

*Примечание.*  $\{x_i\}_{i=1}^k$  — ЛЗ  $\Leftrightarrow \{x_i\}_{i=1}^k$  обнуляет все базисные ПЛФ из  $\Lambda^K$  ( $C_n^k$  штук)

$$\triangleleft C = \begin{bmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \xi_2^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$$

$$\det C = \det\{x_1 \dots x_n\} \triangleq {}^{1\dots n}F(x_1 \dots x_n) = \sum_{(i_1 \dots i_n)} (-1)^{[i_1 \dots i_n]} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n}$$

**Определение.** Рангом  $r$  матрицы  $A_{m \times n}$  называется порядок её наибольшего отличного от нуля минора.

*Примечание.*  $\text{rank}(A) = \text{rg}(A) = \text{rang}(A)$

$$\exists L_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} \neq 0, \text{ но } \exists L_{j_1 \dots j_{r+1}}^{i_1 \dots i_{r+1}} \neq 0$$

$$\triangleleft C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{n2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

1.  $L_1^1 = C_1 \Rightarrow \text{rg} A \geq 1$
2.  $L_1^1 = C_1 C_{22} \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A \geq 2$
3.  $L_1^1 = C_1 C_{22} C_{33} \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A \geq 3$
- $\vdots$
4.  $L_{1\dots r}^{1\dots r+1} = \prod_{i=1}^r c_{ii} \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A \geq r$
5.  $L_{1\dots r}^{1\dots r+1} = 0 \Rightarrow \text{rg} A = r$

$$\Rightarrow \text{rg} A \leq \min(m, n)$$

**Теорема 1.** О базисном миноре

1. Число ЛНЗ строк (столбцов) матрицы  $A$  равно её рангу

2. Любая строка (столбец) матрицы  $A$  может быть представлена в виде ЛК строк (столбцов), входящих в её минор наибольшего порядка, отличного от нуля (базисный минор)

*Доказательство.* 1. Следует из критерия ЛНЗ

2. Строки (столбцы), входящие в базисный минор, образуют максимальный ЛНЗ поднабор всех строк (столбцов) матрицы  $A$ .

□

## Теорема 2. Крамера

СЛАУ:  $\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi^j = b_i$ , такую что  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n \quad \det A \neq 0$

Тогда:

1. СЛАУ совместна и определена
2.  $\xi^j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad \Delta_j = (a_1 \dots a_{j-1}, b, a_{j+1} \dots a_n)$

*Доказательство.* 1.  $\det A = \det\{a_1 \dots a_n\} \neq 0 \Rightarrow \{a_j\}_{j=1}^n - \text{ЛНЗ} \Rightarrow \text{базис } \mathbb{R}^n \ni b$

$$\begin{aligned} 2. \Delta_j &= \det\{a_1 \dots a_{j-1}, b, a_{j+1} \dots a_n\} = \det\{a_1 \dots a_{j-1}, \sum_{j=1}^n a_j \xi^j, a_{j+1} \dots a_n\} = \\ &= \sum_{j=1}^n \xi^j \det\{a_1 \dots a_{j-1}, a_j, a_{j+1} \dots a_n\} = \xi^k \cdot \Delta \end{aligned}$$

□

## Теорема 3. Кронекера-Капелли

$$\left\langle \sum_{j=1}^n a_j \xi^j = b, \right] A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & | & b \end{bmatrix}$$

$$\text{СЛАУ совместна} \Leftrightarrow \text{rg } \tilde{A} = \text{rg } A$$

*Доказательство.* Тривиально.

□

# 1 Тензорная алгебра

## 1.1 Преобразование координат в $X$ и $X^*$

$\langle \{e_j\} - \text{базис } X$

$\triangleleft \{\tilde{e}_k\}$  – базис  $X^*$

$$\Rightarrow \forall k \quad \tilde{e}_k = \sum_{j=1}^n t_k^j e_j$$

**Определение.** Набор  $T = ||t_j^i||$  образует матрицу, которая называется матрицей перехода от базиса  $\{e_j\}$  к базису  $\{\tilde{e}_k\}$

*Примечание.*  $\triangleleft E = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n], \tilde{E} = [\tilde{e}_1 \ \tilde{e}_2 \ \dots \ \tilde{e}_n] \Rightarrow \tilde{E} = ET$

**Лемма 1.**  $] \xi$  – координаты вектора  $x$  в базисе  $\{e_j\}$

$] \tilde{\xi}$  – координаты вектора  $x$  в базисе  $\{\tilde{e}_k\}$

Тогда  $\xi = T\tilde{\xi}$  или  $\tilde{\xi} = S\xi, S = T^{-1}$

$$\text{Доказательство. } x = \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k \tilde{e}_k = \sum_{k=1}^n \tilde{x}^k \sum_{j=1}^n t_k^j e_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \tilde{\xi}^k t_k^j \right) e_j = \sum_{j=1}^n \xi^j e_j \Rightarrow \xi = T\tilde{\xi} \quad \square$$

**Лемма 2.**  $] \{f^l\}$  – базис  $X^*$ , сопряженный  $\{e_j\}$ , т.е.  $f^l(e_j) = \delta_j^l$

$] \{\tilde{f}^m\}$  – базис  $X^*$ , сопряженный  $\{\tilde{e}_k\}$ , т.е.  $\tilde{f}^m(\tilde{e}_k) = \delta_m^k$

$$] F = [f^1 \ f^2 \ \dots \ f^n]^T, \quad \tilde{F} = [\tilde{f}^1 \ \tilde{f}^2 \ \dots \ \tilde{f}^n]^T$$

