Т.к. эта практика проходит до первой лекции, то сначала будет немного теории.

Мы занимаемся исчислением высказываний. В высказываниях есть:

- Переменные A, B, C (пропозициональные)
- Битовые операции $\lor, \&, \to, \neg$

Определение. Пропозициональная формула:

- 1. A переменная $\Rightarrow A$ формула
- 2. a, b переменные $\Rightarrow a \lor b, a \& b, a \to b, \neg a$

Определение. Оценка — отображение π : переменные \to $\{T, F\}$.

Определение. Тавтология — формула, для любой оценки истинна.

Пример.

- A ∨ ¬A
- $A \rightarrow A$
- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Схемы аксиом:

- 1. $a \rightarrow (b \rightarrow a)$
- 2. $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$
- 3. $a \rightarrow b \rightarrow a \& b$
- 4. $a \& b \rightarrow a$
- 5. $a \& b \rightarrow b$
- 6. $a \rightarrow a \lor b$
- 7. $b \rightarrow a \lor b$
- 8. $(a \rightarrow) \rightarrow (b \rightarrow c) \rightarrow (a \lor b \rightarrow c)$
- 9. $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg a$
- 10. $\neg \neg a \rightarrow a$

Примечание. $a \to b \to c \Leftrightarrow a \to (b \to c)$

Можно заметить, что все эти аксиомы — тавтологии. Это так и должно быть. Вместо a,b,c можно подставлять произвольные формулы.

Определение. Вывод формулы φ есть последовательность формул $\varphi_1,\dots,\varphi_n=\varphi$, где φ_i — одна из аксиом или Modus Ponens из φ_a,φ_b , где a,b< i

M3137y2019 12.2.2021

Определение. Modus Ponens (правило вывода) из формул a и $a \to b$ есть формула b.

Корректность: можно вывести любую тавтологию.

Доказательство. Очевидно по индукции и определению Modus Ponens.

Полнота: любую тавтологию можно вывести.

Доказательство. Будет на лекции.

Пример. Выведем $a \to a$

$$a:=x,b:=x\to x,c:=x$$

$$\varphi_1=(x\to x\to x)\to (x\to (x\to x)\to x)\to (x\to x)$$

$$\varphi_2=x\to x\to x$$
 M.p.
$$\varphi_3=(x\to (x\to x)\to x)???$$

Пусть Γ — какой-то набор формул.

Определение. Вывод в грамматике Γ формулы φ обозначается $\Gamma \vdash \varphi$, и его шаги могут иметь вид τ , где $\tau \in \Gamma$ (шаги как в нормальном выводе также разрешены).

Лемма 1 (о дедукции).
$$\Gamma \cup \{a\} \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash a \rightarrow \varphi$$

Упражнение. Указать про каждое из высказываний, общезначимо, выполнимо, опровержимо или невыполнимо ли оно:

1.
$$\neg A \lor \neg \neg A$$

$$\varphi_1 = \neg A \lor A$$
$$\varphi_2 = \neg A \lor \neg \neg A$$

Ответ: общезначимо, выполнимо.

2.
$$(A \rightarrow \neg B) \lor (B \rightarrow \neg C) \lor (C \rightarrow \neg A)$$

При подстановке (1, 1, 1) не выполнено, при (0, 0, 0) выполнено.

Ответ: выполнимо, опровержимо.

M3137y2019 12.2.2021

3.
$$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$$

При подстановке (0,1) не выполнено, при (1,1) выполнено.

Ответ: выполнимо, опровержимо.

4.
$$\neg A \& \neg \neg A$$

$$\neg A \& \neg \neg A = \neg A \& A$$

Ответ: невыполнимо, опровержимо.

5.
$$\neg (A \& \neg A)$$

Т.к. $A \& \neg A$ невыполнимо, $\neg (A \& \neg A)$ общезначимо.

Ответ: общезначимо, выполнимо.

6. *A*

Ответ: выполнимо (A = 1), опровержимо (A = 0).

7.
$$A \rightarrow A$$

Ответ: общезначимо, выполнимо (подстановкой).

8.
$$A \rightarrow \neg A$$

Ответ: выполнимо (A = 0), опровержимо (A = 1).

9.
$$(A \rightarrow B) \lor (B \rightarrow A)$$

Ответ: общезначимо, выполнимо.

Доказать:

1.
$$\vdash A \rightarrow A$$

Было до этого.

2.
$$\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\varphi_1 = a \to a$$

 $\varphi_2 = (a \to a \to b) \to (a \to b)$

3.
$$\vdash \neg (A \& \neg A)$$

$$\varphi_1 = (\phi \to \psi) \to (\phi \to \neg \psi) \to \neg \phi$$

 $\varphi_2 = A \& \neg A \to A$

$$\varphi_3 = A \& \neg A \to \neg A$$

$$\varphi_4 = (A \& \neg A \to A) \to (A \& \neg A \to \neg A) \to \neg (A \& \neg A)$$

M3137y2019 12.2.2021