

Пример.  $\langle a, b \rangle \quad f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad x^n$  — непрерывно

Любой многочлен непрерывен, выражение вида

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$$

тоже непрерывно на области определения.

**Теорема 1.** О непрерывности композиции  $f : D \subset X \rightarrow Y \quad g : E \subset Y \rightarrow Z \quad f(D) \subset E$

$f$  — непр. в  $x_0 \in D$ ,  $g$  — непр. в  $f(x_0)$

Тогда  $g \circ f$  непр. в  $x_0$

*Доказательство.* По Гейне.

Проверяем, что  $\forall (x_n) : x_n \in D, x_n \rightarrow x_0 \quad g(f(x_n)) \xrightarrow{?} g(f(x_0))$

$$y_n := f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0)$$

$$y_n \in E$$

$$\Rightarrow g(y_n) \rightarrow g(y_0)$$

□

*Примечание.*  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$$g(x) = |\operatorname{sign}(x)|$$

$$x \rightarrow 0 \quad f(x) \rightarrow 0$$

$$y \rightarrow 0 \quad g(y) \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow 0 \quad g(f(x)) \rightarrow 1? \text{ — неверно}$$

$$\text{Но: } x_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0 \quad f(x_n) = 0 \quad g(f(x_n)) \rightarrow 0$$

**Теорема 2.** О пределе композиции

$$f : D \subset X \rightarrow Y \quad g : E \subset Y \rightarrow Z \quad f(D) \subset E$$

$$a \text{ — предельн. точка } D \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$$

$$A \text{ — предельн. точка } E \quad g(y) \xrightarrow{y \rightarrow A} B$$

$$\exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \cap D \quad f(x) \neq A \quad (*)$$

$$\text{Тогда } g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} B$$

*Доказательство.* По Гейне.

Проверяем, что  $\forall (x_n) : \begin{smallmatrix} x_n \in D \\ x_n \rightarrow a \\ x_n \neq a \end{smallmatrix} \quad g(f(x_n)) \xrightarrow{?} B$

$$y_n := f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$$

$$y_n \in E$$

При больших  $N \quad y_n \in V(a) \Rightarrow y_n \neq A$

$$\Rightarrow g(y_n) \rightarrow B$$

□

*Примечание.* Вместо (\*) можно рассмотреть условие  $A \in E \quad g - \text{непр. в } A$ .

**Теорема 3.** Топологическое определение непрерывности

$f : X \rightarrow Y$  — непр. на  $X \Leftrightarrow \forall G \subset Y$ , откp.  $f^{-1}(G)$  — откp. в  $X$ .

*Доказательство.* “ $\Rightarrow$ ”  $x_0 \in f^{-1}(G) \quad ? \exists V(x_0) \subset f^{-1}(G)$

$f$  — непр. в  $x_0 \quad \forall U(f(x_0)) \quad W(x_0) \quad \forall x \in W \quad f(x) \in U$

$f(x_0) \in G$  — откp.  $\Rightarrow \exists U_1(f(x_0)) \subset G$

Для  $U_1 \quad \exists W(x_0) : x \in W \quad f(x) \in U_1 \subset G$

$$W(x_0) \subset f^{-1}(G)$$

“ $\Leftarrow$ ”  $x_0 \in X \quad ? \text{ непр. } f \text{ в } x_0$

$\forall U(f(x_0)) \quad \exists W(x_0) \quad \forall x \in W \quad \forall f(x) \in U$  — надо проверить

$U(f(x_0))$  — откp.  $\Rightarrow f^{-1}(U(f(x_0)))$  — откp., а  $x_0 \in f^{-1}(U(f(x_0)))$ , значит  $\exists W(x_0) \subset f^{-1}(U(f(x_0)))$

Для любого  $x \in W(x_0)$  будет выполняться  $f(x) \in U(f(x_0))$

□

*Примечание.*  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x$$

$$f^{-1}((1, +\infty)) = (1, 2] - \text{открыто в } [0, 2]$$

**Теорема 4.** Вейерштрасса о непрерывном образе компакта.  $f : X \rightarrow Y$  — непр. на  $X$

Если  $X$  — комп., то  $f(X)$  — комп.

**Лемма 1.**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A$  — ограничено и замкнуто  $\Rightarrow \sup A \in A$

*Доказательство.* По техническому описанию  $\sup A$  если  $\sup A \notin A \Rightarrow \sup A$  — предельная точка  $A$ .

Для  $\varepsilon = \frac{1}{n} \quad \exists x_n \in A : \sup A - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup A$ , т.е.  $x_n \rightarrow \sup A$

□

*Доказательство.*  $f(X) — \text{комп.}$

$f(X) \subset \bigcup G_\alpha \quad G_\alpha — \text{откр. в } Y.$

$X \subset \bigcup f^{-1}(G_\alpha) — \text{откр. т.к. } f — \text{непр.} \xRightarrow{X — \text{комп.}}$

$$\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad X \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i}) \Rightarrow f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

□

*Следствие 4.1.* Непрерывный образ компакта замкнут и ограничен.

