



## TRABAJO FIN DE GRADO

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

### Juegos de vida: simulación y caracterización

---

#### Autor

Daniel Jiménez López

#### Directores

Antonio Miguel Lallena Rojo  
Juan Antonio López Villanueva



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍAS INFORMÁTICA Y DE  
TELECOMUNICACIÓN

—  
Granada, 29 de abril de 2019

# **Juegos de vida: simulación y caracterización**

Daniel Jiménez López

**Palabras clave:**

**Resumen**

# **Games of Life: simulation and characterization**

Daniel Jiménez López

**Keywords:**

**Abstract**

# Índice general

---

Índice general	3
1 Introducción	4
2 Metodología	8
2.1. Teoría de conjuntos . . . . .	8
2.2. Teoría de la probabilidad: conceptos básicos . . . . .	9
2.3. Teoría de la probabilidad: Teorema central del límite . . . . .	13
2.4. Teoría de la probabilidad: Ley de los grandes números . . . . .	15
2.5. Teoría de la computación . . . . .	17
2.6. Generadores de números aleatorios . . . . .	20
2.7. Fundamentos de las simulaciones Monte Carlo . . . . .	21
2.8. Implementación: Representación interna del juego de vida $\alpha$ -asíncrono . . . . .	24
2.9. Implementación: Actualización celular del juego de vida $\alpha$ -asíncrono	24
Bibliografía	25

# 1

## Introducción

---

El autómata celular fue inventado por von Neumann y Ulam en 1950 para estudiar el problema de hacer máquinas artificiales que se reproduzcan a sí mismas [26]. Con el fin de imitar el comportamiento de seres vivos, el diseño de dichas máquinas incluiría el espacio en el que se desarrollan, representado por una malla en la que los nodos son llamados células y evolucionan simultáneamente de acuerdo a un conjunto de reglas simples. Éstas dirigen la "física" de su pequeño universo abstracto, dichas reglas son locales en el sentido de que cada célula tiene conocimiento de aquellas células que la rodean, su vecindario. En la construcción de Neumann el vecindario lo constituyen las células adyacentes verticales y horizontales, lo que se conoce como vecindario de Neumann o de tipo Neumann, si además se considera que las células adyacentes diagonales forman parte del vecindario, entonces pasa a nombrarse vecindario de Moore o de tipo Moore.

El juego de vida es un autómata celular propuesto por Conway en 1970 y popularizado por Martin Gardner en el mismo año [15]. Éste consiste en la evolución de una configuración inicial de células con dos estados mutuamente excluyentes, vida (1) o muerte (0), en una malla rectangular infinita dos dimensional. Dicha evolución viene dada por un conjunto de reglas que se aplican simultáneamente a todas las células considerando su vecindario de tipo Moore. Dada una célula viva, ésta continua viviendo si en su vecindario hay 2 o 3 células, en otro caso muere y dada una célula muerta, nace si tiene 3 células en su vecindario.

Uno de los motivos por los que atrajo la atención de científicos de diferentes campos es la capacidad de observar como patrones complejos surgen de la aplicación de un conjunto muy simple y reducido de reglas. De esta manera comenzaron a observarse configuraciones iniciales que daban lugar a comportamientos interesantes. Tales como las de 'naves espaciales' que se desplazan sobre la malla rectangular, los 'osciladores' que retornan a su configuración inicial después de un número finito de generaciones o las 'vidas inmóviles', osciladores de periodo la unidad.

La elección de las reglas de evolución parecería a priori aleatoria, sin em-

bargo, Conway perseguía con ellas obtener el siguiente comportamiento [18]:

- No debe de haber una disposición inicial de células para la cual haya una prueba simple de que la población pueda crecer sin límite.
- Debe de haber disposiciones iniciales de células que aparentemente crezcan sin límite.
- Debe de haber disposiciones iniciales de células simples que crezcan y cambien durante un periodo considerable, llegando a tres posibles finales: desaparecer completamente ya sea debido a superpoblación o a dispersión, estabilizarse en una configuración que se mantenga constante o entrar en un ciclo sin fin de oscilación de periodo mayor a uno.

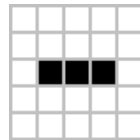


Figura 1.1: Oscilador de periodo dos nombrado 'Blinker'

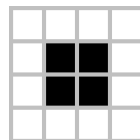


Figura 1.2: Vida inmóvil nombrada 'Block'

Al intentar realizar simulaciones de juegos de vida en los ordenadores se enfrentan al problema de representar una malla infinita en un ordenador con memoria finita. Una inteligente solución sería alterar las características topológicas de la malla, imitando las de una botella de Klein, una esfera, o un toro. En particular, esta última resulta atraer gran interés, pues se obtiene evidencia de que reduce los efectos asociados a la finitud de la malla [10, 17]. Cabe descartar el estudio de la alteración de las cualidades geométricas de la malla, tales como el uso de figuras geométricas regulares diferentes al cuadrado (triángulo y hexágono) [9], teselaciones de Penrose [27] o el empleo del espacio geométrico hiperbólico [28]. Finalmente, cabe notar que existen implementaciones en las cuales no se almacena la malla en la memoria, si no que se almacena la posición de cada célula respecto a un origen de coordenadas, simulando más eficazmente una malla infinita [2].

El juego de vida también muestra interesantes características en el campo de teoría de la computación. Perteneció a la clase IV de Wolfram [25,32] y se ha demostrado que es una máquina de Turing universal [29]. Por tanto existe una disposición inicial de células que simula una máquina de Turing, la cual fue extendida a una máquina universal de Turing [6]. Más recientemente en un esfuerzo colectivo, se ha implementado un ordenador con su propio lenguaje de ensamblador, compilador a lenguaje de alto nivel, y sobre este último se ha implementado el conocido juego Tetris [1,30].

