



TRABAJO FIN DE GRADO

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

Juegos de vida: simulación y caracterización

Autor

Daniel Jiménez López

Tutores

Antonio Miguel Lallena Rojo
Juan Antonio López Villanueva



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍAS INFORMÁTICA Y DE
TELECOMUNICACIÓN

—
Granada, 5 de junio de 2019

Juegos de vida: simulación y caracterización

Daniel Jiménez López

Palabras clave:

Resumen

Games of Life: simulation and characterization

Daniel Jiménez López

Keywords:

Abstract

Índice general

Índice general	3
1 Introducción	4
2 Descripción del contexto	8
2.1. Representación y actualización del juego de vida de Conway .	8
2.2. Representación y actualización del juego de vida de Conway α -asíncrono	9
2.3. Configuraciones iniciales del juego de vida de Conway	10
2.4. Características medidas sobre las simulaciones	15
3 Metodología	16
3.1. Teoría de la computación	16
3.2. Teoría de la probabilidad	20
3.3. Fundamentos de las simulaciones Monte Carlo	29
4 Análisis	33
4.1. Reducción de la varianza	33
4.2. Efecto del α -asincronismo en las configuraciones iniciales . . .	35
5 Conclusiones	44
5.1. Teoría de conjuntos	44
Bibliografía	45

1 Introducción

El autómata celular fue inventado por von Neumann y Ulam en 1950 para estudiar el problema de construir máquinas artificiales que se reproduzcan a sí mismas [1]. Con el fin de imitar el comportamiento de los seres vivos, el diseño de dichas máquinas incluye el espacio en el que se desarrollan, representado por una malla rectangular en la que en los nodos se sitúan células y éstas evolucionan simultáneamente de acuerdo a un conjunto de reglas simples que dirigen la *física* de su pequeño universo abstracto.

El juego de vida es un autómata celular propuesto por Conway en 1970 y popularizado por Gardner en el mismo año [2]. Consiste en la evolución de una disposición inicial de células en dos estados mutuamente excluyentes, vida (1) o muerte (0), en una malla rectangular infinita. Dicha evolución viene regida por un conjunto de reglas que se aplican simultáneamente a todas las células en cada iteración. Las reglas son las siguientes: dada una célula viva, ésta continua viviendo solo si en su vecindario hay dos o tres células, en otro caso muere; dada una célula muerta, ésta renace si tiene exactamente tres células en su vecindario. Usualmente se consideran como pertenecientes al vecindario las células adyacentes en las direcciones horizontal, vertical y diagonales.

Uno de los motivos que atrajo la atención de científicos de diversos campos hacia el juego de vida fue observar cómo patrones complejos surgen de la aplicación de un conjunto muy simple y reducido de reglas. De esta manera comenzaron a analizarse configuraciones iniciales que daban lugar a comportamientos interesantes, tales como *glider* [Figura 1.1a](#) que se desplaza sobre la malla, *blinker* [Figura 1.1c](#) que retorna a su configuración inicial tras un número finito de iteraciones o *block* [Figura 1.1b](#) que no ve alterado su forma en cada iteración.

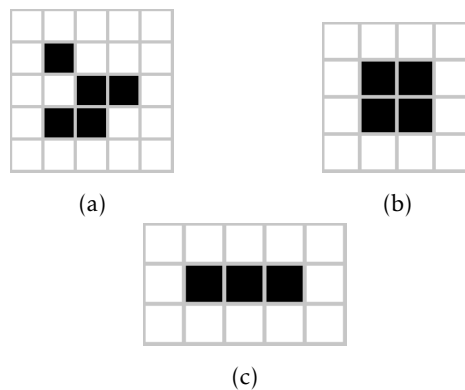


Figura 1.1: Configuraciones iniciales del juego de vida.

La elección de las reglas de evolución parecería *a priori* aleatoria, sin embargo, Conway las escogió de acorde a las siguientes pautas [3]:

- No debe existir una disposición inicial de células para la cual haya una prueba simple de que la población crezca sin límite.
- Debe haber disposiciones iniciales de células que aparentemente crezcan sin límite.
- Debe haber disposiciones iniciales de células simples que crezcan y cambien durante un periodo relativamente largo, llegando a tres posibles finales: desaparecer completamente ya sea debido a superpoblación o a dispersión, estabilizarse en una configuración que se mantenga constante o entrar en un ciclo sin fin de oscilación.

Al intentar realizar simulaciones de juegos de vida, los ordenadores se erigieron como la herramienta principal para llevarlas a cabo, siendo necesario afrontar el problema de representar una malla rectangular infinita en un ordenador con memoria finita. Una inteligente solución es alterar las características topológicas de la malla rectangular, identificando los bordes opuestos para obtener superficies topológicamente equivalentes a las de una botella de Klein, una esfera o un toro. En particular, esta última resultó atraer gran interés, pues se encontraron evidencias de que reduce los efectos asociados a la finitud de la malla [4, 5]. Cabe también destacar el estudio de la alteración de las cualidades geométricas de la malla, tales como el uso de figuras geométricas diferentes al cuadrado (triángulo y hexágono) [6], teselaciones de Penrose [7] o el empleo del espacio geométrico hiperbólico [8]. Finalmente, existen implementaciones en las cuales no se almacena la malla en la memo-

ria, si no que se almacena la posición de cada célula respecto a un origen de coordenadas, simulando más eficazmente una malla rectangular infinita [9].

El juego de vida de Conway también muestra interesantes características en el campo de la teoría de la computación, pertenece a la clase IV de Wolfram, esto es, su evolución lleva a estructuras aisladas que muestran un comportamiento complejo [10, 11]. Se ha demostrado que tiene la capacidad de cómputo de una máquina de Turing universal. Por tanto existe una disposición inicial de células que simula una máquina de Turing, la cual fue extendida a una máquina universal de Turing [12, 13]. Como muestra de dicha capacidad de computación, en un esfuerzo colectivo se ha implementado sobre éste un ordenador con su propio lenguaje de ensamblador y de alto nivel, y se ha programado el conocido juego Tetris [14, 15].

Si los autómatas celulares son un modelo que representa organismos vivos se podría pensar que la hipótesis de actualización simultánea es cuestionable ya que en la naturaleza no se propaga la información de manera instantánea y mucho menos de manera perfecta. Es ese aspecto, que está ligado a la robustez del modelo frente a perturbaciones en su evolución, el que pretendemos analizar en este trabajo. Un modelo será robusto si pequeños cambios en su evolución se traducen en pequeñas perturbaciones del comportamiento global del sistema, mientras que si esta pequeña modificación produce un cambio cualitativo en la dinámica, el sistema será poco robusto o, simplemente, se tratará de un sistema muy sensible a las variaciones que puedan ocurrir en sus elementos. En algunos contextos, los cambios cualitativos a los que nos referimos aquí se conocen como transición de fase. En la bibliografía la introducción de estas perturbaciones se lleva a cabo a través de la asincronicidad en la aplicación reglas de evolución [16]. Se pueden considerar las siguientes opciones:

- **Evolución totalmente asíncrona.** En cada iteración, las reglas de evolución se aplican solamente a un individuo escogido del conjunto de células, el criterio de elección puede ser o no ser completamente aleatorio.
- **Evolución α -asíncrona.** En cada iteración, cada célula tiene probabilidad α de que se le apliquen las reglas de evolución y probabilidad $1 - \alpha$ de mantener su estado.

Estos esquemas de evolución también se conocen como **evolución guiada por pasos** y **evolución guiada por tiempo**, respectivamente [17]. Los primeros en estudiar los efectos de la evolución asíncrona frente a la evolución síncrona en el juego de vida fueron Blok y Bergersen [18]; aplicando un esquema de evolución α -asíncrona demostraron la existencia de una transición

de fase de un comportamiento *estático*, donde el sistema termina alcanzando alguna situación completamente estable, a un comportamiento *vívido* y, por tanto, inestable. Posteriormente se estudió cómo afectaban las variaciones en la topología de la malla a la transición de fase, concluyendo que su aparición depende fuertemente de la regularidad de la malla rectangular [19]. Debido a que no existe una definición globalmente aceptada de autómatas celulares que agrupe los dos esquemas de actualización asíncrona anteriores, proponemos la definición de autómatas celulares m-asíncronos dada en [20].

Hasta donde podemos saber solo se ha estudiado el comportamiento en situaciones de α -asincronicidad de configuraciones iniciales aleatorias, también conocidas como *sopas*, con una densidad prefijada, obteniendo resultados que se comparan con las características conocidas del juego de vida síncrono. En este trabajo queremos caracterizar la manera en la que configuraciones iniciales bien conocidas y estudiadas, como las que se muestran en la figura 2.1, alteran su comportamiento en situaciones de α -asincronicidad. Utilizaremos las técnicas Monte Carlo para medir diferentes variables tales como el crecimiento de la población, el número de cúmulos de células y la actividad de nacimiento y muerte de células.

El capítulo 2 está dedicado a una descripción de los aspectos esenciales de nuestro trabajo. A continuación el capítulo 3 se proporciona una visión más formal de los conceptos expuestos en el capítulo anterior. En el capítulo 4 se documentan los resultados obtenidos y se discuten los aspectos más relevantes de los mismos. Por último en el capítulo 5 se establecen las conclusiones de nuestro trabajo.

Descripción del contexto

2

2.1. Representación y actualización del juego de vida de Conway

Como se comentaba en la introducción, plantearse la simulación del juego de vida implica afrontar el problema de representar una malla infinita de dos dimensiones en la memoria finita de los ordenadores. Mientras que la cantidad de memoria y velocidad de acceso de la misma ha mejorado significativamente con el paso del tiempo, perseguimos una representación que cumpla las siguientes dos características:

- Una simulación de una configuración inicial del juego de vida tiene que finalizar en un tiempo razonable, pues la clave de los métodos Monte Carlo son la repetición de las mismas y como se comenta posteriormente en 3.3, al aumentar el número de simulaciones disminuye la varianza, permitiendo mayor precisión.
- El comportamiento de las configuraciones iniciales es difícil de predecir, por lo que aquellas que crezcan sin límite podrían agotar los recursos de memoria disponibles haciendo que la ejecución sea inválida. En particular, una situación con alto consumo de memoria dificulta la ejecución de múltiples simulaciones independientes en paralelo.

Este último punto es, en nuestra opinión, el más restrictivo. Un planteamiento inicial nos podría sugerir que limitar el tamaño de la malla dos dimensional, sin embargo se perdería información en aquellas configuraciones iniciales que excedieran el tamaño fijado de la malla. Para reducir el impacto de la finitud de la malla se ha estudiado la identificación de los bordes opuestos simulando un espacio *infinito* que imita la superficie de un toro, obteniendo resultados favorables [4, 5]. Pero no es necesario lidiar con los errores derivados de este planteamiento. Una implementación en nuestra opinión más *literal* de la descripción formal del juego de vida, nos permite romper con el paradigma de la limitación de la malla. En lugar de almacenar en memoria la malla completa independientemente de su utilización, se almacenan las

Estado actual	Siguiendo estado								
	Número de vecinos								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Cuadro 2.1: Tabla de transición de estados del juego de vida de Conway

células dadas por coordenadas sobre la malla rectangular identificada con el plano cartesiano [9].