*Следствие 4.2.* (1-я теорема Вейерштрасса)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} — \text{непр.}$

Тогда  $f — \text{огр.}$

*Следствие 4.3.*  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$X — \text{комп.}, f — \text{непр. на } X$

Тогда  $\exists \max_X f, \min_X f$

$\exists x_0, x_1 : \forall x \in X \quad f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$

*Следствие 4.4.*  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} — \text{непр.}$

$\exists \max f, \min f$

## 1 O-символика

**Определение.**  $f, g : D \subset X \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 — \text{пр. точка } D$

Если  $\exists V(x_0) \quad \exists \varphi : V(x_0) \cap D \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = g(x)\varphi(x) \text{ при } x \in V(x_0) \cap D$

1.  $\varphi — \text{ограничена. Тогда говорят } f = O(g) \text{ при } x \rightarrow x_0$

“ $f$  ограничена по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow x_0$ ”

2.  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \quad f — \text{беск. малая по отношению к } g \text{ при } x \rightarrow x_0, f = o(g)$

3.  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \quad f \text{ и } g \text{ экв. при } x \rightarrow x_0 \quad f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g$

$g, f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$

**Определение.**  $\exists c > 0 \quad \forall x \in D \quad f = O(g) \quad |f(x)| < c|g(x)| — f \text{ ограничена по сравнению с } g \text{ на множестве } D.$

**Определение.** В условиях прошлых определений  $f = O(g), g = O(f) \Leftrightarrow f \asymp g$  — асимптотически сравнимы на множестве  $D$ , “величины одного порядка”.

*Примечание.* Первое определение  $\Leftrightarrow f = O(g)$  на  $V(x_0) \cap D$  в смысле второго определения  $\Leftrightarrow \frac{f}{g}$  — огр. на  $V(x_0) \cap D$  (если  $g \neq 0$ )

Второе определение  $\xLeftrightarrow[g \neq 0] \frac{f}{g} \rightarrow 0$

Третье определение  $\frac{f}{g} \rightarrow 1$  (если  $g \neq 0$ )

**Следствие 4.5.** 1.  $f \sim g, x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f = g + o(g), x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f = g + o(f), x \rightarrow x_0$

*Доказательство.*

$$\frac{f}{g} \rightarrow 1, x \rightarrow x_0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$$

$$\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$f(x) = g(x) + \alpha(x)g(x) = g(x) + o(x)$$

□

Аналогично для  $\frac{g}{f} = 1$ .

2.  $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$

*Доказательство.*  $f(x) = \alpha(x)g(x)$   $\alpha(x) = 0 \Rightarrow \alpha(x)$  — огр. □

3.  $\alpha \neq 0$   $f \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \alpha g$ . Тогда  $f \asymp g, x \rightarrow x_0$

*Доказательство.*

$$\varepsilon := \frac{\alpha}{2} \quad \exists V(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D \quad \frac{\alpha}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}\alpha$$

□

**Пример.** 1.

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \sin x = x + o(x), x \rightarrow 0$$

2.

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{2}\right), x \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2 o\left(\frac{1}{2}\right)$$

3.

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad e^x = 1 + x + o(x)$$

4.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \ln(1+x) = x + o(x)$$

5.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha o(x), x \rightarrow 0$$

*Пример.* Таблица эквивалентных для  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x \\ \operatorname{sh} x &\sim x \\ \operatorname{tg} x &\sim x \\ \operatorname{arctg} x &\sim x \\ 1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2} \\ \operatorname{ch} x - 1 &\sim \frac{x^2}{2} \\ e^x - 1 &\sim x \\ \ln(1+x) &\sim x \\ (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x \\ a^x - 1 &\sim x \ln a \end{aligned}$$

**Теорема 5.**  $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0$  — предельная точка  $D$

$f \sim \tilde{f}, g \sim \tilde{g}$  при  $x \rightarrow x_0$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

, т.е. если  $\exists$  один из пределов, то  $\exists$  и второй и имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

, если  $x_0$  лежит в области определения  $\frac{f}{g}$

*Доказательство.*

$$f(x)g(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\frac{f}{\tilde{f}}\frac{g}{\tilde{g}} \rightarrow \tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \cdot 1 \cdot 1$$

□

*Примечание.* В условиях теоремы  $\lim_{x \rightarrow x_0} f + g \neq \lim_{x \rightarrow x_0} (\tilde{f} + \tilde{g})$

## 1.1 Асимптотическое разложение

**Определение.**  $g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$   $x_0$  — пред. точка  $D$

$$\forall n \quad g_{n+1}(x) = o(g_n), x \rightarrow x_0$$

*Пример.*  $g_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots$   $x \rightarrow 0$   $g_{n+1} = xg_n, x \rightarrow 0$

$(g_n)$  называется **шкала асимптотического разложения**.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Если  $f(x) = c_0g_0(x) + c_1g_1(x) + \dots + c_ng_n(x) + o(g_n)$ , то это асимптотическое разложение  $f$  по шкале  $(g_n)$

**Теорема 6.** О единственности асимптотического разложения

$$f, g_n : D \subset X \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \text{ — предельная точка } D$$

$$\forall n \quad g_{n+1} = o(g_n), x \rightarrow x_0$$

$$\exists U(x_0) \quad \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap D \quad \forall i \quad g_i(x) \neq 0$$

$$\text{Если } f(x) = c_0g_0(x) + \dots + c_ng_n(x) + o(g_n(x))$$

$$f(x) = d_0g_0(x) + \dots + d_mg_m(x) + o(g_m(x))$$

$$]n \leq m$$

$$\text{Тогда } \forall i \quad c_i = d_i$$

*Доказательство.*  $k := \min\{i : c_i \neq d_i\}$

$$f(x) = c_0g_0 + \dots + c_{k-1}g_{k-1} + c_kg_k + o(g_k)$$

$$f(x) = c_0g_0 + \dots + c_{k-1}g_{k-1} + d_kg_k + o(g_k)$$

$$0 = (c_k - d_k)g_k + o(g_k)$$

$$d_k - c_k = \frac{o(g_k)}{g_k(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

□

*Пример.* Пусть  $f(x) = Ax + B + o(1), x \rightarrow +\infty$

Прямая  $y = Ax + B$  — наклонная асимптота к графику  $f$  при  $x \rightarrow +\infty$