



## TRABAJO FIN DE GRADO

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

### Juegos de vida: simulación y caracterización

---

#### **Autor**

Daniel Jiménez López

#### **Directores**

Antonio Miguel Lallena Rojo  
Juan Antonio López Villanueva



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍAS INFORMÁTICA Y DE  
TELECOMUNICACIÓN

—  
Granada, 1 de abril de 2019

# **Juegos de vida: simulación y caracterización**

Daniel Jiménez López

**Palabras clave:**

**Resumen**

# **Games of Life: simulation and characterization**

Daniel Jiménez López

**Keywords:**

**Abstract**

# Índice general

---

|                                     |    |
|-------------------------------------|----|
| Índice general                      | 3  |
| 1 Introducción                      | 4  |
| 2 Metodología                       | 8  |
| 2.1. Marco matemático . . . . .     | 8  |
| 3 Metodología                       | 16 |
| 3.1. Nombre de la sección . . . . . | 16 |
| Bibliografía                        | 17 |

# 1 Introducción

---

El autómata celular fue inventado por von Neumann y Ulam en 1950 para estudiar el problema de hacer máquinas artificiales que se reproduzcan a sí mismas [16]. Con el fin de imitar el comportamiento de seres vivos, el diseño de dichas máquinas incluiría al espacio en el que se desarrollan representado por una malla en la que los nodos son llamados células y evolucionan simultáneamente de acuerdo a un conjunto de reglas simples. Éstas dirigen la "física" de su pequeño universo abstracto. Las reglas son locales en el sentido de que cada célula son "tiene conocimiento de aquellas células a corta distancia, su vecindario. En la construcción de Neumann el vecindario lo constituyen las células adyacentes verticales y horizontales, lo que se conoce como vecindario de Neumann o de tipo Neumann, si además se considera que las células adyacentes diagonales forman parte del vecindario, entonces pasa a nombrarse vecindario de Moore o de tipo Moore.

El juego de vida es un autómata celular propuesto por Conway en 1970 y popularizado por Martin Gardner en el mismo año [12]. Éste consiste en la evolución de una configuración inicial de células con dos estados mutuamente excluyentes, vida (1) o muerte (0), en una malla rectangular infinita dos dimensional. Dicha evolución viene dada por un conjunto de reglas que se aplican simultáneamente a todas las células considerando su vecindario de tipo Moore. Dada una célula viva, ésta continua viviendo si en su vecindario hay 2 o 3 células, en otro caso muere y dada una célula muerta, nace si tiene 3 células en su vecindario.

La elección de las reglas de evolución parecería a priori aleatoria, sin embargo, Conway perseguía con ellas obtener el siguiente comportamiento [14]:

- No debe de haber una configuración inicial de reglas para las cuales haya una prueba simple de que la población pueda crecer sin límite.
- Debe de haber configuraciones iniciales que aparentemente crezcan sin límite.
- Debe de haber configuraciones iniciales simples que crezcan y cambien durante un periodo considerable, llegando a tres posibles finales: des-

aparecer completamente ya sea debido a superpoblación o dispersión, estabilizarse en una configuración que se mantenga constante o entrar en un ciclo sin fin de oscilación de periodo mayor a uno.

Uno de los motivos por los que atrajo la atención de científicos de diferentes campos es la capacidad de observar como patrones complejos surgen de la aplicación de un conjunto muy simple y reducido de reglas. De esta manera comenzaron a observarse configuraciones iniciales que daban lugar a comportamientos interesantes. Tales como las de 'naves espaciales' que se desplazan sobre la malla rectangular, los 'osciladores' que retornan a su configuración inicial después de un número finito de generaciones o las 'vidas inmóviles', osciladores de periodo la unidad.