Si suponemos que la malla dos dimensional con los bordes opuestos identificados es cuadrada con lado de tamaño m , la complejidad en espacio viene dada por $O(m^2)$ independientemente a la configuración inicial escogida. Por otro lado si suponemos una malla dos dimensional infinita, una configuración inicial con c células y $c(t)$ el número de células en el instante t , la complejidad en espacio para cada instante t es $O(c(t))$ y la complejidad en espacio de C_n^t es $O(\max_{0 \leq t \leq n} \{c(t)\})$. Así al optar por la implementación de la malla infinita haremos un uso más eficiente de la memoria disponible. Con dicha implementación el vecindario de una célula se calcula sumando a sus coordenadas (x, y) a cada uno de los puntos de este conjunto $\{(-1, 1), (0, 1), (1, 1), (-1, 0), (1, 0), (-1, -1), (0, -1), (1, -1)\}$:

$$\begin{array}{ccc} (x, y) + (-1, 1) & (x, y) + (0, 1) & (x, y) + (1, 1) \\ (x, y) + (-1, 0) & (x, y) & (x, y) + (1, 0) \\ (x, y) + (-1, -1) & (x, y) + (0, -1) & (x, y) + (1, -1) \end{array}$$

Una vez calculado el vecindario de una célula, las células vivas en el vecindario se calculan como la intersección del vecindario con el conjunto de células vivas. Esta operación es de tiempo constante si se almacenan tanto las células vivas como el vecindario en estructuras de datos de tiempo de búsqueda constante, esto son, tablas hash. Tras el conteo de células vivas en el vecindario de una célula dada, es suficiente con aplicar la tabla de transición de estados 2.1 para determinar el siguiente estado de la célula.

2.2. Representación y actualización del juego de vida de Conway α -asíncrono

Los comentarios realizados en la sección anterior son aplicables al juego de vida de Conway *síncrono*, sin embargo para el juego α -asíncrono hay que introducir una pequeña variación en el mecanismo de actualización que vamos

a exponer en esta sección. Notar que la descripción de la representación interna de la malla comentada anteriormente se reutiliza en el juego α -asíncrono, es decir, la perturbación introducida en la actualización no afecta a la malla rectangular.

En un juego de vida α -asíncrono cada célula tiene probabilidad α de ser actualizada y probabilidad $1 - \alpha$ de mantener su estado actual, esto es, tiene probabilidad α de que se le aplique la tabla de transición de estados 2.1. A cada célula se le dota la capacidad de generar números pseudo-aleatorios de una distribución uniforme estándar. De esta manera cuando se va a consultar la tabla de transición de estados genera un número aleatorio, si éste es superior a α entonces consulta la tabla y en caso contrario no lo hace, manteniendo su estado actual.

2.3. Configuraciones iniciales del juego de vida de Conway

Dado que las configuraciones iniciales son muy diversas, han existido algunos esfuerzos por realizar una taxonomía de patrones pero no existe un consenso global y como consecuencia aceptamos la existencia de principalmente tres categorías. En este trabajo trataremos de caracterizar el comportamiento de configuraciones iniciales del juego de vida de Conway bajo la hipótesis de actualización α -asíncrona. Nuestras elecciones de patrones está inicialmente motivada por la simplicidad de los mismos, que nos permite visualizar el impacto de la α -asincronismo en la actualización.

Vidas inmóviles

Probablemente las vidas inmóviles sean las configuraciones con el comportamiento más simple y fácil de observar. Esta sección está extraída de las siguientes fuentes: [21], [22] y [23].

Definición 2.3.1. Una vida inmóvil es una configuración inicial que permanece inmutada en cada iteración.

Distinguimos tres tipos de vidas inmóviles:

Definición 2.3.2. Una vida inmóvil estricta es aquella vida inmóvil tal que al eliminar una de sus células vivas deja de ser una vida inmóvil.

A continuación mostramos ejemplos de estos tipos de vidas inmóviles en la Figura 2.1. La Figura 2.1a es una vida inmóvil estricta pues todos los elementos dependen entre sí los unos de los otros, la Figura 2.1b nuevo es también una vida inmóvil estricta a pesar de que contenga a otra vida inmóvil estricta y la Figura 2.1c es también una vida inmóvil estricta pues el patrón de la

mitad horizontal derecha conserva su estabilidad gracias a su homólogo reflejado de la mitad horizontal izquierda y al alterar el estado de cualquier célula viva se pierde la estabilidad.

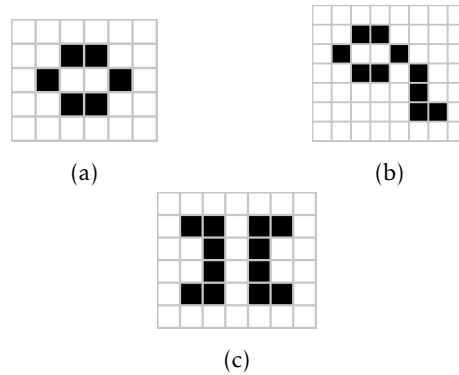


Figura 2.1: Ejemplos de vidas inmóviles estrictas del juego de vida de Conway.

Definición 2.3.3. Una vida pseudo inmóvil es una vida inmóvil que puede ser particionada en vidas inmóviles independientes, es decir, la estabilidad de una de ellas no depende de la presencia de las otras. Además debe de existir al menos una célula muerta por superpoblación (más de tres vecinos vivos) que al particionar en vidas inmóviles independientes la célula continúe muerta por soledad (menos de tres vecinos vivos).

Las vidas inmóviles que particionan a una vida pseudo inmóvil pueden ser a su vez vidas pseudo inmóviles [Figura 2.2b](#) o vidas inmóviles estrictas [Figura 2.2a](#). Notar que una vida inmóvil puede estar formada por varias vidas inmóviles y aún así ser una vida estrictamente inmóvil (y no pseudo inmóvil) en caso de que dependan entre sí para mantener su estabilidad como en la [Figura 2.1c](#).

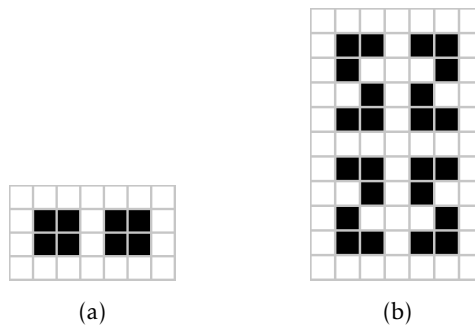


Figura 2.2: Ejemplos de vidas pseudo inmóviles del juego de vida de Conway.

Definición 2.3.4. Una vida quasi inmóvil es una vida inmóvil que puede ser particionada en vidas inmóviles independientes, es decir, la estabilidad de una de ellas no depende de la presencia de las otras. Además existen células que tanto en la configuración inicial como en las vidas inmóviles independientes se mantengan muertas por soledad (menos de tres vecinos vivos).

Notar que la [Figura 2.2a](#) no es una vida quasi inmóvil y sin embargo [Figura 2.3](#) sí. Este tipo de vida inmóvil está habitualmente formada por dos vidas inmóviles que comparten una diagonal.

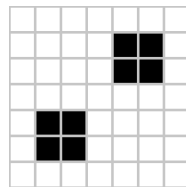


Figura 2.3: Configuración inicial que en el centro tiene una célula que se mantiene muerta por soledad tanto en las vidas inmóviles independientes como en el total.

Por último, cabría preguntarse el problema de dado un número finito de células, ¿cuántas vidas inmóviles existen? Dicho problema ha sido resuelto para vidas inmóviles estrictas y pseudo inmóviles de hasta 32 células, como se puede consultar en [\[24\]](#) y en [\[25\]](#).

Osciladores

Definición 2.3.5. Un oscilador es una configuración inicial que tras un número fijo de iteraciones se repite en la misma posición, al número de iteraciones se le conoce por periodo del oscilador.

Notar que las vidas inmóviles pueden ser interpretadas como osciladores de periodo una iteración.

En la [Figura 2.4](#) mostramos dos configuraciones iniciales de periodo dos, a lo largo de tres iteraciones. Por un lado la [Figura 2.4a](#), [Figura 2.4b](#) y [Figura 2.4c](#) son tres iteraciones de la configuración inicial nombrada *blinker* y por otro la [Figura 2.4d](#), [Figura 2.4e](#) y [Figura 2.4f](#) son tres iteraciones de la configuración inicial *toad*.

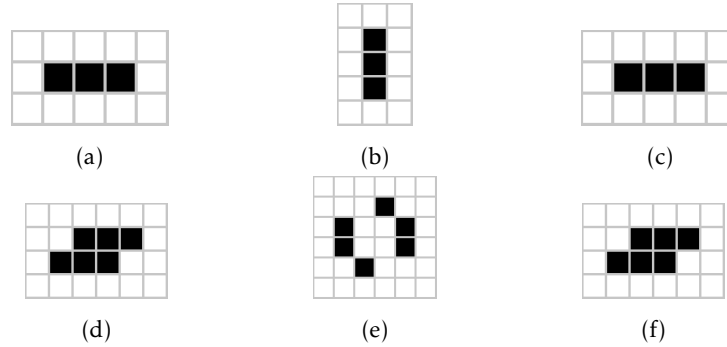


Figura 2.4: Primeras 3 iteraciones de 2 osciladores de periodo 2 del juego de vida de Conway.

Naves espaciales

Definición 2.3.6. Una nave espacial es una configuración inicial que tras un número fijo de iteraciones se repite pero en una posición desplazada.

Dado que este tipo de configuraciones iniciales se desplaza sobre la malla rectangular es interesante medir la velocidad con la que lo hacen. Si una configuración inicial se desplaza (x, y) unidades cada periodo de longitud n , la velocidad de desplazamiento de la nave espacial es:

$$v = \frac{\max\{|x|, |y|\}c}{k}$$

y su pendiente es x/y , donde c es la velocidad máxima teórica, un desplazamiento por iteración. Curiosamente se ha demostrado que para cada pendiente existe una nave espacial con dicha pendiente [26].

En la [Figura 2.5](#) encontramos dos naves espaciales que se desplazan en distintas direcciones. La [Figura 2.6a](#) es la nave espacial más pequeña conocida de velocidad $c/4$ y su desplazamiento es diagonal y la [Figura 2.6b](#) es la más pequeña conocida de velocidad $c/2$ y su desplazamiento es horizontal.



Figura 2.5: Ejemplos de vidas pseudo inmóviles del juego de vida de Conway.

Ranking	Nombre	Periodo	Ocurrencias
1	<i>Glider</i>	4	37.699.263.597.381
2	<i>Lightweight spaceship</i>	4	55.075.316.989
3	<i>Middleweight spaceship</i>	4	14.511.262.233
4	<i>Heavyweight spaceship</i>	4	2.521.819.486
5	<i>MWSS on MWSS</i>	4	7.077

Cuadro 2.2: Naves espaciales más frecuentes

Selección de configuraciones iniciales

Los primeros censos de configuraciones iniciales fueron *The Online Life-Life CA Soup Search* y *Achim Flammenkamp's census*, en los que se contabilizaron 174.631.866.050 y 50.158.095.316 configuraciones del juego de vida, respectivamente. El primero de ellos consistió en la evolución de 6.412.048.029 configuraciones iniciales aleatorias que cubren un cuadrado de lado 20 con densidad inicial de 0.5 sobre una malla rectangular infinita [27]. El segundo exploró la evolución de 1.829.196 configuraciones iniciales aleatorias sobre una malla cuadrada de lado 2048 con los bordes opuestos identificados y con una densidad inicial de 0.375 [28]. De ambos censos se puede extraer la conclusión de que las configuraciones que aparecen más a menudo son las vidas inmóviles, seguidas por los osciladores y por último las naves espaciales.

Para nuestro trabajo tomaremos de referencia el censo más actual *Catalogue* que recoge las ejecuciones de 19.640.649.096.999 configuraciones iniciales aleatorias cuadradas de lado 16 del juego de vida de Conway. Se han obtenido un total de 429.049.899.985.558 patrones de los cuales se encontraron 161.861 tipos diferentes [29]. En la tabla [Tabla 2.2](#) se muestran las primeras 5 naves espaciales más frecuentes, las cuales escogeremos para realizar nuestro experimento. Destacar que todas son de periodo 4 y que no tomaremos más dado que el número de ocurrencias disminuye drásticamente de la cuarta a la quinta posición. En la [Figura 2.6](#) podemos observar la forma de estas configuraciones iniciales. Como representantes de la categoría de osciladores estudiaremos los dos osciladores más frecuente de periodo 2, 3 y 4.

