

Теорема 1. Интегральный признак Коши.

$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ монотонно убывает, $f \geq 0$, f непр.

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся/расходятся одновременно.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \Delta_n$$



Δ_n — площадь криволинейных треугольников, получаемых отсечением кривой $y = f(x)$.

$$0 \leq \Delta_n \leq f(1) - f(n) \leq f(1)$$

$$\Delta_n \uparrow \Rightarrow \exists \text{ кон. } \lim \Delta_n$$

Более формальный вариант, без картинок:

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^n \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right)$$

Т.к. $f \downarrow$:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(x)dx &\geq \int_k^{k+1} f(k+1)dx = f(k+1) \\ \sum_{k=1}^n \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right) &\leq \sum_{k=1}^n f(k) - f(k+1) = f(1) - f(n+1) \end{aligned}$$

□

Пример. $\sum \frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}$

Способы:

1. “Удавить логарифм”

2. Покажем, что $\frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}$ монотонна НСНМ:

$$f' = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta} - \frac{\beta}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta \ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta} \Rightarrow f' < 0 \text{ НСНМ}$$

Перейдем к интегралу:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$$

- $\alpha > 1$ сходится
- $\alpha < 1$ расходится
- $\alpha = 1$:
 - $\beta > 1$ сходится
 - $\beta \leq 1$ расходится

По другим признакам сходимость ряда нельзя выяснить.

Определение. Ряд A абсолютно сходится, если 1 и 2:

1. $\sum a_n$ сх.
2. $\sum |a_n|$ сх.

Пример.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Возьмём интеграл на $[0, 1]$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \frac{(-1)^n}{2n+1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx}_{\Delta_n}$$

Устремим $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

Таким образом, мы посчитали сумму ряда, это ряд Лейбница. По модулю этот ряд не сходится.

Теорема 2. $\sum a_n, a_n \in \mathbb{R}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. $\sum a_n$ абс. сх.
2. $\sum |a_n|$ сх.
3. Оба ряда $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ сх.

Сходимость рядов со слагаемыми произвольного знака

Теорема 3. Признак Лейбница.

$$c_n \geq 0, c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots, c_n \rightarrow 0$$

Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} c_n$ сх.

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_{2N} &= c_1 - c_2 + \dots + c_{2N-1} - c_{2N} \\ S_{2N+2} &= S_{2N} + \underbrace{(c_{2N+1} - c_{2N+2})}_{\geq 0} \geq S_{2N} \Rightarrow S_{2N} \uparrow \\ S_{2N} &= c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_3 - c_4)}_{\geq 0} - \dots - c_{2N} \leq c_1 \\ \left. \begin{array}{l} S_{2N} \uparrow \\ S_{2N} \leq c_1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \exists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_{2N} \in \mathbb{R} \\ S_{2N+1} &= \underbrace{S_{2N}}_{\rightarrow l \in \mathbb{R}} + \underbrace{c_{2N+1}}_{\rightarrow 0} \Rightarrow S_{2N+1} \rightarrow l \Rightarrow S_N \rightarrow l \end{aligned}$$

□

Примечание. Секретное приложение к признаку Лейбница.

В условиях признака Лейбница:

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} C_n \right| \leq |C_N|$$

Пример.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}$$

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{k} + (-1)^k}$$

Не монотонно.

Для незнакостабильных рядов признак эквивалентности не работает.

Функции и отображения в \mathbb{R}^m

1. Структуры в \mathbb{R}^m

- Линейное пространство $x = (x_1 \dots x_m), x_i \in \mathbb{R}$. Строка/столбец — не важно.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum x_i^2}$$

$$\rho(x, y) := |x - y|$$

- Окрестности, шар

$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| < r\}$ — открытый шар, r -окрестность точки a

a — внутренняя точка множества D , если $\exists U(a) : U(a) \subset D$, т.е. $\exists r > 0 : B(a, r) \subset D$

D — открытое множество, если $\forall a \in D : a$ — внутренняя точка D

a — предельная точка множества D , если $\forall \dot{U}(a) : \dot{U}(a) \cap D \neq \emptyset$

D — замкнутое множество, если оно содержит все свои предельные точки.