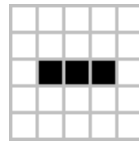


Figura 1.1: Oscilador de periodo dos nombrado 'Blinker'

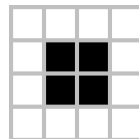


Figura 1.2: Vida inmóvil nombrada 'Block'

Ante la necesidad de realizar simulaciones en los incipientes ordenadores y se enfrentan al problema de representar una malla infinita en un ordenador con memoria finita. Para ello se propone alterar las características topológicas de la malla, imitando las de una botella de Klein, una esfera, o un toro. En particular, esta última resulta atraer gran interés, pues se obtiene evidencia de que reduce los efectos asociados a la finitud de la malla [7, 13]. Cabe destacar el estudio de la alteración de las cualidades geométricas de la malla, tales como el uso de figuras geométricas regulares diferentes al cuadrado (triángulo y hexágono) [6], teselaciones de Penrose [17] o el empleo del espacio geométrico hiperbólico [18]. Finalmente, cabe notar que existen implementaciones en las cuales no se almacena la malla en la memoria, si no que se almacena la posición de cada célula respecto a un origen de coordenadas, simulando más eficazmente una malla infinita [2].

El juego de vida también muestra interesantes características en el campo de teoría de la computación. Perteneció a la clase IV de Wolfram [15, 21] y se ha demostrado que es una máquina de Turing universal [19]. Por tanto existe una configuración inicial que simula una máquina de Turing, la cual fue extendida a una máquina universal de Turing [3]. Más recientemente en un esfuerzo colectivo, se ha implementado un ordenador con su propio lenguaje ensamblado, compilador a lenguaje de alto nivel, y sobre este último se ha implementado el conocido juego Tetris [1, 20].

Si los autómatas celulares son un modelo que representa a organismos vivos se podría pensar que la hipótesis de actualización simultánea es cuestionable. La existencia de un agente que simultáneamente aplica las reglas a todos los individuos puede hacer que el modelo se aleje demasiado de la realidad que representa. Aunque hay algunos casos en los cuales el comportamiento del autómata celular permanece constante aunque se cambie la hipótesis anterior. En esencia, estamos observando la robustez del modelo a perturbaciones de su evolución. Un modelo será robusto, si pequeños cambios en su evolución se traducirán en pequeñas perturbaciones del comportamiento global del sistema, mientras que si esta pequeña modificación produce un cambio cualitativo en la dinámica del sistema será poco robusto o simplemente sensible a las variaciones en su evolución, dicho cambio cualitativo se conoce también como transición de fase. En la literatura se plantean dos maneras diferentes de introducir la asincronicidad en la aplicación reglas de evolución [5]:

- **Evolución totalmente asíncrona:** en cada unidad de tiempo discreto, las reglas de evolución se aplican solamente a un individuo escogido aleatoriamente del conjunto de células.
- **Evolución  $\alpha$ -asíncrona:** en cada unidad de tiempo discreto, cada células tiene probabilidad  $\alpha$  de aplicar las reglas de evolución y probabilidad  $1 - \alpha$  de mantener su estado.

Estos esquemas de evolución también se conocen como **evolución guiada por pasos** y **evolución guiada por tiempo**, respectivamente [4]. Los primeros en estudiar los efectos de la evolución asíncrona frente a la evolución síncrona en el juego de vida fueron [8]. Aplicaron un esquema de evolución  $\alpha$ -asíncrona para mostrar la existencia de una transición de fase de un comportamiento 'estático', donde el sistema termina alcanzando algún punto fijo, a un comportamiento 'vívido'. Posteriormente se estudió como afectaban las variaciones en la topología de la malla a la transición de fase, concluyendo que el valor crítico de la transición de fase depende fuertemente de la regularidad de la malla [10, 11].

Hasta donde podemos saber solo se ha estudiado el comportamiento en situaciones de  $\alpha$ -asincronicidad de configuraciones iniciales aleatorias que rellenan una malla finita, obteniendo resultados que se comparan con las características conocidas del juego de vida síncrono. En este trabajo queremos caracterizar la manera en la que configuraciones iniciales bien conocidas y estudiadas como las que se muestran en las figuras 1.1 y 1.2, alteran su comportamiento en situaciones de  $\alpha$ -asincronicidad, a través de diferentes variables, tales como el número de clústeres de células diferentes por unidad discreta de tiempo, su velocidad y densidad, entre otras.