Si los autómatas celulares son un modelo que representa a organismos vivos se podría pensar que la hipótesis de actualización simultánea es cuestionable. La existencia de un agente que simultáneamente aplica las reglas a todos los individuos puede hacer que el modelo se aleje demasiado de la realidad que representa. Aunque hay algunos casos en los cuales el comportamiento del autómata celular permanece constante aunque se cambie la hipótesis anterior. En esencia, estamos observando la robustez del modelo a perturbaciones de su evolución. Un modelo será robusto, si pequeños cambios en su evolución se traducirán en pequeñas perturbaciones del comportamiento global del sistema, mientras que si esta pequeña modificación produce un cambio cualitativo en la dinámica del sistema será poco robusto o simplemente sensible a las variaciones en su evolución, dicho cambio cualitativo se conoce también como transición de fase. En la literatura se plantean dos maneras diferentes de introducir la asincronicidad en la aplicación reglas de evolución [8]:

- **Evolución totalmente asíncrona:** en cada unidad de tiempo discreto, las reglas de evolución se aplican solamente a un individuo escogido aleatoriamente del conjunto de células.
- **Evolución  $\alpha$ -asíncrona:** en cada unidad de tiempo discreto, cada células tiene probabilidad  $\alpha$  de aplicar las reglas de evolución y probabilidad  $1 - \alpha$  de mantener su estado.

Estos esquemas de evolución también se conocen como **evolución guiada por pasos** y **evolución guiada por tiempo**, respectivamente [7]. Los primeros en estudiar los efectos de la evolución asíncrona frente a la evolución síncrona en el juego de vida fueron [11], aplicaron un esquema de evolución  $\alpha$ -asíncrona para mostrar la existencia de una transición de fase de un comportamiento 'estático', donde el sistema termina alcanzando algún punto fijo, a un comportamiento 'vívido'. Posteriormente se estudió como afectaban las variaciones en la topología de la malla a la transición de fase, concluyendo que el valor crítico de la transición de fase depende fuertemente de la regularidad de la malla [13,14].

Hasta donde podemos saber solo se ha estudiado el comportamiento en situaciones de  $\alpha$ -asincronicidad de configuraciones iniciales aleatorias que rellenan una malla finita, obteniendo resultados que se comparan con las características conocidas del juego de vida síncrono. En este trabajo queremos caracterizar la manera en la que configuraciones iniciales bien conocidas y estudiadas como las que se muestran en las figuras 1.1 y 1.2, alteran su comportamiento en situaciones de  $\alpha$ -asincronicidad, a través de diferentes variables, tales como el número de clústeres de células diferentes por unidad discreta de tiempo, su velocidad y densidad, entre otras.



# 2

## Metodología

---

Antes de continuar con la implementación y exposición de la técnica de simulación Monte Carlo es necesario introducir un marco teórico matemático que nos servirá de referencia además de establecer una base de trabajo concisa. Los formalismos nos permitirán articular la intuición de asincronismo en el esquema de actualización del autómata celular, cuyo homónimo biológico sería el procesamiento imperfecto de información entre individuos a causa de perturbaciones derivadas del medio o de la interacción de los individuos. En este trabajo nos restringimos a un caso simple de asincronismo en la actualización: examinaremos que ocurre si todas las transiciones ocurren al mismo tiempo pero los individuos reciben la información del estado de sus vecinos de forma imperfecta.

En primer lugar introduciremos los conceptos básicos de teoría de conjuntos, probabilidad, computación y generación de números aleatorios sobre los que desarrollaremos las estimaciones Monte Carlo. Las claves de este desarrollo serán el teorema central del límite y la ley de los grandes números que esencialmente justifican la efectividad del método Monte Carlo.

### 2.1. Teoría de conjuntos

#### Introducción

Nos gustaría poder plasmar la intuición de que una célula tenga la misma probabilidad de ser actualizada independientemente o no del resto de células actualizadas en cada instante de tiempo. El concepto de ultrafiltro nos permitirá establecer una clase de autómata celular lo suficientemente general como para abarcar los nuevos tipos de autómatas celulares que introduciremos en posteriores secciones.

Dado un conjunto  $X$ ,  $P(X)$  denota el conjunto de todos los subconjuntos de  $X$ . Dado  $A \in P(X)$ , notaremos su complementario  $A^c$ .

**Definición 2.1.1.** Un ultrafiltro de  $X$  es  $U \in P(X)$  tal que:

1.  $\emptyset \in U$ .
2. Sean  $A, B \in P(X)$  tales que  $A \subset B, A \in U$ , entonces  $B \in U$ .
3. Si  $A, B \in U$ , entonces  $A \cap B \in U$ .
4. Si  $A \in P(X)$  entonces  $A \in U$  o  $A^c \in U$ .

Además dado  $p \in X$ , el ultrafiltro  $U_p$  diremos que es principal si es el más pequeño que contiene a  $p$ , esto es, la colección de todos los conjuntos que contienen a  $p$ .

## 2.2. Teoría de la probabilidad: conceptos básicos

El contenido de esta sección está extraído de los siguientes textos en orden de empleo: [16, 21, 31].

**Definición 2.2.1.** Una  $\sigma$ -álgebra,  $\mathbb{F}$ , sobre un conjunto  $X$ , es una colección no vacía de subconjuntos de  $X$  cerrados para uniones numerables y para la operación de complementario, esto es:

- $\forall A \in \mathbb{F}$  se verifica que  $A^c \in \mathbb{F}$ .
- $\forall A_n \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N}$  se verifica que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathbb{F}$ .

**Definición 2.2.2.** Sean un conjunto  $X$  con su  $\sigma$ -álgebra asociada,  $\mathbb{F}$ , el par  $(X, \mathbb{F})$  es un espacio medible.

**Definición 2.2.3.** Una función medible es una función entre espacios medibles,  $g : (X, \mathbb{F}) \rightarrow (X', \mathbb{F}')$  tal que:  $g^{-1}(A) \in \mathbb{F} \quad \forall A \in \mathbb{F}'$ .

