



ugr

Universidad  
de Granada

## TRABAJO FIN DE GRADO

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

### Juegos de vida: simulación y caracterización

---

#### Autor

Daniel Jiménez López

#### Tutores

Antonio Miguel Lallena Rojo  
Juan Antonio López Villanueva



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍAS INFORMÁTICA Y DE  
TELECOMUNICACIÓN

—  
Granada, 1 de junio de 2019

# **Juegos de vida: simulación y caracterización**

Daniel Jiménez López

**Palabras clave:**

**Resumen**

# **Games of Life: simulation and characterization**

Daniel Jiménez López

**Keywords:**

**Abstract**

# Índice general

---

Índice general	3
1 Introducción	4
2 Metodología	8
2.1. Representación del juego de vida de Conway . . . . .	8
2.2. Configuraciones iniciales del juego de vida de Conway . . . . .	9
3 Metodología	15
3.1. Teoría de la computación . . . . .	15
3.2. Teoría de la probabilidad . . . . .	19
3.3. Fundamentos de las simulaciones Monte Carlo . . . . .	27
4 Análisis	32
4.1. Efecto de la variación del parámetro $\alpha$ . . . . .	32
5 Conclusiones	34
5.1. Teoría de conjuntos . . . . .	34
Bibliografía	35

# 1 Introducción

---

El autómata celular fue inventado por von Neumann y Ulam en 1950 para estudiar el problema de construir máquinas artificiales que se reproduzcan a sí mismas [1]. Con el fin de imitar el comportamiento de los seres vivos, el diseño de dichas máquinas incluye el espacio en el que se desarrollan, representado por una malla rectangular en la que en los nodos se sitúan células y éstas evolucionan simultáneamente de acuerdo a un conjunto de reglas simples que dirigen la *física* de su pequeño universo abstracto.

El juego de vida es un autómata celular propuesto por Conway en 1970 y popularizado por Gardner en el mismo año [2]. Consiste en la evolución de una disposición inicial de células en dos estados mutuamente excluyentes, vida (1) o muerte (0), en una malla rectangular infinita. Dicha evolución viene regida por un conjunto de reglas que se aplican simultáneamente a todas las células en cada iteración. Las reglas son las siguientes: dada una célula viva, ésta continua viviendo solo si en su vecindario hay dos o tres células, en otro caso muere; dada una célula muerta, ésta renace si tiene exactamente tres células en su vecindario. Usualmente se consideran como pertenecientes al vecindario las células adyacentes en las direcciones horizontal, vertical y diagonales.

Uno de los motivos que atrajo la atención de científicos de diversos campos hacia el juego de vida fue observar cómo patrones complejos surgen de la aplicación de un conjunto muy simple y reducido de reglas. De esta manera comenzaron a analizarse configuraciones iniciales que daban lugar a comportamientos interesantes, tales como *glider* [Figura 1.1a](#) que se desplaza sobre la malla, *blinker* [Figura 1.1c](#) que retorna a su configuración inicial tras un número finito de iteraciones o *block* [Figura 1.1b](#) que no ve alterado su forma en cada iteración.

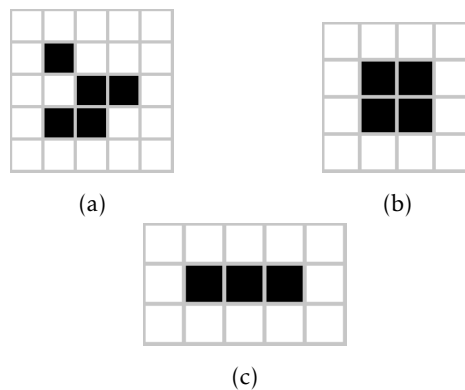


Figura 1.1: Configuraciones iniciales del juego de vida.