# 2

## Metodología

---

Antes de continuar con la implementación y exposición de la técnica de simulación Montecarlo es necesario introducir un marco teórico matemático que nos servirá de referencia además de establecer una base de trabajo concisa. Los formalismos nos permitirán articular la intuición de asincronismo en el esquema de actualización de autómatas celulares, cuyo homónimo biológico sería el procesamiento imperfecto de información entre individuos a causa de las perturbaciones, derivadas del medio o de la interacción de los individuos. En este trabajo nos restringimos a un caso simple de asincronismo en la actualización: examinaremos que ocurre si todas las transiciones ocurren al mismo tiempo pero los individuos reciben la información del estado de sus vecinos de forma imperfecta.

### 2.1. Marco matemático

#### Teoría de conjuntos

##### Introducción

Nos gustaría poder plasmar la intuición de que una célula tenga la misma probabilidad de ser actualizada independientemente del resto de células actualizadas en cada instante de tiempo, por ello introducimos el siguiente concepto.

##### Ultrafiltros

Dado un conjunto  $X$ ,  $P(X)$  denota el conjunto de todos los subconjuntos de  $X$ . Dado  $A \in P(X)$ , notaremos su complementario  $A^c$ .

Un ultrafiltro de  $X$  es  $U \in P(X)$  tal que:

1.  $\emptyset \notin U$ .
2. Sean  $A, B \in P(X)$  tales que  $A \subset B, A \in U$ , entonces  $B \in U$ .
3. Si  $A, B \in U$ , entonces  $A \cap B \in U$ .

4. Si  $A \in P(X)$  entonces  $A \in U$  o  $A^c \in U$ .

Además dado  $p \in X$ , el ultrafiltro  $U_p$  diremos que es principal si es el más pequeño que contiene a  $p$ , esto es, la colección de todos los conjuntos que contienen a  $p$ .

## Métodos de Monte Carlo

### Introducción

El nombre *Monte Carlo* fue acuñado por los científicos que trabajaban en el desarrollo de armas nucleares en Los Álamos en la década de los 40 para designar una clase de métodos numéricos basados en el uso de números aleatorios. La esencia reside en la invención de juegos de azar cuyo comportamiento puede ser usado para estudiar algún fenómeno de interés. Se podría pensar que el hecho de que resultados obtenidos por estos métodos estén sujetos a las leyes del azar es un problema, sin embargo, es un problema menor, puesto que se puede determinar como de exactos son sus resultados y si se deseara obtener resultados más precisos, bastaría con incrementar el número de experimentos realizados. Actualmente, los métodos de Monte Carlos juegan un papel fundamental en la resolución de problemas matemáticos complejos, en los cuales, o bien los métodos de resolución analíticos o bien los métodos numéricos existentes requieren de grandes cantidades de memoria y tiempo cómputo. Curiosamente, en su nacimiento no había ninguna relación con los ordenadores, los cuales se han presentado como la principal herramienta para la aplicación efectiva de estos métodos.

### Teoría de la probabilidad

Las definiciones de conceptos básicos de teoría de la probabilidad están extraídos de [?].

Un suceso es cualquier característica, hecho o proposición lógica que pueda formularse en relación a un experimento aleatorio, cuya ocurrencia o no pueda ser observada tras la realización del experimento.

Una  $\sigma$ -álgebra sobre un conjunto  $X$ , es una colección no vacía de subconjuntos de  $X$  cerrados para uniones numerables y para la operación de complementario, esto es:

- $\forall A \in X$  se verifica que  $A^c \in X$ .
- $\forall A_n \in X, n \in \mathbb{N}$  se verifica que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in X$ .

