

*Примечание.* Эти решения проверены только частично через lean, верность не гарантируется.

*Упражнение (2.d).*  $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$

Докажем, что  $A \& B \vdash B \& A$ , это эквивалентно искомому.

- |    |                                      |                |
|----|--------------------------------------|----------------|
| 1. | $A \& B$                             | $(\in \Gamma)$ |
| 2. | $A \& B \rightarrow A$               | (a. 4)         |
| 3. | $A$                                  | (M.P. 1, 2)    |
| 4. | $A \& B \rightarrow B$               | (a. 5)         |
| 5. | $B$                                  | (M.P. 1, 4)    |
| 6. | $A \rightarrow B \rightarrow A \& B$ | (a. 3)         |
| 7. | $B \rightarrow A \& B$               | (M.P. 3,6)     |
| 8. | $A \& B$                             | (M.P. 5,7)     |

*Упражнение (2.e).*  $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

Докажем, что  $A \vdash \neg\neg A$ , это эквивалентно искомому.

- |    |   |                  |
|----|---|------------------|
| 1. | $A$   | $(\in \Gamma)$   |
| 2. | $A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$  | (a. 1)           |
| 3. | $\neg A \rightarrow A$  | (M.P. 1, 2)      |
| 4. | $\neg A \rightarrow \neg A$   | (доказано ранее) |
| 5. | $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A$ | (a. 9)           |
| 6. | $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A$   | (M.P. 4,5)       |
| 7. | $\neg\neg A$  | (M.P. 3,6)       |

*Упражнение (2.f).*  $A \& \neg A \vdash B$

- |    |  |                |
|----|--|----------------|
| 1. | $A \& \neg A$                          | $(\in \Gamma)$ |
| 2. | $A \& \neg A \rightarrow A$            | (a. 4)         |
| 3. | $A \& \neg A \rightarrow \neg A$       | (a. 5)         |
| 4. | $A$                                    | (M.P. 1, 2)    |
| 5. | $\neg A$                               | (M.P. 1, 3)    |
| 6. | $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$ | (a. 1)         |
| 7. | $\neg B \rightarrow A$                 | (M.P. 4, 6)    |

8.  $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  (a. 1)
9.  $\neg B \rightarrow \neg A$  (M.P. 5, 8)
10.  $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg B$  (a. 9)
11.  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg B$  (M.P. 7,10)
12.  $\neg\neg B$  (M.P. 9,11)
13.  $\neg\neg B \rightarrow B$  (a. 10)
14.  $B$  (M.P. 12,13)

Упражнение (3.a).  $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$

1.  $A \& B \rightarrow A$  (a. 4)
2.  $\neg A \rightarrow (A \& B) \rightarrow \neg A$  (a. 1)
3.  $\neg A$  ( $\in \Gamma$ )
4.  $A \& B \rightarrow \neg A$  (M.P. 2,3)
5.  $(A \& B \rightarrow A) \rightarrow (A \& B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& B)$  (a. 9)
6.  $(A \& B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \& B)$  (M.P. 1, 5)
7.  $\neg(A \& B)$  (M.P. 4,6)

Упражнение (3.b).  $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$

1.  $A \& B \rightarrow B$  (a. 4)
2.  $\neg B \rightarrow (A \& B) \rightarrow \neg B$  (a. 1)
3.  $\neg B$  ( $\in \Gamma$ )
4.  $A \& B \rightarrow \neg B$  (M.P. 2,3)
5.  $(A \& B \rightarrow B) \rightarrow (A \& B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$  (a. 9)
6.  $(A \& B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$  (M.P. 1, 5)
7.  $\neg(A \& B)$  (M.P. 4,6)

Упражнение (3.c).  $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$

1.  $A \& B \rightarrow B$  (a. 4)

2.  $\neg B \rightarrow (A \& B) \rightarrow \neg B$  (a. 1)
3.  $\neg B$  ( $\in \Gamma$ )
4.  $A \& B \rightarrow \neg B$  (М.Р. 2,3)
5.  $(A \& B \rightarrow B) \rightarrow (A \& B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$  (a. 9)
6.  $(A \& B \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \& B)$  (М.Р. 1, 5)
7.  $\neg(A \& B)$  (М.Р. 4,6)

Упражнение (3.d).  $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

1.  $(A \vee B \rightarrow A) \rightarrow (A \vee B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \vee B)$  (a. 9)
2.  $(A \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow (A \vee B \rightarrow A)$  (a. 8)
3.  $A \rightarrow A$  (доказано ранее)
4.  $(B \rightarrow A) \rightarrow (A \vee B \rightarrow A)$  (М.Р. 2,3)
5.  $\neg A$  ( $\in \Gamma$ )
6.  $\neg B$  ( $\in \Gamma$ )
7.  $\neg A \rightarrow \neg B \rightarrow B \rightarrow A$  (3.g)
8.  $\neg B \rightarrow B \rightarrow A$  (М.Р. 5, 7)
9.  $B \rightarrow A$  (М.Р. 6, 8)
10.  $A \vee B \rightarrow A$  (М.Р. 4, 9)
11.  $(A \vee B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(A \vee B)$  (М.Р. 1, 10)
12.  $\neg A \rightarrow (A \vee B \rightarrow \neg A)$  (a. 1)
13.  $A \vee B \rightarrow \neg A$  (М.Р. 5,12)
14.  $\neg(A \vee B)$  (М.Р. 11,13)