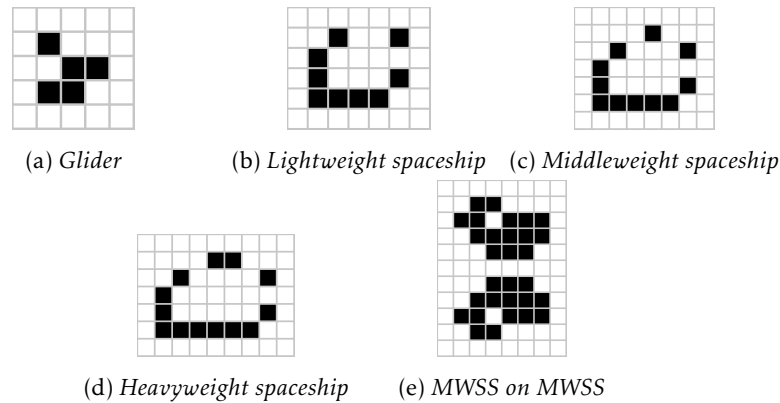


Figura 2.6: Top 5 naves espaciales más frecuentes en el censo Catalogue.

2.4. Características medidas sobre las simulaciones

Dado el carácter aleatorio del juego de vida α -asíncrono emplearemos los fundamentos de Monte Carlo expuestos en la sección 3.3 para medir los parámetros de interés que a continuación exponemos. Nuestras variables de interés son:

- Crecimiento de la población de células de la configuración inicial: dispondremos de dos herramientas para medir el número de células. Estudiaremos la evolución del número de células en cada etapa, la evolución del área del rectángulo de menor tamaño que contenga a todas las células de cada etapa y su densidad, esto es, el cociente del número de células entre el área anterior.
- Tasa de cambio de la configuración inicial: emplearemos el concepto de calor, el número de células que nacen o mueren por generación.
- Distribución de las células en cúmulos: contabilizaremos el número de cúmulos por cada generación, entendiendo por cúmulo al mayor conjunto de células cuyo vecindario no es disjunto, es decir, en un cúmulo cada célula está contenida en el vecindario de otra célula del cúmulo.

Estas variables serán medidas para distintos valores de α con el fin de estudiar el efecto de la aleatoriedad en las configuraciones iniciales. Notar que el número de simulaciones realizadas para cada patrón será variable puesto que algunos patrones son de mayor tamaño y en consecuencia tienen simulaciones más lentas.

3

Metodología

Los formalismos nos permitirán articular la intuición de asincronismo en el esquema de actualización del autómata celular, cuyo posible homónimo biológico sería el procesamiento imperfecto de información entre individuos a causa de perturbaciones derivadas del medio o de la interacción con otros individuos. En este trabajo nos restringimos a un caso simple de asincronismo en la actualización: examinaremos que ocurre si todas las transiciones ocurren al mismo tiempo pero los individuos reciben la información del estado de sus vecinos de forma imperfecta.

En primer lugar introducimos el autómata celular m -asíncrono que nos permite articular el juego de vida de Conway α -asíncrono, a continuación exponemos los conceptos básicos de teoría de conjuntos, probabilidad y generación de números aleatorios sobre los que desarrollaremos las estimaciones Monte Carlo. Las claves de este desarrollo son el teorema central del límite y la ley de los grandes números que esencialmente justifican la efectividad del método Monte Carlo.

3.1. Teoría de la computación

Introducción

Dado que el comportamiento completamente síncrono de un autómata celular como herramienta de modelado es una rareza, se han realizado numerosas investigaciones empíricas del autómata celular asíncrono. Sin embargo, los pocos análisis formales realizados o bien se refieren a ejemplos o bien a casos particulares de asincronicidad. Tomaremos el concepto de autómata celular m -asíncrono [20], cuya idea principal es tener algún tipo de oráculo el cual en cada iteración escoge las células que tienen que ser actualizadas. Dicho oráculo se implementa a través de una medida de probabilidad μ sobre subconjuntos de enteros d -dimensionales, \mathbb{Z}^d . Notar que la definición con la que trataremos es la extensión a espacios multidimensionales de la dada en [20].

Autómata celular determinista

Un autómata celular determinista es un sistema dinámico discreto consistente en un array d -dimensional de autómatas finitos, llamados células. Cada célula está conectada uniformemente a un vecindario formado por un número finito de células, tiene un estado de un conjunto finito de estados y actualiza su estado de acuerdo a una función de transición local, la cual determina el siguiente estado de una célula considerando su propio estado y el de su vecindario.

Definición 3.1.1. Formalmente, la tupla $A = (\mathbb{Z}^d, N, Q, f)$ es un autómata celular determinista, de ahora en adelante autómata celular, donde:

- \mathbb{Z}^d es un espacio de células d -dimensional.
- Q el conjunto de estados posibles para cada célula.
- $N \in (\mathbb{Z}^d)^k$ es el vecindario genérico de un autómata celular, esto es, para $N = (n_1, \dots, n_k)$, $a \in \mathbb{Z}^d$ célula, cada célula en $\{(a + n_1, \dots, a + n_k)\}$ es una célula vecina de a .
- $f : Q^{k+1} \rightarrow Q$ es la función de transición local que define la transición de estado de cada célula como función de su propio estado y del estado de cada célula en su vecindario.

Definición 3.1.2. Una configuración es una función $g : \mathbb{Z}^d \rightarrow Q$, la cual a cada punto del espacio \mathbb{Z}^d le asigna un estado del conjunto de estados Q , al conjunto de las configuración lo notaremos $Q^{\mathbb{Z}^d}$. Entenderemos por configuración inicial, a aquella configuración a la que aún no se le ha aplicado la función de transición global.

Definición 3.1.3. La función de transición local induce una función de transición global $F : Q^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}^d}$ definida como sigue:

$$\forall x \in Q^{\mathbb{Z}^d}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad F(x)(i) = f(x(i), x(i + n_1), \dots, x(i + n_k)).$$

Nos gustaría poder plasmar la intuición de que una célula tenga la misma probabilidad de ser actualizada independientemente o no del resto de células actualizadas en cada iteración. El concepto de ultrafiltro nos permitirá establecer una clase de autómata celular lo suficientemente general como para abarcar los nuevos tipos de autómatas celulares que introduciremos en posteriores secciones.

Dado un conjunto X , $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de X . Dado $A \in \mathcal{P}(X)$, notaremos su complementario A^c .

Definición 3.1.4. $U \in \mathcal{P}(X)$ es un ultrafiltro de X si:

1. $\emptyset \in U$.
2. Sean $A, B \in \mathcal{P}(X)$ tales que $A \subset B$ y $A \in U$, entonces $B \in U$.
3. Si $A, B \in U$, entonces $A \cap B \in U$.
4. Si $A \in \mathcal{P}(X)$ entonces o bien $A \in U$, o bien $A^c \in U$.

Además dado $p \in X$, el ultrafiltro U_p diremos que es principal si es el más pequeño que contiene a p , esto es, la colección de todos los conjuntos que contienen a p .

Definición 3.1.5. Un autómata celular m -asíncrono C es una tupla (A, μ) donde:

- A es un autómata celular.
- μ es una medida de probabilidad sobre la σ -álgebra de Borel en $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$.

Definición 3.1.6. Para cada función de transición local f y cada conjunto $\tau \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$, definimos la función de transición global $F : Q^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}^d}$ como sigue:

$$\forall x \in Q^{\mathbb{Z}^d}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad F_\tau(x)(i) = \begin{cases} f(x(i), x(i+n_1), \dots, x(i+n_k)) & \text{si } i \in \tau, \\ x(i) & \text{si } i \notin \tau. \end{cases}$$

Es decir, F_τ aplica la función de transición local solo sobre los elementos de $\tau \subset \mathbb{Z}^d$.

Notar que cada célula $i \in \mathbb{Z}^d$ es actualizada con probabilidad $\mu(U_i)$.

Esta nueva definición de autómata celular m -asíncrono, incluye la de autómata celular síncrono. Fijada una σ -álgebra \mathbb{B} sobre \mathbb{Z}^d y sea $C_0 = (A, \mu_0)$ un autómata celular m -asíncrono donde $\mu_0 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$ viene dada por:

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d), \quad \mu_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbb{Z}^d \in A, \\ 0 & \text{si } \mathbb{Z}^d \notin A. \end{cases}$$

De esta manera, $\mu_0(\{\mathbb{Z}^d\}) = 1$ y por lo tanto, en cada instante de tiempo se aplicará la función de transición local sobre \mathbb{Z}^d .

Por otro lado, también contiene el concepto de evolución totalmente asíncrona comentado en la introducción, esto es, en cada instante se aplica la función de transición local a una sola célula.

Definición 3.1.7. Consideramos ahora el autómata celular m -asíncrono $C = (A, \mu_1)$ donde $\mu_1 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$ verifica lo siguiente:

1. $\mu_1(U_i) > 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$
2. $\mu_1(U_i \cap U_j) = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}^d.$

Así solo los ultrafiltros de la forma $\{k\}$ ($k \in \mathbb{Z}^d$) se les aplica la función de transición local.

Por último, contiene el concepto de evolución α -asíncrona que nos interesa.

Definición 3.1.8. Dado $C = (A, \mu_2)$ un autómata celular m -asíncrono y sea $\alpha \in (0, 1)$ la probabilidad con la que se actualizan las células, donde $\mu_2 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$ satisface:

1. $\mu_2(U_i) = \alpha, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$
2. $\forall A \subseteq \mathbb{Z}^d \quad \text{finito}, \quad \mu_2(\bigcap_{a \in A} U_a) = \prod_{a \in A} \mu_2(U_a).$

y lo notaremos $C(\alpha)$.

Juego de vida de Conway

Definición 3.1.9. El juego de vida de Conway es un autómata celular síncrono:

$$C = (\mathbb{Z}^2, N, Q, f)$$

donde

- $N = \{(-1, 1), (0, 1), (1, 1), (-1, 0), (1, 0), (-1, -1), (0, -1), (1, -1)\},$
- $Q = \{0, 1\},$
- $f : \{0, 1\}^9 \rightarrow \{0, 1\}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 = 0 \text{ y } \sum_{i=1}^8 x_i = 3 \\ 1 & \text{si } x_0 = 1 \text{ y } \sum_{i=1}^8 x_i \in \{2, 3\} \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^8 x_i \notin \{2, 3\} \end{cases} \quad (3.1)$$

y $x = (x_0, x_1, \dots, x_8) = (c, c + n_1, \dots, c + n_8)$ con $c \in \mathbb{Z}^d$ célula.

Juego de vida de Conway α -asíncrono

Definición 3.1.10. El juego de vida de Conway α -asíncrono es un autómata celular m -asíncrono formado por $C = (\mathbb{Z}^2, N, Q, f)$, el autómata celular síncrono definido anteriormente 3.1.9, y una medida de probabilidad $\mu : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$ verificando las condiciones expuestas en 3.1.8 para $\alpha \in (0, 1)$.

3.2. Teoría de la probabilidad

El contenido de esta sección está extraído de los siguientes textos: [30–32].

Definición 3.2.1. Una σ -álgebra, \mathbb{F} , sobre un conjunto X , es una colección no vacía de subconjuntos de X cerrados para uniones numerables y para la operación de complementario, esto es:

- $\forall A \in \mathbb{F}$ se verifica que $A^c \in \mathbb{F}$.
- $\forall A_n \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathbb{F}$.

Definición 3.2.2. Sean un conjunto X con su σ -álgebra asociada, \mathbb{F} , el par (X, \mathbb{F}) es un espacio medible.

Definición 3.2.3. Una función medible es una función entre espacios medibles, $g : (X, \mathbb{F}) \rightarrow (X', \mathbb{F}')$ tal que: $g^{-1}(A) \in \mathbb{F} \quad \forall A \in \mathbb{F}'$.

