

**Comunicaciones II – 3º GITT – Grupo A Tema 2: “Modulación y detección en canales gaussianos”**

**Apellidos y nombre:** \_\_\_\_\_ **DNI:** \_\_\_\_\_

1. En un decisor MAP la frontera de decisión entre dos símbolos:

- a. Se acerca al símbolo más probable con respecto a la frontera ML.
- b. Se obtiene igualando las probabilidades de observación dado el símbolo para ambos símbolos.
- c. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Comentarios: En un decisor MAP la decisión se obtiene maximizando la probabilidad del símbolo dada la observación. Esto es equivalente a maximizar el producto de la probabilidad a priori de símbolo  $p_a(a_i)$  por la densidad de probabilidad de observación dado el símbolo  $f_{q|A}(q|a_i)$ . La frontera entre los símbolos  $a_i$  y  $a_j$  se obtiene igualando este producto para los símbolos involucrados, es decir, resolviendo la ecuación:

$$p_a(a_i) f_{q|A}(q|a_i) = p_a(a_j) f_{q|A}(q|a_j).$$

En el decisor ML, los símbolos son equiprobables, y en la ecuación anterior basta igualar las densidades de probabilidad de observación dado el símbolo. Por tanto la afirmación (b) es falsa (conduciría a la frontera ML, no a la frontera MAP). El efecto de las probabilidades a priori de los símbolos es extender la región de decisión del símbolo más probable, y reducir la del símbolo menos probable, con respecto a las regiones correspondientes al decisor ML. Por tanto, la frontera MAP se acerca al símbolo menos probable con respecto a la frontera ML, y consecuentemente la afirmación (a) es falsa. Por tanto, la respuesta correcta es la (c).

2. ¿Qué diferencia hay entre un demodulador basado en correladores y un demodulador basado en filtros adaptados?

- a. La implementación basada en correladores es más rápida y precisa.
- b. La implementación basada en filtros es más rápida y precisa.
- c. En cuanto a la salida proporcionada, ambas implementaciones son equivalentes.

Comentarios: La misión del demodulador es proporcionar, a partir de la señal recibida  $r(t)$ , un conjunto de observaciones  $\mathbf{q}$  (una observación vectorial en el espacio de señal), que permitan detectar de forma óptima cuál fue el símbolo transmitido. Para ello, se calcula el producto escalar  $\langle r(t), \phi_n(t) \rangle$  para cada señal de la base, esto es, la correlación entre ambas señales (la integral entre 0 y T del producto de ambas señales). Este producto escalar puede obtenerse mediante el filtro adaptado a  $\phi_n(t)$ , cuya respuesta impulsiva  $h_n(t)$  se obtiene invirtiendo el eje temporal a la señal  $\phi_n(t)$ , y retardando la señal invertida un periodo T para que el filtro resultante sea causal. Si muestreamos la salida del filtro en el instante  $t=T$ , la salida del filtro (la convolución de  $r(t)$  y  $h_n(t)$ ) evaluada en dicho instante toma un valor exactamente igual a la integral de correlación, y por tanto ambas implementaciones son matemáticamente equivalentes. En general, la implementación basada en filtros adaptados es más eficiente en cuanto a cálculo (aunque si  $\phi_n(t)$  es un pulso rectangular la implementación basada en correladores es también sencilla), pero en cuanto al resultado ambas implementaciones son idénticas. Por tanto, por lo que respecta a la precisión, las respuestas (a) y (b) son falsas (ninguna implementación es más precisa que la otra), y la respuesta (c) es correcta.

3. Para un sistema de comunicación digital que transmite información a una tasa de 9.000 bits por segundo, ¿cuántos símbolos por segundo transmite si utiliza un alfabeto octal?

- a. 1.250
- b. 3.000
- c. 27.000

Comentarios: Un sistema octal transmite  $m = \log_2(8)=3$  bits por símbolo. Si la velocidad de transmisión es de 9.000 bits por segundo, y transmite 3 bits por símbolo, la velocidad de transmisión de símbolos es de 3.000 símbolos por segundo:  $R_s(\text{simb/segundo}) = R_b (\text{bits/segundo}) / m(\text{bits/símbolo})$ .

4. La distribución de probabilidad de la salida del demodulador condicionada al símbolo transmitido

- a. Es igual para todos los símbolos salvo por el valor medio.
- b. La respuesta anterior es válida sólo si los símbolos son equiprobables.
- c. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Comentarios: A la salida del demodulador (en el espacio de señal), la observación  $q$  es resultado de demodular  $r(t)=s(t)+n(t)$ , donde  $s(t)$  es la señal usada para representar el vector  $a$  (del espacio de señal) y  $n(t)$  es el ruido que ha añadido el canal. Tal y como se discutió en clases de teoría, en el espacio de señal (canal discreto equivalente) se puede expresar  $q = a + n$  donde  $a$  corresponde al símbolo transmitido y  $n$  al ruido. Este último vector es una variable aleatoria de tipo vectorial, tal que, si el conjunto de señales usadas para el modulador y el demodulador forman una base ortonormal y el ruido es AWGN, es una distribución de probabilidad de tipo gaussiana multivariada, de media nula, y cuya matriz de covarianza es diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales a  $N_0/2$  (es decir, iguales a la densidad de potencia espectral). Puesto que dado el símbolo transmitido, el vector  $a$  toma un valor fijo, las observaciones  $q$  para un símbolo dado son una variable aleatoria de tipo vectorial, gaussianas, de media  $a$  y matriz de covarianza igual a la de  $n$ . Por tanto, como el ruido que afecta a los símbolos es el mismo para todos los símbolos, la distribución de probabilidad a la salida del demodulador es la misma para todos los símbolos, salvo por el valor medio y la respuesta (a) es la correcta. Este resultado es independiente de las probabilidades a priori de los símbolos: las probabilidades a priori afectan a la probabilidad conjunta de observación y símbolo:

$$f_{q,A}(q,a_i) = p_a(a_i) f_{q|A}(q|a_i)$$

pero no afectan a la media ni a la matriz de covarianza (la media es la de  $a$  y la matriz de covarianza es la de  $n$ , tanto para  $f_{q|A}(q|a_i)$  como para  $f_{q,A}(q,a_i)$ ) y por tanto, la respuesta (b) es incorrecta. La respuesta (c) es incorrecta.

5. ¿Se pueden usar distancias en lugar de probabilidades en el decisor?

- a. En un decisor ML sí, porque minimizar la distancia de la observación al vector del símbolo es equivalente a maximizar la probabilidad del símbolo dada la observación.
- b. En un decisor MAP no, salvo que se corrija convenientemente el umbral de decisión.
- c. Ambas respuestas son correctas.

Comentarios: La decisión se realiza maximizando probabilidades. La decisión se puede hacer maximizando logaritmos de probabilidades, puesto que la función logaritmo es monótonamente creciente. Puesto que las probabilidades a maximizar son, salvo constantes de normalización, exponenciales de distancias (con signo negativo), maximizar probabilidades es equivalente a minimizar distancias, salvo las constantes de normalización. En el caso de un decisor ML, los símbolos se consideran equiprobables, y a ambos lados de la desigualdad se eliminan las constantes de normalización, de modo que la decisión se puede realizar minimizando la distancia entre la observación  $q$  y cada uno de los símbolos  $a_i$ . En el caso del decisor MAP, los símbolos no se consideran equiprobables, y en la desigualdad, además de las distancias, aparecen constantes de normalización, de modo que la decisión se puede tomar minimizando las distancias pero debe corregirse adecuadamente el umbral de decisión. Por tanto, la respuesta (a) es correcta, y la respuesta (b) también lo es, de modo que la solución es (c).

6. En un sistema de comunicación digital que transmite 5.000 símbolos por segundo de un alfabeto 16-ario, ¿cuál es la velocidad de transmisión en bits por segundo?

- a. 1.250
- b. 20.000
- c. 80.000

Comentarios: Un sistema 16-ario transmite  $m = \log_2(16)=4$  bits por símbolo. Si la velocidad de transmisión es de 5.000 símbolos por segundo, y cada símbolo transmite 4 bits de información, la velocidad de transmisión de bit es de 20.000 bits por segundo:  $R_s(\text{simb/segundo})=R_b(\text{bits/segundo}) / m(\text{bits/símbolo})$ .

7. El desplazamiento de la frontera en un decisor MAP con respecto a la frontera ML depende de:

- Las probabilidades a priori de los símbolos involucrados.
- De la densidad de potencia espectral del ruido.
- De ambos.

Comentarios: El desplazamiento de la frontera en un decisor MAP es  $N_0 \log(p_A(a_i)/p_A(a_j))$ , donde  $N_0/2$  es la densidad de potencia espectral,  $a_i$  y  $a_j$  son los símbolos involucrados, y  $p_A(a_i)$  es la probabilidad a priori del símbolo  $a_i$ . Por tanto, el desplazamiento depende de las probabilidades a priori y también depende de la densidad de potencia espectral del ruido; la respuesta correcta es (c).