**Definición 2.2.4.** La tupla  $(X, \mathbb{F}, P)$  es un espacio de probabilidad si:

- $X$  es el espacio de muestreo, esto es, algún conjunto,
- $\mathbb{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de sucesos, esto es, los conjuntos medibles de  $X$ ,
- $P$  es una medida de probabilidad, esto es,  $P$  satisface los siguientes axiomas de Kolmogorov:
  1. Para cada  $A \in \mathbb{F}$ , existe un número  $P(A) \geq 0$ , esto es, la probabilidad del suceso  $A$ ,
  2.  $P(X) = 1$ .
  3. Sean  $A_n, n \geq 1$  disjuntos, entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

**Definición 2.2.5.** Los sucesos  $A_n, n \geq 1$  son independientes si y solo si

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \prod_{n \geq 1} P(A_n).$$

**Definición 2.2.6.** Un conjunto  $A$  es abierto si, para cada punto  $x \in A$ , existe una bola de centro el punto y radio  $\epsilon > 0$  tal que  $B(x, \epsilon) = \{z : |z - x| < \epsilon\} \subset A$ . Así la  $\sigma$ -álgebra de Borel, es aquella generada por los conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$ .

### Variables aleatorias

**Definición 2.2.7.** Una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad  $(X, \mathbb{B}, P)$  es una función medible  $A: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Cada valor de  $A$  se corresponde con un subconjunto de puntos de  $X$  que se aplica en dicho valor, es decir,  $\{w \in X : A(w) = x\}$  que notaremos por simplicidad  $\{X = x\}$ . A parte de los anteriores conjuntos también nos resultarán de interés lo siguientes:

$$\begin{aligned}\{w \in X : A(w) \leq x\} &= \{A \leq x\} \\ \{w \in X : A(w) < x\} &= \{A < x\} \\ \{w \in X : A(w) > x\} &= \{A > x\} \\ \{w \in X : A(w) \geq x\} &= \{A \geq x\}\end{aligned}$$

Con esta útil notación podremos notar fácilmente la probabilidad de sucesos de mayor interés.

**Proposición 2.2.1.** Si  $g$  es una función real de variable real y medible y  $A$  es una variable aleatoria entonces  $A' = g(A)$  es una variable aleatoria.

**Definición 2.2.8.** Dada una variable aleatoria  $A$  se define su función de distribución como  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$x \mapsto F(x) = P(A \leq x).$$

**Proposición 2.2.2.** La función de distribución de la variable aleatoria  $A$  satisface:

- Es monótona no decreciente.
- Dada una sucesión decreciente de elementos de  $\mathbb{R}$ ,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ , convergente a  $x \in \mathbb{R}$  se tiene  $\lim_{x_n \searrow x} F(x_n) = F(x)$ , es decir, es continua a la derecha.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .

**Definición 2.2.9.** Sea  $F$  una función de distribución definimos la función de densidad de  $F$  como la función integrable,  $f$ , tal que:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall a < b.$$

**Definición 2.2.10.** Sea  $A$  una variable aleatoria, definimos su valor esperado o esperanza como sigue:

$$\mathbb{E}(A) = \int_X A(w)dP(w).$$

Adicionalmente si  $\mathbb{E}|A| < \infty$ , diremos que  $A$  es integrable.

**Definición 2.2.11.** Sea una variable aleatoria  $A$ , definimos:

- Los momentos de  $A$ :  $\mathbb{E}(A^n) = \int_X A(w)^n dP(w)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- Los momentos centrados de  $A$ :  $\mathbb{E}_c(A^n) = \mathbb{E}((A - E(A))^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Notar que los momentos no existen necesariamente para todo  $n$ .

**Definición 2.2.12.** Definimos la varianza de la variable aleatoria  $A$  con esperanza  $\mu < \infty$  y  $\mathbb{E}_c(A^2) < \infty$  como:

$$var(A) \equiv \mathbb{E}_c(A^2) = \mathbb{E}(A^2) - \mu^2.$$

**Definición 2.2.13.** A la raíz cuadrada positiva de la varianza la notaremos  $\sigma(A) = +\sqrt{var(A)}$  y diremos que es la desviación estándar de la variable aleatoria  $A$ .

**Proposición 2.2.3.** Sea  $A$  una variable aleatoria con esperanza  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  finitas, y sea  $A' = aA + b$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{E}(A') = a\mu + b \quad y \quad var(A') = a^2 \sigma^2.$$

**Definición 2.2.14.** Las variables aleatorias  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son independientes si y solo si, para arbitrarios conjuntos de la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $B_1, B_2, \dots, B_n$ :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n \{A_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k \in B_k).$$

### Variables aleatorias discretas

**Definición 2.2.15.** Una variable aleatoria  $A$  diremos que es discreta si toma valores es un conjunto numerable, esto es,  $\exists E = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que  $P(A \in E) = 1$ .

**Definición 2.2.16.** La función de distribución de una variable aleatoria  $A$  es la siguiente:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(A \leq x) = \sum_{x_n \in E, x_n \leq x} P(A = x_n).$$

**Definición 2.2.17.** Sea una variable aleatoria discreta  $A$ , definimos:

- Los momentos de  $A$ :  $\mathbb{E}(A^n) = \sum_{x_m \in E} x_m^n P(A = x_m)$ .
- Los momentos centrados de  $A$ :  $\mathbb{E}_c(A^n) = \sum_{x_m \in E} (x_m - \mu)^n P(A = x_m)$ .

El momento  $n=1$  se conoce como valor esperado o esperanza.

$$\mathbb{E}(A) \equiv \sum_{x_m \in E} x_m P(A = x_m).$$

**Definición 2.2.18** (Tipos de convergencia: convergencia en probabilidad y convergencia casi segura). Sean  $A_n, n \in \mathbb{N}$  y  $A$  variables aleatorias, definimos:

- $A_n \rightarrow A$  en probabilidad, si para todo  $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|A_n - A| > \epsilon) = 0$  y lo notaremos  $A_n \xrightarrow{P} A$ .
- $A_n \rightarrow A$  casi seguramente, si  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A) = 1$  y lo notaremos  $A_n \xrightarrow{c.s.} A$ .
- $A_n \rightarrow A$  en distribución, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \leq x) = P(A \leq x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  donde  $x \mapsto P(A \leq x)$  es una función continua y lo notaremos  $A_n \xrightarrow{d} A$ .