Definición 3.2.4. La tupla (X, \mathbb{F}, P) es un espacio de probabilidad si:

- X es el espacio de muestreo, esto es, algún conjunto no vacío.
- \mathbb{F} es una σ -álgebra de sucesos.
- $P : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ es una medida de probabilidad, esto es, P satisface los siguientes axiomas de Kolmogorov:
 1. Para cada $A \in \mathbb{F}$, existe un número $P(A) \geq 0$, esto es, la probabilidad del suceso A ,
 2. $P(X) = 1$.
 3. Sean $A_n, n \geq 1$ disjuntos, entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Definición 3.2.5. Los sucesos $A_n, n \geq 1$ son independientes si y solo si

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \prod_{n \geq 1} P(A_n).$$

Definición 3.2.6. Un conjunto A es abierto si, para cada punto $x \in A$, existe una bola de centro el punto y radio $\epsilon > 0$, $B(x, \epsilon) = \{z : |z - x| < \epsilon\}$, tal que $B(x, \epsilon) \subset F$. Así la σ -álgebra de Borel, es aquella generada por los conjuntos abiertos de \mathbb{R} .

De ahora en adelante supondremos que se ha fijado el espacio medible dado por $X = \mathbb{R}$ y $F = \mathbb{B}$ la σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{R} .

Variables aleatorias

Definición 3.2.7. Una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad (X, \mathbb{B}, P) es una función medible $A : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Cada valor de A se corresponde con un subconjunto de puntos de X que se aplica en dicho valor: $\{w \in X : A(w) = x\}$, que notaremos por simplicidad $\{X = x\}$. A parte de los anteriores conjuntos también nos resultarán de interés lo siguientes:

$$\begin{aligned}\{w \in X : A(w) \leq x\} &= \{A \leq x\} \\ \{w \in X : A(w) < x\} &= \{A < x\} \\ \{w \in X : A(w) > x\} &= \{A > x\} \\ \{w \in X : A(w) \geq x\} &= \{A \geq x\}\end{aligned}$$

Proposición 3.2.1. Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible y A es una variable aleatoria entonces $A' = g(A)$ es una variable aleatoria.

Definición 3.2.8. Las variables aleatorias A_1, A_2, \dots, A_n son independientes si y solo si, para arbitrarios conjuntos de la σ -álgebra de Borel B_1, B_2, \dots, B_n :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n \{A_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k \in B_k).$$

Definición 3.2.9. Dada una variable aleatoria A se define su función de distribución como $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dada por:

$$x \mapsto F(x) = P(A \leq x).$$

Proposición 3.2.2. La función de distribución de la variable aleatoria A satisface:

- Es monótona no decreciente.
- Dada una sucesión decreciente de elementos de \mathbb{R} , $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ convergente a $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\lim_{x_n \rightarrow x} F(x_n) = F(x)$, es decir, es continua a la derecha.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Definición 3.2.10. Sea F una función de distribución definimos la función de densidad como la función integrable, f , tal que:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall a < b.$$

Definición 3.2.11. Sea A una variable aleatoria, definimos su valor esperado o esperanza como sigue:

$$\mathbb{E}(A) = \int_X A(w) dP(w).$$

Adicionalmente si $\mathbb{E}|A| < \infty$, diremos que A es integrable.

Definición 3.2.12. Sea una variable aleatoria A , definimos:

- Los momentos de orden n de A : $\mathbb{E}(A^n) = \int_X A(w)^n dP(w)$, $n \in \mathbb{N}$.
- Los momentos centrados de orden n de A : $\mathbb{E}_c(A^n) = \mathbb{E}((A - \mathbb{E}(A))^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Notar que los momentos no existen necesariamente para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.2.13. Definimos la varianza de la variable aleatoria A con esperanza $\mu < \infty$ y $\mathbb{E}_c(A^2) < \infty$ como:

$$\text{var}(A) \equiv \mathbb{E}_c(A^2) = \mathbb{E}(A^2) - \mu^2.$$

Definición 3.2.14. A la raíz cuadrada positiva de la varianza la notaremos $\sigma(A) = +\sqrt{\text{var}(A)}$ y diremos que es la desviación estándar de la variable aleatoria A .

Proposición 3.2.3. Sea A una variable aleatoria con esperanza $\mu < \infty$ y varianza $\sigma^2 < \infty$ y sea $A' = aA + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\mathbb{E}(A') = a\mu + b \quad \text{y} \quad \text{var}(A') = a^2 \sigma^2.$$

Variables aleatorias discretas

Definición 3.2.15. Una variable aleatoria A diremos que es discreta si toma valores en un conjunto numerable, esto es, $\exists E = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $P(A \in E) = 1$.

Definición 3.2.16. La función de distribución de una variable aleatoria discreta A es la siguiente:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(A \leq x) = \sum_{x_n \in E, x_n \leq x} P(A = x_n).$$

Definición 3.2.17. Sea una variable aleatoria discreta A , definimos:

- Los momentos de orden n de A : $\mathbb{E}(A^n) = \sum_{x_m \in E} x_m^n P(A = x_m)$.
- Los momentos centrados de orden n de A : $\mathbb{E}_c(A^n) = \sum_{x_m \in E} (x_m - \mu)^n P(A = x_m)$.

El momento $n = 1$ se conoce como valor esperado o esperanza:

$$\mathbb{E}(A) \equiv \sum_{x_m \in E} x_m P(A = x_m).$$

Definición 3.2.18 (Tipos de convergencia: convergencia en probabilidad, convergencia casi segura y convergencia en distribución). Sean A_n , $n \in \mathbb{N}$ y A variables aleatorias, definimos:

- $A_n \rightarrow A$ en probabilidad, si para todo $\epsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|A_n - A| > \epsilon) = 0$ y lo notaremos $A_n \xrightarrow{P} A$.
- $A_n \rightarrow A$ casi seguramente, si $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A) = 1$ y lo notaremos $A_n \xrightarrow{c.s.} A$.
- $A_n \rightarrow A$ en distribución, si $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \leq x) = P(A \leq x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ donde $x \mapsto P(A \leq x)$ es una función continua y lo notaremos $A_n \xrightarrow{d} A$.

Definición 3.2.19. Sea i el número complejo $i = \sqrt{-1}$, la extensión de la función exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ al cuerpo de los números complejos es $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$z \mapsto \exp(iz) = e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Notar que el módulo de la exponencial compleja está acotado por la unidad :

$$|\exp(iz)| = |\cos z + i \sin z| = \sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z} = 1.$$

Esta propiedad de la exponencial compleja nos asegura la existencia para toda variable aleatoria de la siguiente definición.

Definición 3.2.20. La función característica asociada a la variable aleatoria A es la función $\phi_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por:

$$\phi_A(t) = \mathbb{E}(e^{itA}).$$

Proposición 3.2.4. Sea ϕ_A la función característica de la variable aleatoria A , entonces:

- $|\phi_A(t)| \leq \phi_A(0) = 1.$
- ϕ_A es una función uniformemente continua.
- $\phi_{cA+b}(t) = e^{itb} \phi_A(ct), \quad c, b \in \mathbb{R}.$
- Sea $A_1, A_2, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$ una sucesión finita de variables aleatorias independientes, entonces:

$$\phi_{\sum_{i=1}^n A_i}(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{A_i}(t).$$

Además si A_1, A_2, \dots, A_n son idénticamente distribuidas:

$$\phi_{\sum_{i=1}^n A_i}(t) = \left(\phi_{A_1}(t) \right)^n.$$

- Si $\mathbb{E}(A^k) < \infty$ su derivada k -ésima evaluada en 0 es $\phi_A^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(A^k).$

Distribución normal

Definición 3.2.21. Diremos que una variable aleatoria A sigue una distribución normal con media $\mu < \infty$ y varianza $\sigma^2 < \infty$, $N(\mu, \sigma^2)$, si A tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Además su función característica es:

$$\phi_A(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Proposición 3.2.5. Sean A, A' variables aleatorias pertenecientes a distribuciones normales con medias $\mu, \mu' < \infty$ y varianzas $\sigma_0^2, \sigma_1^2 < \infty$, $N(\mu, \sigma_0^2)$ y $N(\mu', \sigma_1^2)$ respectivamente, entonces la variable aleatoria dada por la suma $A + A'$ es una variable aleatoria que pertenece a una distribución normal $N(\mu + \mu', \sigma_0^2 + \sigma_1^2)$.

Proposición 3.2.6. Sea $N(\mu, \sigma^2)$ una distribución normal con media $\mu < \infty$ y varianza $\sigma^2 < \infty$, entonces el 68.27% de los valores de la distribución normal se encuentran en el intervalo $[\mu + \sigma, \mu - \sigma]$, el 95.45% en el intervalo $[\mu + 2\sigma, \mu - 2\sigma]$ y el 99.7% en el intervalo $[\mu + 3\sigma, \mu - 3\sigma]$, estos intervalos se conocen también como intervalos de confianza de la distribución normal.

Teorema central del límite

Teorema 3.2.1. Sean A_1, A_2, \dots, A_n variables aleatorias independientes, con esperanza $\mu < \infty$, varianza $\sigma^2 < \infty$ e idénticamente distribuidas. Entonces:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i - n\mu \right) \rightarrow^d N(0, 1).$$

Previa a la demostración del teorema central del límite, introducimos las herramientas matemáticas que nos harán posible su demostración.

Teorema 3.2.2 (Teorema de Taylor). Sea $k \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ k -veces diferenciable en el punto $a \in \mathbb{R}$. Entonces existe una función $h_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + h_k(x)(x-a)^k$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow a} h_k(x) = 0.$$

Teorema 3.2.3 (Teorema de continuidad). Sean $A_1, A_2, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$ variables aleatorias entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{A_n} = \phi_A(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

si y solo si

$$A_n \rightarrow^d A.$$

Demostración (Teorema central del límite). Sean A_1, A_2, \dots, A_n variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con esperanza $\mu < \infty$ y varianza $\sigma^2 < \infty$. Sea ahora

$$Z_n = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Definimos una nueva variable aleatoria, Y_i , que es la versión normalizada de A_i :

$$Y_i = \frac{A_i - \mu}{\sigma}$$

Así definida, Y_i es idénticamente distribuida con esperanza y varianza:

$$E(Y_i) = 0, \text{Var}(Y_i) = 1.$$

Sea ahora $Z_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}$, queremos ver que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{Z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Procedemos a desarrollar el siguiente término:

$$\phi_{\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}}(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{\frac{Y_i}{\sqrt{n}}}(t) = \left(\phi_{\frac{Y_1}{\sqrt{n}}}(t) \right)^n.$$

Aplicando el teorema de Taylor para obtener el desarrollo centrado en 0 para $k = 2$ de $\phi_{Y_1}(\frac{t}{\sqrt{n}})$:

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{Y_1}{\sqrt{n}}}(t) &= \phi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \phi_{Y_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}} \phi'_{Y_1}(0) + \frac{t^2}{2n} \phi''_{Y_1}(0) + \frac{t^2}{n} h_2(t) \\ &= 1 + i \frac{t}{\sqrt{n}} E(Y_1) - \frac{t^2}{2n} E(Y_1^2) + \frac{t^2}{n} h_2(t) \\ &= 1 + 0 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{n} h_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0} h_2(\frac{t}{\sqrt{n}}) = 0$.

Obtenemos que:

$$\left(\phi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{n} h_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

cuyo límite es la función característica de una variable aleatoria perteneciente a una distribución normal con media 0 y varianza 1, concluimos la demostración aplicando el teorema de continuidad 3.2.3. \square

Ley de los grandes números

Teorema 3.2.4. Sean $A_n, n \in \mathbb{N}$ variables aleatorias independientes, con esperanza $\mu < \infty$ e idénticamente distribuidas. Entonces el valor medio de A_n , $\bar{\mu}$, converge casi seguramente a μ :

$$\bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \xrightarrow{c.s.} \mu,$$

esto es, $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu} = \mu) = 1$.

Para obtener una demostración un tanto más breve de éste teorema añadiremos la hipótesis de existencia del momento de orden 4 de A_n . Una demostración completa del teorema sin la hipótesis adicional se puede consultar en [30].