La elección de las reglas de evolución parecería *a priori* aleatoria, sin embargo, Conway las escogió de acorde a las siguientes pautas [3]:

- No debe existir una disposición inicial de células para la cual haya una prueba simple de que la población crezca sin límite.
- Debe haber disposiciones iniciales de células que aparentemente crezcan sin límite.
- Debe haber disposiciones iniciales de células simples que crezcan y cambien durante un periodo relativamente largo, llegando a tres posibles finales: desaparecer completamente ya sea debido a superpoblación o a dispersión, estabilizarse en una configuración que se mantenga constante o entrar en un ciclo sin fin de oscilación.

Al intentar realizar simulaciones de juegos de vida, los ordenadores se erigieron como la herramienta principal para llevarlas a cabo, siendo necesario afrontar el problema de representar una malla rectangular infinita en un ordenador con memoria finita. Una inteligente solución es alterar las características topológicas de la malla rectangular, identificando los bordes opuestos para obtener superficies topológicamente equivalentes a las de una botella de Klein, una esfera o un toro. En particular, esta última resultó atraer gran interés, pues se encontraron evidencias de que reduce los efectos asociados a la finitud de la malla [4, 5]. Cabe también descartar el estudio de la alteración de las cualidades geométricas de la malla, tales como el uso de figuras geométricas diferentes al cuadrado (triángulo y hexágono) [6], teselaciones de Penrose [7] o el empleo del espacio geométrico hiperbólico [8]. Finalmente, existen implementaciones en las cuales no se almacena la malla en la memo-

ria, si no que se almacena la posición de cada célula respecto a un origen de coordenadas, simulando más eficazmente una malla rectangular infinita [9].

El juego de vida de Conway también muestra interesantes características en el campo de la teoría de la computación, pertenece a la clase IV de Wolfram, esto es, su evolución lleva a estructuras aisladas que muestran un comportamiento complejo [10, 11]. Se ha demostrado que tiene la capacidad de cómputo de una máquina de Turing universal. Por tanto existe una disposición inicial de células que simula una máquina de Turing, la cual fue extendida a una máquina universal de Turing [12, 13]. Como muestra de dicha capacidad de computación, en un esfuerzo colectivo se ha implementado sobre éste un ordenador con su propio lenguaje de ensamblador y de alto nivel, y se ha programado el conocido juego Tetris [14, 15].

Si los autómatas celulares son un modelo que representa organismos vivos se podría pensar que la hipótesis de actualización simultánea es cuestionable ya que en la naturaleza no se propaga la información de manera instantánea y mucho menos de manera perfecta. Es ese aspecto, que está ligado a la robustez del modelo frente a perturbaciones en su evolución, el que pretendemos analizar en este trabajo. Un modelo será robusto si pequeños cambios en su evolución se traducen en pequeñas perturbaciones del comportamiento global del sistema, mientras que si esta pequeña modificación produce un cambio cualitativo en la dinámica, el sistema será poco robusto o, simplemente, se tratará de un sistema muy sensible a las variaciones que puedan ocurrir en sus elementos. En algunos contextos, los cambios cualitativos a los que nos referimos aquí se conocen como transición de fase. En la bibliografía la introducción de estas perturbaciones se lleva a cabo a través de la asincronicidad en la aplicación reglas de evolución [16]. Se pueden considerar las siguientes opciones:

- **Evolución totalmente asíncrona.** En cada iteración, las reglas de evolución se aplican solamente a un individuo escogido del conjunto de células, el criterio de elección puede ser o no ser completamente aleatorio.
- **Evolución  $\alpha$ -asíncrona.** En cada iteración, cada célula tiene probabilidad  $\alpha$  de que se le apliquen las reglas de evolución y probabilidad  $1 - \alpha$  de mantener su estado.