Упражнение (3.e).  $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$

3e) (c)  $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$

1)  $A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow \{A \rightarrow B\} \rightarrow \bar{B} \rightarrow \overline{A \rightarrow B}$   
 2)  $\{A \rightarrow B\} \rightarrow \bar{B} \rightarrow \overline{A \rightarrow B} \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \{A \rightarrow B\} \rightarrow B$   
 3)  $A \rightarrow \{A \rightarrow B\} \rightarrow B$  4)  $A$  5)  $\{A \rightarrow B\} \rightarrow \bar{B} \rightarrow \overline{A \rightarrow B} \rightarrow \bar{A} \rightarrow \overline{A \rightarrow B}$   
 6)  $\bar{B} \rightarrow A \rightarrow \bar{B}$  7)  $A \rightarrow \{A \rightarrow B\} \rightarrow \bar{B} \rightarrow \overline{A \rightarrow B} \rightarrow \{A \rightarrow B\} \rightarrow B$  (2, 5, MP) 8)  $\alpha \rightarrow \alpha$   
 9)  $\{A \rightarrow B\} \rightarrow B$  10)  $\{A \rightarrow B\} \rightarrow \bar{B} \rightarrow \overline{A \rightarrow B}$  (1, 7, MP)  
 11)  $\bar{B} \rightarrow \{A \rightarrow B\} \rightarrow \bar{B}$  12)  $\bar{B}$   
 13)  $A \rightarrow B \rightarrow \bar{B}$  (9, 10, MP)  
 14)  $\overline{A \rightarrow B}$  (8, 11, MP)

15)  $A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$   
 16)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Упражнение (3.f).  $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

Докажем  $\neg A, B, A \vdash B$ , т.к. это эквивалентно по теореме об индукции.

1.  $B$

( $\in \Gamma$ )

Упражнение (3.g).  $\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$

Докажем  $\neg A, \neg B, A \vdash B$ , т.к. это эквивалентно по теореме об индукции.

1.  $A$  ( $\in \Gamma$ )
2.  $\neg A$  ( $\in \Gamma$ )
3.  $A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$  (a. 1)
4.  $\neg B \rightarrow A$  (M.P. 1, 3)
5.  $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  (a. 1)
6.  $\neg B \rightarrow \neg A$  (M.P. 2, 5)
7.  $(\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B$  (a. 9)
8.  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg \neg B$  (M.P. 4, 7)
9.  $\neg \neg B$  (M.P. 6, 8)
10.  $\neg \neg B \rightarrow B$  (a. 10)

11.  $B$ 

(М.Р. 9, 10)

Упражнение (3.h).  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ 

$$\begin{aligned}
 & \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \\
 & (A \rightarrow B) \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \\
 & (A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C) \\
 & (A \rightarrow B), (B \rightarrow C), A \vdash C
 \end{aligned}$$

- |                      |                  |
|----------------------|------------------|
| 1. $A$               | ( $\in \Gamma$ ) |
| 2. $A \rightarrow B$ | ( $\in \Gamma$ ) |
| 3. $B$               | (М.Р. 1,2)       |
| 4. $B \rightarrow C$ | ( $\in \Gamma$ ) |
| 5. $C$               | (М.Р. 3,4)       |

Упражнение (3.i).  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)$ 

Это утверждение не тавтология, что проверяется подстановкой 0, 0, 1. В силу корректности исчисления высказываний из пустого множества можно вывести только тавтологии, таким образом это утверждение не выводится.

Упражнение (3.j).  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 

$$\begin{aligned}
 & \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \\
 & (A \rightarrow B) \vdash \neg B \rightarrow \neg A \\
 & (A \rightarrow B), \neg B \vdash \neg A
 \end{aligned}$$

- |  |                  |
|--|------------------|
| 1. $A \rightarrow B$   | ( $\in \Gamma$ ) |
| 2. $\neg B$  | ( $\in \Gamma$ ) |
| 3. $\neg B \rightarrow A \rightarrow \neg B$                                 | (a. 1)           |
| 4. $A \rightarrow \neg B$  | (М.Р. 2,3)       |
| 5. $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$ | (a. 9)           |
| 6. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$                               | (М.Р. 1,5)       |
| 7. $\neg A$  | (М.Р. 4,6)       |

Упражнение (4.a).  $\vdash A \vee \neg A$

1.  $A \rightarrow A \vee \neg A$  (акс. 6)
2.  $\neg A \rightarrow A \vee \neg A$  (акс. 7)
3.  $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A$  (закон контрапозиции)
4.  $\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg\neg A$  (закон контрапозиции)
5.  $(\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$  (акс. 9)
6.  $(\neg(A \vee \neg A) \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$  (М.Р. 4,6)
7.  $\neg\neg(A \vee \neg A)$  (М.Р. 5,7)
8.  $\neg\neg(A \vee \neg A) \rightarrow A \vee \neg A$  (акс. 10)
9.  $A \vee \neg A$  (М.Р. 8,9)