8. En canales AWGN, la salida del demodulador óptimo es:

- Una variable aleatoria con matriz de covarianza diagonal centrada en el promedio de los vectores que representan el alfabeto de símbolos.
- Una variable aleatoria de tipo gaussiana multivariada centrada en el vector que representa al símbolo transmitido.
- Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Comentarios: La salida del demodulador es  $\mathbf{q} = \mathbf{a} + \mathbf{n}$  donde  $\mathbf{a}$  es el vector que representa al símbolo transmitido, y  $\mathbf{n}$  es una variable aleatoria gaussiana multivariada, de media nula y matriz de covarianza diagonal, con todos sus elementos iguales a  $N_0/2$  (la densidad de potencia espectral del ruido). Por tanto,  $\mathbf{q}$  es una variable aleatoria de media  $\mathbf{a}$  (el vector correspondiente al símbolo transmitido), de tipo gaussiana multivariada con la matriz de covarianza igual a la de  $\mathbf{n}$ . Por tanto la respuesta (b) es correcta. La respuesta (a) es incorrecta, porque la observación  $\mathbf{q}$  dado un símbolo concreto tiene una media que no es el promedio de los vectores del alfabeto, sino el vector que representa al símbolo. Por otra parte, la observación  $\mathbf{q}$  (no condicionada a ningún símbolo concreto) es una suma de gaussianas, pero no es una gaussiana y su matriz de covarianza depende además de la constelación.

9. En un sistema binario unidimensional, con símbolos equiprobables en 0 y en +3, con un ruido con densidad de potencia espectral 0.5. ¿Cuál es la probabilidad de error de símbolo?

- $Q(3/\sqrt{0.5})$ .
- $Q(3/0.5)$ .
- $Q(1.5/\sqrt{0.5})$ .

$$P_{\text{Error}} = \int_{-\infty}^{+1.5} f_{\text{Received}}(q|a_0) dq = \int_{-\infty}^{+1.5} \frac{p}{\sqrt{N_0/2}} e^{-\frac{(q-a_0)^2}{N_0/2}} dq = Q\left(\frac{1.5}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Comentarios: En sistemas binarios la probabilidad de error de símbolo la proporciona  $Q(x)$  evaluada en la semidistancia que separa los símbolos normalizada con la desviación estándar del ruido. La densidad de potencia espectral es igual a la varianza del ruido en el espacio de señal, y su desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza ( $\sqrt{0.5}$ ). La distancia es 3, y la semidistancia es 1.5. Por tanto, la respuesta correcta es la (c).

10. La relación entre probabilidad de error de símbolo, energía promedio del símbolo y densidad de potencia espectral del ruido depende de:

- Las señales elegidas para la base ortonormal.
- De la constelación de vectores en el espacio de señal.
- Ambas respuestas son correctas.

Comentarios: Cuando se presenta el "canal discreto equivalente", se justifica que el análisis de las señales, energías, probabilidades de error y en general del comportamiento del sistema de comunicación digital depende exclusivamente del comportamiento en el espacio de señal, y por tanto, si cambiamos las señales usadas para la base ortonormal, el comportamiento del sistema, en cuanto a probabilidades de error y su relación con la energía promedio de símbolo y densidad de potencia espectral del ruido es invariante. Dicho de otro modo, si cambiamos las señales de la base, pero no cambiamos la constelación, la métrica en el espacio de señal es invariante y la probabilidad de error no cambia. De este modo, la respuesta (a) es falsa. Por otra parte, la constelación condiciona fuertemente la probabilidad de error. Por tanto la respuesta

correcta es la (b).

11. En un demodulador basado en filtros adaptados:

- a. La salida del filtro se debe integrar entre 0 y T.
- b. La salida del filtro se debe muestrear en T.
- c. La salida del filtro es mínima para el filtro correspondiente al símbolo más probable.

Comentarios: En un demodulador de filtros adaptados, para obtener el producto escalar  $\langle r(t), \phi_n(t) \rangle$  se construye el filtro adaptado con respuesta impulsiva  $h_n(t)$  del siguiente modo: se invierte el eje temporal en la señal  $\phi_n(t)$  y se retarda un periodo T para que  $h_n(t)$  sea causal. Si tomamos la salida en  $t=T$ , la salida del filtro adaptado coincide con la integral de correlación. La respuesta correcta es la (b). La respuesta (a) es incorrecta, pues la salida del filtro no debe integrarse (si el demodulador lo implementamos con un correlador, usando un multiplicador y un integrador, sí que debemos integrar entre 0 y T, pero no en el caso de la implementación basada en filtros adaptados). La respuesta (c) es también incorrecta. En general no se utiliza un filtro por cada símbolo, sino un filtro por cada dimensión. Además, si se hiciera un filtro adaptado a cada señal transmitida  $s_i(t)$ , el símbolo más probable se determinaría teniendo en cuenta los observables generados con los distintos filtros, y maximizando las probabilidades (según el criterio MAP o ML) y en todo caso, el símbolo más probable tendería a ser aquél cuyo filtro proporciona la salida máxima.

12. La probabilidad de error de símbolo para un sistema binario equiprobable se calcula:

- a. Evaluando  $Q(x)$  en la semidistancia dividida por la varianza del ruido.
- b. Evaluando  $Q(x)$  en la semidistancia dividida por la desviación estándar del ruido.
- c. Evaluando  $Q(x)$  en la semidistancia dividida por la mitad de la varianza del ruido.

Comentarios: La probabilidad de error para el primer símbolo es la integral de cola de la gaussiana, desde la frontera hasta  $+\infty$ . La frontera está situada en el punto medio entre los dos símbolos, es decir, si los símbolos están separados una distancia d y el símbolo está situado en  $a_0$ , debemos integrar desde  $a_0+d/2$  hasta  $+\infty$ . La función  $Q(x)$  es la integral desde x hasta  $+\infty$  de una distribución normal (de media 0 y desviación estándar 1). Para transformar la integral de la gaussiana asociada al símbolo (de media  $a_0$  y desviación estándar la del ruido) en una distribución normal de probabilidad debemos restar la media y dividir por la desviación estándar, de modo que debemos evaluar  $Q(x)$  en  $x=(a_0+d/2 - a_0)/\sigma = (d/2)/\sigma$ , es decir, en la semidistancia dividida por la desviación estándar del ruido. La probabilidad de error de ambos símbolos es la misma por simetría, de modo que la probabilidad de error total sería:

$$0.5 Q((d/2)/\sigma) + 0.5 Q((d/2)/\sigma) = Q((d/2)/\sigma)$$

y la respuesta correcta es, por tanto, la (b).

13. El decisor ML proporciona como símbolo recibido:

- a. Aquél para el que la probabilidad de símbolo dada la observación es máxima.
- b. Aquél para el que la probabilidad de observación dado el símbolo es máxima.
- c. Aquél para el que la probabilidad a priori de símbolo es máxima.

Comentarios: El decisor ML proporciona el símbolo más probable dada la observación asumiendo que los símbolos son equiprobables. Bajo esta suposición, el símbolo más probable dada la observación es también aquél para el cual es máxima la probabilidad de la observación  $q$  dado el símbolo. La respuesta correcta es, consecuentemente, la (b). La respuesta (a) sería válida si los símbolos son equiprobables. Sin embargo, usar un criterio ML implica suponer que los símbolos son equiprobables en el criterio de decisión, no que lo sean realmente (se puede usar un decisor ML, por simplicidad, aun no siendo los símbolos equiprobables). Esto hace que la respuesta (a) no sea en general correcta. La respuesta (c) no tiene mucho sentido (supondría que el decisor proporciona siempre el mismo símbolo sin atender a las observaciones).

14. Comparemos dos sistemas de comunicación digital que transmiten símbolos binarios. El primero representa el símbolo  $b_0$  con una señal  $\phi_0(t)$  y el símbolo  $b_1$  con una señal  $-\phi_0(t)$ . El segundo representa el símbolo  $b_0$  con una señal  $2\phi_0(t)$  y el símbolo  $b_1$  con una señal nula. ¿Cuál de ellos ofrece un mejor rendimiento, en términos de probabilidad de error y energía por símbolo?
- El primero.
  - El segundo.
  - Los dos ofrecen el mismo rendimiento.

Comentarios: En ambos casos tenemos un sistema binario unidimensional. La distancia entre los símbolos es igual ( $d=2$  en ambos casos), y por tanto, para un mismo nivel de ruido, ambos presentan la misma probabilidad de error de símbolo o el mismo BER. Sin embargo, el primero tiene una energía promedio de símbolo 1, mientras que el segundo tiene una energía promedio de símbolo 2. Por ello, si evaluamos el rendimiento teniendo en cuenta la probabilidad de error y la energía por símbolo, el primero es más eficiente y la respuesta correcta es la (a).