Estos esquemas de evolución también se conocen como **evolución guiada por pasos** y **evolución guiada por tiempo**, respectivamente [17]. Los primeros en estudiar los efectos de la evolución asíncrona frente a la evolución síncrona en el juego de vida fueron Blok y Bergersen [18]; aplicando un esquema de evolución  $\alpha$ -asíncrona demostraron la existencia de una transición

de fase de un comportamiento estático; donde el sistema termina alcanzando alguna situación completamente estable, a un comportamiento *vívido* y, por tanto, inestable. Posteriormente se estudió cómo afectaban las variaciones en la topología de la malla a la transición de fase, concluyendo que su aparición depende fuertemente de la regularidad de la malla rectangular [19]. Debido a que no existe una definición globalmente aceptada de autómatas celulares que agrupe los dos esquemas de actualización asíncrona anteriores, proponemos la definición de autómatas celulares m-asíncronos dada en [20].

Hasta donde podemos saber solo se ha estudiado el comportamiento en situaciones de  $\alpha$ -asincronicidad de configuraciones iniciales aleatorias, también conocidas como *sopas*, con una densidad prefijada, obteniendo resultados que se comparan con las características conocidas del juego de vida síncrono. En este trabajo queremos caracterizar la manera en la que configuraciones iniciales bien conocidas y estudiadas, como las que se muestran en la figura 1.1, alteran su comportamiento en situaciones de  $\alpha$ -asincronicidad. Utilizaremos las técnicas Monte Carlo para medir diferentes variables tales como el crecimiento de la población, el número de cúmulos de células y la actividad de nacimiento y muerte de células.

El capítulo 2 está dedicado a una descripción de los aspectos esenciales de nuestro trabajo. A continuación el capítulo 3 se proporciona una visión más formal de los conceptos expuestos en el capítulo anterior. En el capítulo 4 se documentan los resultados obtenidos y se discuten los aspectos más relevantes de los mismos. Por último en el capítulo 5 se establecen las conclusiones de nuestro trabajo.



# 2

## Metodología

---

### 2.1. Representación del juego de vida de Conway

Fijada una configuración inicial  $z$ , enteremos por ejecución o simulación del juego de vida de Conway de duración  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  al resultado de aplicar  $n$  veces la función de transición global del juego de vida de Conway a la configuración inicial y lo notaremos  $C_n(z)$ . Sea  $t$  tal que  $1 \leq t \leq n$ , diremos que es el instante  $t$  de la ejecución/simulación/experimento del juego de vida de Conway de duración  $t$ , el resultado de aplicar  $t$  veces la función de transición global a una configuración inicial  $z$  y lo notaremos  $C_n^t(z)$ . Por último, los conjuntos de puntos  $C_n^{t'}(z')$ ,  $C_n^t(z)$  si los conjuntos de células de cada simulación son idénticos. De la misma manera, entenderemos por ejecución o simulación del juego de vida de Conway  $\alpha$ -asíncrono de duración  $n$  al resultado de aplicar  $n$  veces la función de transición global a la configuración inicial  $z$  y lo notaremos  $C_n(z)(\alpha)$  donde  $\alpha$  es un número real en el intervalo  $(0, 1)$ .

Como se comentaba en la introducción, plantearse la simulación del juego de vida implica afrontar el problema de representar una malla infinita de dos dimensiones en la memoria finita de los ordenadores. Mientras que la cantidad de memoria y velocidad de acceso de la misma ha mejorado significativamente con el paso del tiempo, perseguimos una representación que cumpla las siguientes dos características:

- Una ejecución completa de una configuración inicial del juego de vida tiene que finalizar en un tiempo razonable, pues la clave de las simulaciones Monte Carlo es la repetición de los experimentos y como se comentaba en la sección anterior, al aumentar el número de muestras/ejecuciones/experimentos disminuye el error en una proporción conocida, permitiendo un acercamiento más veloz al límite asintótico de la suma de variables aleatorias.
- El comportamiento de las configuraciones iniciales es difícil de predecir, por lo que configuraciones que crezcan sin límite podrían agotar los recursos de memoria disponibles haciendo que la ejecución sea inválida.

da. En particular, una situación de alto consumo de memoria evitaría la ejecución de múltiples simulaciones independientes en paralelo.