Тогда  $F = T\tilde{F}$  или  $f^l = \sum_{m=1}^n t_m^l \tilde{f}^m$

$$\text{Доказательство. } \triangleleft (\tilde{f}^m, \tilde{e}_k) = \delta_k^m = (\tilde{f}^m, \sum_{j=1}^n t_k^j e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j (\tilde{f}^m, e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j \sum_{l=1}^n a_l^m (f^l, e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j a_j^m$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j^m t_k^j = \delta_k^m \text{ или } AT = I - \text{единичная матрица} \Rightarrow A = T^{-1} \quad \square$$

**Лемма 3.**  $] \varphi$  – коэфф. ЛФ в  $\{e_j\}$

$] \tilde{\varphi}$  – коэфф. ЛФ в  $\{\tilde{e}_k\}$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T$$

*Доказательство.*  $] g - \text{ЛФ}, \varphi_j = g(e_j) \quad \tilde{\varphi}_k = g(\tilde{e}_k)$

$$\varphi_k = g(\tilde{e}_k) = g\left(\sum_{j=1}^n t_k^j e_j\right) = \sum_{j=1}^n t_k^j g(e_j) = \sum_{j=1}^n t_k^j \varphi_j$$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi T \quad \square$$

Итого:

$$\tilde{E} = ET \quad \tilde{F} = T^{-1}F \quad \tilde{\xi} = T^{-1}\xi \quad \tilde{\varphi} = \varphi T$$

**Определение.** Величины, которые преобразуются при замене базиса так же, как базисные векторы, называются **ковариантными** величинами.

Величины, которые преобразуются при замене базиса противоположным базисным векторам образом, называются **контравариантными** величинами.

*Примечание.*  $\xi$  — контрвариантная величина. Верхний индекс называется контравариантным, нижний — ковариантным.

$]W \in \Omega_q^p$  — ПЛФ  $(p, q)$

$\{e_j\}_{j=1}^n$  — базис  $X$ ,  $\{f^k\}_{k=1}^n$  — базис  $X^*$

$$\Rightarrow \omega_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} \stackrel{\text{def}}{=} W(e_{i_1} \dots e_{i_n} f^{j_1} \dots f^{j_n})$$

$$\{e_j\} \xrightarrow{T} \{\tilde{e}_k\} \quad \{f^l\} \xrightarrow{T^{-1}} \{\tilde{f}^m\}$$

Пусть в паре базисов  $\{\tilde{e}_k\}$  и  $\{\tilde{f}^m\}$  ПЛФ  $W$  имеет тензор  $\tilde{w}_{s_1 \dots s_p}^{t_1 \dots t_q} = W(\tilde{e}_{s_1} \dots \tilde{e}_{s_p}, \tilde{f}^{t_1} \dots \tilde{f}^{t_q}) =$

$$\begin{aligned} &= \triangle W(t_{s_1}^{i_1} e_{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} e_{i_p}, \sigma_{j_1}^{t_1} f^{j_1} \dots \sigma_{j_q}^{t_q} f^{j_q}) = \\ &= t_{s_1}^{i_1} \dots t_{s_p}^{i_p} \sigma_{t_1}^{j_1} \dots \sigma_{t_q}^{j_q} W(e_{s_1} \dots e_{s_p}, f^{t_1} \dots f^{t_q}) \end{aligned}$$

**Определение.** 1. **Вектором** называется величина, преобразующаяся по контравариантному закону

2. **Линейной формой** называется величина, преобразующаяся по ковариантному закону

3. **Тензором** типа  $(p, q)$  называется величина, преобразующаяся  $p$  раз по ковариантному закону и  $q$  раз по контравариантному.

## 1.2 Операции с тензорами

1.  $]w, v$  — тензоры типа  $(p, q)$ . Тогда  $w + \alpha w$  — тензор  $(p, q)$

*Доказательство.* Тривиально. □

2. Транспонирование

$$t^{(st)} : \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_s \dots j_t \dots j_q} \mapsto \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_t \dots j_s \dots j_q}$$

*Примечание.* Транспонировать можно только по индексам одного типа

Лемма 4. Транспонирование сохраняет тензорную природу величины.

3. Свертка:

$$\omega_{i_1 \dots i_n}^{k \wedge s j_1 \dots j_n} = \sum_{m=1}^n \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \omega_{i_{p+1} \dots i_n}^{k \wedge s j_{q+1} \dots j_n}$$

*Примечание.* Операцию свертки можно выполнять только по индексам разных типов

Лемма 5. Свертка сохраняет тензорную природу

Лемма 6.

$$\omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \omega_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$$

*Доказательство.* От перестановки мест слагаемых конечная сумма не меняется.  $\square$

4. Тензорное произведение

$$\omega(p_1, q_1); v(p_2, q_2) \quad \omega \otimes v = a$$

$$w_{i_1 \dots i_{p_1}}^{j_1 \dots j_{q_1}} \cdot v_{i_{p_1+1} \dots i_{p_1+p_2}}^{j_{q_1+1} \dots j_{q_1+q_2}} = a_{i_1 \dots i_{p_1+p_2}}^{j_1 \dots j_{q_1+q_2}}$$

Лемма 7. Результат тензорного произведения является тензором типа  $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$