Una  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $X$  es la más pequeña  $\sigma$ -álgebra que contiene todos los conjuntos de  $P(X)$ .

Sea  $\mathbb{B}$  una  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$ , una medida de probabilidad, función de probabilidad o simplemente probabilidad es una función  $\mu : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  tal que:

Si  $E_1, E_2, \dots \in \mathbb{B}$  es una sucesión de conjuntos disjuntos, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

De esta manera, la probabilidad de un suceso  $E \in \mathbb{B}$  es  $\mu(E)$ .

Un espacio medible es la dupla  $(X, \mathbb{B})$  donde  $\mathbb{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $X$ . Una función medible es una función entre espacios medibles,  $g : (X, \mathbb{B}) \rightarrow (X', \mathbb{B}')$  tal que:  $\forall B \in \mathbb{B}', \quad g^{-1}(B) \in \mathbb{B}$ .

Sea  $X$  un conjunto,  $\mathbb{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $X$ ,  $P : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  una medida de probabilidad, la tupla  $(X, \mathbb{B}, P)$  es un espacio de probabilidad.

### Variables aleatorias

Una variable aleatoria es una función medible de un espacio de probabilidad  $(X, \mathbb{B}, P)$  en un conjunto  $X'$  junto con su  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathbb{B}'$ . Este último conjunto,  $X'$ , será también conocido como espacio de estados. A partir, de ahora cuando nos refiramos a una variable aleatoria entenderemos que el codominio de la función es el espacio de medida  $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ .

Dada una variable aleatoria continua  $x$  que toma valores en el intervalo  $(a, b)$ , la función de distribución acumulada de  $x$  se define como:

$$F(x) \equiv \int_b^a p(s) ds.$$

Esto es una función no decreciente de  $x$  que varía de  $F(a) = 0$  a  $F(b) = 1$ . El  $n$ -ésimo momento de  $p(x)$  se define como:

$$E(x^n) \equiv \int_b^a x^n p(x) dx.$$

El momento  $E(x^0)$  es simplemente la integral de  $p(x)$  que es 1 por definición. Sin embargo, momentos de orden no existen necesariamente, es decir, su valor puede ser infinito. El primer momento es el valor esperado o media de la variable aleatoria  $x$ .

Similarmente, si  $x$  es una variable aleatoria y  $f$  es una función real de variable real, entonces  $f(x)$  también es una variable aleatoria y el valor esperado de  $g(x)$  es:

$$E(f(x)) = \int_b^a f(x)p(x)dx.$$

Notamos que el valor esperado es lineal, como consecuencia de la linealidad de la integral. Dados  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y sean  $x, x'$  dos variables aleatorias continuas:

$$E(\lambda x + \mu x') = \lambda E(x) + \mu E(x').$$

Si el primer y segundo momento de  $p(x)$  existen, definimos la varianza de  $p(x)$  como:

$$var(x) \equiv E((x - E(x))^2) = \int_b^a (x - E(x))^2 p(x) dx = E(x^2) - E(x)^2.$$

La raíz cuadrada positiva de la varianza,  $\sigma$ , es la desviación estándar ó incertidumbre estándar. Éste valor es una medida de la dispersión de la variable aleatoria. Análogamente, la variable aleatoria  $f(x)$  se define:

$$var(f(x)) \equiv E((f(x) - E(f(x)))^2) = E(f(x)^2) - E(f(x))^2.$$

Así, para una función constante  $f(x) = c$  se tiene  $E(f(x)) = c$  y  $var(f(x)) = 0$ .

