

Рассмотрим случай, когда ξ принимает значения $1, 2 \dots$

$$\sum_a aP(\xi = a) = \sum_{i=1}^{\infty} iP(\xi = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i P(\xi = i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} P(\xi = i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\xi \geq j)$$

Кидаем честную монету, пока не выпадет 1, ξ — число бросков.

$$P(\xi \geq i) = \frac{1}{2^{i-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = 2$$

$$\text{Corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

$$\triangleleft \eta = c\xi$$

$$\text{Corr}(c\xi, \xi) = \frac{Ec\xi\xi - cE\xi E\xi}{\sqrt{c^2 D\xi D\xi}} = \begin{cases} 1, & c > 0 \\ -1, & c < 0 \end{cases}$$

1 Хвостовые неравенства

Определение. Хвост распределения — левая или правая маловероятная часть распределения

1.1 Неравенство Маркова

$$\triangleleft \xi \geq 0$$

Если возможных значений бесконечно, то их вероятности должны стремиться к 0, т.к. сумма всех вероятностей 1.

$\triangleleft kE\xi$. Отрежем “хвост” справа от ka .

$$P(\xi \geq ka) \leq \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_a a \cdot P(\xi = a) = \sum_{a < kE\xi} a \cdot P(\xi = a) + \sum_{a \geq kE\xi} a \cdot P(\xi = a) \geq \sum_{a \geq kE\xi} kE\xi \cdot P(\xi = a) = kE\xi P(\xi \geq kE\xi) \\ 1 &\geq kP(\xi \geq kE\xi) \end{aligned}$$

1.2 Неравенство Чебышева

$$\Delta \xi, \eta = (\xi - E\xi)^2$$

$$E\eta = D\xi$$

$$P(\eta \geq kE\eta) \leq \frac{1}{k}$$

$$k' = \frac{k}{\sqrt{D\xi}}$$

$$P((\xi - E\xi)^2 \geq k^2 D\xi) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P(|\xi - E\xi| \geq k\sqrt{D\xi}) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\sqrt{D\xi} =: \sigma$$

Лучше хвостовые неравенства не придумать, т.к. есть случайные величины, при которых эти неравенства обращаются в равенства. Но можно накладывать дополнительные ограничения на величины и получать более “быстрые” неравенства.

Допустим, у нас есть нечестная монета и надо найти p . Кинем монету n раз и оценим нашу уверенность в ответе.

$$C_n^i p^i q^{n-i} \quad E = pn \quad D = pqn$$

$$P(|\xi - E\xi| \geq k\sqrt{D\xi}) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$k\sqrt{pqn} = \left(p - \frac{1}{2}\right)n$$

$$k = \frac{p - \frac{1}{2}}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}$$

Рассмотрим следующую случайную величину: $\xi = \sum \xi_i$ ξ_i — незав., од. распр. $\eta := e^{t\xi}$, t — параметр

$$P(\eta \geq k) \leq \frac{E\eta}{k} \quad k = e^{ta}$$

$$P(\eta \geq e^{ta}) \leq \frac{E\eta}{e^{ta}}$$

$$P(e^{t\xi} \geq e^{ta}) \leq \frac{E\eta}{e^{ta}}$$

$$]t > 0$$

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{Ee^{t\xi}}{e^{ta}} = \frac{E \prod_i e^{t\xi_i}}{e^{ta}} \stackrel{\text{независ.}}{=} \frac{\prod_i Ee^{t\xi_i}}{e^{ta}} = \frac{(Ee^{t\xi_i})^n}{e^{ta}}$$

$$P(\xi \geq a) \leq \min_{t>0} \frac{(Ee^{t\xi_i})^n}{e^{ta}}$$

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q = 1 - p \end{cases}$$

$$\xi_i = 1 \Rightarrow e^{t\xi_i} = e^t \quad \xi_i = 0 \Rightarrow e^{t\xi_i} = 1$$

$$E(e^{t\xi_i}) = e^t p + q = e^t p + 1 - p = p(e^t - 1) + 1$$

$$P(\xi \geq a) \leq \min_{t>0} \frac{(p(e^t - 1) + 1)^n}{e^{ta}}$$

$$a := (1 + \delta)pn$$

$$P(\xi \geq (1 + \delta)pn) \leq \frac{(p(e^t - 1) + 1)^n}{e^{(1+\delta)pnt}} \leq$$

$$1 + x \leq e^x$$

$$\leq \frac{e^{p(e^t-1)n}}{e^{(1+\delta)pnt}} \leq e^{pn(e^t-1-(1+\delta)t)} =$$

$$t := \ln(1 + \delta)$$

$$= e^{pn(1+\delta-1-(1+\delta)\ln(1+\delta))} \leq$$

$$\ln(1 + x) \leq x$$

$$\leq e^{pn(\delta-(1+\delta)\delta)} \leq e^{-pn\frac{\delta^2}{2}}$$