15. Para obtener el observable  $q_i$  correspondiente a la señal  $\phi_i(t)$  de la base, ¿cómo se obtiene la respuesta impulsiva del filtro adaptado en el demodulador?
- Se obtiene invirtiendo el eje de tiempo de  $\phi_i(t)$  y normalizando su amplitud. La salida debe muestrearse en  $t=T$  donde  $T$  es el periodo de símbolo.
  - Se obtiene invirtiendo el eje de tiempo de  $\phi_i(t)$  y retardando un periodo de símbolo. La salida debe muestrearse en  $t=T$  donde  $T$  es el periodo de símbolo.
  - Se obtiene haciendo la transformada inversa de Fourier de  $1/\phi_i(t)$ . La salida debe muestrearse en  $t=T$  donde  $T$  es el periodo de símbolo.

Comentarios: Para que el filtro adaptado proporcione una salida idéntica al correlador, es preciso que la respuesta impulsiva sea una versión de la señal  $\phi_i(t)$  con una inversión del eje temporal. Se debe desplazar la respuesta impulsiva un periodo de símbolo  $T$  para evitar que el filtro sea no causal y tomar la salida en el instante  $t=T$ . (Alternativamente, podemos considerar que no se retarda la respuesta impulsiva y tomamos la salida en  $t=0$ , consideración que puede ser útil desde el punto de vista teórico por simplificar algunas expresiones, pero que no permite una implementación real por dar lugar a un filtro no causal). La respuesta correcta es, por tanto, la (b). La respuesta (a) no puede ser correcta: es cierto que se invierte el eje de tiempo de  $\phi_i(t)$ ; no es necesario realizar la normalización (se supone que una base ortonormal y en cualquier caso, si no se normaliza, el efecto es que el observable  $q_i$  aparece escalado); lo que invalida la respuesta es que se indica que debe muestrearse en  $t=T$  sin que se haya retrasado la respuesta impulsiva, y si esto se hace así no obtenemos la correlación. La respuesta (c) no tiene mucho sentido.

*VAM*

**Comunicaciones II – 3º GIT – Grupo B Tema 2: “Modulación y detección en canales gaussianos”**

Apellidos y nombre: \_\_\_\_\_ DNI: \_\_\_\_\_

1. En un sistema binario unidimensional, con símbolos equiprobables en -1 y en +1, con un ruido con densidad de potencia espectral 0.25. ¿Cuál es la probabilidad de error de símbolo?
  - a.  $Q(1/\sqrt{0.25})$ .
  - b.  $Q(1/0.25)$ .
  - c.  $Q(2/\sqrt{0.25})$ .

Comentarios: En sistemas binarios la probabilidad de error de símbolo la proporciona  $Q(x)$  evaluada en la semidistancia que separa los símbolos normalizada con la desviación estándar del ruido. La densidad de potencia espectral es igual a la varianza del ruido en el espacio de señal, y su desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza ( $\sqrt{0.25}$ ). La distancia es 2, y la semidistancia es 1. Por tanto, la respuesta correcta es la (a).

2. ¿Qué diferencia hay entre un demodulador basado en correladores y un demodulador basado en filtros adaptados?
  - a. El primero es más preciso pero el segundo más sencillo de implementar.
  - b. Son equivalentes en cuanto a resultado, aunque la implementación es diferente.
  - c. El segundo es más preciso, pero el primero es más sencillo de implementar.

Comentarios: La misión del demodulador es proporcionar, a partir de la señal recibida  $r(t)$ , un conjunto de observaciones  $q$  (una observación vectorial en el espacio de señal), que permitan detectar de forma óptima cuál fue el símbolo transmitido. Para ello, se calcula el producto escalar  $\langle r(t), \phi_n(t) \rangle$  para cada señal de la base, esto es, la correlación entre ambas señales (la integral entre 0 y T del producto de ambas señales). Este producto escalar puede obtenerse mediante el filtro adaptado a  $\phi_n(t)$ , cuya respuesta impulsiva  $h_n(t)$  se obtiene invirtiendo el eje temporal a la señal  $\phi_n(t)$ , y retardando la señal invertida un periodo T para que el filtro resultante sea causal. Si muestreamos la salida del filtro en el instante  $t=T$ , la salida del filtro (la convolución de  $r(t)$  y  $h_n(t)$ ) evaluada en dicho instante toma un valor exactamente igual a la integral de correlación, y por tanto ambas implementaciones son matemáticamente equivalentes. En general, la implementación basada en filtros adaptados es más eficiente en cuanto a cálculo (aunque si  $\phi_n(t)$  es un pulso rectangular la implementación basada en correladores es también sencilla), pero en cuanto al resultado ambas implementaciones son idénticas. Por tanto, por lo que respecta a la precisión, las respuestas (a) y (c) son falsas (ninguna implementación es más precisa que la otra), y la respuesta (b) es correcta.

3. En canales AWGN, la salida del demodulador óptimo es:
  - a. Una variable aleatoria centrada en el vector que representa al símbolo transmitido, con matriz de covarianza diagonal.
  - b. Una variable aleatoria centrada en el vector que representa al símbolo transmitido, de tipo gaussiana multivariada.
  - c. Ambas respuestas son correctas.

Comentarios: A la salida del demodulador (en el espacio de señal), la observación  $q$  es resultado de demodular  $r(t)=s(t)+n(t)$ , donde  $s(t)$  es la señal usada para representar el vector  $a$  (del espacio de señal) y  $n(t)$  es el ruido que ha añadido el canal. Tal y como se discutió en clases de teoría, en el espacio de señal (canal discreto equivalente) se puede expresar  $q = a + n$  donde  $a$  corresponde al símbolo transmitido y  $n$  al ruido. Este último vector es una variable aleatoria de tipo vectorial, tal que, si el conjunto de señales usadas para el modulador y el demodulador forman una base ortonormal y el ruido es AWGN, es una distribución de probabilidad de tipo gaussiana multivariada, de media nula, y cuya matriz de covarianza es diagonal con todos los elementos de la diagonal iguales a  $N_0/2$  (es decir, iguales a la densidad de potencia espectral). Puesto que dado el símbolo transmitido, el vector  $a$  toma un valor fijo, las observaciones  $q$  para un símbolo dado son una variable aleatoria de tipo vectorial, gaussianas, de media  $a$  y matriz de covarianza igual a la de  $n$ . Por tanto, la observación  $q$  es una variable aleatoria centrada en el vector que

representa al símbolo, de tipo gaussiana multivariada, con matriz de covarianza diagonal. La respuesta (a) es correcta, y la (b) también lo es, y en consecuencia, debe marcarse la respuesta (c).

Nota adicional: Dado que las opciones (a) y (b) son correctas, la selección de una de ellas no se evaluará como una respuesta incorrecta sino como una respuesta en blanco y no penalizará en la nota final.

4. En un demodulador basado en correladores, para cada observable tenemos:

- a. Un filtro y un integrador.
- b. Un correlador y un integrador.
- c. Un multiplicador y un integrador.

Comentarios: La correlación se obtiene multiplicando la señal de entrada  $r(t)$  por la función  $\phi_n(t)$  de la base e integrando el producto entre 0 y T. Por tanto, requiere un multiplicador y un integrador por cada observable y la respuesta correcta es (c). La implementación basada en filtros adaptados no requiere un integrador (la respuesta (a) es incorrecta). El integrador forma parte del correlador (la respuesta (b) es también incorrecta).

5. Para obtener el observable  $q_i$  correspondiente a la señal  $\phi_i(t)$  de la base, ¿cómo se obtiene la respuesta impulsiva del filtro adaptado en el demodulador?

- a. Se obtiene el primer filtro adaptado  $h_0(t)$  igual a  $\phi_0(t)$  y a partir de éste se genera la base ortonormal por el método de Gram-Schmidt.
- b. La respuesta impulsiva  $h_i(t)$  es una versión de  $\phi_i(t)$  con una inversión del eje temporal. Además, tenemos que retrasar la señal invertida un periodo de símbolo T para que el filtro sea causal y la salida la tomamos en  $t=T$ .
- c. La respuesta impulsiva  $h_i(t)$  es una versión de  $\phi_i(t)$  con una inversión del eje temporal. Además, tenemos que adelantar la señal invertida un periodo de símbolo T para que el filtro sea causal y la salida la tomamos en  $t=T$ .

Comentarios: Tal y como se ha visto en los comentarios a la pregunta 2, la respuesta correcta es la (b). En el proceso de demodulación, las señales  $\phi_i(t)$  se suponen conocidas y por tanto no tiene sentido hablar de construcción de una base ortonormal; además, no puede hacerse  $h_0(t)=\phi_0(t)$ ; la respuesta (a) es incorrecta. La respuesta (c) es incorrecta, porque la señal invertida debe retrasarse (no adelantarse) para que la implementación del filtro adaptado sea causal. Además, si la respuesta en lugar de retrasarla la adelantamos, en lugar de muestrear en  $t=T$  debería muestrearse en  $t=-T$ .

