leq \mathbb{Z}\}$ есть все конечные подмножества, а среди них нет наибольшего.

- импликативной решётки без 0.

$$-\mathbb{N}_0, \leq$$

4. Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:

- (а) ассоциативность: $a + (b + c) = (a + b) + c$ и $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

Тривиально из теории множеств.

- (b) монотонность: пусть $a \preceq b$ и $c \preceq d$, тогда $a + c \preceq b + d$ и $a \cdot c \preceq b \cdot d$;

$a \preceq b \Rightarrow a \leq b + d, c \leq d \Rightarrow c \leq b + d$. Таким образом, $a + c \leq b + d$.

Вторая часть аналогично.

- (c) Законы поглощения: $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;

i. $a \cdot (a + b) = a$

$a + b$ либо $= a$, либо $\leq a$. В обоих случаях $a \cdot (a + b) = a$

ii. $a + (a \cdot b) = a$

$a + b$ либо $= a$, либо $\geq a$. В обоих случаях $a + (a \cdot b) = a$

- (d) $a \preceq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$;

$$a \rightarrow b = 1 \Leftrightarrow 1 \in \{c \mid a \cdot c \leq b\} \Leftrightarrow a \cdot 1 \leq b \Leftrightarrow a \leq b$$

- (e) из $a \preceq b$ следует $b \rightarrow c \preceq a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a \preceq c \rightarrow b$;

$$a \cdot (b \rightarrow c) \leq b \cdot (b \rightarrow c) \leq c$$

$$b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$$

$$c \cdot (c \rightarrow a) \leq a \leq b$$

$$c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$$

- (f) из $a \preceq b \rightarrow c$ следует $a \cdot b \preceq c$;

$$a \leq b \rightarrow c \Rightarrow \exists d : \begin{cases} d \geq a \\ b \cdot d \leq c \end{cases} \Rightarrow b \cdot a \leq c$$

Так как множество, из которого берется $b \cdot a$ есть подмножество " $b \cdot d$ "

$$(g) \ b \leq a \rightarrow b \text{ и } a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1;$$

$$\begin{aligned} b \cdot a &\leq b \\ a \cdot b &\leq b \\ b &\leq a \rightarrow b \end{aligned}$$

$a \leq b \rightarrow a$ по пункту d.

$$(h) \ a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c));$$

$$(i) \ a \leq b \rightarrow a \cdot b \text{ и } a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$$

$$(j) \ a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$$

5. Покажите, что импликативная решётка дистрибутивна.

Пусть $d = a \cdot b + a \cdot c$. Рассмотрим $a \rightarrow d$.

$$a \cdot b \leq d \tag{1}$$

$$b \leq a \rightarrow d \tag{2}$$

$$a \cdot c \leq d \tag{3}$$

$$c \leq a \rightarrow d \tag{4}$$

$$b + c \leq a \rightarrow d \tag{5}$$

$$a \cdot (b + c) \leq a \cdot (a \rightarrow d) \tag{6}$$

$$\leq d \tag{7}$$

$$= a \cdot b + a \cdot c \tag{8}$$

- (1) и (3): по построению d
- (2) и (4): по определению \rightarrow
- (5): из (2) и (4)

Итого $a \cdot (b + c) \leq a \cdot b + a \cdot c$, покажем, что $a \cdot (b + c) \geq a \cdot b + a \cdot c$

$$a \cdot b \leq a \tag{9}$$

$$a \cdot b \leq b \leq b + c \tag{10}$$

$$a \cdot b \leq a \cdot (b + c) \tag{11}$$

$$a \cdot c \leq a \cdot (b + c) \quad (12)$$

$$a \cdot b + a \cdot c \leq a \cdot (b + c) \quad (13)$$

- (12): аналогично (11)

6. Покажите, что в дистрибутивной решётке (всегда $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$) также выполнено и $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

$$(a + b) \cdot (a + c) = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot c \quad (14)$$

$$= a + (a + b) \cdot c \quad (15)$$

$$= a + a \cdot c + b \cdot c \quad (16)$$

$$= a + b \cdot c \quad (17)$$

- (14): по дистрибутивности

7. Рассмотрим топологическое пространство $\langle X, \Omega \rangle$, упорядочим его топологию Ω отношением \subseteq . Покажите, что такая конструкция является псевдобулевой алгеброй, а если топология — дискретная (любое подмножество X открыто), то булевой алгеброй.

Это решетка, т.к. топология замкнута по \cap, \cup и $a + b = a \cup b, a - b = a \cap b$.

Решетка импликативна, т.к. $c = a \rightarrow b \Rightarrow a \cap c \subset b \Rightarrow c = (b \cup (X \setminus a))^\circ$, а оно определено однозначно, т.е. \exists .