Замыканием множества D называется $\overline{D} = D \cup (\text{множество предельных точек } D)$

- Сходимость, предел

$\triangleleft x_n$ — посл. в $\mathbb{R}^m, a \in \mathbb{R}^m$

$$x_n \rightarrow a \Leftrightarrow \forall U(a) \exists N \forall n > N \ x_n \in U(a)$$

Норма и скалярное произведение сохраняют сходимость:

$$x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b \Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle, |x_n| \rightarrow |a|$$

Сходимость функций:

$$f : O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

a — предельная точка $O, L \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

То же самое, но по Гейне:

$$\forall (x_k) : \begin{cases} x_k \in O \subset \mathbb{R}^m \\ x_k \rightarrow a \\ \forall k \ x_k \neq a \end{cases} \quad f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} L$$

Покоординатная сходимость:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall i : 1 \leq i \leq n : \lim_{x \rightarrow a} f(x)_i = L_i$$

$$x_k \rightarrow a \Leftrightarrow \forall i : 1 \leq i \leq m : x_i^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a_i$$

- Компактность

Параллелепипед $[a, b] = \{x : \forall i : 1 \leq i \leq m \quad a_i \leq x_i \leq b_i\}$

K **компактно**, если $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} \underbrace{G_\alpha}_{\text{откр.}} \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$

В \mathbb{R}^m **комп.** \Leftrightarrow **замкн. и огр.**

Секвенциальная компактность: $\forall (x_n), x_n \in K \Rightarrow \exists n_k, a \in K : x_{n_k} \rightarrow a$

Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса: если в \mathbb{R}^m (x_n) — ограниченная последовательность, то у неё существует сходящаяся подпоследовательность.

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0, x \rightarrow 0} \frac{x+y}{x-y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x+y}{x-y} = \lim 1 = 1 \end{aligned}$$

Получили противоречие. Что мы сделали не так?

Определение. $\triangleleft F : X \rightarrow \mathbb{R}^m; x \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$, то $F_1(x) \dots F_m(x)$ — **координатные функции отображения** F

Определение. $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}, a$ — пр. точка D_1, b — пр. точка D_2

$$(D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\}) \subset D \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in D_1 \setminus \{a\} \quad \exists \text{ кон. } \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$$

Если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ — это **повторный предел**.

Как предел в метрическом пространстве:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = A \Leftrightarrow \forall w(A) \quad \exists U(a), V(b) \quad \forall (x, y) \in U(a) \times V(b) \quad f(x, y) \in W(A)$$

Двойной предел:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A \Leftrightarrow \forall W(A) \exists U(a), V(b) \forall x \in \dot{U}(a), \forall y \in \dot{V}(b) \quad f(x, y) \in W(A)$$

Примечание. $(D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\}) = D$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f$$

Теорема 4. О повторных пределах

$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a — пр. точка D_1 , b — пр. точка D_2

$D = (D_1 \setminus \{a\}) \times (D_2 \setminus \{b\}) \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Пусть:

1. $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = A \in \overline{\mathbb{R}}$
2. $\forall x \in D_1 \setminus \{a\} \exists \text{кон. } \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$

Тогда $\exists \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_1 \quad |x - a| < \delta$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in D_2 \quad |y - b| < \delta$$

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \xrightarrow{y \rightarrow b} |\varphi(x) - A| \leq \varepsilon$$

□

Пример. $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

$D = \mathbb{R}^2 \setminus (\{\text{ось } Ox\} \cup \{\text{ось } Oy\})$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{(x+y)}_{\text{б.м.}} \underbrace{\sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}}_{\text{огр.}} = 0$$

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{(x+y)}_{\rightarrow x} \sin \frac{1}{x} \underbrace{\sin \frac{1}{y}}_{\nexists \lim}$$

Загадка:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim 0 = 0$$

По теореме если предел \exists , то он $= 0$. Но существует ли он?