Este último punto es, en nuestra opinión, el más restrictivo. Un planteamiento inicial nos podría sugerir que limitar el tamaño de la malla dos dimensional, sin embargo se perdería información en aquellas configuraciones iniciales que excedieran el tamaño fijado de la malla. Para reducir el impacto de la finitud de la malla se ha estudiado la identificación de los bordes opuestos simulando un espacio *infinito* que imita la superficie de un toro, obteniendo resultados favorables [4,5]. Pero no es necesario lidiar con los errores derivados de este planteamiento, una implementación más *literal* de la descripción formal del juego de vida, nos permite romper con el paradigma de la limitación de la malla. En lugar de almacenar en memoria la malla completa independientemente de su utilización, se almacenan las células identificadas por las coordenadas sobre el plano cartesiano [9].

Dado  $C_n^t$  si suponemos que la malla dos dimensional con los bordes opuestos identificados es cuadrada con lado de tamaño  $m$ , la complejidad en espacio viene dada por  $O(m^2)$  independientemente a la configuración inicial escogida. Por otro lado si suponemos una malla dos dimensional infinita, una configuración inicial con  $c$  células y  $c(t)$  el número de células en el instante  $t$ , la complejidad en espacio para cada instante  $t$  es  $O(c(t))$  y la complejidad en espacio de  $C_n^t$  es  $O(\max_{0 \leq t \leq n} \{c(t)\})$ . Así al optar por la implementación de la malla infinita haremos un uso más eficiente de la memoria disponible.

## 2.2. Configuraciones iniciales del juego de vida de Conway

Dado que las configuraciones iniciales son muy diversas, han existido algunos esfuerzos por realizar una taxonomía de patrones pero no existe un consenso global y como consecuencia aceptamos la existencia de principalmente tres categorías, las cuales expondremos a continuación. En este trabajo trataremos de caracterizar el comportamiento de configuraciones iniciales del juego de vida de Conway bajo la hipótesis de actualización  $\alpha$ -asíncrona. Nuestras elecciones de patrones está inicialmente motivada por la simplicidad de los mismos, que nos permitirá visualizar el impacto de la  $\alpha$ -asincronismo en la actualización y a continuación verificar si esta caracterización es extensible a todas las configuraciones iniciales de la misma categoría.

### Vidas inmóviles

Probablemente las vidas inmóviles sean las configuraciones con el comportamiento más simple y fácil de observar. Esta sección está extraída de las

siguientes fuentes: [21], [22] y [23].

**Definición 2.2.1.** Una vida inmóvil es una configuración inicial  $z$  finita y no vacía que permanece fija tras la aplicación la función de transición global, esto es, fijado  $n \in \mathbb{N}$ , se verifica que  $z = C_0^n(z) = C_t^n(z)$  para todo  $t \leq n$ .

Distinguimos tres categorías tipos de vidas inmóviles:

**Definición 2.2.2.** Una vida inmóvil estricta es aquella vida inmóvil tal que al eliminar cualquiera de las células vivas deja de pertenecer a la categoría de vida inmóvil.

A continuación mostramos ejemplos de este tipo de vida inmóvil. La colmena 2.1 es una vida inmóvil estricta pues todos los elementos dependen entre sí los unos de los otros, la colmena con cola 2.2 nuevo es una vida inmóvil estricta a pesar de que contenga a otra vida inmóvil estricta y la configuración inicial mesa frente a mesa 2.3 es también una vida inmóvil estricta pues el patrón de la mitad horizontal derecha conserva su estabilidad gracias a su homólogo reflejado de la mitad horizontal izquierda.

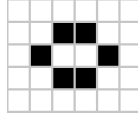


Figura 2.1: Configuración inicial colmena.

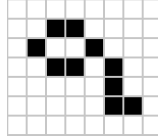


Figura 2.2: Configuración inicial colmena con cola.

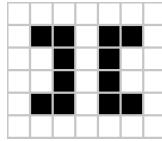


Figura 2.3: Configuración inicial mesa frente a mesa.