6. Los vectores a la salida del demodulador:

- a. Tienen la misma matriz de covarianza, independientemente del símbolo.
- b. Tienen la misma matriz de covarianza sólo si los símbolos son equiprobables.
- c. Tienen la misma media pero distinta matriz de covarianza.

Comentarios: Tal y como se ha visto en los comentarios a la respuesta 3, los vectores  $q$  a la salida del demodulador son variables aleatorias gaussianas multivariadas, cuya media es el vector  $a_i$  (correspondiente al símbolo transmitido) y cuya matriz de covarianza es la correspondiente al ruido  $n$ , es decir, una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son todos iguales a  $N0/2$  (la densidad de potencia espectral). Para los distintos símbolos, la distribución de probabilidad de los vectores es similar salvo por la media (la media viene dada por el símbolo; la matriz de covarianza viene dada por el ruido, que afecta de igual forma a todos los símbolos). Esto es además independiente de la probabilidad a priori de los símbolos, y consecuentemente es así tanto para sistemas de símbolos equiprobables como para símbolos no equiprobables. La respuesta correcta es la (a). La respuesta (b) es incorrecta por lo indicado anteriormente. La respuesta (c) es incorrecta pues la matriz de covarianza es la misma para todos los símbolos, y la media no lo es.

7. En un decisor ML la frontera de decisión entre dos símbolos es:
- El hiperplano mediatriz entre los vectores que representan a estos símbolos.
  - La hipersuperficie que verifica que la distancia de cada punto a los dos vectores que representan a los símbolos es igual.
  - Ambas respuestas son correctas.

Comentarios: En el decisor ML, la frontera entre dos símbolos es, por definición, la hipersuperficie del espacio de señal que hace que las probabilidades de la observación dados cada uno de los símbolos sean iguales. Esta condición es equivalente a hacer que se igualen las distancias de los puntos de la hipersuperficie a cada uno de los símbolos, y por tanto la respuesta (b) es correcta. Si calculamos esta hipersuperficie, resulta ser el hiperplano mediatriz entre los vectores que representan a los símbolos, de modo que la respuesta (a) es también correcta. Por ello, debe marcarse la (c).

Nota adicional: Dado que las opciones (a) y (b) son correctas, la selección de una de ellas no se evaluará como una respuesta incorrecta sino como una respuesta en blanco y no penalizará en la nota final.

8. En un sistema M-ario unidimensional con símbolos equiprobables:
- Todos los símbolos tienen la misma probabilidad de error.
  - Todos los símbolos tienen la misma probabilidad de error salvo los de los extremos, que presentan una probabilidad de error doble.
  - La probabilidad de error para cada símbolo depende de la distribución de los símbolos en la recta q.

Comentario: En un sistema M-ario unidimensional con símbolos equiprobables, normalmente los símbolos están distribuidos uniformemente en la recta q. Si este fuera el caso, los símbolos de los extremos presentan la mitad de probabilidad de error que los símbolos que no están en los extremos. Por ello, las respuestas (a) y (b) en general no son correctas. Si tenemos en cuenta que los símbolos no tienen que estar necesariamente distribuidos de forma uniforme, la probabilidad de error para cada símbolo depende de la distancia a la que se encuentran los vecinos más próximos y por tanto depende de cómo estén distribuidos los símbolos en la recta q. La respuesta correcta es la (c).  
*16.000 bits / 4 bits/símbolo*

9. Para un sistema de comunicación digital que transmite información a una tasa de 16.000 bits por segundo, ¿cuántos símbolos por segundo transmite si utiliza un alfabeto 16-ario?
- 48.000
  - 4.000
  - 1.000

Comentarios: Un sistema 16-ario transmite  $m = \log_2(16)=4$  bits por símbolo. Si la velocidad de transmisión es de 16.000 bits por segundo, y cada símbolo transmite 4 bits de información, la velocidad de transmisión de símbolos es de 4.000 símbolos por segundo:  $R_s(\text{simb/segundo}) = R_b (\text{bits/segundo}) / m(\text{bits/símbolo})$ .

10. En un decisor ML ¿se puede tomar la decisión a partir de la correlación entre el vector observado y el vector que representa a cada símbolo?
- Sí; es equivalente: basta con maximizar la correlación.
  - Sí; es equivalente, pero debe tenerse en cuenta el módulo del vector que representa a cada símbolo.
  - Sí; es equivalente, pero debe tenerse en cuenta el módulo del vector observado.

Comentario: En un sistema ML el símbolo elegido es el más cercano a la observación, es decir, aquél para el que la distancia de la observación al símbolo es mínima. Desarrollando el módulo al cuadrado del vector diferencia, se puede obtener una expresión equivalente que incluye como primer término la correlación entre el vector observado y el que representa al símbolo y un segundo término que sólo depende de la norma del vector que representa al símbolo (aparece un tercer término, la norma del vector observación, pero puede eliminarse en la maximización por ser común a todos los símbolos). Hay que maximizar la correlación pero corrigiéndola (usando para ello el módulo del vector que representa al símbolo). La respuesta correcta es por tanto la (b). La respuesta (a) resulta incompleta, y es incorrecta, pues afirma que

bastaría maximizar la correlación. La respuesta (c) no es correcta puesto que lo que debe usarse para corregir no es el módulo del vector observado.

11. La probabilidad de error de símbolo depende de:

- a. La densidad de potencia espectral del ruido y la base ortonormal elegida.
- b. La densidad de potencia espectral del ruido y la constelación.
- c. La densidad de potencia espectral del ruido y la energía promedio de símbolo.

Comentario: La probabilidad de error de símbolo para un símbolo dado depende de la integral de la distribución de probabilidad de observación dado el símbolo sobre la región en la que no se elige a este símbolo. La probabilidad de error de símbolo total es un promedio (pesado con las probabilidades a priori de los símbolos) de las probabilidades de error de símbolo para cada símbolo. La probabilidad de error de símbolo no depende de la base ortonormal elegida y por tanto la respuesta (a) no es correcta. En principio, la integral que proporciona el error depende de la densidad de potencia espectral del ruido (que condiciona la distribución de probabilidad a integrar) y de la constelación (que condiciona las fronteras en decisores ML, y que, junto con la densidad de potencia espectral y las probabilidades a priori condicionaría las fronteras en decisores MAP). Por tanto, la respuesta (b) es correcta. La respuesta (c) estrictamente hablando no es correcta: en primer lugar, la energía promedio de símbolo está condicionada por la constelación, y en segundo lugar, pueden elegirse constelaciones donde los símbolos estén colocados en posiciones que proporcionan mucho error con una energía de símbolo grande, es decir, no basta con que la energía promedio de símbolo sea grande para garantizar un comportamiento óptimo del sistema de comunicación (es necesario además elegir una constelación adecuada). Sin embargo, la redacción de la pregunta puede inducir a confusión: Fijada la constelación (salvo por un factor de escala) la probabilidad de error depende del cociente entre la energía de símbolo y la densidad de potencia espectral del ruido, y desde esta perspectiva (por otra parte habitual en la práctica), la respuesta (c) sería aceptable. Por ello, se han aceptado como correctas tanto la respuesta (b) como la (c).

12. El decisor MAP proporciona como símbolo recibido:

- a. Aquél para el que la probabilidad a priori de símbolo es máxima.
- b. Aquél para el que la probabilidad de símbolo dada la observación es máxima.
- c. Aquél para el que la probabilidad de observación dado el símbolo es máxima.

Comentarios: En un decisor MAP la decisión se obtiene maximizando la probabilidad del símbolo dada la observación (esto es equivalente a maximizar el producto de la probabilidad a priori de símbolo  $p_a(a_i)$  por la densidad de probabilidad de observación dado el símbolo  $f_{q|A}(q | a_i)$ ). Por tanto, la respuesta (b) es la correcta. No tiene sentido maximizar la probabilidad a priori del símbolo (esto conduciría a tomar decisiones sin prestar atención a las observaciones proporcionadas por el demodulador). La opción considerada en la respuesta (c) es la usada en el criterio ML, pero no es correcta para un decisor MAP.

13. El desplazamiento de la frontera en un decisor MAP con respecto a la frontera ML depende de:

- a. El logaritmo de la densidad de potencia espectral del ruido y el cociente de las probabilidades a posteriori de los símbolos involucrados.
- b. El logaritmo del cociente de probabilidades a priori de los símbolos involucrados y la densidad de potencia espectral del ruido.
- c. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Comentarios: El desplazamiento de la frontera en un decisor MAP es  $N_0 \log(p_A(a_i)/p_A(a_j))$ , donde  $N_0/2$  es la densidad de potencia espectral,  $a_i$  y  $a_j$  son los símbolos involucrados, y  $p_A(a_i)$  es la probabilidad a priori del símbolo  $a_i$ . Por tanto, la respuesta (b) es correcta.