Lema 3.2.1. Sean $A_n, n \geq 1$ variables aleatorias no negativas, entonces:

$$E\left(\sum_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} E(A_n).$$

Lema 3.2.2. En las mismas condiciones de la ley de los grandes números, existe una constante $K < \infty$ tal que para todo $n \geq 0$:

$$\mathbb{E}((\bar{\mu} - n\mu)^4) \leq Kn^2.$$

Demostración. Sean

$$Z_k = A_k - \mu \quad y \quad T_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{i=1}^n A_i - n\mu.$$

Entonces:

$$\mathbb{E}(T_n^4) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^4\right) = n\mathbb{E}(Z_1^4) + 3n(n-1)\mathbb{E}(Z_1^2 Z_2^2) \leq Kn^2.$$

donde en la segunda igualdad se ha empleado el desarrollo multinomial:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{1 \leq t \leq m} x_t^{k_t},$$

con

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

Dado que $\mathbb{E}(Z_k) = 0 \quad \forall k$ y la independencia de las variables Z_k , se cancelan todos los sumandos de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_i Z_j^3) &= \mathbb{E}(Z_i) \mathbb{E}(Z_j^3) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, \\ \mathbb{E}(Z_i Z_j Z_k Z_l) &= \mathbb{E}(Z_i) \mathbb{E}(Z_j) \mathbb{E}(Z_k) \mathbb{E}(Z_l) = 0, \quad 1 \leq i, j, k, l \leq n, \quad i \neq j \neq k \neq l. \end{aligned}$$

y siendo K adecuadamente elegida, por ejemplo $K = 4 \max \mathbb{E}(Z_1^4), \mathbb{E}(Z_1^2)^2$. \square

Ya tenemos todos los rudimentos necesarios para proceder a demostrar el teorema de esta sección.

Demostración (Ley de los grandes números). Asumamos que $\mathbb{E}_c(A_n^4) < \infty \quad \forall n$, aplicando el lema anterior:

$$\mathbb{E}((\bar{\mu} - \mu)^4) \leq \frac{K}{n^2}.$$

Ahora sea $Y_n = (\bar{\mu} - \mu)^4, \forall n \in \mathbb{N}$ una variable aleatoria por la proposición 3.2.1 y en particular es no negativa, luego podemos aplicar el lema 3.2.1 en la siguiente cadena de igualdades:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n \geq 1} (\bar{\mu} - \mu)^4\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}((\bar{\mu} - \mu)^4) \leq K \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

lo que implica:

$$\left| \sum_{n \geq 1} (\bar{\mu} - \mu)^4 \right| = \sum_{n \geq 1} (\bar{\mu} - \mu)^4 < \infty \quad c.s.$$

Pero si una serie es convergente, entonces la sucesión de su término general de la serie converge a cero, por tanto:

$$\bar{\mu} \rightarrow \mu \quad c.s.$$

\square

3.3. Fundamentos de las simulaciones Monte Carlo

El nombre *Monte Carlo* fue acuñado por los científicos que trabajaban en el desarrollo de armas nucleares en Los Álamos en la década de los 40 para designar una clase de métodos numéricos basados en el uso de números aleatorios. La esencia de este método reside en la invención de juegos de azar cuyo comportamiento puede ser usado para estudiar algún fenómeno de interés. Se podría pensar que el hecho de que resultados obtenidos por estos métodos estén sujetos a las leyes del azar es un problema, sin embargo, es un problema menor puesto que se puede determinar como de exactos son sus resultados y si se deseara obtener resultados más precisos, bastaría con incrementar el número de experimentos realizados. Actualmente, los métodos de Monte Carlo juegan un papel fundamental en la resolución de problemas matemáticos complejos, en los cuales, o bien los métodos de resolución analíticos o bien los métodos numéricos existentes requieren de grandes periodos de tiempo cómputo.

Curiosamente, en las definiciones de los métodos de Monte Carlo no hay referencia explícita al empleo de la capacidades de cómputo de los ordenadores, sin embargo el gran desarrollo que han experimentado éstos desde el último tercio de siglo XX hasta nuestros días, los ha convertido en herramientas indispensables en las simulaciones Monte Carlo. La generación de números aleatorios ha experimentado también un importante crecimiento en las últimas décadas.

Generadores de números pseudo-aleatorios

Los generadores de números pseudo-aleatorios producen secuencias indistinguibles de una realmente aleatoria, es decir, no generan valores de una distribución uniforme si no que dado una semilla o valor de inicialización generan siempre la misma sucesión de números.

Un tipo generador de números aleatorios muy usado venía dado por la siguiente ecuación expresión:

$$I_{j+1} = aI_j + c \quad \text{mód} (m) \quad (3.2)$$

donde a es un entero positivo llamado multiplicador y c es un número natural llamado incremento. Para $c \neq 0$, el generador de la ecuación 3.2 es conocido por el nombre de *generador lineal congruente*. Claramente, en $n < m$ pasos la ecuación comienza a generar valores duplicados en el mismo orden. Conocido ésto, se hacían elecciones particulares de a, c y m que proporcionaran el mayor periodo posible. En [33] podemos encontrar algunos resultados

notables sobre la elección parámetros a, c y m . La elección del valor inicial I_0 no es relevante, pues se generarán todos los naturales posibles entre 0 y $m-1$ antes de la primera repetición. Sin embargo no es suficiente con generar una sucesión de números de un largo periodo, además deben superar rigurosas baterías de tests empíricos que aseguren una buena distribución de las secuencias, además de la ausencia de patrones en las mismas. En el caso de los generadores lineales congruentes existe un resultado que afirma que las sucesivas n -tuplas de valores generados residen en al menos $(n!m)^{\frac{1}{m}}$ hiperplanos paralelos [34], luego esta clase de generadores no son adecuados para la generación de números aleatorios.

Dado el carácter empírico de las baterías de test, superarlas con éxito no asegura un generador de números perfecto, sino que probablemente se trate de un buen generador, ya que eventualmente con el suficiente tiempo se podría encontrar un test que no fuera superado con éxito. Por tanto nos interesaremos en tests que demuestren el mal comportamiento de un generador en un tiempo razonable.

De entre las numerosas baterías de tests existentes destacamos dos [35, 36]: *Dieharder*, que está basada en los primeros test estadísticos propuestos en *Diehard battery of tests*, incluye también los test desarrollados por el NIST (National Institute for Standards and Technology) y la batería de tests *TestU01* [35, 36].

Nuestra elección es una variante del generador *Mersenne Twister* [37] presente en la biblioteca estándar del lenguaje de programación Python en las versiones posteriores a la 2.3 [38], y en el lenguaje de programación estadística *R* [39].

Métodos Monte Carlo

Los métodos de Monte Carlo se apoyan fundamentalmente en dos grandes resultados de la teoría de la probabilidad: la ley de los grandes números y el teorema central de límite. Ambos nos permiten describir la distribución límite de la suma de las variables aleatorias independientes, proporcionando también una estimación del error.

Definición 3.3.1. Una muestra aleatoria simple S_n , es un conjunto de $n \in \mathbb{N}$ variables aleatorias, A_1, A_2, \dots, A_n , independientes e idénticamente distribuidas. En caso de que la media y la varianza de las variables aleatorias A_1, A_2, \dots, A_n sean finitas, las notaremos μ y σ^2 respectivamente.

La media de una muestra aleatoria simple S_n , $\mu_S = E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i$ es una variable aleatoria gracias al resultado 3.2.1, si además la media μ y varianza σ

de A_i son finitas, dicha variable aleatoria tiene la siguiente media y varianza:

$$E(\mu_S) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(A_i) = \mu,$$

$$\text{var}(\mu_S) = \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(A_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Luego su desviación estándar es $\sqrt{\text{var}(\mu_S)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Definición 3.3.2. La variable aleatoria μ_S anteriormente definida diremos que es un *estimador* del valor esperado $E(A) = \mu$.

Definición 3.3.3. Sea μ_S un estimador de la media de una muestra aleatoria simple, S_n , de media $\mu < \infty$ y varianza $\sigma^2 < \infty$ y $\delta > 0$, la desigualdad de Chebychev es:

$$P\left(|\mu_S - \mu| \geq \sqrt{\frac{\text{var}(\mu_S)}{\delta}}\right) = P\left(|\mu_S - \mu| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n\delta}}\right) \leq \delta.$$

El gran resultado o *teorema fundamental de las simulaciones Monte Carlo* que podemos deducir de los anteriores, en particular es una consecuencia directa del teorema 3.2.4, el estimador G de la media de una muestra aleatoria simple, S_n , de media $\mu < \infty$ y varianza $\sigma^2 < \infty$ converge en probabilidad al valor esperado μ :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|G - \mu| > \epsilon) = 0.$$

Es posible aplicar la desigualdad 3.3.3 para obtener la velocidad de convergencia respecto a n . Veamos un ejemplo de éste hecho, dado $\delta = \frac{1}{100}$:

$$P\left((G - \mu)^2 \geq \frac{100}{n} \sigma^2\right) \leq \frac{1}{100},$$

Haciendo n lo suficientemente grande, la varianza de G se hace tan pequeña como se quiera, esto es, disminuye considerablemente la probabilidad de obtener una gran desviación relativa a δ entre el valor esperado y el los valores obtenidos.

Es posible obtener un resultado más fuerte que el anterior como consecuencia del teorema 3.2.1. Existe una función de distribución de probabilidad que aproxima los valores del estimador G , esto es, cuando $n \rightarrow \infty$, el teorema central del límite afirma que asintóticamente los valores de G convergen a

una distribución normal 3.2.21. Por tanto, es posible reescribir la función de distribución como sigue:

$$f(G) = \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n(G-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, el valor de G se encuentra en intervalos cada vez más estrechos centrados en $\mathbb{E}(G)$ y es posible medir la desviación en unidades de σ , es decir, el valor de G está dentro del intervalo centrado en $\mathbb{E}(G)$ de un error estándar el 68.3% de las veces, de dos errores estándar el 95.4% de las veces y de tres errores estándar el 99.7% de las veces, los intervalos son $[\mathbb{E}(G) - \sqrt{\text{var}(G)}, \mathbb{E}(G) + \sqrt{\text{var}(G)}]$, $[\mathbb{E}(G) - 2\sqrt{\text{var}(G)}, \mathbb{E}(G) + 2\sqrt{\text{var}(G)}]$ y $[\mathbb{E}(G) - 3\sqrt{\text{var}(G)}, \mathbb{E}(G) + 3\sqrt{\text{var}(G)}]$, respectivamente 3.2.6. Como comentábamos anteriormente la convergencia es asintótica por lo que inicialmente desconocemos como de grande debe de ser n para poder aplicar el teorema.

Cuando la varianza no es finita, es posible encontrar una distribución límite para G que llevará a un caso particular del teorema central del límite, en estos casos la distribución límite no será en general la distribución normal. Un estimador de la varianza de la media estimada viene dado por:

$$\text{var}(G_n) = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \right)^2 \right)$$

4

Análisis

Las estimaciones de los métodos Monte Carlo dependen en gran medida de la anchura del intervalo de confianza $[\mu + 3\sigma, \mu - 3\sigma]$. Dicha anchura se reduce con el incremento del número de muestras aleatorias pero lo hace lentamente con el consecuente incremento de tiempo de computación. Por esta razón se crean métodos alternativos conocidos como métodos de reducción de la varianza. En esta sección introducimos uno que se adecúa a nuestro problema y que utilizaremos en las todas las ejecuciones posteriores.

4.1. Reducción de la varianza

En la [Figura 4.1](#) visualizamos la evolución del área del cuadrado más pequeño que contiene a todas las células en cada iteración de juego de vida. Para el contenido de esta sección no es relevante la configuración inicial de la que se han obtenido los datos. Cada punto representa una estimación Monte Carlo, para los puntos de color naranja no se puede rechazar la hipótesis nula de que sigan un distribución normal, los de color azul sí rechazan la hipótesis nula y por tanto no podemos afirmar nada acerca de su intervalo de confianza.