**Definición 2.2.3.** Una vida pseudo inmóvil es una vida inmóvil que puede ser particionada en vidas inmóviles independientes, es decir, la estabilidad de

una de ellas no depende de la presencia de las otras. Además debe de existir al menos una célula muerta por superpoblación (más de tres vecinos vivos) que al particionar en vidas inmóviles independientes la célula continúe muerta por soledad (menos de tres vecinos vivos).

Las vidas inmóviles que particionan a una vida pseudo inmóvil pueden ser a su vez vidas pseudo inmóviles 2.5 o vidas inmóviles estrictas 2.4. Notar que una vida inmóvil puede estar formada por varias vidas inmóviles y aún así ser una vida estrictamente inmóvil (y no pseudo inmóvil), si éstas dependen entre sí para mantener su estabilidad 2.3.

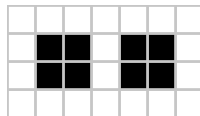


Figura 2.4: Configuración inicial bibloque.

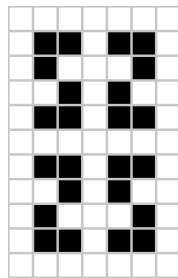


Figura 2.5: Configuración inicial que puede ser particionada en dos vidas pseudo inmóviles.

**Definición 2.2.4.** Una vida quasi inmóvil es una vida inmóvil que puede ser particionada en vidas inmóviles independientes, es decir, la estabilidad de una de ellas no depende de la presencia de las otras. Además existen células que tanto en la configuración inicial como en las vidas inmóviles independientes se mantengan muertas por soledad (menos de tres vecinos vivos).

Notar que la figura 2.4 no es una vida quasi inmóvil y sin embargo 2.6 sí. Este tipo de vida inmóvil está habitualmente formada por dos vidas inmóviles que comparten una diagonal.

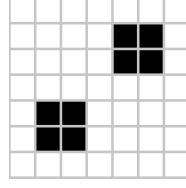


Figura 2.6: Configuración inicial que en el centro tiene una célula que se mantiene muerta por soledad tanto en las vidas inmóviles independientes como en el total.

Por último, cabría preguntarse el problema de dado un número finito de células, ¿cuántas vidas inmóviles existen? Dicho problema ha sido resuelto para vidas inmóviles estrictas y pseudo inmóviles de hasta 32 células, como se puede consultar en [24] y en [25].

### Osciladores

**Definición 2.2.5.** Un oscilador es una configuración inicial  $z$  finita y no vacía que se repite tras la aplicación de  $k$  veces de la función de transición global, esto es, fijado  $n \in \mathbb{N}$ , se verifica que existe  $k > 1, k \in \mathbb{N}$  tal que  $C_t^n(z) = C_{t+k}^n(z)$  para todo  $t \leq n - k$  y diremos que  $k$  es el periodo del oscilador.

Notar que se exige que el periodo de oscilación sea estrictamente superior a la unidad, para evitar que la categoría de las vidas inmóviles esté contenidas dentro de la de los osciladores.

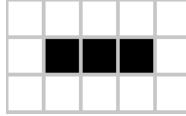


Figura 2.7: El oscilador más pequeño de periodo dos.

### Naves espaciales

**Definición 2.2.6.** Una nave espacial es una configuración inicial  $z$  finita y no vacía que se repite tras la aplicación de  $k$  veces de la función de transición global pero en una posición distinta, esto es, fijado  $n \in \mathbb{N}$ , se verifica que existen  $k \in \mathbb{N}$  y una traslación distinta de la identidad,  $\phi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ , tal que  $C_t^n(z) = \phi(C_{t+k}^n(z))$  para todo  $t \leq n - k$  y diremos que  $k$  es el periodo de la nave espacial.

Notar que se exige que la traslación  $\phi$  sea distinta a la identidad y  $k > 1$ , para evitar que la categoría de los osciladores esté contenida dentro de la de las naves espaciales.