### Variables aleatorias dos dimensionales

Consideremos ahora una variable aleatoria dos dimensional  $(x, y)$ . Las marginales de  $x$  e  $y$  se definen como:

$$q(x) \equiv \int p(x, y) dy, \quad q(y) \equiv \int p(x, y) dx.$$

es decir,  $q(x)$  es la probabilidad de obtener el valor  $x$  y cualquier valor de  $y$ . La probabilidad conjunta de  $x$  e  $y$  se puede expresar en términos de las marginales anteriores:

$$p(x, y) = q(x)p(x|y) = q(y)p(y|x).$$

donde

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{q(y)}, \quad p(y|x) = \frac{p(x, y)}{q(x)}.$$

son las probabilidades de  $x$  condicionado a  $y$  e  $y$  condicionada a  $x$ , respectivamente. El valor esperado de la variable aleatoria  $(x, y)$  es :

$$E(x, y) = \int \int xy p(x, y) dx dy.$$

Análogamente, para una función  $f(x, y)$  es:

$$E(f(x, y)) = \int \int f(x, y) p(x, y) dx dy.$$

Los momentos de  $p(x, y)$  se definen como:

$$E(x^n, y^m) = \int \int x^n y^m p(x, y) dx dy.$$

En particular:

$$E(x^n) = \int \int x^n p(x, y) dx dy = \int x^n q(x) dx,$$

$$E(y^m) = \int \int y^m p(x, y) dx dy = \int y^m q(y) dy.$$

De nuevo, el único momento que necesariamente existe es  $E(x^0, y^0) = 1$ . Cuando los correspondientes momentos existen las varianzas marginales son:

$$var(x) = E(x^2) - E(x)^2, \quad var(y) = E(y^2) - E(y)^2.$$

## Generadores de números aleatorios

### Teoría de la computación

#### Introducción

Dado que el comportamiento completamente síncrono de un autómata celular como herramienta de modelado es una rareza, se han realizado numerosas investigaciones empíricas del autómata celular asíncrono. Sin embargo, los pocos análisis formales realizados o bien se refieren a ejemplos o a casos

particulares de asincronicidad. [Alguna citilla mona]. Así pues tomaremos el concepto más generalista de autómata celular m-asíncrono [9], cuya idea principal es tener algún tipo de oráculo el cual en cada unidad discreta de tiempo dice las células que tienen que ser actualizadas. Dicho oráculo se implementa empleando una medida de probabilidad  $\mu$  sobre subconjuntos de enteros  $d$ -dimensionales,  $\mathbb{Z}^d$ . Notar que la definición con la que trataremos es la extensión a espacios multidimensionales de la dada en [9].

### Autómata celular determinista

Un autómata celular determinista es un sistema dinámico discreto consistente en un array  $d$ -dimensional de autómatas finitos, llamados células. Cada célula está conectada uniformemente a un vecindario formado por un número finito de células, y tiene un estado de un conjunto finito de estados. Actualiza su estado de acuerdo a una función de transición la cual determina el estado de una célula considerando su propio estado y el de su vecindario.

Formalmente, la tupla  $A = (\mathbb{Z}^d, N, Q, f)$  es un autómata celular determinista, de ahora en adelante autómata celular, donde  $\mathbb{Z}^d$  es un espacio de células  $d$ -dimensional,  $Q$  el conjunto de estados posibles para cada célula y  $N \in (\mathbb{Z}^d)^k$  el vecindario genérico de un autómata celular, esto es, para  $N = (n_1, \dots, n_k)$ ,  $a \in \mathbb{Z}^d$  célula, cada célula en  $\{(a + n_1, \dots, a + n_k)\}$  es una célula vecina de  $a$  y  $f : Q^{k+1} \rightarrow Q$  es la función de transición local que define la transición de estado de cada célula como función de su propio estado y del estado de cada célula en su vecindario. Una configuración es una función  $g : \mathbb{Z}^d \rightarrow Q$ , la cual a cada punto del espacio  $\mathbb{Z}^d$  le asigna un estado del conjunto de estados  $Q$ , al conjunto de las configuración lo notaremos  $Q^{\mathbb{Z}^d}$ . La función de transición local, fijando una configuración  $g$  induce una función de transición global  $F : Q^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}^d}$  definida como sigue:

$$\forall x \in Q^{\mathbb{Z}^d}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad F(x)(i) = f(x(i), x(i + n_1), \dots, x(i + n_k))$$