14. En un sistema de comunicación digital que transmite 3.000 símbolos por segundo de un alfabeto octal, ¿cuál es la velocidad de transmisión en bits por segundo?
- a. 24.000      b. 9.000      c. 1.000

Comentarios: Un sistema octal transmite  $m = \log_2(8) = 3$  bits por símbolo. Si la velocidad de transmisión es de 3.000 símbolos por segundo, y cada símbolo transmite 3 bits de información, la velocidad de transmisión de bit es de 9.000 bits por segundo:  $R_s(\text{simb/segundo}) = R_b (\text{bits/segundo}) / m(\text{bits/símbolo})$ .

15. Comparemos dos sistemas de comunicación digital que transmiten símbolos binarios. El primero representa el símbolo  $b_0$  con una señal  $\phi_0(t) + \phi_1(t)$  y el símbolo  $b_1$  con una señal  $\phi_0(t) - \phi_1(t)$ , siendo  $\phi_0(t)$  y  $\phi_1(t)$  ortogonales entre sí. El segundo transmite el símbolo  $b_0$  con una señal  $\phi_0(t) + \phi_1(t)$  y el símbolo  $b_1$  con una señal  $-\phi_0(t) - \phi_1(t)$ . ¿Cuál de ellos ofrece un mejor rendimiento, en términos de probabilidad de error y energía por símbolo?
- a. El primero.  
b. El segundo.  
c. Depende de las señales  $\phi_0(t)$  y  $\phi_1(t)$ .

Comentario: Se trata de un sistema binario bidimensional. En el primer caso, los dos símbolos tienen la misma energía (2) y forman, con respecto al origen de coordenadas, un ángulo de 90º. En el segundo caso, los símbolos tienen la misma energía (de nuevo 2) pero son símbolos antipodales. En cuanto a la energía por símbolo son iguales. La distancia entre símbolos, en el primer caso, es 2, mientras que en el segundo caso es  $2\sqrt{2}$  y por tanto, al ser mayor la separación entre símbolos, para una misma densidad de potencia espectral, la segunda constelación da lugar a un error menor. Consecuentemente, el segundo sistema presenta un mejor rendimiento y la respuesta correcta es (b). La ventaja del segundo sistema es independiente de la base elegida (o de las señales usadas en el modulador).

Comunicaciones II – 3º GITT –Temas 3 y 4: "Modulaciones de amplitud/Detección en canales con ISI"  
Apellidos y nombre: \_\_\_\_\_ DNI: \_\_\_\_\_

1. Un sistema octal presenta una probabilidad de error de símbolo del 1.2%. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a. El BER es menor o igual del 1.2%.
- b. El BER es mayor o igual del 3.6%.
- c. El BER es menor o igual del 0.4%.

En un sistema octal, el número de bits por símbolo es  $m=3$ . Supongamos que la en un conjunto de  $NS$  símbolos, se producen  $NES$  errores y la probabilidad de error de símbolo es  $Pe=NES/NS$ . El número de bits es  $NB=m*NS$ . Para que un símbolo sea erróneo, es necesario que se produzca un número de errores de bit entre 1 y  $m$ . En el peor caso, el número de errores corresponde a la situación en que TODOS los bits del símbolo son erróneos, con lo que el número de errores de bit será  $NEB2=m*NES$ . En el mejor caso, únicamente se producirá un error en uno de los bits del símbolo, y entonces el número de errores de bit será  $NEB1=NES$ . La probabilidad de error de bit entonces se encontrará comprendida entre estos dos valores

$$NEB1/NB \leq Pb \leq NEB2/NB \text{ o lo que es lo mismo } NES/(m*NS) \leq Pb \leq (m*NES)/(m*NB)$$

Como  $Pe=NES/NS$ , podemos escribir  $Pe/m \leq Pb \leq Pe$  (expresión que ya derivamos en teoría)

En nuestro caso,  $Pe=1.2\%$  y  $m=3$  por lo tanto el intervalo para el error es  $1.2\%/3 \leq Pb \leq 1.2\%$  ó  $0.4\% \leq Pb \leq 1.2\%$  luego la única opción correcta es la (a)

2. En un sistema PAM en banda base, la información del símbolo transmitido se codifica en

- a. La amplitud de la señal
- b. La fase de la señal
- c. La frecuencia instantánea de la portadora

PAM son las iniciales de *Pulse Amplitude Modulation*, que alude al hecho de que la información se transmite como variaciones de la amplitud de la señal. En el caso de PAM paso-banda, podría considerarse también correcta la opción (b), pero no en el caso de PAM en banda-base para la que la única opción correcta es la (a)

3. ¿Por qué razón, en comunicaciones digitales, se suelen usar pulsos con una duración mayor al periodo de símbolo?

- a. Para aumentar la potencia de la señal transmitida.
- b. Para reducir la potencia de la señal transmitida.
- c. Para reducir el ancho de banda necesario manteniendo la tasa de símbolo.

Como se indicó en teoría, la motivación de usar pulsos con duración mayor que el periodo de símbolo es limitar el ancho de banda de la señal modulada, luego la opción correcta es la (c).

4. La eficiencia espectral de la modulación PAM con pulsos sinc() es

- a. Constante
- b. Directamente proporcional al número de bits por símbolo
- c. Directamente proporcional al número de símbolos

La eficiencia espectral se define como la velocidad de transmisión en bits por segundo por unidad de ancho de banda ocupado. Para un sistema PAM M-ario que utiliza pulsos conformadores sinc(), el ancho de banda ocupado es  $B=1/2T$  donde  $T$  es el periodo de símbolo. La velocidad de transmisión es  $Rs=1/T$  símbolos por segundo y la velocidad de transmisión en bits por segundo es  $R=Rs*\log_2(M)$  por lo tanto la eficiencia

espectral es  $R/B = R_s * \log_2(M) / (1/2T) = (1/T) * \log_2(M) * 2T = 2 * \log_2(M)$ . Como  $m = \log_2(M)$  es el número de bits por símbolo, tenemos  $R/B = 2^m$  y por lo tanto la respuesta correcta es la (b). La (c) es incorrecta porque la eficiencia resulta directamente proporcional al LOGARITMO en base 2 del número de símbolos.

5. Un pulso (incluyendo la respuesta impulsiva del filtro conformador y el filtro adaptado) que cumple el criterio de Nyquist:
- No presenta interferencia inter-simbólica.
  - Tiene una transformada de Fourier tal que la superposición de espectros desplazados  $2\pi/T$  es constante.
  - Ambas respuestas son correctas.

La respuesta correcta es la (c) dado que tanto (a) como (b) son correctas ya que (b) es resultado de formular el criterio de Nyquist de no interferencia inter-simbólica en el dominio de la frecuencia.

6. La familia de pulsos coseno remontado presenta anchos de banda en el intervalo
- $[2\pi/T, 4\pi/T]$  radianes/segundo
  - $[\pi/T, 2\pi/T]$  radianes/segundo
  - $[2\pi/T, 3\pi/T]$  radianes/segundo

La familia de pulsos coseno remontado presenta anchos de banda entre el valor mínimo  $\pi/T$  para el caso de exceso de ancho de banda nulo (pulsos sinc()) y el doble de este valor  $2\pi/T$  para el caso de exceso de ancho de banda unidad (el valor máximo) luego la respuesta correcta es la (b).

7. Suponiendo que se evita la interferencia inter-simbólica con pulsos de tipo sinc(), una vez establecido el exceso de ancho de banda, ¿cómo se construyen los filtros conformador y adaptado?
- El filtro conformador es de tipo "raíz-coseno-remontado" y el adaptado "coseno-remontado".
  - El filtro conformador es de tipo "coseno-remontado" y el adaptado "raíz-coseno-remontado".
  - Ambos filtros deben ser "raíz-coseno-remontado".

Para que un sistema no presente interferencia inter-simbólica, es necesario que el pulso combinado transmisor-receptor sea un pulso de Nyquist (un pulso de la familia coseno remontado) y dado que el filtro de recepción debe ser un filtro adaptado al pulso conformador (filtro del transmisor) ambos deben ser de tipo raíz-coseno-remontado del mismo exceso de ancho de banda de forma que la combinación de los dos pulsos resulte un pulso coseno-remontado. Luego la respuesta correcta es la (c).

El enunciado alude sin embargo a pulsos sinc(), para los que el exceso de ancho de banda es cero, y las tres respuestas serían correctas, por lo que esta pregunta se anula.

8. ¿Qué ventaja ofrece la modulación en cuadratura para comunicaciones PAM?
- Simplifica el diseño de receptores PAM con modulación en banda lateral residual.
  - Permite transmitir secuencias de símbolos con modulación en banda lateral única.
  - Permite transmitir dos secuencias de símbolos independientes usando el mismo ancho de banda que el requerido para transmitir una sola secuencia con modulación en doble banda lateral.

En un sistema PAM paso-banda, se transmiten DOS modulaciones PAM independientes sobre DOS portadoras de la misma frecuencia pero en cuadratura de fase. De esta forma, el efecto de doblar el ancho de banda que se produce al modular la señal PAM en doble banda lateral es compensado por la transmisión de doble cantidad de bits, con lo que la eficiencia espectral se mantiene igual a la de un sistema PAM en banda base. La respuesta correcta es la (c).