Si la configuración se desplaza  $x$  unidades horizontalmente e  $y$  unidades verticalmente cada periodo de longitud  $k$  la velocidad de desplazamiento de la nave espacial es  $\max\{|x|, |y|\}c/k$  con pendiente  $x/y$ , siendo la velocidad máxima teórica conocida como *velocidad de la luz*  $c = 1$ , esto es, un desplazamiento por cada aplicación de la función de transición global. Según [26] existe una nave espacial en el juego de vida de Conway para cada pendiente racional.

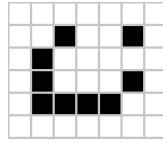


Figura 2.8: Nave espacial más pequeña conocida de velocidad  $c/2$ , su desplazamiento es paralelo a uno de los ejes de coordenadas cartesianos.

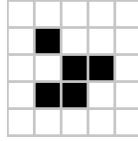


Figura 2.9: Nave espacial más pequeña conocida de velocidad  $c/4$ , su desplazamiento es diagonal a los ejes cartesianos de coordenadas.

### Características medidas sobre las simulaciones

Dado el carácter aleatorio del juego de vida  $\alpha$ -asíncrono emplearemos los fundamentos de Monte Carlo expuestos en la sección 3.3 para medir los parámetros de interés que a continuación exponaremos. Dada una configuración inicial  $z$  de las categorías expuestas en la sección 2.2, realizaremos múltiples simulaciones del juego de vida de Conway  $\alpha$ -asíncrono de duración  $n = 100$ . Nuestras variables de interés son:

- Crecimiento de la población de células de la configuración inicial: dispondremos de dos herramientas para medir el número de células. Estudiaremos la evolución del número de células en cada etapa y la evolución del área rectángulo de menor tamaño que contenga a todas las células de cada etapa.

- Tasa de cambio de la configuración inicial: emplearemos el concepto de temperatura, que es el porcentaje medio el número de células que nacen o mueren por generación.
- Distribución de las células en cúmulos: contabilizaremos el número de cúmulos por cada generación, entendiendo por cúmulo al mayor conjunto de células cuyo vecindario no es disjunto, es decir, en un cúmulo cada célula del mismo está contenido en el vecindario de otra célula del cúmulo.

Estas variables serán medidas para distintos valores de  $\alpha$  con el fin de estudiar el efecto de la aleatoriedad en las configuraciones iniciales. Notar que debido a que no se conoce a priori el número de simulaciones a partir de la cual es posible aplicar el teorema central del límite para deducir la distribución límite de la suma de variables aleatorias, el número de simulaciones que realizaremos podrá variar de una configuración inicial a otra.

# 3

## Metodología

---

Antes de continuar con la implementación y exposición de la técnica de simulación Monte Carlo es necesario introducir un marco teórico matemático que nos servirá de referencia además de establecer una base de trabajo concisa. Los formalismos nos permitirán articular la intuición de asincronismo en el esquema de actualización del autómata celular, cuyo homónimo biológico sería el procesamiento imperfecto de información entre individuos a causa de perturbaciones derivadas del medio o de la interacción con otros individuos. En este trabajo nos restringimos a un caso simple de asincronismo en la actualización: examinaremos que ocurre si todas las transiciones ocurren al mismo tiempo pero los individuos reciben la información del estado de sus vecinos de forma imperfecta.

### 3.1. Teoría de la computación

#### Introducción

Dado que el comportamiento completamente síncrono de un autómata celular como herramienta de modelado es una rareza, se han realizado numerosas investigaciones empíricas del autómata celular asíncrono. Sin embargo, los pocos análisis formales realizados o bien se refieren a ejemplos o a casos particulares de asincronicidad. Tomaremos el concepto de autómata celular *m*-asíncrono [20], cuya idea principal es tener algún tipo de oráculo el cual en cada unidad discreta de tiempo dice las células que tienen que ser actualizadas. Dicho oráculo se implementa empleando una medida de probabilidad  $\mu$  sobre subconjuntos de enteros  $d$ -dimensionales,  $\mathbb{Z}^d$ . Notar que la definición con la que trataremos es la extensión a espacios multidimensionales de la dada en [20].