### Autómata celular m-asíncrono

Un autómata celular m-asíncrono  $C$  es la tupla  $(A, \mu)$  donde  $A$  es un autómata celular y  $\mu$  es una medida de probabilidad sobre la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $P(\mathbb{Z}^d)$ . Para cada función de transición local  $f$  y cada conjunto  $\tau \in P(\mathbb{Z}^d)$ , definimos la función de transición global  $F : Q^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}^d}$  como sigue:

$$\forall x \in Q^{\mathbb{Z}^d}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad F_\tau(x)(i) = \begin{cases} f(x(i), x(i + n_1), \dots, x(i + n_k)) & \text{si } i \in \tau, \\ x(i) & \text{si } i \notin \tau. \end{cases}$$

$F_\tau$  aplica la función de transición local solo sobre los elementos de  $\tau \subset \mathbb{Z}^d$ . Notar que cada célula  $i \in \mathbb{Z}^d$  es actualizada con probabilidad  $\mu(U_i)$ .

Esta nueva definición de autómata celular m-asíncrono, incluye la de autómata celular síncrono. Fijada una  $\sigma$ -álgebra  $\mathbb{B}$  sobre  $\mathbb{Z}^d$  y sea  $C_0 = (A, \mu_0)$  un autómata celular m-asíncrono donde  $\mu_0 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  viene dada por:

$$\forall A \in P(\mathbb{Z}^d), \quad \mu_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbb{Z}^d \in A, \\ 0 & \text{si } \mathbb{Z}^d \notin A. \end{cases}$$

De ésta manera,  $\mu_0(\{\mathbb{Z}^d\}) = 1$  y por lo tanto, en cada instante de tiempo se aplicará la función de transición local sobre  $\mathbb{Z}^d$ .

Por otro lado, también contiene el concepto de evolución totalmente asíncrona comentado en la introducción, esto es, en cada instante de tiempo solo de aplica la función de transición local a una sola célula. Consideramos ahora el autómata celular m-asíncrono  $C_1 = (A, \mu_1)$  donde  $\mu_1 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  verifica lo siguiente:

1.  $\mu_1(U_i) > 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d$ .
2.  $\mu_1(U_i \cap U_j) = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}^d$ .

Así solo los conjuntos de la forma  $\{k\}$  ( $k \in \mathbb{Z}^d$ ) se les aplica la función de transición local.

Por último, contiene el concepto de evolución  $\alpha$ -asíncrona que nos interesa. Dado  $C_2 = (A, \mu_2)$  un autómata celular m-asíncrono y sea  $\alpha \in (0, 1)$  la probabilidad con la que se actualizan las células,  $\mu_2 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  satisfaciendo:

1.  $\mu_2(U_i) = \alpha, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d$ .
2.  $\forall A \subseteq \mathbb{Z}^d \quad \text{finito}, \quad \mu_2(\bigcap_{a \in A} U_a) = \prod_{a \in A} \mu_2(U_a)$ .

### Juego de vida de Conway

El juego de vida de Conway es un autómata celular síncrono:

$$C = (\mathbb{Z}^2, N = \{(-1, 1), (0, 1), (1, 1), (-1, 0), (1, 0), (-1, -1), (0, -1), (1, -1)\}, Q = \{0, 1\}, f) \quad (2.1)$$

donde  $f : \{0, 1\}^9 \rightarrow \{0, 1\}$  viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 = 0 \text{ y } \sum_{i=1}^8 x_i = 3 \\ 1 & \text{si } x_0 = 1 \text{ y } \sum_{i=1}^8 x_i \in \{2, 3\} \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^8 x_i \notin \{2, 3\} \end{cases} \quad (2.2)$$

y  $x = (x_0, x_1, \dots, x_8) = (c, c + n_1, \dots, c + n_8)$  con  $c \in \mathbb{Z}^d$  célula.