**Definición 2.2.19.** Sea  $i$  el número complejo  $i = \sqrt{-1}$ , la extensión de la función exponencial  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  al cuerpo de los números complejos es  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$z \mapsto \exp(iz) = e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Notar que el módulo de la exponencial compleja está acotado por la unidad :

$$|\exp(iz)| = |\cos z + i \sin z| = \sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z} = 1.$$

Esta propiedad de la exponencial compleja nos asegura la existencia de la siguiente definición para toda variable aleatoria.

**Definición 2.2.20.** La función característica asociada a la variable aleatoria  $A$  es la función  $\phi_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por:

$$\phi_A(t) = \mathbb{E}(e^{itA}).$$

**Proposición 2.2.4.** Sea  $\phi_A$  la función característica de la variable aleatoria  $A$ , entonces:

- $|\phi_A(t)| \leq \phi_A(0) = 1.$
- $\phi_A$  es una función uniformemente continua.
- $\phi_{cA+b}(t) = e^{itb} \phi_A(ct), \quad c, b \in \mathbb{R}.$
- Sea  $A_1, A_2, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$  una sucesión finita de variables aleatorias independientes, entonces:

$$\phi_{\sum_{i=1}^n A_i}(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{A_i}(t).$$

Además si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son idénticamente distribuidas:

$$\phi_{\sum_{i=1}^n A_i}(t) = \left( \phi_{A_1}(t) \right)^n.$$

- Si  $\mathbb{E}(A^k) < \infty$  su derivada  $k$ -ésima evaluada en 0 es  $\phi_A^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(A^k).$

### Distribución normal

**Definición 2.2.21.** Diremos que una variable aleatoria  $A$  sigue una distribución normal con media  $\mu < \infty$  u varianza  $\sigma^2 < \infty$ ,  $N(\mu, \sigma^2)$ , si  $A$  tiene una distribución con la siguiente función de densidad:

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Además su función característica es:

$$\phi_A(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

### 2.3. Teoría de la probabilidad: Teorema central del límite

**Teorema 2.3.1.** Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  variables aleatorias independientes, con esperanza  $\mu < \infty$ , varianza  $\sigma^2 < \infty$  e idénticamente distribuidas. Entonces

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow^d N(0, 1).$$

Previa a la demostración del teorema central del límite, introducimos las herramientas matemáticas que nos harán posible su demostración.

**Teorema 2.3.2** (Teorema de Taylor). Sea  $k \in \mathbb{N}$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $k$  veces diferenciable en el punto  $a \in \mathbb{R}$ . Entonces existe una función  $h_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + h_k(x)(x-a)^k,$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow a} h_k(x) = 0.$$

**Teorema 2.3.3** (Teorema de continuidad). Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$  variables aleatorias entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{A_n} = \phi_A(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

si y solo si

$$A_n \rightarrow^d A.$$

*Demostración (Teorema central del límite).* Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con esperanza  $\mu < \infty$  y varianza  $\sigma^2 < \infty$ . Sea ahora

$$Z_n = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Definimos una nueva variable aleatoria,  $Y_i$ , que es la versión normalizada de  $A_i$ :

$$Y_i = \frac{A_i - \mu}{\sigma}$$

Así definida,  $Y_i$  es idénticamente distribuida con esperanza y varianza:

$$E(Y_i) = 0, \text{Var}(Y_i) = 1.$$

Sea ahora  $Z_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}$ , queremos ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{Z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Procedemos a desarrollar el

$$\phi_{\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}}(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{\frac{Y_i}{\sqrt{n}}}(t) = \left( \phi_{\frac{Y_1}{\sqrt{n}}}(t) \right)^n$$

Aplicando el Teorema de Taylor para obtener el desarrollo centrado en 0 para  $k = 2$  de  $\phi_{Y_1}(\frac{t}{\sqrt{n}})$ :

$$\begin{aligned}
\phi_{\frac{Y_1}{\sqrt{n}}}(t) &= \phi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \phi_{Y_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\phi'_{Y_1}(0) + \frac{t^2}{2n}\phi''_{Y_1}(0) + \frac{t^2}{n}h_2(t) \\
&= 1 + i\frac{t}{\sqrt{n}}\mathbb{E}(Y_1) - \frac{t^2}{2n}\mathbb{E}(Y_1^2) + \frac{t^2}{n}h_2(t) \\
&= 1 + 0 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{n}h_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right),
\end{aligned}$$

donde  $\lim_{t \rightarrow 0} h_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 0$ .

Así obtenemos que

$$\left(\phi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{n}h_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

cuyo límite es la función característica de una variable perteneciente a una distribución normal con media 0 y varianza 1, concluimos la demostración aplicando el teorema de continuidad 2.3.3.  $\square$

## 2.4. Teoría de la probabilidad: Ley de los grandes números

**Teorema 2.4.1.** Sean  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  variables aleatorias independientes, con esperanza  $\mu$  e idénticamente distribuidas, es decir, obtenidas de la misma distribución. Entonces el valor medio de  $A_n$ ,  $\bar{\mu}$ , converge casi seguramente a  $\mu$ :

$$\bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \xrightarrow{c.s.} \mu,$$

esto es,  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu} = \mu) = 1$ .

Para obtener una demostración un tanto más breve de éste teorema añadiremos la hipótesis de existencia del momento de orden 4 de  $A_n$ . Una demostración completa del teorema sin la hipótesis adicional se puede consultar en [16].

