

# 1 Скалярное произведение

**Определение.** Для  $X$  — линейного пространства (над  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ )  $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  называется скалярным произведением. Обозначается  $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$

1.  $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$
2.  $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
3.  $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**Определение.**  $\bar{x}$  — комплексное сопряжение, для вещественных чисел  $\bar{x} = x$ .

1. Над  $\mathbb{C}$ :  $\langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \rangle = \overline{\langle \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2, x \rangle} = \overline{\beta_1 \langle y_1, x \rangle + \beta_2 \langle y_2, x \rangle} = \overline{\beta_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\beta_2} \langle x, y_2 \rangle$
2. Над  $\mathbb{R}$ :  $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$
3.  $\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = \langle 0 \cdot a, x \rangle = 0 \langle a, x \rangle = 0$

**Лемма 1.** Неравенство КБШ (Коши-Буняковского-Шварца)

Для  $X$  — линейного пространства (над  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ )

$$\forall x, y \in X \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

*Доказательство.* Возьмём  $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Заметим, что  $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \bar{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$ .

При  $y = 0$  тривиально, пусть  $y \neq 0$

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle \lambda y, x \rangle + \langle x, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, \lambda y \rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle$$

$$\lambda := -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}, \bar{\lambda} = \overline{\left(-\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}\right)} = -\frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle$$

$$\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle \leq \langle x, x \rangle$$

$$\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

На википедии есть доказательство проще. □

Пример в  $\mathbb{R}^m$ :  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m$  — Евклидово скалярное произведение

Пример в  $\mathbb{C}^m$ :  $\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_m \bar{y}_m$

Лемма 2. Для лин. пространства  $X$ , скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$\rho : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \rho(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  — норма

Доказательство. Докажем, что  $\rho$  удовлетворяет всем леммам нормы.

1.  $\rho(x) \geq 0 \quad \rho(x) = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\rho(\alpha x) = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \rho(x)$
3.  $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$$\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \stackrel{?}{\leq} \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

Пояснение следующего перехода: пусть  $\langle x, y \rangle = a$ . Тогда  $a = \Re a + \Im a$ ,  $\bar{a} = \Re a - \Im a$  (разложение на вещественную и мнимую части).  $\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} = \Re \langle x, y \rangle + \Im \langle x, y \rangle + \Re \langle x, y \rangle - \Im \langle x, y \rangle = 2\Re \langle x, y \rangle$ .

$$2\Re \langle x, y \rangle \stackrel{?}{\leq} 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

$$\Re \langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

□

$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$  — норма в  $\mathbb{R}^m$

$\rho(x, y) = \|x - y\|$  — метрика в  $\mathbb{R}^m$

Не все нормы порождены скалярным произведением, например:  $\|x\| = \max_i |x_i|$

**Лемма 3.** О непрерывности скалярного произведения.  $X$  - лн. пространство со скалярным произведением,  $\|\cdot\|$  — норма, порожденная скалярным произведением.

Тогда  $\forall (x_n) : x_n \rightarrow x, \forall (y_n) : y_n \rightarrow y, \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| = \\ &= |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

По теореме о двух городских чтд. □

**Лемма 4.** О покоординатной сходимости в  $\mathbb{R}^m$

$(x^{(n)})$  — последовательность векторов в  $\mathbb{R}^m$

в  $\mathbb{R}^m$  задано евклидово скалярное произведение и норма.

Тогда  $(x^{(n)}) \rightarrow x \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad x_i^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_i$

*Примечание.* В  $\mathbb{R}^\infty$  не выполняется

*Доказательство.* Модуль координаты  $\leq$  нормы всего вектора:

$$|x_i^{(n)} - x_i| \leq \|x^{(n)} - x\| \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i^{(n)} - x_i|$$

Первое неравенство доказывает  $\Rightarrow$ , второе неравенство доказывает  $\Leftarrow$  □

**Определение.** Параллелепипед в  $\mathbb{R}^m$

$$a, b \in \mathbb{R}^m \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1 \dots m\} \quad a_i \leq x_i \leq b_i\} = [a_1 b_1] \times [a_2 b_2] \times \dots \times [a_m b_m]$$

**Определение.** Куб в  $\mathbb{R}^m$

$$[(a_1 - R, a_2 - R, \dots, a_m - R), (a_1 + R, a_2 + R, \dots, a_m + R)]$$

$$\overline{B(a, R)} \subset \text{Куб}(a, R) \subset \overline{B(a, \sqrt{m}R)}$$

*Доказательство.* Докажем 1:  $\overline{B(a, R)} \subset \text{Куб}(a, R)$

$$x \in \overline{B(a, R)}$$

$$\forall i \quad |x_i - a_i| \leq \|x - a\| \leq R \Rightarrow x \in \text{Куб}(a, R)$$

Докажем 2:  $\text{Куб}(a, R) \subset \overline{B(a, \sqrt{m}R)}$

$$x \in \text{Куб}(a, R) \quad \|x - a\| \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - a_i| \leq \sqrt{m}R$$

□

## 2 Точки и множества в метрическом пространстве

В этом параграфе  $(X, \rho)$  - метрическое пространство,  $a \in X, D \subset X$ .

**Определение.**  $a$  — внутренняя точка множества  $D$ , если  $\exists U(a) : U(a) \subset D$

$\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

**Определение.**  $D$  - открытое множество  $\forall a \in D : a$  — внутренняя точка  $D$ .

Пример:

1.  $X$  - откр.
2.  $\emptyset$ - откр.
3.  $B(a, r)$  - откр.

