# Нильпотентный оператор. Базис Жордана

$\triangleleft \tau : L \to L$ — нильпотентный оператор

$]\{e_j\}_{j=1}^n$ — базис $L \Rightarrow \tau \leftrightarrow A_\tau$

$$\tau(e_i) = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j, ||a_i^j|| = A_\tau$$

$$\tau(\tau(e_i)) = \sum_{j=1}^n a_i^j \sum_{k=1}^n a_j^k e_k = \sum_{j,k=1}^n a_i^j a_j^k e_k$$

$$0 = \tau(\dots\tau(\tau(e_i))) = \sum_{j,k,l\dots=1}^n a_i^j a_j^k \cdots a_k^l e_l$$

Если хотя бы один диагональный элемент $a_i^i \neq 0$, то для $j = k = \ldots = i$ получается ненулевой коэффициент при $e_i \Rightarrow$ результат суммы не $0$, что противоречит нильпотентности $\Rightarrow a_i^i = 0$

Канонический вид матрицы нильпотентного оператора: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

**Определение**. Линейный оператор, который в некотором базисе имеет своей матрицей (жорданову) клетку вида $A_\tau$ называется **одноклеточным** нильпотентным оператором.

**Лемма 1**. $p_\tau(\lambda) = \lambda^m$ — минимальный многочлен для $\tau^m$

$$]\{e_j\}_{j=1}^4 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, A_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_\tau(e_4) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = e_3, A_\tau(e_3) = e_2, A_\tau(e_2) = e_1, A_\tau(e_1) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$e_1$ — единственный собственный вектор для $\tau$, собственное значение $= 0$

$\sigma_\tau = \{0^{(m)}\}$

$\triangleleft L_j = \mathcal{L}\{e_1 \dots e_j\}$ — инвариантное подпространство $\forall j$, но не ультраинвариантное, т.к. $\mathcal{L}\{e_{j+1} \dots e_n\}$ — не инвариантное подпространство.

$e_2$ — присоединенный вектор первого порядка, т.к. $\tau e_2 = e_1$

$e_3$ — присоединенный вектор второго порядка

$]\tau$ — не одноклеточный, тогда

$$\tau = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} \tau_i = \sum_{i=1}^{k} \tau_i \mathcal{P}_i$$

**Лемма 2.** $\tau$ — нильпотентный оператор порядка $m = \max\limits_{i=1\dots k} m_i$

*Доказательство.* $\tau \leftrightarrow A_\tau = diag\{A_\tau^1, A_\tau^2 \dots A_\tau^k\}$, где $A_\tau^j$ одноклеточная.

$$A^l = diam\{(A_\tau^1)^l, (A_\tau^2)^l \dots (A_\tau^k)^l\} = 0 \Leftrightarrow \forall j \ \ (A_\tau^j)^l = 0 \Leftrightarrow l = \max_{i=1\dots k} m_i$$

□

$]\tau : X \to X$ — нильпотентный оператор порядка $m$, тогда в $x$ $\exists$ базис, в котором:

$$\tau = \dot{+}\sum_{i=1}^{k} \tau_i$$

где $\tau_i$ — одноклеточный оператор.

*Доказательство.* $]\{L_j\}_{j=1}^k$ — ультраинвариантные для $\tau$, $k$ — число собственных векторов оператора $\tau$.

$L_j \to \tau_j \to T_j$ — одноклеточный оператор. □

Таким образом, в базисе Жордана $\varphi_j = \lambda_j \mathcal{I} + \tau_j$

$]\varphi : X \to X, X = \dot{+}\sum_{j=1}^k L_j$

$]\beta(X)$ — базис $X \Rightarrow \beta(X) = \{\beta(L_j)\}_{j=1}^k$

$\beta(L_j)$ — базис Жордана в $L_j$ (чтобы $\varphi_j$ выглядел как выше)

$\beta(X)$ — базис Жордана в пространстве $X$

**Определение**. Матрица оператора $\varphi$ в базисе $\beta(x)$ называется **жордановой нормальной формой** матрицы линейного оператора $\varphi$.