**Lema 2.4.1.** Sean  $A_n, n \geq 1$  variables aleatorias no negativas, entonces:

$$E\left(\sum_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} E(A_n).$$



**Lema 2.4.2.** En las mismas condiciones de la ley de los grandes números, existe una constante  $K < \infty$  tal que para todo  $n \geq 0$ :

$$\mathbb{E}((\bar{\mu} - n\mu)^4) \leq Kn^2.$$

*Demostración.* Sean

$$Z_k = A_k - \mu \quad y \quad T_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{i=1}^n A_i - n\mu.$$

Entonces:

$$\mathbb{E}(T_n^4) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^4\right) = n\mathbb{E}(Z_1^4) + 3n(n-1)\mathbb{E}(Z_1^2 Z_2^2) \leq Kn^2.$$

donde en la segunda igualdad se ha empleado el desarrollo multinomial:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{1 \leq t \leq m} x_t^{k_t},$$

con

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

Dado que  $\mathbb{E}(Z_k) = 0 \quad \forall k$  y la independencia de las variables  $Z_k$ , se han cancelado todos los sumandos de la forma:

$$\mathbb{E}(Z_i Z_j^3) = \mathbb{E}(Z_i) \mathbb{E}(Z_j^3) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j,$$

$$\mathbb{E}(Z_i Z_j Z_k Z_l) = \mathbb{E}(Z_i) \mathbb{E}(Z_j) \mathbb{E}(Z_k) \mathbb{E}(Z_l) = 0, \quad 1 \leq i, j, k, l \leq n, \quad i \neq j \neq k \neq l.$$

y  $K$  adecuadamente elegida,  $K = 4\max\mathbb{E}(Z_1^4), \mathbb{E}(Z_1^2)^2$ . □

Ya tenemos todos los rudimentos necesarios para proceder a demostrar el teorema de esta sección.

*Demostración (Ley de los grandes números).* Asumamos que  $\mathbb{E}_c(A_n^4) < \infty \quad \forall n$ , aplicando el lema anterior:

$$\mathbb{E}((\bar{\mu} - \mu)^4) \leq \frac{K}{n^2}.$$

Ahora sea  $Y_n = (\bar{\mu} - \mu)^4, \forall n \in \mathbb{N}$  una variable aleatoria por la proposición 2.2.1 y en particular es no negativa, luego podemos aplicar el lema 2.4.1 en la siguiente cadena de igualdades:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n \geq 1} (\bar{\mu} - \mu)^4\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}((\bar{\mu} - \mu)^4) \leq K \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

lo que implica:

$$\left| \sum_{n \geq 1} (\bar{\mu} - \mu)^4 \right| = \sum_{n \geq 1} (\bar{\mu} - \mu)^4 < \infty \quad c.s.$$

Pero si una serie es convergente, entonces la sucesión de su término general de la serie converge a cero, por tanto:

$$\bar{\mu} \rightarrow \mu \quad c.s.$$

□

## 2.5. Teoría de la computación

### Introducción

Dado que el comportamiento completamente síncrono de un autómata celular como herramienta de modelado es una rareza, se han realizado numerosas investigaciones empíricas del autómata celular asíncrono. Sin embargo, los pocos análisis formales realizados o bien se refieren a ejemplos o a casos particulares de asincronicidad. [Alguna citilla mona]. Así pues tomaremos el concepto más generalista de autómata celular m-asíncrono [12], cuya idea principal es tener algún tipo de oráculo el cual en cada unidad discreta de tiempo dice las células que tienen que ser actualizadas. Dicho oráculo se implementa empleando una medida de probabilidad  $\mu$  sobre subconjuntos de enteros d-dimensionales,  $\mathbb{Z}^d$ . Notar que la definición con la que trataremos es la extensión a espacios multidimensionales de la dada en [12].

### Autómata celular determinista

Un autómata celular determinista es un sistema dinámico discreto consistente en un array  $d$ -dimensional de autómatas finitos, llamados células. Cada célula está conectada uniformemente a un vecindario formado por un número finito de células, y tiene un estado de un conjunto finito de estados. Actualiza su estado de acuerdo a una función de transición la cual determina el estado de una célula considerando su propio estado y el de su vecindario.

**Definición 2.5.1.** Formalmente, la tupla  $A = (\mathbb{Z}^d, N, Q, f)$  es un autómata celular determinista, de ahora en adelante autómata celular, donde:

- $\mathbb{Z}^d$  es un espacio de células  $d$ -dimensional.
- $Q$  el conjunto de estados posibles para cada célula.
- $N \in (\mathbb{Z}^d)^k$  es el vecindario genérico de un autómata celular, esto es, para  $N = (n_1, \dots, n_k)$ ,  $a \in \mathbb{Z}^d$  célula, cada célula en  $\{(a + n_1, \dots, a + n_k)\}$  es una célula vecina de  $a$ .
- $f : Q^{k+1} \rightarrow Q$  es la función de transición local que define la transición de estado de cada célula como función de su propio estado y del estado de cada célula en su vecindario.

**Definición 2.5.2.** Una configuración es una función  $g : \mathbb{Z}^d \rightarrow Q$ , la cual a cada punto del espacio  $\mathbb{Z}^d$  le asigna un estado del conjunto de estados  $Q$ , al conjunto de las configuración lo notaremos  $Q^{\mathbb{Z}^d}$ .

**Definición 2.5.3.** La función de transición local, fijando una configuración  $g$  induce una función de transición global  $F : Q^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}^d}$  definida como sigue:

$$\forall x \in Q^{\mathbb{Z}^d}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad F(x)(i) = f(x(i), x(i + n_1), \dots, x(i + n_k)).$$

**Definición 2.5.4.** Un autómata celular m-asíncrono  $C$  es una tupla  $(A, \mu)$  donde:

- $A$  es un autómata celular.
- $\mu$  es una medida de probabilidad sobre la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $P(\mathbb{Z}^d)$ .