9. El diagrama de dispersión es

- a. Una representación bidimensional de la señal PAM paso banda transmitida
- b. Una representación de las muestras a la salida del filtro adaptado del receptor
- c. Una representación del error del sistema PAM

Como se indicó en teoría, el diagrama de dispersión es una representación de las amplitudes de los símbolos recibidos en el espacio de señal. En consecuencia lo que se representan son las muestras a la salida del filtro adaptado (amplitudes de los símbolos recibidos) y la respuesta correcta es la (b).

10. En una transmisión QPSK, ¿qué efecto tiene la interferencia inter simbólica en el diagrama de dispersión?

- a. La nube asociada a cada símbolo de la constelación aparece invertida.
- b. La nube asociada a cada símbolo de la constelación aparece girada.
- c. La nube asociada a cada símbolo de la constelación aparece dispersada en varias nubes secundarias.

La respuesta correcta es la (c). Para cada símbolo recibido, la amplitud a la salida del filtro adaptado es modificada por efecto de la interferencia inter-simbólica añadiendo un término positivo o negativo dependiendo de los símbolos transmitidos anteriormente. Luego tendremos amplitudes de la forma  $A \pm b$  donde  $b$  depende de los símbolos anteriores. Este desplazamiento provoca que cada nube en el diagrama de dispersión se subdivida en varias nubes secundarias, luego la respuesta correcta es la (c).

11. Un canal presenta una respuesta al impulso cuya dispersión temporal es 1 microsegundo; si el sistema transmite 9600 símbolos/segundo

- a. El sistema sufrirá de ISI
- b. Existirá ISI o no dependiendo de nivel de ruido del canal
- c. El sistema no presentará ISI

El canal discreto equivalente de un sistema PAM sobre un canal lineal es de  $q[n] = A[n] \oplus p[n] + z[n]$  donde  $p[n]$  es la respuesta al impulso del canal, que se obtiene muestreando la respuesta al impulso del canal  $p(t)$  en la forma  $p[n] = p(nT)$  donde  $T$  es el periodo de símbolo. Esta respuesta al impulso contiene un número de términos  $K + 1$  donde  $K = \lfloor T_p/T \rfloor$  donde  $T_p$  es la dispersión temporal. En nuestro caso  $T_p = 10^{-6}$  y  $T = 1/9600$  por lo que  $K = \lfloor T_p/T \rfloor = \lfloor 10^{-6} * 9600 \rfloor = \lfloor 0.0096 \rfloor = 0$  y por lo tanto la respuesta al impulso del canal discreto equivalente únicamente contiene el término  $p[0]$  y no provoca interferencia inter-simbólica. Luego la respuesta correcta es la (c). Sin considerásemos velocidades de transmisión superiores si que podría existir ISI. Por ejemplo si considerásemos una velocidad de transmisión de  $2 \times 10^6$  símbolos/segundo, tendríamos  $T = 1/2 \times 10^6$  y  $K = \lfloor T_p/T \rfloor = \lfloor 10^{-6} * 2 \times 10^6 \rfloor = 2$  y el sistema provocaría ISI debida a los dos símbolos transmitidos con anterioridad.

12. El nivel de ISI ( $\gamma_{ISI}$ ) depende de:

- a. La respuesta al impulso del canal discreto equivalente  $p[n]$ .
- b. La constelación usada.
- c. Ambas.

El nivel de ISI se define como el cociente entre la distorsión de pico (que depende de la respuesta al impulso del canal discreto equivalente  $p[n]$ ) y del parámetro de la constelación  $\eta$ , luego la respuesta correcta es la (c).

13. La estrategia óptima de detección en canales con ISI:

- a. Consiste en detectar conjuntamente la secuencia completa de símbolos.  
b. Tiene una complejidad que crece con el cuadrado del número de símbolos de la constelación.  
c. Tiene una complejidad que crece con el logaritmo de la longitud de la secuencia de símbolos.

Un canal con ISI presenta "memoria", por lo que no es posible una decodificación óptima símbolo-a-símbolo. En su lugar es necesario considerar la DECODIFICACIÓN DE SECUENCIAS DE SÍMBOLOS completas para tener en cuenta la interferencia-inter-simbólica. La respuesta correcta es la (a).

14. En el diseño de un filtro igualador el criterio óptimo de diseño es

- a. El criterio de cero forzado  
b. El criterio MSE  
c. Los dos son equivalentes

El criterio de cero forzado no tiene en cuenta el ruido del canal y por lo tanto es únicamente óptimo si no existe ruido en el canal. En el caso general, el criterio MSE es el óptimo ya que tiene en cuenta simultáneamente la respuesta al impulso del canal y el ruido. La respuesta correcta es la (b).

15. En ausencia de filtro igualador y para una detección basada en una única observación, ¿cuál es la estrategia de decisión óptima?

- a. Usar la observación actual para estimar el símbolo actual.  
b. Usar la observación actual para estimar el símbolo transmitido hace "d" períodos, donde "d" es el valor que maximiza  $|p[d]|$ .  
c. Usar la observación actual para estimar el símbolo transmitido hace "d" períodos, donde "d" es el valor que minimiza  $|p[d]|$ .

La respuesta correcta es la (b). A la salida del canal discreto equivalente, las observaciones son de la forma

$$q[n] = \sum_{k=0}^K p[k]A[n-k] + z[n]$$

o en la forma  $q[n] = p[0]A[n] + p[1]A[n-1] + \dots + p[d]A[n-d] + \dots + p[K]A[n-K] + z[n]$  de todos estos términos  $q[n]$  contiene mayor información sobre  $p[d]A[n-d]$  si  $p[d]$  es el valor máximo de los términos de la respuesta al impulso.

16. El diseño de filtros igualadores por descenso en gradiente es en general:

- a. Más costoso computacionalmente que el basado en una solución de mínimos cuadrados.  
b. Menos costoso computacionalmente que el basado en una solución de mínimos cuadrados.  
c. Igual de costoso computacionalmente que el basado en una solución de mínimos cuadrados, aunque proporciona una solución más exacta.

El diseño es mucho menos costoso debido a que se eliminan los productos e inversiones de matrices necesarios en la solución de mínimos cuadrados, por lo tanto la respuesta correcta es la (b).

17. ¿Cuántos símbolos piloto son necesarios para estimar una canal discreto equivalente modelado con un sistema FIR de orden K?

- a. Al menos K símbolos para tener tantas ecuaciones como incógnitas, aunque es preferible un mayor número para lograr una mejor estimación.
- b. Al menos  $2K+1$  símbolos para tener tantas ecuaciones como incógnitas, aunque es preferible un mayor número para lograr una mejor estimación.
- c. Exactamente  $K+1$  símbolos porque si no, la matriz de la ecuación no es cuadrada y no es invertible.

El sistema de ecuaciones resultante para la estimación de los K coeficientes de la respuesta al impulso de un canal es de  $N - K$  ecuaciones con  $K + 1$  incógnitas siendo  $N$  el número de símbolos piloto utilizados. Por lo tanto es necesario que  $N - K \geq K + 1$  o equivalentemente  $N \geq 2K + 1$  por lo que la respuesta correcta es  $2K + 1$

**Comunicaciones II – 3º GITT –Tema 5: “Modulaciones de fase y frecuencia” (16/01/2014)**

1. ¿Qué ventajas ofrecen las modulaciones de fase y frecuencia frente a las modulaciones de amplitud?
  - a. Son modulaciones de envolvente constante.
  - b. Son modulaciones robustas a no linealidades del canal.
  - c. Ambas respuestas son correctas.

Las modulaciones de fase y frecuencia son modulaciones de envolvente constante, y este es el motivo de que sean robustas frente a no linealidades del canal. Por lo tanto las dos primeras respuestas son correctas. Y en consecuencia la opción correcta es la (c).

2. ¿Cómo funcionan los esquemas de modulación OQPSK?

- a. Retrasando el cambio de una de las componentes ( $s_i(t)$  o  $s_q(t)$ ) un periodo de símbolo.
- b. Retrasando el cambio de una de las componentes ( $s_i(t)$  o  $s_q(t)$ ) medio periodo de símbolo.
- c. Retrasando el cambio de una de las componentes ( $s_i(t)$  o  $s_q(t)$ ) dos periodos de símbolo.

En la modulación OQPSK la componente en cuadratura se retrasa medio periodo de símbolo. De esta forma la componente en fase únicamente puede cambiar al principio del símbolo y la componente en cuadratura a la mitad del símbolo, evitando así un cambio simultáneo en las dos componentes que provocaría un salto instantáneo de fase de  $\pi$ . Luego la respuesta correcta es la (b).

3. Teniendo en cuenta que para una señal de radio de 1 GHz la longitud de onda es 30 cm, ¿qué efecto tiene un desplazamiento de 5 cm del receptor con respecto a un transmisor fijo?