Ноль в этой решетке есть \emptyset , таким образом это псевдобулева алгебра.

$$a + (a \rightarrow 0) = a \cup \emptyset \cup (X \setminus a)^\circ \stackrel{\text{дискр.}}{=} a \cup (X \setminus a) = X = 1$$

8. Докажите, что ИИВ корректно, если в качестве модели выбрать псевдобулеву алгебру, а функции оценок определить так:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \&\beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \neg \alpha \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow 0 \\ \llbracket \perp \rrbracket &= 0 \end{aligned}$$

Разберем случаи:

$\llbracket \alpha \rrbracket$	$\llbracket \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\llbracket \alpha \rrbracket$	$\llbracket \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\llbracket \alpha \rrbracket$	$\llbracket \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\llbracket \alpha \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow 0$
0	1
1	0

Тогда несложно заметить, что с $V = \{0, 1\}$ оценки на псевдобулевой алгебре эквивалентны оценкам обычной интуиционистской логики, а она корректна.

9. Пусть задано отношение *предпорядка* R (транзитивное и рефлексивное, но необязательно антисимметричное) на множестве A . Напомним несколько определений:

- определим отношение $R^- := \{\langle x, y \rangle \mid xRy \text{ и } yRx\}$;
- $[a]_{R^-} := \{x \mid aR^-x\}$ — класс эквивалентности, порождённый элементом a ;
- фактор-множество $A/R^- := \{[a]_{R^-} \mid a \in A\}$;
- на A/R^- можно перенести отношение $R^* := \{\langle [a], [b] \rangle \mid aRb\}$.

Покажите, что: отношение R^- — отношение эквивалентности; если $x \in [a]_{R^-}$, $y \in [b]_{R^-}$ и aRb , то xRy ; отношение R^* — отношение порядка на A/R^- .

Доказательство. Рефлексивность и симметричность очевидны из определения R^- .

$\langle xR^-y, yR^-z \Rightarrow xRy, yRz \Rightarrow xRz$ и аналогично $zRx \Rightarrow xR^-z$, получили транзитивность.

$$aRb, aR^-x, bR^-y \Rightarrow aRx, bRy. \begin{cases} xRa \\ aRb \\ bRy \end{cases} \Rightarrow xRy$$

- Рефлексивность: $aR^*a \Leftarrow aRa$, что выполнено по рефлексивности R
- Антисимметричность: $aR^*b, bR^*a \Rightarrow aRb, bRa \Rightarrow a, b \in [a]_{R^-} \text{ и } [b]_{R^-}$, но классы эквивалентности не пересекаются $\Rightarrow a = b$.
- Транзитивность: по транзитивности R .

□

10. Покажем, что конструкция из определения алгебры Линденбаума действительно является решёткой:

(а) Покажите, что отношение (\approx) — отношение эквивалентности (напомним, что $\alpha \preceq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$, а $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$). Подсказка: воспользуйтесь предыдущим заданием.

Покажем, что \vdash есть предпорядок.

- Рефлексивность: $\alpha \vdash \alpha$
- Транзитивность: $\alpha \vdash \beta, \beta \vdash \gamma$ — верно по МР и теореме о дедукции. Также можно без них — берем вывод β , приписываем вывод γ , но удаляем шаги $\beta \in \Gamma$.

\vdash это предпорядок, а \approx есть его R^\equiv . По предыдущему номеру \approx — отношение эквивалентности.

(b) Покажите, что $[\alpha]_\approx \cdot [\beta]_\approx = [\alpha \& \beta]_\approx$. Для этого, например, можно показать:

- $\alpha \& \beta \preceq \alpha$: $\alpha \& \beta \vdash \alpha$ — очевидно (аксиома 4 и МР).
- если $\gamma \preceq \alpha$ и $\gamma \preceq \beta$, то $\gamma \preceq \alpha \& \beta$; (аксиома 3 и МР дважды)
- операция однозначно определена для всех элементов решётки (то есть определена для всех классов эквивалентности и не зависит от выбора представителей). Подсказка: воспользуйтесь предыдущим заданием.

Покажем независимость от выбора представителей:

Если $\alpha \approx \gamma$, то $\alpha \& \beta \approx \gamma \& \beta$, т.к.:

$$\alpha \& \beta \approx \gamma \& \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \& \beta \vdash \gamma \& \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \& \beta \vdash \alpha, \beta \\ \alpha \vdash \gamma \end{cases} \\ \gamma \& \beta \vdash \alpha \& \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \& \beta \vdash \alpha, \beta \\ \gamma \vdash \alpha \end{cases} \end{cases}$$

$\beta \approx \gamma \Rightarrow \alpha \& \beta \approx \alpha \& \gamma$ аналогично.

Определенность для всех классов была показана в предыдущих пунктах.

(с) Покажите, что $[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta]$.

- $\alpha \preceq \alpha \vee \beta$ и $\beta \preceq \alpha \vee \beta$ — очевидно по аксиомам 6, 7.