El intervalo de confianza $[\mu + 3\sigma, \mu - 3\sigma]$ crece a medida que la iteración se aleja de la configuración inicial, de decir, la varianza aumenta. Es posible reducirla aumentando el número de simulaciones globalmente e incrementando notablemente el tiempo de cálculo. Sin embargo para el número prefijado de simulaciones se obtienen intervalos de confianza lo suficientemente pequeños en las iteraciones iniciales, por tanto proponemos incrementar el número de simulaciones a medida que las iteraciones aumenten. Este incremento requiere de la adición de nuevas simulaciones en cada iteración, las cuales serán escogidas aleatoriamente de las ya existentes modificando la semilla para no obtener simulaciones duplicadas. Experimentalmente hemos observado que un valor que muestra buenos resultados sin aumentar excesivamente el tiempo de cálculo es un incremento en cada iteración de una décima parte del valor inicial de simulaciones. Finalmente es posible observar la reducción del intervalo de confianza que conlleva dicho incremento en la [Figura 4.3](#).

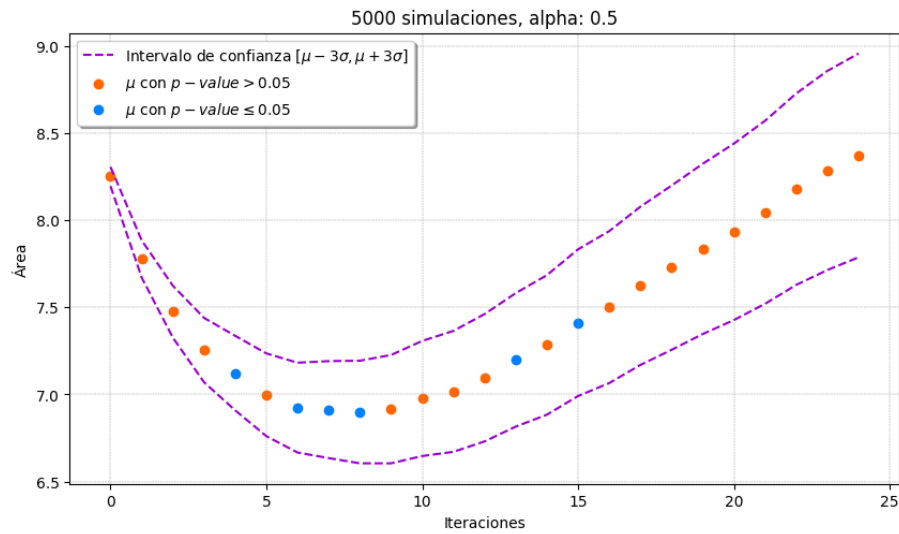


Figura 4.1: Ejecución sin incremento del valor inicial de simulaciones cada iteración.

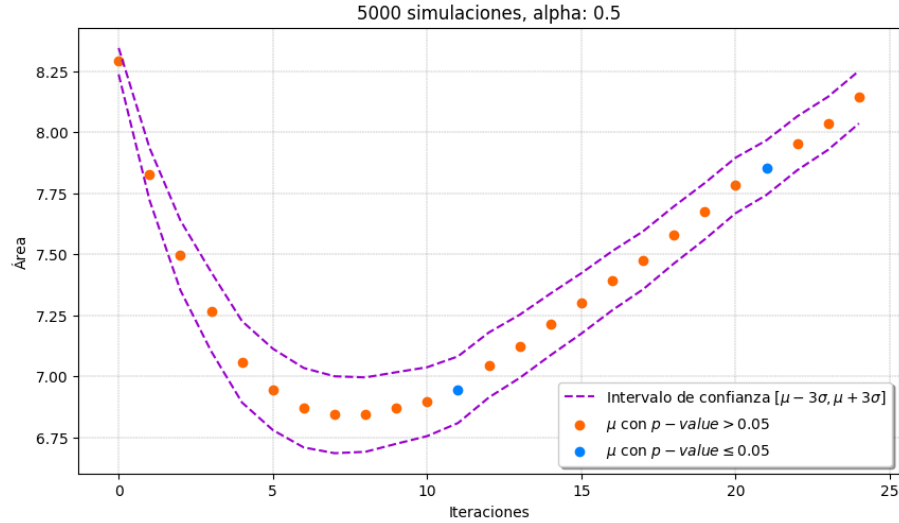


Figura 4.2: Ejecución con incremento del 10% del valor inicial de simulaciones en cada iteración.

4.2. Efecto del α -asincronismo en las configuraciones iniciales

El impacto de la α -asíncronicidad se estudiado a través de la ejecución para cada configuración inicial seleccionada en la sección 2.3 de 50 pasos o iteraciones con los valores de α : 0.15, 0.3, 0.45, 0.6, 0.75 y 0.9, y cada iteración simulada 5000 veces aplicando el método de reducción de la varianza de la sección anterior. Como resultado hemos obtenido los valores medios de las variables expuestas en la sección 2.4 junto con sus correspondientes intervalos de confianza para cada iteración.

Comentamos los efectos de la variación de la α -asíncronicidad sobre la configuración inicial *blinker*. Como se observa en las Figura 2.4a, Figura 2.4b y Figura 2.4c, cuando no existe perturbación en el intercambio de información entre células, el calor en cada iteración es 4, es decir, 2 células mueren y 2 células nacen por iteración, ocupa un área de 3 células² y está conformada por un solo clúster. Intuitivamente se puede pensar que valores pequeños de α disminuyen el calor, esto es, la tasa de cambio se hace pequeña y en consecuencia no debería de variar mucho el área que ocupe el patrón, pero por el contrario mientras que efectivamente el calor disminuye, el área aumenta algo más de una unidad en las iteraciones iniciales. Este efecto se observa particularmente en la Figura 4.3 y la Figura 4.4 que muestran los valores medios de área y calor para $\alpha = 0.3$. Durante las primeras 10 iteraciones el área media alcanza un máximo local. Más tarde el área media decrece levemente y comienza otra vez a crecer hasta que alcanza un valor superior al máximo local anterior, éste comportamiento se da mientras el calor permanece constantemente cercano a 0.2.

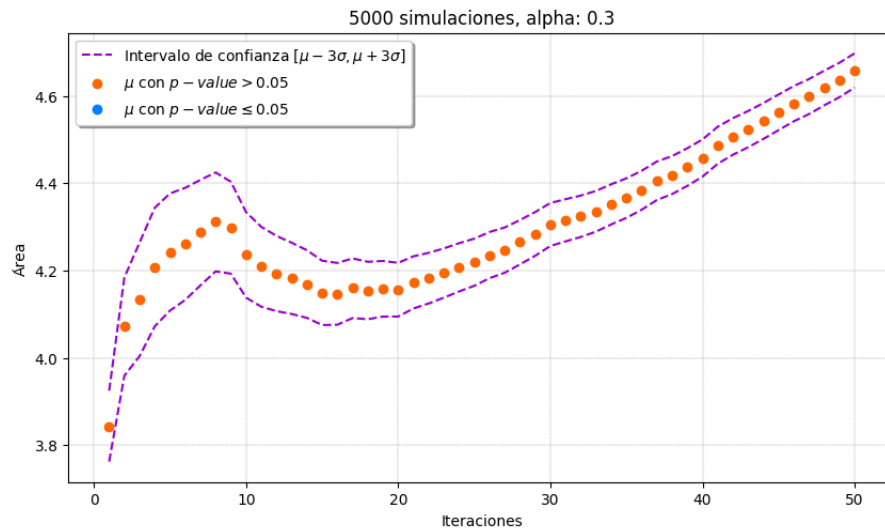


Figura 4.3: Evolución del área media de la configuración inicial *blinker* con $\alpha = 0.3$.

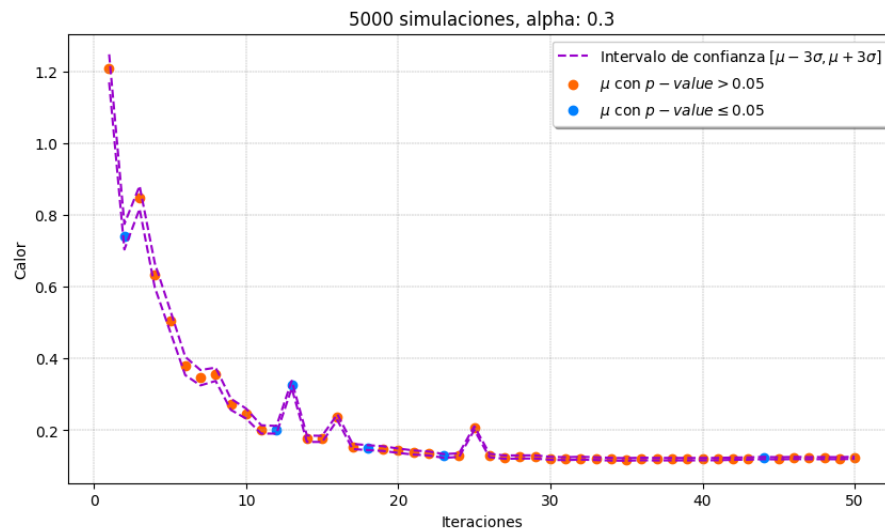


Figura 4.4: Evolución del calor medio de la configuración inicial *blinker* con $\alpha = 0.3$.

Fijamos nuestra atención en el área media y el número medio de células de las simulaciones dónde podremos observar un interesante fenómeno. Para

$\alpha = 0.3$ como comentábamos anteriormente el área media crece aproximadamente una unidad tras 50 iteraciones. Esta situación se agudiza cuando incrementamos α . Para $\alpha = 0.6$ (Figura 4.5) el área media crece tres veces más que para $\alpha = 0.3$ y finalmente para $\alpha = 0.9$ (Figura 4.6) el área media tras 50 iteraciones vale algo más de 20 *células*². Una tendencia similar se puede observar también al observar el número de células. El valor $\alpha = 0.45$ (Figura 4.7) obtiene un número medio de células cercano al original, al duplicarlo (Figura 4.8) se incrementa en 2 el número medio de células tras solo 20 iteraciones y después crece levemente hasta 5.6. Es decir, estamos observando que a medida que el valor de α se aproxima a 1, el área media se incrementa notablemente por encima del área inicial de 3 *células*² hasta un valor cercano a 20 *células*² y el número medio de células llega casi a duplicarse.

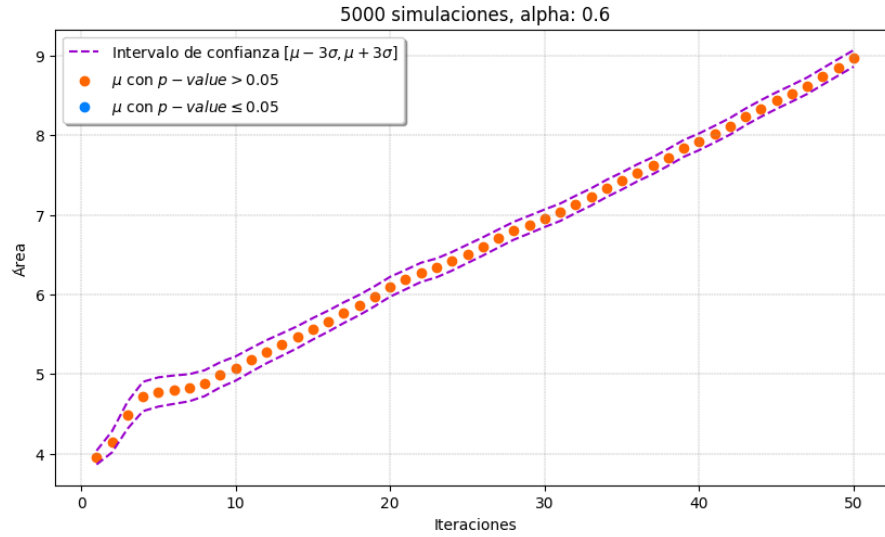


Figura 4.5: Evolución del área media de la configuración inicial *blinker* con $\alpha = 0.6$.