- a. La portadora se desplaza 200 kHz.
- b. La fase se desplaza 60º.
- c. La fase se desplaza 30º.

El retardo correspondiente a una distancia  $d$  es  $\tau = d/c$ . Y la fase correspondiente a este retardo es  $\phi = w_c \tau$  o lo que es lo mismo  $\phi = 2\pi f_c d/c$  donde  $f_c$  es la frecuencia portadora y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Sustituyendo los valores obtenemos  $\phi = 2\pi \times 10^9 \times 5 \times 10^{-2} / 3 \times 10^8 = \pi/3 = 60^\circ$ .

De otra forma: un desplazamiento de una longitud de onda corresponde a un desfase de  $2\pi$ . En este caso un desplazamiento de 5 cm corresponde a  $5/30$  longitudes de onda que a su vez corresponde a un desfase de  $2\pi \times 5/30 = \pi/3 = 60^\circ$ . La respuesta correcta es la (b).

4. ¿Qué esquema presenta una mayor probabilidad de error, PSK o PSK diferencial detectada coherente mente?

- a. Ambos presentan la misma probabilidad de error.
- b. PSK diferencial presenta una probabilidad de error aproximadamente la mitad, porque cuando el primer decisor comete un error, la mitad de los casos los recupera el segundo decisor.
- c. PSK diferencial presenta una probabilidad de error aproximadamente doble, porque cuando el primer decisor comete un error afecta a dos símbolos consecutivos.

La probabilidad de error de PSK y PSK diferencial detectada coherente mente es (considerando la decodificación bit a bit) la misma. Sin embargo en PSK diferencial el receptor debe deshacer la codificación diferencial introducida por el transmisor. Esto hace que un error en un bit afecte a dos bits consecutivos, lo que dobla aproximadamente la probabilidad de error. La respuesta correcta es la (c).

5. ¿Cuáles son las principales diferencias entre PSK diferencial y DPSK?

- a. El PSK diferencial requiere una demodulación coherente y el DPSK realiza una demodulación diferencial no coherente.
- b. En el PSK diferencial la probabilidad de error es aproximadamente doble que en PSK; en DPSK la probabilidad de error es igual a la de un sistema PSK con una SNR 3 dB menor.
- c. Ambas respuestas son correctas.

El término DPSK se refiere a una modulación PSK diferencial detectada no coherentemente. Como vimos en teoría, la probabilidad de error de PSK diferencial es aproximadamente el doble que la de PSK coherente; y la probabilidad de error de DPSK es aproximadamente la misma que la de PSK coherente con un valor  $E_b/N_0$  3 dB menor. Luego los dos primeros enunciados son válidos y la respuesta correcta es la (c).

6. ¿Cuál es la condición para que un sistema FSK sea de fase continua (CPFSK)?

- a. Las frecuencias usadas para representar los símbolos tienen que ser múltiplos enteros del inverso del periodo de símbolo.
- b. Las frecuencias usadas para representar los símbolos tienen que ser múltiplos enteros del periodo de símbolo.
- c. Las frecuencias usadas para representar los símbolos tienen que ser múltiplos semienteros del inverso del periodo de símbolo.

Para obtener un sistema FSK de fase continua es necesario seleccionar las frecuencias de las portadoras como múltiplos enteros de la inversa del periodo de símbolo. Si elegimos frecuencias para las portadoras como múltiplos semienteros de la inversa del periodo de símbolo podemos construir un sistema FSK ortogonal pero no de fase continua. La respuesta correcta es la (a).

7. ¿Qué diferencias hay entre los espectros de una señal CPFSK y de una señal FSK que no sea de fase continua?

- a. La parte discreta del espectro presenta más líneas en la señal CPFSK.
- b. La parte discreta del espectro presenta menos líneas en la señal CPFSK.
- c. Ambas señales presentan un espectro discreto igual.

El espectro de una señal FSK en general es la suma de un espectro continuo y un espectro discreto. Para un sistema de fase continua CPFSK, el espectro discreto únicamente presenta líneas en las frecuencias de las portadoras, mientras que si la fase no es continua, entonces aparecen más líneas en el espectro discreto. Luego la respuesta correcta es la (b).

8. Las señales que representan a cada símbolo en una transmisión CPFSK ¿son ortogonales entre sí?

- a. Sí, siempre.
- b. No, nunca.
- c. A veces; depende de las frecuencias elegidas para cada símbolo.

La condición de fase continua garantiza además la ortogonalidad de las portadoras, luego la respuesta correcta es la (a).

9. ¿Cuántas dimensiones tiene el espacio de señal para una transmisión CPFSK octal?

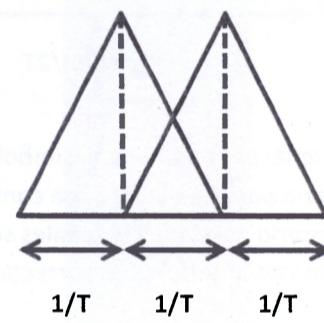
- a. 3.
- b. 4.
- c. 8.

En una modulación CPFSK todas las señales son mutuamente ortogonales, luego la dimensión del espacio de señal coincide con el número de señales, en este caso 8. La respuesta correcta es la (c).

10. ¿Cuál es el mínimo ancho de banda del lóbulo principal del espectro de una señal CPFSK binaria?

- a.  $\Delta\omega=4\pi/T$ .
- b.  $\Delta\omega=6\pi/T$ .
- c.  $\Delta\omega=12\pi/T$ .

La mínima separación en frecuencia para CPFSK es  $1/T$ . A esta separación hay que sumar el semiancho de banda a cada lado de los lóbulos principales de las señales moduladas sobre los dos tonos, cuyo valor es  $1/2T$ . Por lo que el ancho de banda total es  $3/2T$ . O en frecuencia angular  $2\pi/3T = 6\pi/T$ . La respuesta correcta es la (b).



11. ¿Qué ventaja presenta la modulación MSK frente a la modulación CPFSK?

- a. Menor número de líneas en el espectro discreto.
- b. Menor ancho de banda.
- c. Ambas respuestas son correctas.

La denominación MSK se refiere a una modulación FSK de mínimo ancho de banda. Por lo tanto la respuesta correcta es la (b).

12. ¿Cuántas señales se asignan a cada símbolo en una modulación MSK?

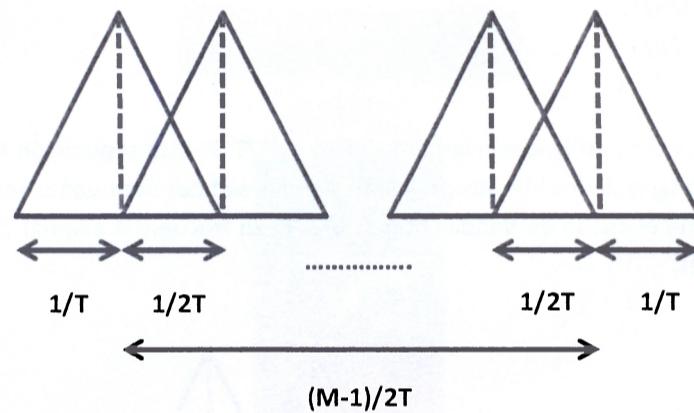
- a. 1.
- b. 2.
- c. 3.

Para que la modulación MSK binaria sea de fase continua es necesario utilizar una fase 0 ó  $\pi$  en cada uno de los tonos, luego se usan en realidad dos señales para cada símbolo. La respuesta correcta es la (b).

13. ¿Cuál es el mínimo ancho de banda del lóbulo principal del espectro de una señal MSK octal?

- a.  $\Delta\omega=7\pi/T$ .
- b.  $\Delta\omega=11\pi/T$ .
- c.  $\Delta\omega=19\pi/T$ .

La separación de frecuencia entre los tonos MSK es  $1/2T$ . El ancho de banda se puede calcular como  $1/T + (M - 1)/2T + 1/T = (M + 3)/2T$ . O en frecuencia angular  $2\pi(M + 3)/2T = \pi(M + 3)/T$  y en el caso octal el valor es de  $11\pi/T$ . Luego la respuesta correcta es la (b).



14. ¿Cómo se elige la fase de la señal asignada a cada símbolo en una modulación MSK?:

- a. 0 o  $\pi$ , el valor necesario para que la fase sea continua.
- b. 0 o  $\pi/2$ , el valor necesario para que las señales sean siempre ortogonales.
- c. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

Para cada símbolo, el modulador MSK elige un tono de la frecuencia correspondiente y amplitud +1 ó -1 para garantizar la continuidad de fase, lo que equivale a seleccionar una fase 0 ó  $\pi$ . La respuesta correcta es la (a).

15. ¿Qué ventaja tienen los detectores no coherentes frente a los coherentes en modulación FSK?

- a. Son menos sensibles al ruido.
- b. No se ven afectados por desplazamientos de fase de la señal transmitida.
- c. Ambas respuestas son correctas.