**Definición 2.5.5.** Para cada función de transición local  $f$  y cada conjunto  $\tau \in P(\mathbb{Z}^d)$ , definimos la función de transición global  $F : Q^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}^d}$  como sigue:

$$\forall x \in Q^{\mathbb{Z}^d}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad F_\tau(x)(i) = \begin{cases} f(x(i), x(i + n_1), \dots, x(i + n_k)) & \text{si } i \in \tau, \\ x(i) & \text{si } i \notin \tau. \end{cases}$$

Es decir,  $F_\tau$  aplica la función de transición local solo sobre los elementos de  $\tau \subset \mathbb{Z}^d$ .

Notar que cada célula  $i \in \mathbb{Z}^d$  es actualizada con probabilidad  $\mu(U_i)$ .

Esta nueva definición de autómata celular m-asíncrono, incluye la de autómata celular síncrono. Fijada una  $\sigma$ -álgebra  $\mathbb{B}$  sobre  $\mathbb{Z}^d$  y sea  $C_0 = (A, \mu_0)$  un autómata celular m-asíncrono donde  $\mu_0 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  viene dada por:

$$\forall A \in P(\mathbb{Z}^d), \quad \mu_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbb{Z}^d \in A, \\ 0 & \text{si } \mathbb{Z}^d \notin A. \end{cases}$$

De esta manera,  $\mu_0(\{\mathbb{Z}^d\}) = 1$  y por lo tanto, en cada instante de tiempo se aplicará la función de transición local sobre  $\mathbb{Z}^d$ .

Por otro lado, también contiene el concepto de evolución totalmente asíncrona comentado en la introducción, esto es, en cada instante de tiempo solo se aplica la función de transición local a una sola célula.

**Definición 2.5.6.** Consideramos ahora el autómata celular m-asíncrono  $C_1 = (A, \mu_1)$  donde  $\mu_1 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  verifica lo siguiente:

1.  $\mu_1(U_i) > 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$
2.  $\mu_1(U_i \cap U_j) = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}^d.$

Así solo los ultrafiltros de la forma  $\{k\}$  ( $k \in \mathbb{Z}^d$ ) se les aplica la función de transición local.

Por último, contiene el concepto de evolución  $\alpha$ -asíncrona que nos interesa.

**Definición 2.5.7.** Dado  $C_2 = (A, \mu_2)$  un autómata celular m-asíncrono y sea  $\alpha \in (0, 1)$  la probabilidad con la que se actualizan las células, donde  $\mu_2 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  satisface:

1.  $\mu_2(U_i) = \alpha, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$
2.  $\forall A \subseteq \mathbb{Z}^d \quad \text{finito}, \quad \mu_2(\bigcap_{a \in A} U_a) = \prod_{a \in A} \mu_2(U_a).$

### Juego de vida de Conway

**Definición 2.5.8.** El juego de vida de Conway es un autómata celular síncrono:

$$C = (\mathbb{Z}^2, N, Q, f)$$

donde

$$\blacksquare N = \{(-1, 1), (0, 1), (1, 1), (-1, 0), (1, 0), (-1, -1), (0, -1), (1, -1)\},$$

- $Q = \{0, 1\}$ ,
- $f : \{0, 1\}^9 \rightarrow \{0, 1\}$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 = 0 \text{ y } \sum_{i=1}^8 x_i = 3 \\ 1 & \text{si } x_0 = 1 \text{ y } \sum_{i=1}^8 x_i \in \{2, 3\} \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^8 x_i \notin \{2, 3\} \end{cases}$$

y  $x = (x_0, x_1, \dots, x_8) = (c, c + n_1, \dots, c + n_8)$  con  $c \in \mathbb{Z}^d$  célula.

### Juego de vida de Conway $\alpha$ -asíncrono

**Definición 2.5.9.** El juego de vida de Conway es un autómata celular  $\alpha$ -asíncrono formado por  $C$ , el autómata celular síncrono definido anteriormente y una medida de probabilidad verificando las condiciones expuestas en 2.5.7 para  $\alpha \in (0, 1)$ .

## 2.6. Generadores de números aleatorios

Los generados de números aleatorios no generan números realmente aleatorios, esto es, no son variables aleatorias idénticamente distribuidas, dado un valor de inicialización de la secuencia o semilla generan siempre la misma sucesión de números, por tanto entenderemos que un generador de números aleatorios produce una secuencia indistinguible de una realmente aleatoria. Dicho esto, podemos afirmar que un ordenador solo es capaz de generar secuencias de números pseudoaleatorios con un periodo de longitud finita.

Curiosamente, en las definiciones de los métodos de Monte Carlo no hay referencia explícita al empleo de la capacidades de cómputo de los ordenadores, sin embargo el gran desarrollo que han experimentado éstos desde el último tercio de siglo XX hasta nuestros días, los ha convertido en herramientas indispensables en las simulaciones Monte Carlo. La generación de números aleatorios ha experimentado también un importante crecimiento en las últimas décadas. Un tipo generador de números aleatorios más usado venía dado por la siguiente ecuación recurrente:

$$I_{j+1} = aI_j + c \pmod{m} \quad (2.1)$$

donde  $a$  es un entero positivo llamado multiplicador y  $c$  es un número natural llamado incremento. Para  $c \neq 0$ , 2.1 es conocido por el nombre: generador lineal congruente de números aleatorios. Claramente, en  $n < m$  pasos la

ecuación comienza a generar valores duplicados en el mismo orden, conocido ésto, se hacían elecciones particulares de  $a, c$  y  $m$  que obtuvieran en mayor periodo posible. En [19] podemos encontrar algunos resultados notables sobre la elección parámetros  $a, c$  y  $m$ . La elección del valor inicial  $I_0$  no es relevante, pues se generarán todos los naturales posibles entre 0 y  $m - 1$  antes de la primera repetición. Sin embargo no es suficiente con generar una sucesión de números de un largo periodo, además deben superar rigurosas baterías de test empíricos que aseguren una buena distribución de las secuencias de números además de la ausencia de patrones en las mismas. En el caso de los generadores lineales congruentes existe un resultado que afirma que las sucesivas  $n$ -tuplas de valores generados residen en al menos  $(n!m)^{\frac{1}{m}}$  hiperplanos paralelos [23], luego esta clase de generadores no son adecuados para la generación de números aleatorios.