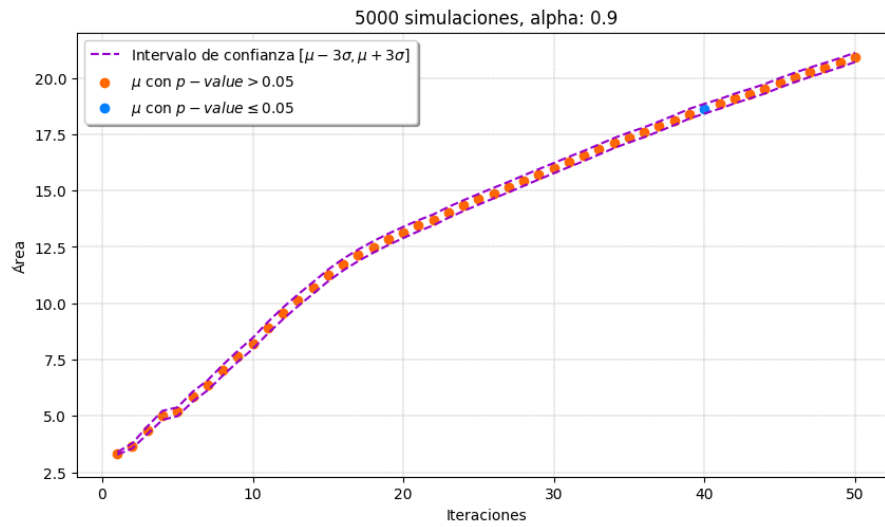


Figura 4.6: Evolución del área media de la configuración inicial *blinker* con $\alpha = 0.9$.

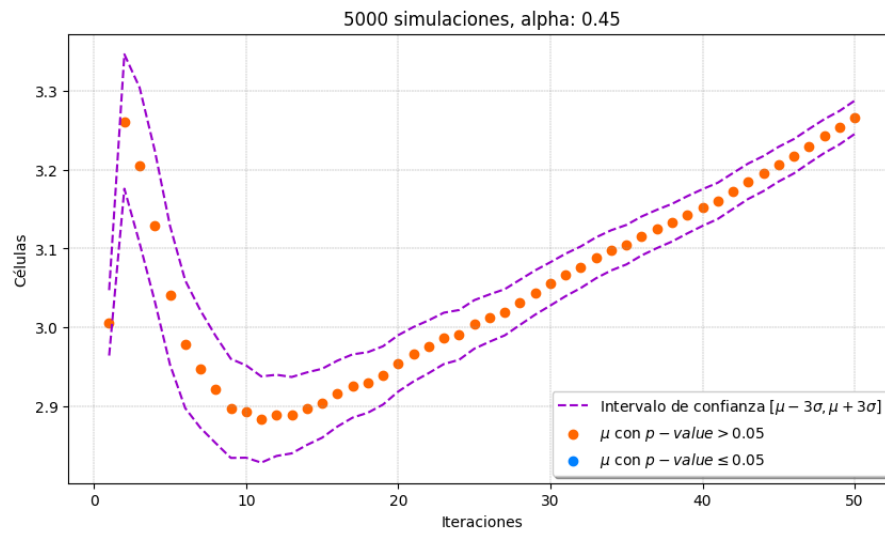


Figura 4.7: Evolución del número medio de células de la configuración inicial *blinker* con $\alpha = 0.45$.

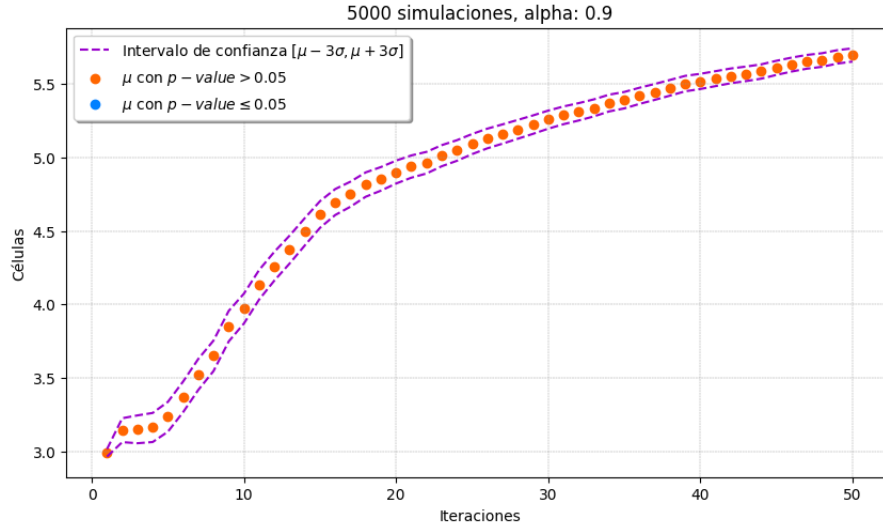


Figura 4.8: Evolución del número medio de células de la configuración inicial *blinker* con $\alpha = 0.9$.

Por el contrario, el número de clústeres medio y el calor medio de las simulaciones durante las primeras 10 iteraciones experimenta un notable decrecimiento del calor y número de clústeres medio. Además dicho decrecimiento es en menor medida cuando α tiende a 1. En iteraciones posteriores, o bien los valores medios se mantienen constantes (Figura 4.4 y Figura 4.10) ($\alpha < 0.5$), o bien crecen y en particular cuando α se aproxima a 1 (Figura 4.9 y Figura 4.11), el número medio de clústeres y el calor medio se aproximan a los valores del juego de vida síncrono.

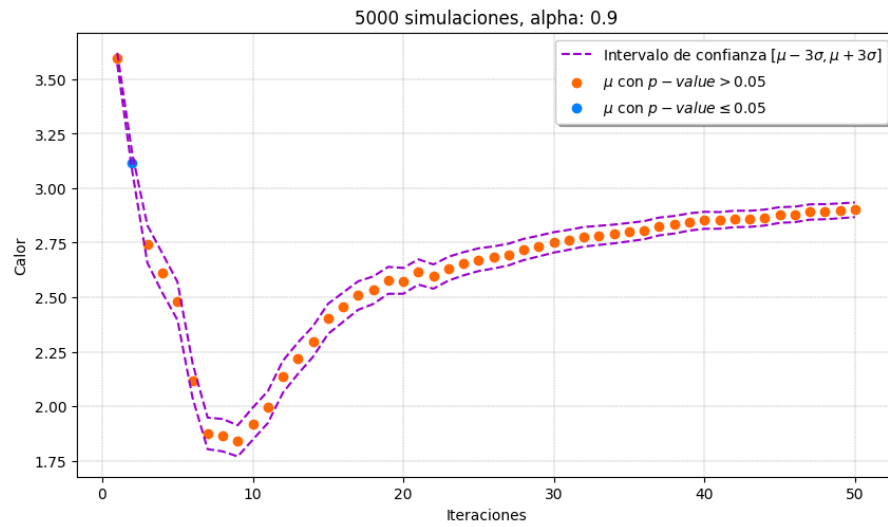


Figura 4.9: Evolución del calor medio de la configuración inicial *blinker* con $\alpha = 0.9$.

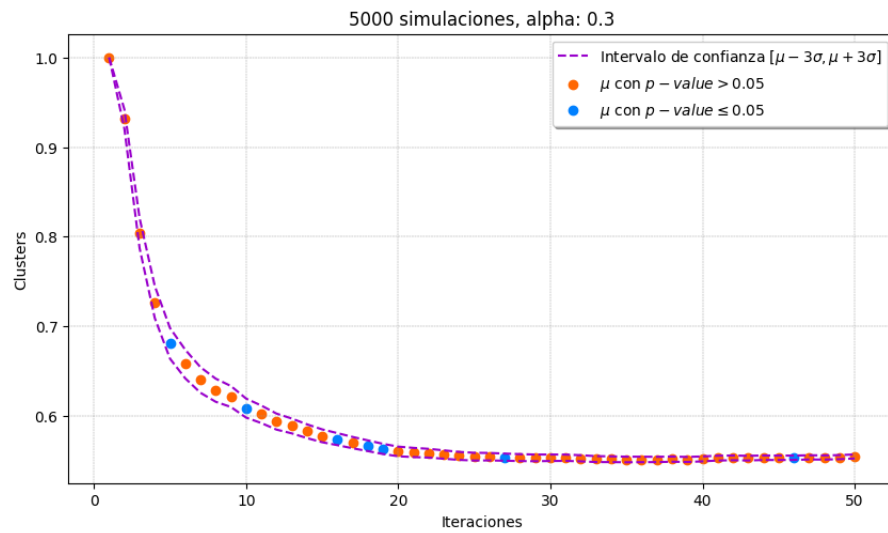


Figura 4.10: Evolución del número medio de clústeres de la configuración inicial *blinker* con $\alpha = 0.3$.

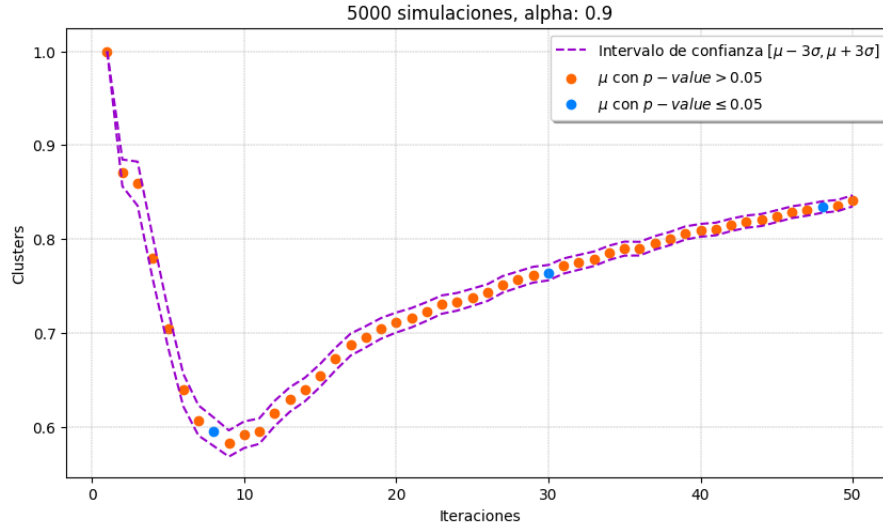


Figura 4.11: Evolución del número medio de clústeres de la configuración inicial *blinker* con $\alpha = 0.9$.

La configuración inicial *toad* (Figura 2.4d, Figura 2.4e y Figura 2.4f) formada por 6 células que ocupan un área de 8 células² en las iteraciones pares y 16 células² en las impares y en cada iteración desprende 8 de calor, esto es, 4 células mueren y 4 nacen, tiene un comportamiento similar a *blinker* frente a la introducción de α -asíncronismo en su evolución. Tanto en el área media como en el número de células medio podemos distinguir, para los valores de α observados que atendiendo a su monotonía se diferencian dos regiones o intervalos de iteraciones (Figura 4.12, Figura 4.13, Figura 4.14 y Figura 4.15). Una región inicial de iteraciones en la cual los valores medios decrecen, y otra en la que crecen hasta alcanzar valores superiores a los iniciales. El punto de intercambio entre estas dos regiones de iteraciones se aleja de 0 cuando α es cercana al mismo y por el contrario se acerca a 0 cuando α está más próxima a 1, esto es, a medida que α decrece, la primera región crece y la segunda decrece, un comportamiento opuesto se obtiene cuando α crece. Por contrapartida, los valores medios de área y número de células en la primera región de iteraciones decrecen en menor medida cuando α crece y los valores de la segunda región de iteraciones aumentan en mayor medida con el mismo crecimiento de α . La primera región se puede observar como decrece respecto de α en la figura 1 y figura 2. También se puede ver como la segunda región crece, así como los valores dentro de la misma, respecto de α .