Упражнение (4.b).  $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

1.  $A \& B \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$  (т. о дедукции)
2.  $(\neg A \vee \neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$  (акс.9)
3.  $A \& B \rightarrow A$  (акс. 4)
4.  $A \& B \rightarrow B$  (акс. 5)
5.  $A$  (М.Р. 3, 1)
6.  $B$  (М.Р. 4, 1)
7.  $A \rightarrow (\neg A \vee \neg B) \rightarrow A$  (акс.1)
8.  $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A$  (М.Р. 7, 5)
9.  $(\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$  (М.Р. 2, 8)
10.  $(\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg A)$  (акс. 8)
11.  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg A)$  (М.Р. 8 и известный факт)
12.  $B, A \vdash \neg B \rightarrow \neg A$  равносильно  $B, A, \neg B \vdash \neg A$  (т. о дедукции)
13.  $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$  (акс.9)
14.  $\neg A$  (дважды аксиома 1 из  $B$  и  $\neg B$ )
15.  $\neg B \rightarrow \neg A$  (доказали по дедукции)
16.  $(\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg A)$  (М.Р. 11, 15)
17.  $\neg(\neg A \vee \neg B)$  (М.Р. 9, 16)

Упражнение (4.c).  $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$

1.  $\vdash A \rightarrow (A \vee B)$  (акс. 6)
2.  $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A$  (контрапозиция)
3.  $\vdash B \rightarrow (A \vee B)$
4.  $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg B$
5.  $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$
6.  $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$
7.  $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A \& \neg B$
8.  $\neg(A \vee B) \vdash \neg B \rightarrow \neg A \& \neg B$
9.  $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \& \neg B$
10.  $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \& \neg B$
11.  $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow \neg\neg(A \vee B)$
12.  $\neg(\neg A \& \neg B) \vdash \neg\neg(A \vee B)$
13.  $\neg(\neg A \& \neg B) \vdash \neg\neg(A \vee B) \rightarrow A \vee B$
14.  $\neg(\neg A \& \neg B) \vdash A \vee B$
15.  $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$

Упражнение (4.d).  $\vdash A \& \neg A \rightarrow A \vee B$

$$\vdash A \& \neg A \rightarrow A \vee B$$

$$A \& \neg A \vdash A \vee B$$

1.  $A \& \neg A$  ( $\in \Gamma$ )
2.  $A \& \neg A \rightarrow A$  (а. 4)
3.  $A$  (М.Р. 1,2)
4.  $A \rightarrow A \vee B$  (а. 6)
5.  $A \vee B$  (М.Р. 3,4)

Упражнение (4.e).  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

Идея решения — рассмотрим три случая :  $A \in \Gamma$ ;  $\neg A, B \in \Gamma$ ;  $\neg A, \neg B \in \Gamma$

Упражнение (5). Даны высказывания  $\alpha$  и  $\beta$ , причём  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$  и  $\alpha \not\equiv \beta$ . Укажите способ построения высказывания  $\gamma$ , такого, что  $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$  и  $\vdash \gamma \rightarrow \beta$ , причём  $\alpha \not\equiv \gamma$  и  $\beta \not\equiv \gamma$ .

Решение, рассказанное на паре  $\gamma := \alpha \& \beta$ , неверное, т.к. при тавтологии  $\beta$  выполняется  $\alpha \equiv \gamma$ .

Верное решение: пусть множество подстановок, на которых  $\alpha$  выполняется —  $\mathcal{A}$ , для  $\beta$  —  $\mathcal{B}$ . Несложно заметить, что  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , при этом  $|\mathcal{A}| < |\mathcal{B}|$ . Если  $|\mathcal{A}| < |\mathcal{B}| - 1$ , то можно найти множество между ними, т.е.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ . Если  $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| - 1$ , то нужно ввести новую переменную, чтобы разница стала больше.

Упражнение (6).  $\alpha \vdash \beta, \neg\alpha \vdash \beta \Rightarrow \vdash \beta$

- |     |   |                |
|-----|---|----------------|
| 1.  | $\alpha$  | $(\in \Gamma)$ |
| 2.  | $\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha)$   | (a. 1)         |
| 3.  | $\neg\beta \rightarrow \alpha$  | (M.P. 1,2)     |
| 4.  | $\neg\alpha$  | $(\in \Gamma)$ |
| 5.  | $\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$   | (a. 1)         |
| 6.  | $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$  | (M.P. 4,5)     |
| 7.  | $(\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\beta$ | (a. 9)         |
| 8.  | $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\beta$  | (M.P. 3,7)     |
| 9.  | $\neg\neg\beta$   | (M.P. 6,8)     |
| 10. | $\neg\neg\beta \rightarrow \beta$   | (a. 10)        |
| 11. | $\beta$   | (M.P. 9,10)    |