### Juego de vida de Conway asíncrono



# 3

## Metodología

---

texto sobre sección

### 3.1. Nombre de la sección

texto sobre subsección

**Nombre de la subsección**

**Nombre de la subsubsección**

Contenido

## Bibliografía

---

- [1] Build a working game of Tetris in Conway's Game of Life - StackExchange. <https://web.archive.org/web/20190120082452/https://codegolf.stackexchange.com/questions/11880/build-a-working-game-of-tetris-in-conways-game-of-life>. [Online; accessed 14-February-2019].
- [2] Conway's Game of Life - Boardless approach. [https://web.archive.org/web/20190212184430/https://rosettacode.org/wiki/Conway's\\_Game\\_of\\_Life#Boardless\\_approach](https://web.archive.org/web/20190212184430/https://rosettacode.org/wiki/Conway's_Game_of_Life#Boardless_approach). [Online; accessed 14-February-2019].
- [3] A Turing Machine in Conway's Game of Life, extendable to a Universal Turing Machine. <https://web.archive.org/web/20190118023640/http://rendell-attic.org/gol/tm.htm>. [Online; accessed 14-February-2019].
- [4] Synchronous and asynchronous updating in cellular automata. *BioSystems* 51 (1999), 123–143.
- [5] An experimental study of robustness to asynchronism for elementary cellular automata. *Complex Systems* 16 (2005), 1–27.
- [6] BAYS, C. Cellular Automata in the Triangular Tessellation. *Complex Systems* 8 (1994), 127–150.
- [7] BLOCK, H. J., AND BERGERSEN, B. Effect of boundary conditions on scaling in the 'Game of Life'. *Physical Review E* 55, 5 (1997), 6249–6252.
- [8] BLOK, H. J., AND BERGERSEN, B. Synchronous versus asynchronous updating in the 'Game of Life'. *Physical Review E* (1999), 3876–3879.
- [9] DENNUNZIO, A., FORMENTI, E., MANZONI, L., ET AL. m-Asynchronous cellular automata: from fairness to quasi-fairness. *Natural Computing* 12 (2013), 561–572.
- [10] FATES, N. Critical phenomena in cellular automata: perturbing the update, transitions, the topology. *Acta Physica Polonica B - Proceedings Supplement* 3 (2010), 315–325.

- [11] FATES, N. *Implementation of Logical Functions in the Game of Life*. In: Adamatzky A. (Eds.) *Game of Life Cellular Automata*. Springer, London, 2010.
- [12] GARDNER, M. Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life". *Scientific American* 223, 4 (1970), 120–123.
- [13] HEMMINGSSON, J. Consistent results on 'Life'. *Physica D* 80, 1-2 (1995), 151–153.
- [14] KLARNER, D. Wheels, Life and Other Mathematical Amusements, by Martin Gardner. *The American Mathematical Monthly* 93, 4 (1986), 321–323.
- [15] MCINTOSH, H. V. Wolfram's class IV automata and a good life. *Physica D* 45 (1990), 105–121.
- [16] MOORE, E. F. Machine Models of Self-Reproduction. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* 14 (1962), 17–33.
- [17] OWENS, N., AND STEPNEY, S. Investigations of the Game of Life cellular automata rules on Penrose tilings: lifetime, ash and oscillator statistics. *J. Cell. Autom.* 5, 3 (2010), 207–255.
- [18] REITER, C. The game of life on a hyperbolic domain. *Computers and Graphics* 21, 5 (1997), 673–683.
- [19] RENDELL, P. *Turing universality of the game of life*. In: Adamatzky A. (Eds.) *Collision-Based Computing*. Springer, 2002.
- [20] RENNARD, J. P. *Implementation of Logical Functions in the Game of Life*. In: Adamatzky A. (Eds.) *Collision-Based Computing*. Springer, London, 2002.
- [21] WOLFRAM, S. *Cellular Automata and Complexity*. Addison-Wesley, 1994.