- Если $\alpha \preceq \gamma$ и $\beta \preceq \gamma$, то $\alpha \vee \beta \preceq \gamma$

$$\begin{cases} \alpha \vdash \gamma \\ \beta \vdash \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vdash \alpha \rightarrow \gamma \\ \vdash \beta \rightarrow \gamma \end{cases} \xrightarrow{\text{акс. 8, М.Р.}} \alpha \vee \beta \vdash \gamma$$

- Независимость от выбора представителей

Если $\alpha \approx \gamma$, то $\alpha \vee \beta \approx \gamma \vee \beta$, т.к.:

$$\alpha \vee \beta \approx \gamma \vee \beta \Leftarrow \begin{cases} \alpha \vee \beta \vdash \gamma \vee \beta \\ \gamma \vee \beta \vdash \alpha \vee \beta \end{cases}$$

$$\Gamma := \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \gamma$$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma, \alpha \vdash \alpha} \quad \overline{\Gamma, \alpha \vdash \alpha \rightarrow \gamma}}{\Gamma, \alpha \vdash \gamma}}{\Gamma, \alpha \vdash \gamma \vee \beta} \quad \frac{\overline{\Gamma, \beta \vdash \beta}}{\Gamma, \beta \vdash \gamma \vee \beta} \quad \overline{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}}{\Gamma \vdash \gamma \vee \beta}$$

Аналогично для $\gamma \vee \beta \vdash \alpha \vee \beta$

(d) Покажите, что $[\alpha] \rightarrow [\beta] = [\alpha \rightarrow \beta]$.

- $\alpha \& (\alpha \rightarrow \beta) \preceq \beta$ — по аксиомам 4, 5 и М.Р.
- Если $\alpha \& \gamma \preceq \beta$, то $\gamma \preceq \alpha \rightarrow \beta$

$$\begin{aligned} \alpha \& \gamma \rightarrow \beta & \vdash \gamma \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \& \gamma \rightarrow \beta, \gamma & \vdash \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \& \gamma \rightarrow \beta, \gamma, \alpha & \vdash \beta \end{aligned}$$

Это доказывается через аксиому 3 и М.Р.

- Независимость от выбора представителей

Если $\gamma \approx \alpha$, то:

$$\text{i. } \alpha \rightarrow \beta \approx \gamma \rightarrow \beta$$

$$\Gamma := \alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow \alpha$$

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma, \gamma \vdash \gamma} \quad \overline{\Gamma, \gamma \vdash \gamma \rightarrow \alpha}}{\Gamma, \gamma \vdash \alpha} \quad \overline{\Gamma, \gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}}{\Gamma, \gamma \vdash \beta} \quad \frac{\Gamma, \gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \gamma \rightarrow \beta}$$

Аналогично $\gamma \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

ii. $\beta \rightarrow \alpha \approx \beta \rightarrow \gamma$

$\Gamma := \beta \rightarrow \alpha, \alpha \rightarrow \gamma$

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma, \beta \vdash \beta} \quad \overline{\Gamma, \beta \vdash \beta \rightarrow \alpha}}{\Gamma, \beta \vdash \alpha} \quad \overline{\Gamma, \beta \vdash \alpha \rightarrow \gamma}}{\Gamma, \beta \vdash \gamma} \quad \frac{\Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma}$$

(е) Найдите классы эквивалентности для 0 и 1.

$\forall \alpha \ 0 \preceq \alpha$

$$\begin{aligned} 0 &\vdash \alpha \\ &\vdash 0 \rightarrow \alpha \\ &\vdash 0 \rightarrow \neg \alpha \\ &\vdash (0 \rightarrow \alpha) \rightarrow (0 \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow \neg 0 \\ &\vdash \neg 0 \end{aligned}$$

Итого $\forall \alpha \ 0 \preceq \alpha \Rightarrow \vdash \neg 0$. Докажем “ \Leftarrow ”.

$$\frac{\overline{\neg 0, 0 \vdash 0} \quad \overline{\neg 0, 0 \vdash 0 \rightarrow \perp}}{\neg 0, 0 \vdash \perp} \quad \frac{\neg 0, 0 \vdash \perp}{\neg 0, 0 \vdash \alpha} \quad \frac{\neg 0, 0 \vdash \alpha}{\neg 0 \vdash 0 \rightarrow \alpha}$$

Итого $[0]_{\approx}$ есть множество формул β , таких что $\vdash \neg \beta$.

$\forall \alpha \ \alpha \preceq 1$

Рассмотрим $\alpha = \beta \rightarrow \beta$. По построению 1 получается $\beta \rightarrow \beta \vdash 1$. Рассмотрим такое доказательство. Если в нём используется $\beta \rightarrow \beta$ с обоснованием $\in \Gamma$, вставим доказательство $\beta \rightarrow \beta$ и удалим такой шаг. Доказательство останется верным, но не будет использовать факт $\beta \rightarrow \beta \in \Gamma$, следовательно $\vdash 1$.

Итого $\forall \alpha \ \alpha \preceq 1 \Rightarrow \vdash 1$. Докажем “ \Leftarrow ”. Этот факт очевиден, т.к. доказательство $\vdash 1$ есть доказательство $\alpha \vdash 1$.