Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0$$

$f'(0) = ?$

Следствие из теоремы Лагранжа:

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = A \text{ тогда } f'(x_0) = A$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim 2 \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{3x^2} = \lim \frac{4}{3} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5} = \text{ больно, не надо так}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{-\frac{6}{x^4}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim \frac{\frac{3}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{-\frac{3}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim \frac{3}{2} \frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Заметим, что многочлен Тейлора этой функции при $x \to 0$ не становится точнее при увеличении числа слагаемых, т.к. они все $= 0$. Таким образом, эта функция по определению неаналитическая.

Будем складывать дроби неправильно:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Это работает в неравенствах, если $a, b, c, d > 0$

Это неверно, т.к. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \neq \frac{3}{5}$, но верно следующее:

Лемма 1. “Неправильное” сложение дробей:

$a, b, c, d > 0$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Доказательство.

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ba - ba + bc - ad}{b(b+d)} = \frac{d}{b+d}\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) > 0$$

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc - ad}{d(b+d)} = \frac{b}{b+d}\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right) > 0$$

□

Теорема 1. Теорема Штольца.

Это дискретная версия правила Лопиталя.

$y_n \to 0, x_n \to 0$ — строго монот.

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда $\exists \lim \dfrac{x_n}{y_n} = a$

Примечание. Аналогичное верно, если $x_n \to +\infty, y_n \to +\infty$

Доказательство. 1. $a > 0 \quad (a \neq +\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ [\varepsilon < a] \ \ \exists N_1 \ \ \forall n > N_1 \ \ a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

Берем $N > N_1$

$$a - \varepsilon < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < a + \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \varepsilon$$

По неправильному сложению:*(оно применимо, т.к. все дроби положительные)*

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \varepsilon$$

$n \to +\infty$

$$a - \varepsilon < \frac{x_N}{y_N} < a + \varepsilon$$

2. $a = +\infty$ доказывается так же

3. $a < 0$ поменяем знак и докажем так же

4. $a = 0$ т.к. знаки $x_n - x_{n-1}$ и $y_n - y_{n-1}$ фикс., $a = +0$ или $a = -0$

   Для $a = +0$ $\quad \lim \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = +\infty$

$\square$

$x_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n \underset{n\to+\infty}{\overset{?}{\sim}} y_n$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{y_n - y_{n-1}} = \left[y_n := \frac{n^2}{2}\right] = \lim \frac{n}{n - \frac{1}{2}} = 1$$

$$x_n \sim \frac{n^2}{2}$$

$$x_n = 1^\alpha + 2\alpha + 3\alpha + \ldots + n\alpha - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sim z_n$$

$$\lim \frac{x_n}{z_n} = \lim \frac{n^\alpha - \left(\dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \dfrac{(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)}{z_n - z_{n-1}}$$

$$n^\alpha - \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}\right) =$$

$$= n^\alpha - \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1} \left((\alpha+1)\frac{1}{n} - \frac{(\alpha+1)\alpha}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1}) =$$

$$= \frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1})$$

$$\lim \frac{x_n}{z_n} = \lim \frac{\frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1}}{z_n - z_{n-1}}$$

Функциональные свойства определенного интеграла:

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad f, g \in C[a, b]$

$$\int_a^b \alpha f + \beta g dx = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

   Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница $f \leftrightarrow F \quad g \leftrightarrow G \quad \alpha f + \beta g \leftrightarrow \alpha F + \beta G$ $\square$

2. Замена переменных: $f \in C[a,b]$ $\varphi : \langle \alpha, \beta \rangle \to [a,b], \varphi \in C^1$

   $[p,q] \subset \langle \alpha, \beta \rangle$

   Тогда

$$\int\limits_p^q f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)dx$$

   Доказательство. $f \leftrightarrow F \quad f(\varphi(t))\varphi'(t) \leftrightarrow F(\varphi(t))$ □

   Примечание. (a) $\varphi([p,q])$ может быть шире, чем "$[\varphi(p), \varphi(q)]$"

   (b) $\varphi(p)$ может быть $> \varphi(q)$

3. Интегрирование по частям

   $f|_a^b \overset{\text{def}}{=} f(b) - f(a)$

   $f, g \in C^1[a,b]$

$$\int\limits_a^b fg' = fg|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

   Доказательство.

$$(fg)' = f'g + fg'$$
$$fg' = (fg)' - f'g$$

   Проинтегрируем по $[a,b]$

$$\int\limits_a^b fg' = fg|_a^b - \int\limits_a^b f'g$$

□

Пример. Неравенство Чебышева

$f, g \in C[a,b]$ монот. возр.

$$I_f := \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

Тогда

$$I_f \cdot I_g \le I_{fg}$$

$$\int\limits_a^b f \int\limits_a^b g \le (b-a)\int\limits_a^b fg$$

Доказательство. $x, y \in [a,b] : x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y), g(x) \geq g(y)$

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

$$f(x)g(x) - f(y)g(x) - f(x)g(y) + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по x по $[a,b]$ и делим на $b-a$:

$$I_{fg} - f(y)I_g - g(y)I_f + f(y)g(y) \geq 0$$

Интегрируем по y по $[a,b]$ и делим на $b-a$:

$$I_{fg} - I_f I_g - I_g I_f + I_{fg} \geq 0$$

$\square$

Пример.