Dado el carácter empírico de las baterías de test, superarlas con éxito no aseguran un generador de números perfecto si no que probablemente se trate de un buen generador, ya que eventualmente con el suficiente tiempo se podría encontrar un test que no fuera superado con éxito. Por tanto nos interesaremos en tests que demuestren el mal comportamiento de un generador en un tiempo razonable. Hay numerosas baterías de test, destacamos dos [3, 20]: *Dieharder* la cual está basada en los primeros test estadísticos propuestos en *Diehard battery of tests*, incluye también los test desarrollados por el NIST (National Institute for Standards and Technology) y además dispone de un programa, *dieharder*, para realizar dichos tests y la batería de test *TestU01*.

Nuestra elección de generador de números aleatorios es una variante del generador *Mersenne Twister* [24] implementada en el lenguaje de programación Python, el cual es el generador por defecto en las versiones del lenguaje de programación Python posteriores a la 2.3 [4] y en el lenguaje de programación estadística R [5]. Dicho generador de números aleatorios en su implementación en Python genera números en coma flotante de 53-bits de precisión y tiene un periodo de  $2^{19937} - 1$ . Instalando el programa *dieharder* disponible en los repositorios de las distribuciones Ubuntu y Debian, podremos ejecutar el comando *dieharder -g 014 -a* para observar como nuestra elección de generador de números aleatorios supera esta batería de test estadísticos satisfactoriamente.

## 2.7. Fundamentos de las simulaciones Monte Carlo

El nombre *Monte Carlo* fue acuñado por los científicos que trabajaban en el desarrollo de armas nucleares en Los Álamos en la década de los 40 para designar una clase de métodos numéricos basados en el uso de números aleatorios. La esencia reside en la invención de juegos de azar cuyo comportamiento

puede ser usado para estudiar algún fenómeno de interés. Se podría pensar que el hecho de que resultados obtenidos por estos métodos estén sujetos a las leyes del azar es un problema, sin embargo, es un problema menor, puesto que se puede determinar como de exactos son sus resultados y si se deseara obtener resultados más precisos, bastaría con incrementar el número de experimentos realizados. Actualmente, los métodos de Monte Carlos juegan un papel fundamental en la resolución de problemas matemáticos complejos, en los cuales, o bien los métodos de resolución analíticos o bien los métodos numéricos existentes requieren de grandes cantidades de memoria y tiempo cómputo.

**Definición 2.7.1.** Una muestra aleatoria simple  $S_n$ , es un conjunto de  $n \in \mathbb{N}$  variables aleatorias,  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , independientes e idénticamente distribuidas. En caso de que la media y la varianza de las variables aleatorias  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sean finitas, las notaremos  $\mu$  y  $\sigma^2$  respectivamente.

La media de una muestra aleatoria simple  $S_n$ ,  $\mu_S = E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i$  es una variable aleatoria gracias al resultado 2.2.1, dicha variable aleatoria tiene la siguiente media y varianza:

$$E(\mu_S) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(A_i) = \mu,$$

$$\text{var}(\mu_S) = \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(A_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Luego su desviación estándar es  $\sigma(\mu_S) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

**Definición 2.7.2.** La variable aleatoria  $\mu_S$  anteriormente definida diremos que es un *estimador* del valor esperado  $E(A) = \mu$ .

**Definición 2.7.3.** Sea  $\mu_S$  un estimador de la media de una muestra aleatoria simple,  $S_n$ , de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  finitas y  $\delta > 0$ , la desigualdad de Chebychev es:

$$P\left(|\mu_S - \mu| \geq \sqrt{\frac{\text{var}(\mu_S)}{\delta}}\right) = P\left(|\mu_S - \mu| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n\delta}}\right) \leq \delta.$$

El primer gran resultado o *primer teorema fundamental de Monte Carlo* que podemos deducir de los anteriores, en particular es una consecuencia directa del teorema 2.4.1, el estimador  $G$  de la media de una muestra aleatoria simple,  $S_n$ , de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  finitas converge en probabilidad al valor esperado  $\mu$ :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|G - \mu| > \epsilon) = 0.$$

Es posible aplicar la desigualdad 2.7.3 para obtener la velocidad de convergencia respecto a  $n$ . Veamos un ejemplo de éste hecho, dado  $\delta = \frac{1}{100}$ :

$$P\left((G - \mu)^2 \geq \frac{100}{n} \sigma^2\right) \leq \frac{1}{100},$$

Haciendo  $n$  lo suficientemente grande, la varianza de  $G$  se hace tan pequeña como se quiera, esto es, disminuye considerablemente la probabilidad de obtener una gran desviación relativa a  $\delta$  entre el valor esperado y el los valores obtenidos.

Es posible obtener un resultado más fuerte que el anterior como consecuencia del teorema 2.3.1. Existe una función de distribución de probabilidad que aproxima los valores del estimador  $G$ , esto es, cuando  $n \rightarrow \infty$ , el teorema central del límite afirma que asintóticamente los valores de  $G$  convergen a una distribución normal 2.2.21. Por tanto, es posible reescribir la función de distribución como sigue:

$$f(G) = \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n(G - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ , el valor de  $G$  se encuentra en intervalos cada vez más estrechos centrados en  $\mathbb{E}(G)$  y es posible medir la desviación en unidades de  $\sigma$ , es decir, el valor de  $G$  está dentro del intervalo centrado en  $\mathbb{E}(G)$  de un error estándar, de longitud  $\sigma/\sqrt{n}$ , el 68.3% de las veces, de dos errores estándar de longitud el 95.4% y de tres errores estándar el 99.7% de las veces. Como comentábamos anteriormente la convergencia es asintótica por lo que inicialmente desconocemos como de grande debe de ser  $n$  para poder aplicar el teorema. En un caso particular, si el tercer momento  $\mu_3$  de  $G$  existe, entonces el teorema será satisfecho substancialmente cuando:

$$|\mathbb{E}(A^3)| << \sigma^3 \sqrt{n}.$$

Así los límites de confianza derivados de la distribución normal pueden ser aplicados a los cálculos Monte Carlo [22].

