

Можно заметить, что \sup не определен для \emptyset и неограниченных множеств. Исправим это:

$$E = \emptyset \quad \sup E = -\infty \quad \sup E = +\infty$$

$$E - \text{не огр. сверху} \quad \sup E = +\infty$$

$$E - \text{не огр. снизу} \quad \inf E = -\infty$$

Лемма 1. О свойствах \sup, \inf

$$1. \emptyset \neq D \subset E \subset \mathbb{R} \quad \sup D \leq \sup E$$

$$2. \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda E = \{\lambda x, x \in E\})$$

$$\text{Пусть } \lambda > 0, \text{ тогда } \sup \lambda E = \lambda \sup E$$

$$3. \sup(-E) = -\inf E$$

Доказательство. 1. Множество верхних границ $E \subset$ множество верхних границ D .

$$2. \lambda \cdot \text{Множество верхних границ } E = \text{множество верхних границ } \lambda E$$

$$3. \text{Множество верхних границ } -E = - \text{множество нижних границ } E$$

□

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$E \subset X$$

$$\sup_E f = \sup_{x \in E} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{f(x), x \in E\}$$

$$\sup x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sup x_n, n \in \mathbb{N}$$

Аксиома 1. Аксиома, альтернативная аксиоме Кантора:

$$L, R \subset \mathbb{R}$$

$$\forall l \in L \quad \forall r \in R \quad l \leq r$$

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall l, r \quad l \leq x \leq r$$

Определение. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$D \subset X$ f — **огр.** на множестве D , если $f(D)$ — **огр.** в \mathbb{R}

- сверху $\forall M \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M$
- снизу
- огр.

Определение. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **возрастает**, если $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2)$

Если $f(x_1) < f(x_2)$, f **строго возрастает**.

Если f возрастает или убывает, то f — **монотонна**.

Если f строго возрастает или строго убывает, то f — **строго монотонна**.

Аналогичное можно утверждать для последовательностей.

Теорема 1. О пределе монотонной последовательности.

1. x_n — вещ. посл., огр. сверху, возрастает. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
2. x_n — убывает, огр. снизу. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$
3. x_n — монотонна, огр. $\Rightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

Секретное приложение:

1. $\lim x_n = \sup x_n$
2. $\lim x_n = \inf x_n$

Доказательство. Достаточно доказать 1.

Проверяем $\lim x_n = \sup x_n = M \in \mathbb{R}$

По определению \sup :

$$\forall \varepsilon \quad \exists N \quad M - \varepsilon < x_N$$

$$x_N \leq x_{N+1} \leq x_{N+2} \leq x_{N+3} \dots \leq M$$

$$\forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n > N \quad M - \varepsilon < x_n \leq M < M + \varepsilon$$

По определению $M = \lim x_n$

□

Примечание. x_n — возр., не огр. сверху. $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$

x_n — убыв., не огр. снизу. $\Rightarrow \lim x_n = -\infty$

Пример: $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

x_n — возр., y_n — убыв.

Докажем убывание y_n .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = (\frac{n}{n-1})^n (\frac{n}{n+1})^{n+1} = (\frac{n^2}{n^2-1})^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = (1 + \frac{1}{n^2-1})^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \geq \\ &\geq (1 + \frac{n+1}{n^2-1}) \cdot \frac{n-1}{n} = 1 \end{aligned}$$

□

$$y_n \text{ — убыв., } y_n \geq 0 \Rightarrow \exists \lim (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \in \mathbb{R} = e \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow e$$

Лемма 2. $x_n > 0$ $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = q < 1 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$

$$\text{Для } \varepsilon = \frac{1-q}{2} \quad \exists N \quad \forall n \leq N \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} < q + \varepsilon = \frac{q+1}{2} := \tilde{q}$$

$$\begin{aligned} x_{N+1} &< \tilde{q} x_N \\ x_{N+2} &< \tilde{q} x_{N+1} \\ &\vdots \\ x_{N+k} &< \tilde{q} x_{N+k-1} \end{aligned}$$

Перемножим: $x_{N+k} < \tilde{q}^k x_N$

$$0 < x_{N+k} \leq \tilde{q}^k x_N$$

$$\tilde{q}^k x_N \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

Следствие 1.1. 1. $a > 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$

$$2. a > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Доказательство. Применить лемму.

1.

$$x_n = \frac{n^k}{a^n} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1$$

Аналогично для остальных. □

Можно записать $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow 1^\infty$. 1^∞ — неопределенность.

1 Компактность, принцип выбора, полнота

В этом параграфе рассматриваются метрические пространства.

Лемма 3. Гейне-Бореля

$$[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} (a_\alpha, b_\alpha) \Rightarrow \exists \text{ конечн. набор: } [a, b] \subset \bigcup_{i=1}^n (a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i})$$

Определение. X — метрическое пространство., $K \subset X$ $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, каждое G_α — открыто.

Это открытое покрытие множества K .