$\varphi = diag\{\varphi_1 \dots \varphi_k\} \quad \varphi_j = diag\{\lambda_j \mathcal{I}_1 + \tau_1, \lambda_j \mathcal{I}_2 + \tau_2 \dots\}$

**Теорема 1.** Гамильтона-Коши.

$$\chi_\varphi(\lambda) \in J_\varphi$$

*Доказательство.* Тривиально. □

$$p_\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j)^{m_j} \quad \chi_\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^{k}(\lambda - \lambda_j)^{n_j}$$

**Определение.**

- $n_j$ — **полная кратность** собственных значений $\lambda_j$
- $n_j$ — **алгебраическая кратность** собственных значений $\lambda_j$

$$n_j = \dim L_j \quad m_j = \dim \mathrm{Ker}\,(\lambda - \lambda_j) \quad r_j = \text{чило жордановых блоков}$$

**Лемма 3.**

$$1 \leq m_j \leq n_j, 1 \leq r_j \leq n_j$$

Частные случаи:

1. $n_i = 1 \Rightarrow r_i = m_i = 1 \Rightarrow$ оператор с простым спектром
2. $r_i = n_i \Leftrightarrow m_i = 1 \Rightarrow$ оператор скалярного типа
3. $r_i = 1 \Leftrightarrow m_i = n_i \Rightarrow$ один жорданов блок

# Функции от оператора

$$\varphi : X \to X, f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

$\lhd f(\varphi)$–?

$$\varphi = \dot{+}\sum_{j=1}^{k}\varphi_j \Rightarrow A_\varphi = diag\{A_\varphi^{(1)}, A_\varphi^{(2)} \dots A_\varphi^{(k)}\}$$

$$f(\varphi) = diag\{f(A_\varphi^{(1)}), f(A_\varphi^{(2)}) \dots f(A_\varphi^{(k)})\}$$

$$f(\varphi_j)\text{–?} \quad \varphi_j = \lambda_j\mathcal{I} + \tau_j, \tau_j^{m_j} = 0$$

$$\lhd(\lambda_j\mathcal{I} + \tau_j)^m = \sum_{r=1}^{m} c_m^r \tau_j^r \lambda_j^{m-r}$$

Если $r \geq m_j$, то слагаемое $= 0$, т.к. $\tau_j^{m_j} = 0$

$$diag_0(\lambda_j\mathcal{I} + \tau_j)^m = \{c_m^0\lambda_j^m, c_m^0\lambda_j^m \dots c_m^0\lambda_j^m\}$$

$$diag_{+1}(\lambda_j\mathcal{I} + \tau_j)^m = \{c_m^1\lambda_j^{m-1}, c_m^1\lambda_j^{m-1} \dots c_m^1\lambda_j^{m-1}\}$$

$$\vdots$$

$$diag_{+m_{j-1}}(\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j) = \{c_m^{m-1}\lambda_j, c_m^{m-1}\lambda_j \dots c_m^{m-1}\lambda_j\}$$

*Примечание.*

$$diag f(\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j) = \{f(\lambda_j), f(\lambda_j) \dots f(\lambda_j)\}$$

$$diag_{+1} f(\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j) = \{f'(\lambda_j), f'(\lambda_j) \dots f'(\lambda_j)\}$$

$$diag_{+2} f(\lambda_j \mathcal{I} + \tau_j) = \{\frac{1}{2!}f''(\lambda_j), \frac{1}{2!}f''(\lambda_j) \dots \frac{1}{2!}f''(\lambda_j)\}$$

*Примечание.*

$$\tilde{A}_\varphi = SA_\varphi T \quad (\tilde{A}_\varphi)^p = SA_\varphi^p T$$

*Пример.* $f(x) = \sin x \quad A_\varphi = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$$f(A_\varphi) = \begin{bmatrix} \sin\lambda & \cos\lambda & -\frac{1}{2}\sin\lambda & -\frac{1}{6}\cos\lambda \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda & -\frac{1}{2}\sin\lambda \\ 0 & 0 & \sin\lambda & \cos\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \sin\lambda \end{bmatrix}$$