$$H_n := \frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \cos t dt = \begin{bmatrix} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n & g = \sin t \\ df = -2n\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} t dt & dg = \cos t dt \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^n \sin t \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} t \sin t =$$

$$= \begin{bmatrix} f = \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} t & g = -\cos t \\ df = \left(-2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} t^2 + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1}\right) dt & dg = \sin t dt \end{bmatrix} =$$

$$= \Bigg[df = \Bigg(-2(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} t^2 + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} +$$

$$+2(n-1)\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2} - 2(n-1)\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}\Bigg) dt \Bigg] =$$

$$= \left[df = \left((2n-2)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} + \left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - (n-1)\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}\right) dt \right] =$$

$$= \left[df = \left((2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} - (n-1)\frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-2}\right) dt \right] =$$

$$= 0 + \frac{2}{(n-1)!}\left(\frac{\pi^2}{4} - t^2\right)^{n-1} t(-\cos t)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\frac{2}{(n-1)!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left((2n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-1}-\frac{\pi^2}{2}(n-1)\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^{n-2}\right)\cos tdt=$$

$$=(4n-2)H_{n-1}-\pi^2H_{n-2}$$

Теорема 2. Число π — иррационально

Доказательство. Пусть $\pi=\frac{p}{q}$; H_n задано выше

$$H_n=(4n-2)H_{n-1}-\pi^2H_{n-2}$$

$$H_0=2,\quad H_1=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi^2}{4}-t^2)\cos t=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}t\sin tdt=2t(-\cos t)\Big|_{\dots}^{\dots}+2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t=4$$

$$H_n=\dots H_1+\dots H_0=P_n(\pi^2)\text{ — многочлен с целыми коэффициентами, степень}\le n$$

$$q^{2n}P_n\left(\frac{p^2}{q^2}\right)=\text{ целое число }=q^{2n}H_n>0\Rightarrow q^{2n}H_n\ge1$$

$$1\le\frac{q^{2n}}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n\cos tdt\le\frac{q^{2n}4^n}{n!}\pi\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Противоречие. □

$f\leftrightarrow F$

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(t-x_0)^ndt=\frac{F^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o(x^4)$$

$$\arcsin t=t+\frac{1}{6}t^3+\frac{3}{40}t^5+o(t^5)$$

Определение. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, **кусочно непрерывна**

f — непр. на $[a,b]$ за исключением конечного числа точек, в которых разрывы I рода

Пример. $f(x)=[x], x\in[0,2020]$

Определение. $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — **почти первообразная** кусочно непрерывной функции f:

F — непр. и $\exists F'(x) = f(x)$ всюду, кроме конечного числа точек

Пример. $f = \operatorname{sign} x, x \in [-1, 1]$

$F := |x|$

f — кус. непр.

$x_0 = a < x_1 \ldots < x_n = b$

$$\int\limits_a^b f := \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f$$

Утверждение: Верна формула Ньютона-Лейбница f — кус. непр. на $[a, b]$, F — почти первообразная

Доказательство.

$$\int\limits_a^b f = \sum \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f = \sum F(t)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k} = \sum F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(b) - F(a)$$

□

Пример. Дискретное неравенство Чебышева

$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n, b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \frac{1}{n}\left(\sum b_i\right) \le \frac{1}{n}\sum a_i b_i$$

Доказательство.

$$f(x) = a_i, x \in (i-1, i], i = 1 \ldots n \text{ — задана на } (0, n]$$

$$g(x) = \ldots b_i$$

$$I_f I_g \le I_{fg}$$

□

1 Приложение определенного интеграла

$Segm\langle a,b\rangle = \{[p,q] : [p,q] \subset \langle a,b\rangle\}$ — множество всевозм. отрезков, лежащих в $\langle a,b\rangle$

Определение. **Функция промежутка** $\Phi : Segm\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

Определение. **Аддитивная функция промежутка**: Φ — функция промежутка и

$$\forall [p,q] \in Segm\langle a,b\rangle \ \ \forall r : p < r < q \quad \Phi([p,q]) = \Phi([p,r]) + \Phi([r,q])$$

Пример.

- Цена куска колбасы от p до q.
- Цена билета от станции p до станции q.

Эти две функции обычно не аддитивны.

- $[p,q] \to \int_p^q f$

Определение. **Плотность аддитивной функции промежутка**: $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — плотность Φ, если:

$$\forall \delta \in Segm\langle a,b\rangle \quad \inf_{x\in\delta} f(x)\cdot len_\delta \le \Phi(\delta) \le \sup f \cdot len_\delta$$

Теорема 3. О вычислении аддитивной функции промежутка по плотности

$f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ — непр. $\quad \Phi : Segm\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$

f — плотность Φ

Тогда $\Phi([p,q]) = \int\limits_p^q f, \quad \forall [p,q] \in Segm\langle a,b\rangle$

Доказательство.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & ,x = a \\ \Phi([a,x]) & ,x > a \end{cases} \text{ — первообразная } f$$

Это утверждение ещё не доказано, но если мы его докажем, то:

$$\Phi([p,q]) = \Phi[a,q] - \Phi[a,p] = F(q) - F(p) = \int\limits_p^q f$$

Докажем утверждение:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\Phi[a,x+h]-\Phi[a,x]}{h} = \frac{\Phi[x,x+h]}{h} = [0 \le \Theta \le 1] = f(x+\Theta h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$$

$\square$

Тут последовал пример про нахождение площади круга, но мне лень.