Определение. $K \subset X$ — компактное, если для любого открытого покрытия этого множества \exists конечное подпокрытие $\Leftrightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

$Y \subset X = (X, \rho) \Rightarrow (Y, \rho), Y$ — подпространство в X

$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$\rho|_{Y \times Y}$

$B^X(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$

$B^Y(a, r) = \{y \in Y : \rho(a, y) < r\} = B^X(a, r) \cap Y$

Теорема 2. $Y \subset X$, X — метр.п., Y — подпространство, $D \subset Y \subset X$

1. D — откр. в $Y \Leftrightarrow \exists G$ — откр. в $X \quad D = G \cap Y$

2. D — замкн. в $Y \Leftrightarrow \exists F$ — замкн. в $X \quad D = F \cap Y$

Докажем 1.

Доказательство. Докажем “ \Rightarrow ”.

\forall точка D внутр. в Y

$$\forall x \in D \exists r_x B^Y(x, r_x) \subset D$$

Очевидно $D = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, r_x)$ $G := \bigcup_{x \in D} B^X(x, r_x)$ – откp. в X .

$$G \cap Y = \left(\bigcup_{x \in D} B^X(x, r_x) \right) \cap Y = \bigcup_{x \in D} B^Y(x, r_x) = D$$

Докажем “ \Leftarrow ”.

G – откp. в X $D := G \cap Y$? D – откp. в Y

$x \in D$? x – внутр. точка D (в Y)

$$x \in D \Rightarrow \exists B^X(x, r) \subset G \Rightarrow B^X(x, r) \cap Y = B^Y(x, r) \subset G \cap Y = D \quad \square$$

Докажем 2.

Доказательство. Докажем “ \Rightarrow ”

D – замкн. в $Y \Rightarrow D^c = Y \setminus D$ – откp. в Y

$\exists G$ – откp. в X , такое что $D^c = G \cap Y$

Тогда $G^c = X \setminus G$ – замкнуто в X , кроме того $D = G^c \cap Y$, т.к. $D^c = G \cap Y$

Возьмём в качестве F G^c .

Докажем “ \Leftarrow ”.

F – замкн. в X

$F \cap Y$ – замкн. в Y ?

$F^c = X \setminus F$ – откp. в X

$F^c \cap Y$ – откp. в Y

$Y \setminus (F^c \cap Y)$ – замкн. в Y

$$Y \setminus (F^c \cap Y) \stackrel{?}{=} F \cap Y$$

$$Y \setminus ((X \setminus F) \cap Y) \stackrel{?}{=} F \cap Y$$

Докажем это.

$$Y \cdot \overline{F \cdot Y} = Y \cdot (\overline{\overline{F}} + \overline{Y}) = YF + Y\overline{Y} = F \cap Y$$

□

Теорема 3. О компактности в пространстве и подпространстве.

(X, ρ) — метрич. пространство, $Y \subset X$ — подпространство, $K \subset Y$

Тогда K — комп. в $Y \Leftrightarrow K$ — компактно в X .

Доказательство. Докажем “ \Rightarrow ”

$$K \text{ — комп. в } X \Leftrightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha, G_\alpha \text{ — откp. в } X$$

Доказать: \exists кон. $\alpha_1 \dots \alpha_n \quad K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \Rightarrow \exists \text{ кон. } \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n (G_{\alpha_i} \cap Y)$$

Тогда $K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

Докажем “ \Leftarrow ”

Дано: K — комп. в X , доказать: K — комп. в Y .

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha, O_\alpha \text{ — откp. в } Y$$

$$\exists G_\alpha : O_\alpha = G_\alpha \cap Y (G_\alpha \text{ — откp. в } X)$$

По двум выражениям выше:

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \cap Y = Y \cap \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Это открытое покрытие, K — компактно в $X \Rightarrow \exists \alpha_1 \dots \alpha_n : K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$.

Тогда $K \subset \bigcup_{i=1}^n O_{\alpha_i}$ — конечное подпокрытие в Y . □

2 Пределы и непрерывность отображений

2.1 Предел

Определение. $(X, \rho^x), (Y, \rho^y) \quad D \subset X \quad f : D \rightarrow Y$

$a \in X, a$ — пред. точка множества $D, A \in Y$

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ — **предел отображения**, если:

1. По Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : 0 < \rho^X(a, x) < \delta \quad \rho^Y(f(x), A) < \varepsilon$$

2. На языке окрестностей:

$$\forall U(A) \quad \exists V(a) \quad \forall x \in \dot{V}(a) \quad f(x) \in U(A)$$

3. По Гейне: $\forall (x_n)$ — посл. в X :

(a) $x_n \rightarrow a$

(b) $x_n \in D$

(c) $x_n \neq a$

$f(x_n) \rightarrow A$

Следствие 3.1. $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R} \quad a$ — пред. точка D .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Примечание. 1. a — пр. точка $\Rightarrow \exists x_n \rightarrow a \Rightarrow$ опр. Гейне содержательно.

2. Значение $f(a)$ (если оно определено) не влияет на значение предела и факт его \exists .

3. $f, g : D \rightarrow Y$ $f = g$ на некоторой окрестности $\dot{W}(a) \cap D \Rightarrow$ их пределы \exists и \nexists одновременно, и если \exists , то равны.

4. Существование $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ по Гейне: $\forall x_n$, удовл. требованиям в опред. по Гейне, $\exists \lim f(x_n)$

Предел на языке окружностей обобщим к $\pm\infty$

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \forall E \exists \delta > 0 \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > E$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall x \in D : x > \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$