

# 1 Тензорная алгебра

## 1.1 Напоминание теории

Напоминание: ПЛФ — штука, которая берет набор из  $p$  векторных пространств и  $q$  сопряженных пространств и эта штука линейна по всем аргументам.

$$W : X \times X \times \dots \times X \times X^* \times X^* \times \dots \times X^* \rightarrow K$$

Полилинейность:  $W(\dots \tilde{x}_s + \alpha \bar{x}_s \dots) = W(\dots \tilde{x}_s \dots) + \alpha W(\dots \bar{x}_s \dots)$

$\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис  $X$ ,  $\{f^k\}_{k=1}^n$  — сопр. базис  $X^*$

$$x_i = \sum_{j=1}^n \xi_i^j e_j, \quad y^l = \sum_{k=1}^n \eta_k^l f^k$$

$$\begin{aligned} W(x_1 \dots x_p, y^1 \dots y^q) &= \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{k_1}^1 \eta_{k_2}^2 \dots \eta_{k_q}^q W(e_{j_1} \dots e_{j_p}, f^{k_1} \dots f^{k_q}) = \\ &= \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_p^{j_p} \eta_{k_1}^1 \eta_{k_2}^2 \dots \eta_{k_q}^q w_{\vec{j}}^{\vec{k}} \end{aligned}$$

В произвольном базисе любой ПЛФ  $W$  взаимнооднозначно сопоставляется тензор  $w$ .

$\dim X = n = \dim X^*$ ,  $n^{p+q}$  — размерность пространства ПЛФ,  $(p, q)$  — валентность.  
 $r := p + q$

Частные случаи:

- $r = 0 \quad w = \text{const}$

- $r = 1 \quad \dim = n^1 = n \Rightarrow \begin{cases} X \Rightarrow w = \begin{bmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{bmatrix} \\ X^* \Rightarrow w = \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix} \end{cases}$

- $r = 2 \quad \dim = n^2 \quad w \leftrightarrow \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix}$

Индексы читаются слева направо и сверху вниз, сначала строка, потом столбец.

Пример.  $n = 2 \quad W = (0, 2)$

$$w = \begin{bmatrix} w^{11} & w^{12} \\ w^{21} & w^{22} \end{bmatrix}$$

- $r = 3$   $n^3$ . Можно писать любым из следующих вариантов:  $w^{ijk}$ ,  $w_k^{ij}$ ,  $w_{jk}^i$ ,  $w_{ijk}$ . Последний индекс называется индексом слоя.

Пример.  $n = 3$

$$w = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} w_{11}^1 & w_{21}^1 & w_{31}^1 & w_{12}^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{11}^2 & w_{21}^2 & w_{31}^2 & \dots & & & & & \\ w_{11}^3 & w_{21}^3 & w_{31}^3 & \dots & & & & & \end{array} \right]$$

Пример.  $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) - \text{чётно} \\ -1 & (i, j, k) - \text{нечётно} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$$\varepsilon = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- $r = 4, n = 2$

$$w = \left[ \begin{array}{cc|cc} w_{11}^{11} & w_{11}^{12} & \cdot & \cdot \\ w_{11}^{21} & w_{11}^{22} & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right]$$

Пример.  $n = 2$

$$\delta_l^{ijk} = \begin{cases} 1 & i = j \neq k = l \\ -1 & i = k \neq j = l \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$w = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

## 1.2 Операции над тензорами

### 1.2.1 Линейные операции

Эти операции аналогичны операциям на соответствующих матрицах.

### 1.2.2 Тензорное произведение

$$a^{ij} \cdot b_k = w_k^{ij}$$

Пример.  $a_j^i \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$b_k \rightarrow B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$]c = a \otimes b \rightarrow c_{jk}^i = a_j^i \cdot b_k$$

$$c = \left[ \begin{array}{cc|cc} 5 & 10 & 6 & 12 \\ 15 & 20 & 18 & 24 \end{array} \right]$$

$$]d = b \otimes a \rightarrow d = b_k \cdot a_j^i$$

$$d = \left[ \begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 10 & 12 \\ 15 & 18 & 20 & 24 \end{array} \right]$$

Запись сначала векторов, потом форм называется консолидация.