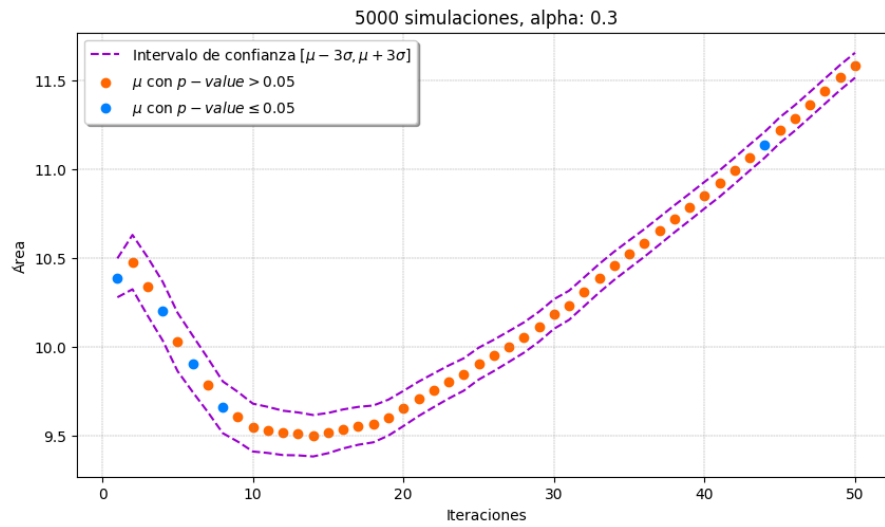


Figura 4.12: Evolución del área media de la configuración inicial *toad* con $\alpha = 0.3$.

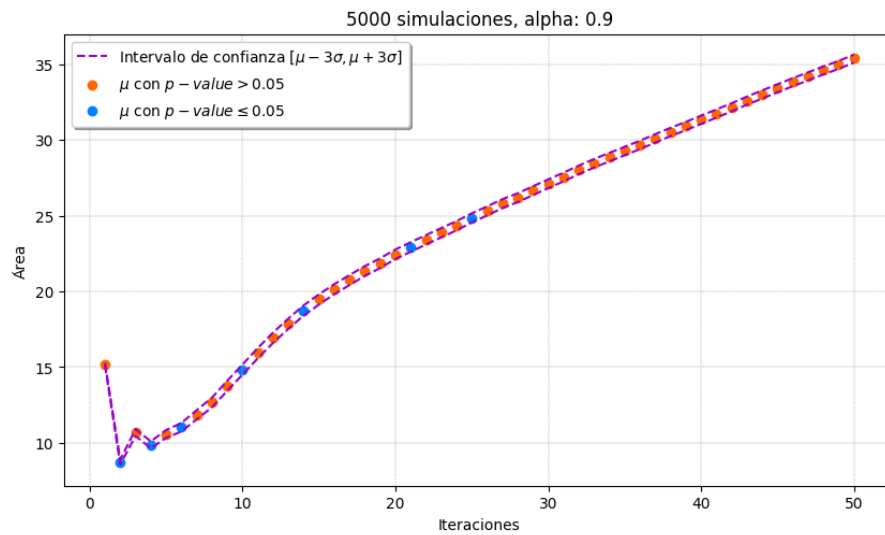


Figura 4.13: Evolución del área media de la configuración inicial *toad* con $\alpha = 0.9$.

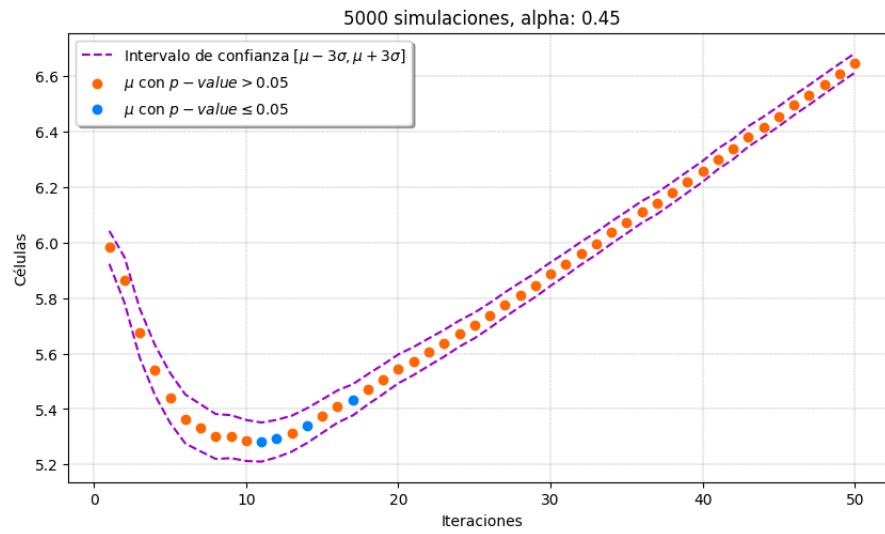


Figura 4.14: Evolución del promedio de células de la configuración inicial *toad* con $\alpha = 0.45$.

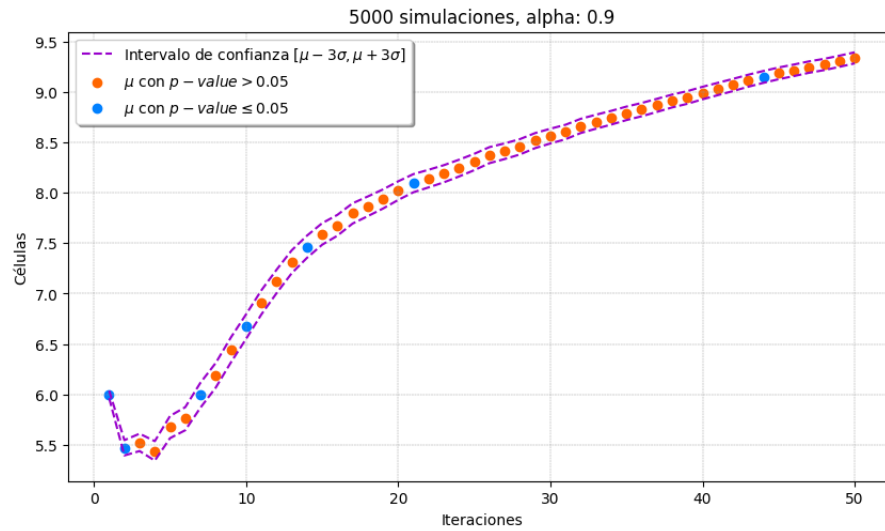


Figura 4.15: Evolución del promedio de células de la configuración inicial *toad* con $\alpha = 0.9$.

5

Conclusiones

5.1. Teoría de conjuntos

Introducción

Bibliografía

- [1] Edward F Moore. Machine models of self-reproduction. 14(1962):17–33, 1962.
- [2] Martin Gardner. Mathematical games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life". *Scientific American*, 223:120–123, 1970.
- [3] Martin Gardner. Wheels, life, and other mathematical amusements. 86, 1983.
- [4] Jan Hemmingsson. Consistent results on 'life'. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 80(1-2):151–153, 1995.
- [5] Hendrik J Blok and Birger Bergersen. Effect of boundary conditions on scaling in the "game of life". *Physical Review E*, 55(5):6249–6252, 1997.
- [6] Carter Bays. Cellular automata in the triangular tessellation. *Complex Systems*, 8(2):127, 1994.
- [7] Nick Owens and Susan Stepney. Investigations of game of life cellular automata rules on penrose tilings: Lifetime, ash, and oscillator statistics. *J. Cellular Automata*, 5(3):207–225, 2010.
- [8] Clifford A Reiter. The game of life on a hyperbolic domain. *Computers & Graphics*, 21(5):673–683, 1997.
- [9] Conway's Game of Life - Boardless approach. https://web.archive.org/web/20190212184430/https://rosettacode.org/wiki/Conway's_Game_of_Life#Boardless_approach. [Online; accessed 14-February-2019].
- [10] Stephen Wolfram. *Celular Automata and Complexity*. Addison-Wesley, 1994.
- [11] Harold V McIntosh. Wolfram's class iv automata and a good life. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 45(1-3):105–121, 1990.
- [12] Paul Rendell. *Turing universality of the game of life*. Springer, 2002.

- [13] A Turing Machine in Conway's Game of Life, extendable to a Universal Turing Machine. <https://web.archive.org/web/20190118023640/http://rendell-attic.org/gol/tm.htm>. [Online; accessed 14-February-2019].
- [14] Build a working game of Tetris in Conway's Game of Life - StackExchange. <https://web.archive.org/web/20190120082452/https://codegolf.stackexchange.com/questions/11880/build-a-working-game-of-tetris-in-conways-game-of-life>. [Online; accessed 14-February-2019].
- [15] Jean-Philippe Rennard. *Implementation of logical functions in the Game of Life*. Springer, 2002.
- [16] Nazim A Fatès and Michel Morvan. An experimental study of robustness to asynchronism for elementary cellular automata. *arXiv preprint nlin/0402016*, 2004.
- [17] Birgitt Schönfisch and André de Roos. Synchronous and asynchronous updating in cellular automata. *BioSystems*, 51(3):123–143, 1999.
- [18] Birger Blok, Hendrik J.; Bergersen. Synchronous versus asynchronous updating in the “game of life”. *Physical Review E*, 59:3876–3879, 1999.
- [19] Nazim Fates. Critical phenomena in cellular automata: perturbing the update, transitions, the topology. *Acta Physica Polonica B*, 3:315–325, 2010.
- [20] Alberto Dennunzio, Enrico Formenti, Luca Manzoni, and Giancarlo Mauri. m-asynchronous cellular automata: from fairness to quasi-fairness. *Natural Computing*, 12(4):561–572, 2013.
- [21] Noam David Elkies. The still-life density problem and its generalizations. *Voronoi's Impact on Modern Science, Book I*, 1998.
- [22] Matthew Cook. Still life theory. *New Constructions in Cellular Automata*, 226, 2003.
- [23] Still Life - lifewiki. http://www.conwaylife.com/wiki/Still_life. [Online; accessed 21-May-2019].
- [24] Number of stable n-celled patterns still lifes in Conway's game of Life. <https://oeis.org/A019473>. [Online; accessed 21-May-2019].
- [25] Number of n-celled pseudo-still-lives in Conway's game of Life. <https://oeis.org/A056613>. [Online; accessed 21-May-2019].

- [26] ER Berlekamp, JH Conway, and RK Guy. What is life?, chapter 25. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, 2, 1982.
- [27] The Online Life-Like CA Soup Search - lifewiki. http://www.conwaylife.com/wiki/Nathaniel%27s_census. [Online; accessed 21-May-2019].
- [28] Achim Flammenkamp's census - lifewiki. http://www.conwaylife.com/wiki/Achim_Flammenkamp%27s_census. [Online; accessed 21-May-2019].
- [29] Catagolue database. <https://catagolue.appspot.com/home>. [Online; accessed 2-Jun-2019].
- [30] Allan Gut. *Probability: a graduate course*, volume 75. Springer Science & Business Media, 2013.
- [31] David Williams. *Probability with martingales*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, 1991.
- [32] Michel Loeve. *Probability theory I*. Springer, 4th edition, 1977.
- [33] Donald E. Knuth. *The art of computer programming II*. Addison-Wesley Professional, 3 edition, 1997.
- [34] George Marsaglia. Random numbers fall mainly in the planes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 61(1):25, 1968.
- [35] Dieharder: A Random Number Test Suite. http://web.archive.org/web/20190402181134/http://webhome.phy.duke.edu/~rgb/General/rand_rate.php. [Online; accessed 02-April-2019].
- [36] Pierre L'Ecuyer and Richard Simard. Testu01: A library for empirical testing of random number generators. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 33(4):22, 2007.
- [37] Makoto Matsumoto and Takuji Nishimura. Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, 8(1):3–30, 1998.
- [38] Python 2.7.16 Documentation. <http://web.archive.org/web/20170907114211/https://docs.python.org/2.7/library/random.html>. [Online; accessed 29-April-2019].

- [39] R Documentation, random number generation. <https://web.archive.org/web/20190106064055/https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/base/html/Random.html>. [Online; accessed 29-April-2019].