*Доказательство.* Докажем 3.

$x \in B(a, r)$ , доказать:  $x$  - внутр. точка

Возьмём  $R < r - \rho(a, x)$ . Докажем, что  $B(x, R) \subset B(a, r)$

$y \in B(x, R)$ . Докажем, что  $y \in B(a, r)$

$\rho(y, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) < R + \rho(x, a) < r$

□

**Теорема 1.** О свойствах открытых множеств.

1.  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$  - семейство открытых множеств в  $(X, \rho)$

Тогда  $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  - открыто в  $X$ .

2.  $G_1, G_2, \dots, G_n$  - открыто в  $X$ .

Тогда  $\bigcap_{i=1}^n G_i$  - открыто в  $X$ .

*Доказательство.* 1. Пусть  $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

Тогда  $\exists \alpha_0 \quad x \in G_{\alpha_0}$  — откр.  $\exists r_0 : B(x, r_0) \subset G_{\alpha_0} \Rightarrow B(x, r_0) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

$$2. x \in \prod_{i=1}^n G_i \Rightarrow \forall i \in \{1 \dots n\} \quad x \in G_i \Rightarrow \exists r_i > 0 : B(x, r_i) \subset G_i$$

$$r := \min(r_1 \dots r_n)$$

$$\forall i \quad B(x, r) \subset G_i, \text{ т.е. } B(x, r) \subset \bigcap G_i$$

□

*Примечание.* Для  $n = \infty$  не выполняется:  $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  - откp. в  $\mathbb{R}$

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\} \text{ не откp. в } \mathbb{R}$$

**Определение. Внутренность**  $D$   $Int(D) = \{x \in D : x - \text{внутр. точка } D\}$

*Примечание.* 1.  $Int D$  - откp. множество

$$2. Int D = \bigcup_{\substack{D \supset G \\ G - \text{откp}}} - \text{максимальное открытое множество, содержащееся в } D$$

$$3. D - \text{откp. в } X \Leftrightarrow D = Int D$$

**Определение.**  $a$  — предельная точка множества  $D$ , если

$$\forall \dot{U}(a) \quad \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$$

Пример:  $D = (0, 1), X = \mathbb{R}$

$a$	Пред. точка?
-1	Нет, $B(-1, \frac{1}{2}) \cap D = \emptyset$
$\frac{1}{2}$	Да, $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset D$
0	Да, $B(0, \frac{1}{2}) \cap D = (0, \frac{1}{2})$

*Примечание.*  $a$  - пред. точка  $D$

$$1. \forall U(a) \quad U(a) \cap D - \text{бесконечное}$$

$$2. \exists (x_n) - \text{последовательность точек } D, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$$

**Определение.**  $a$  — изолированная точка  $D$ , если  $a \in D$  и  $a$  — не предельная, то есть:

$$\exists U(a) \quad U(a) \cap D = \{a\}$$

Пример —  $\mathbb{N}$

**Определение.**  $D$  — замкнутое множество, если оно содержит все свои предельные точки.

Пример:  $X, \emptyset, [0, 1], \overline{B(a, R)}, \{a\}$  — замкнутые

Пример:  $(0, 1)$  — в  $\mathbb{R}$  незамкнутое

**Теорема 2.**  $D$  — замкнуто  $\Leftrightarrow D^c = X \setminus D$  (дополнение) — открыто.

*Доказательство.* Докажем  $\Rightarrow$ :  $D$  — замкн.  $\Rightarrow$   $X \setminus D$

$x \in X \setminus D \Rightarrow x$  — не пред. точка  $D$ , т.к.  $D$  содержит все свои пред. точки и  $x \notin D$

$\Rightarrow \exists r : B(x, r) \subset X \setminus D$

Докажем  $\Leftarrow$ :  $X \setminus D$  — откр.,  $D$  — замкн.?, т.е.  $\forall x \in \{\text{пр. точки } D\} \Rightarrow x \in D$

Если  $x \in D$  — тривиально.

$x \notin D \Rightarrow x \in X \setminus D$

$\exists U(x) \subset X \setminus D \Rightarrow x$  — не пред. точка

□

*Примечание.* Если  $D$  — не замкнуто, то это НЕ значит, что  $D$  — открыто, например  $(0, 1]$  — не замкнуто и не открыто.

**Теорема 3.** О свойствах замкнутых множеств.

1.  $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$  — семейство открытых множеств в  $(X, \rho)$

Тогда  $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  — открыто в  $X$ .

2.  $G_1, G_2, \dots, G_n$  — открыто в  $X$ .

Тогда  $\bigcap_{i=1}^n G_i$  — открыто в  $X$ .

*Доказательство.* 1.  $x_0 \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$

$\exists \alpha_0 : x_0 \in G_{\alpha_0}$

$G_{\alpha_0}$  — открыто  $\Rightarrow \exists U(x_0) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$  — внутренняя точка  $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow$

$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$  — открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

2.  $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$

$\forall \alpha \in A : x_0 \in G_\alpha$

$\forall \alpha \in A \ G_\alpha$  — открыто  $\Rightarrow \exists B_\alpha(x_0, r_\alpha) \subset G_\alpha$

$\forall x_0 : \exists U(x_0) = B(x_0, \min_{\alpha} r_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow x_0$  — внутренняя точка  $\bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha$

— открыто, т.к. в нём все точки внутренние.

□