Cuando la varianza es infinita, es posible encontrar una distribución límite para  $G$  que llevará a un caso particular del teorema central del límite, en estos casos la distribución límite no será en general la distribución normal. Un estimador de la varianza de la media estimada viene dado por:

$$var(G_n) = \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \right)^2 \right)$$



***2.8. Implementación: Representación interna del juego de vida  $\alpha$ -asíncrono***

24

- 2.8. Implementación: Representación interna del juego de vida  $\alpha$ -asíncrono**
- 2.9. Implementación: Actualización celular del juego de vida  $\alpha$ -asíncrono**

## Bibliografía

---

- [1] Build a working game of Tetris in Conway's Game of Life - StackExchange. <https://web.archive.org/web/20190120082452/https://codegolf.stackexchange.com/questions/11880/build-a-working-game-of-tetris-in-conways-game-of-life>. [Online; accessed 14-February-2019].
- [2] Conway's Game of Life - Boardless approach. [https://web.archive.org/web/20190212184430/https://rosettacode.org/wiki/Conway's\\_Game\\_of\\_Life#Boardless\\_approach](https://web.archive.org/web/20190212184430/https://rosettacode.org/wiki/Conway's_Game_of_Life#Boardless_approach). [Online; accessed 14-February-2019].
- [3] Dieharder: A Random Number Test Suite. [http://web.archive.org/web/20190402181134/http://webhome.phy.duke.edu/~rgb/General/rand\\_rate.php](http://web.archive.org/web/20190402181134/http://webhome.phy.duke.edu/~rgb/General/rand_rate.php). [Online; accessed 02-April-2019].
- [4] Python 2.7.16 Documentation. <http://web.archive.org/web/20170907114211/https://docs.python.org/2.7/library/random.html>. [Online; accessed 29-April-2019].
- [5] R Documentation, random number generation. <https://web.archive.org/web/20190106064055/https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/base/html/Random.html>. [Online; accessed 29-April-2019].
- [6] A Turing Machine in Conway's Game of Life, extendable to a Universal Turing Machine. <https://web.archive.org/web/20190118023640/http://rendell-attic.org/gol/tm.htm>. [Online; accessed 14-February-2019].
- [7] Synchronous and asynchronous updating in cellular automata. *BioSystems* 51 (1999), 123–143.
- [8] An experimental study of robustness to asynchronism for elementary cellular automata. *Complex Systems* 16 (2005), 1–27.
- [9] BAYS, C. Cellular Automata in the Triangular Tessellation. *Complex Systems* 8 (1994), 127–150.

- [10] BLOK, HENDRIK J.; BERGERSEN, B. Effect of boundary conditions on scaling in the 'Game of Life'. *Physical Review E* 55 (1997), 6249–6252.
- [11] BLOK, HENDRIK J.; BERGERSEN, B. Synchronous versus asynchronous updating in the "game of life". *Physical Review E* 59 (1999), 3876–3879.
- [12] DENNUNZIO, A., FORMENTI, E., MANZONI, L., ET AL. m-Asynchronous cellular automata: from fairness to quasi-fairness. *Natural Computing* 12 (2013), 561–572.
- [13] FATES, N. Critical phenomena in cellular automata: perturbing the update, transitions, the topology. *Acta Physica Polonica B - Proceedings Supplement* 3 (2010), 315–325.
- [14] FATES, N. *Implementation of Logical Functions in the Game of Life*. In: Adamatzky A. (Eds.) *Game of Life Cellular Automata*. Springer, London, 2010.
- [15] GARDNER, M. Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life". *Scientific American* 223, 4 (1970), 120–123.
- [16] GUT, A. *Probability: A graduate course*. Springer Texts in Statistics. Springer, 2005.
- [17] HEMMINGSSON, J. Consistent results on 'Life'. *Physica D* 80, 1-2 (1995), 151–153.
- [18] KLARNER, D. Wheels, Life and Other Mathematical Amusements, by Martin Gardner. *The American Mathematical Monthly* 93, 4 (1986), 321–323.
- [19] KNUTH, D. E. *The art of computer programming II*, 3 ed. Addison-Wesley Professional, 1997.
- [20] L'ECUYER, P., AND SIMARD, R. Testu01: A library for empirical testing of random number generators. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 33, 4 (2007), 22.
- [21] LOEVE, M. *Probability theory I*, 4th ed. Springer, 1977.
- [22] MALVIN H. KALOS, P. A. W. *Monte Carlo Methods*, 2 ed. Wiley-VCH, 2008.
- [23] MARSAGLIA, G. Random numbers fall mainly in the planes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 61, 1 (1968), 25.
- [24] MATSUMOTO, M., AND NISHIMURA, T. Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)* 8, 1 (1998), 3–30.

- [25] MCINTOSH, H. V. Wolfram's class IV automata and a good life. *Physica D* 45 (1990), 105–121.
- [26] MOORE, E. F. Machine Models of Self-Reproduction. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* 14 (1962), 17–33.
- [27] OWENS, N., AND STEPNEY, S. Investigations of the Game of Life cellular automata rules on Penrose tilings: lifetime, ash and oscillator statistics. *J. Cell. Autom.* 5, 3 (2010), 207–255.
- [28] REITER, C. The game of life on a hyperbolic domain. *Computers and Graphics* 21, 5 (1997), 673–683.
- [29] RENDELL, P. *Turing universality of the game of life*. In: Adamatzky A. (Eds.) *Collision-Based Computing*. Springer, 2002.
- [30] RENNARD, J. P. *Implementation of Logical Functions in the Game of Life*. In: Adamatzky A. (Eds.) *Collision-Based Computing*. Springer, London, 2002.
- [31] WILLIAMS, D. *Probability with martingales*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, 1991.
- [32] WOLFRAM, S. *Celular Automata and Complexity*. Addison-Wesley, 1994.