El término detección no coherente se refiere a un demodulador que no necesita una referencia de fase para demodular una señal con desplazamiento de fase o de frecuencia. En consecuencia estos sistemas no se ven afectados por desplazamientos de fase de la señal transmitida. La respuesta correcta es la (b).

Comunicaciones II – 3º GITT –Temas 6 y 7: “Comparativa”, “Codificación de canal”

Apellidos y nombre: \_\_\_\_\_ DNI: \_\_\_\_\_

1. ¿Qué sistemas ajustan mejor el límite de Shannon en la región de alta eficiencia espectral?

- a. Los sistemas QAM.
- b. Los sistemas PSK.
- c. Los sistemas FSK.

Los sistemas QAM y PSK aumentan su eficiencia espectral con el tamaño de la constelación, a diferencia de los sistemas FSK ortogonales que la disminuyen. Por otra parte, los sistemas QAM y PSK necesitan un mayor valor de  $E_b/N_0$  para mantener la probabilidad de error al aumentar el tamaño de la constelación, siendo los sistemas QAM los que presentan un mejor comportamiento, en consecuencia la respuesta correcta es la (a).

2. ¿Cuál de los siguientes sistemas requiere un menor valor  $E_b/N_0$  para un determinado BER?

- a. 2-FSK.
- b. 8-FSK.
- c. 32-FSK.

Los sistemas FSK ortogonales permiten reducir el valor  $E_b/N_0$  manteniendo la probabilidad de error al aumentar el tamaño de la constelación, luego la respuesta correcta es la (c).

3. ¿Qué efecto tiene la aplicación de técnicas de codificación de canal sobre los sistemas de comunicación digital?

- a. Aumentan la eficiencia espectral y la robustez frente al ruido.
- b. Permiten al sistema alejarse del límite de Shannon.
- c. Mejoran la robustez del sistema frente al ruido, a costa de una reducción de la eficiencia espectral.

Las técnicas de codificación de canal permiten una mayor robustez frente al ruido aumentando la tasa de bits por segundo del sistema, lo que aumenta el ancho de banda ocupado y en consecuencia reduciendo la eficiencia espectral, luego la respuesta correcta es la (c).

4. ¿En qué consisten las técnicas de codificación del canal basadas en secuencias estructuradas?

- a. A cada palabra de bits a transmitir se le asigna una palabra de menor número de bits y el decisor opera sobre las formas de onda resultantes.
- b. A cada palabra de bits a transmitir se le asigna una palabra con mayor número de bits y el decisor opera sobre las formas de onda resultantes.
- c. A cada palabra a transmitir se le asigna una palabra con mayor número de bits, el decisor opera bit a bit, y la secuencia de bits del mensaje se obtiene a partir del bloque de bits a la salida del decisor.

Las técnicas de codificación de canal basadas en secuencia estructuradas añaden bits redundantes a cada bloque de bits de datos. El receptor opera sobre los bits a la salida del detector, utilizando los bits redundantes para detectar y/o corregir los posibles errores de transmisión. La respuesta correcta es la (c).

5. ¿Qué inconveniente práctico presentan las técnicas de codificación de canal basadas en códigos ortogonales?

- a. Reducen la robustez al ruido, puesto que la separación entre símbolos empeora.
- b. Producen un aumento exponencial de las necesidades de ancho de banda con el número de bits de datos.
- c. Aparecen ambos inconvenientes.

Los códigos ortogonales sustituyen cada bloque de  $k$  bits de datos por un bloque codificado que contiene  $2^k$  bits con lo que el tamaño del bloque de datos, la velocidad de transmisión y el ancho de banda aumentan en un factor  $2^k/k$  exponencial con  $k$ . La respuesta correcta es la (c).

6. ¿Qué ventaja ofrecen las técnicas de codificación de canal basadas en secuencias estructuradas con respecto al sistema sin codificación de canal?

- a. Permiten la detección de errores.
- b. Permiten la corrección de errores.
- c. Pueden permitir detección y/o corrección de errores dependiendo de cómo se configuren.

La utilización de secuencias estructuradas permite al receptor detectar y/o corregir errores de transmisión del canal. La respuesta correcta es la (c).

7. ¿Qué tipo de errores pueden detectarse con un código de verificación simple de paridad?

- a. Errores en un número impar de bits de la palabra codificada.
- b. Errores en un número par de bits de la palabra codificada.
- c. Errores de un bit en la palabra de datos.

Un código de verificación simple de paridad permite detectar todos los patrones de error que contengan un número impar de errores dado que en esta situación se invierte la paridad de las palabras del código y por lo tanto el receptor es capaz de detectar que se han producido errores en la transmisión. La respuesta correcta es la (a).

8. ¿Cómo afecta la inclusión de un bit de paridad al ancho de banda de la transmisión?

- a. Se incrementa el ancho de banda en un factor  $(k+1)/k$  porque pasamos de palabras de  $k$  bits a palabras de  $(k+1)$  bits.
- b. Se decrementa el ancho de banda en un factor  $k/(k+1)$  porque las palabras de  $(k+1)$  bits sólo tienen  $k$  bits de datos.
- c. Se duplica el ancho de banda, porque pasamos de  $2^k$  palabras a  $2^{k+1}$  palabras.

En un código de verificación simple de paridad el valor  $(n, k) = (k + 1, k)$  implica una razón del código  $k/(k + 1)$  lo que implica un aumento en la velocidad de transmisión y consecuentemente en el ancho de banda proporcional a su inversa  $(k + 1)/k$ . La respuesta correcta es la (a).

9. Indique cuál de los siguientes códigos puede corresponder a un código rectangular.

- a. (23,13).
- b. (25,16).
- c. (17,16).

Un código rectangular es de la forma  $(n, k) = ((M + 1)(N + 1), NM)$  con  $N$  y  $M$  enteros. Por lo tanto la única respuesta correcta es la (b) para los valores  $M = N = 4$ .

10. ¿Es posible diseñar códigos de bloque que permitan detectar todos los posibles errores?

- a. Sí.
- b. No.
- c. Sí, pero requiere triplicar el ancho de banda y usar bloques de gran tamaño y esto no resulta práctico.

No es posible en ningún caso. Un código  $(n, k)$  tiene  $2^{n-k}$  síndromes y el número de posibles patrones de error en un bloque de  $n$  bits es  $2^n$ . Dado que  $n > k$ ,  $2^{n-k} < 2^n$  y no es posible corregir todos los posibles patrones de error. La respuesta correcta es la (b).

11. ¿Cuál es el criterio óptimo para decodificación hard de códigos de bloque si las palabras son equiprobables?

- a. La palabra decodificada  $u_i$  es aquella cuya distancia de Hamming a la palabra recibida  $r$  es mínima.
- b. La palabra decodificada  $u_i$  es aquella cuya distancia de Hamming a la palabra recibida  $r$  es máxima.
- c. La palabra decodificada se puede obtener únicamente si la distancia de Hamming  $d_H(u_i, r)$  no se anula para ninguna palabra codificada  $u_i$ .

Como mostramos en teoría, el detector óptimo en decodificación HARD es el de mínima distancia de Hamming, luego la respuesta correcta es la (a).

12. ¿Cómo se obtiene el síndrome en un código de bloque lineal sistemático?

- a. Aplicando la transpuesta de la matriz de verificación de paridad sobre la palabra recibida.
- b. Aplicando la matriz de generación sobre la palabra recibida.
- c. Extrayendo los bits de datos a la palabra recibida y aplicándole a éstos la matriz de verificación.

Para un código de bloque lineal, el síndrome se define como el producto del vector de bits correspondiente a la palabra recibida multiplicado por la transpuesta de la matriz de verificación de paridad, luego la respuesta correcta es la (a).

13. Para un código de bloque lineal (7,4) el número de síndromes distintos es

- a. 8
- b. 16
- c. 128

El síndrome de un código de bloque lineal  $(n, k)$  contiene  $(n - k)$  bits (los bits de paridad), luego el número de síndromes diferentes es  $2^{n-k}$ . Para un código (7,4) es  $2^{7-4} = 2^3 = 8$ . La respuesta correcta es la (a).

14. ¿Cuál es la definición de un código perfecto?

- a. Es aquél que permite detectar y corregir todos los patrones de error de un máximo de  $t$  errores y ninguno más.
- b. Es aquél que permite detectar y corregir todos los patrones de error.
- c. Es aquél capaz de corregir todos los patrones de error de un máximo de  $t$  errores y detectar todos los patrones de error.

La definición de un código perfecto es el enunciado (a).

15. ¿Cómo se implementan en la práctica los códigos cíclicos para reducir los requerimientos de cálculo y memoria?

- a. Mediante operaciones matriciales binarias.
- b. Mediante operaciones matriciales en lógica entera.
- c. Mediante registros de desplazamiento y operaciones XOR bit a bit.

La codificación en un código cíclico se implementa como producto de polinomios, y la decodificación basada en síndrome como división de polinomios. Ambas operaciones se pueden implementar utilizando registros de desplazamiento y lógica binaria. La respuesta correcta es la (c).