Nos gustaría poder plasmar la intuición de que una célula tenga la misma probabilidad de ser actualizada independientemente o no del resto de células actualizadas en cada instante de tiempo. El concepto de ultrafiltro nos permitirá establecer una clase de autómata celular lo suficientemente general como para abarcar los nuevos tipos de autómatas celulares que introduciremos en



posteriores secciones.

Dado un conjunto  $X$ ,  $\mathcal{P}(X)$  denota el conjunto de todos los subconjuntos de  $X$ . Dado  $A \in \mathcal{P}(X)$ , notaremos su complementario  $A^c$ .

**Definición 3.1.1.** Un ultrafiltro de  $X$  es  $U \in \mathcal{P}(X)$  tal que:

1.  $\emptyset \notin U$ .
2. Sean  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  tales que  $A \subset B$  y  $A \in U$ , entonces  $B \in U$ .
3. Si  $A, B \in U$ , entonces  $A \cap B \in U$ .
4. Si  $A \in \mathcal{P}(X)$  entonces o bien  $A \in U$ , o bien  $A^c \in U$ .

Además dado  $p \in X$ , el ultrafiltro  $U_p$  diremos que es principal si es el más pequeño que contiene a  $p$ , esto es, la colección de todos los conjuntos que contienen a  $p$ .

### **Autómata celular determinista**

Un autómata celular determinista es un sistema dinámico discreto consistente en un array  $d$ -dimensional de autómatas finitos, llamados células. Cada célula está conectada uniformemente a un vecindario formado por un número finito de células, tiene un estado de un conjunto finito de estados y actualiza su estado de acuerdo a una función de transición local, la cual determina el siguiente estado de una célula considerando su propio estado y el de su vecindario.

**Definición 3.1.2.** Formalmente, la tupla  $A = (\mathbb{Z}^d, N, Q, f)$  es un autómata celular determinista, de ahora en adelante autómata celular, donde:

- $\mathbb{Z}^d$  es un espacio de células  $d$ -dimensional.
- $Q$  el conjunto de estados posibles para cada célula.
- $N \in (\mathbb{Z}^d)^k$  es el vecindario genérico de un autómata celular, esto es, para  $N = (n_1, \dots, n_k)$ ,  $a \in \mathbb{Z}^d$  célula, cada célula en  $\{(a + n_1, \dots, a + n_k)\}$  es una célula vecina de  $a$ .
- $f : Q^{k+1} \rightarrow Q$  es la función de transición local que define la transición de estado de cada célula como función de su propio estado y del estado de cada célula en su vecindario.

**Definición 3.1.3.** Una configuración es una función  $g : \mathbb{Z}^d \rightarrow Q$ , la cual a cada punto del espacio  $\mathbb{Z}^d$  le asigna un estado del conjunto de estados  $Q$ , al conjunto de las configuración lo notaremos  $Q^{\mathbb{Z}^d}$ . Entenderemos por configuración inicial, a aquella configuración a la que aún no se le ha aplicado la función de transición global.

**Definición 3.1.4.** La función de transición local induce una función de transición global  $F : Q^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}^d}$  definida como sigue:

$$\forall x \in Q^{\mathbb{Z}^d}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad F(x)(i) = f(x(i), x(i + n_1), \dots, x(i + n_k)).$$

**Definición 3.1.5.** Un autómata celular  $m$ -asíncrono  $C$  es una tupla  $(A, \mu)$  donde:

- $A$  es un autómata celular.
- $\mu$  es una medida de probabilidad sobre la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ .

**Definición 3.1.6.** Para cada función de transición local  $f$  y cada conjunto  $\tau \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$ , definimos la función de transición global  $F : Q^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow Q^{\mathbb{Z}^d}$  como sigue:

$$\forall x \in Q^{\mathbb{Z}^d}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \quad F_\tau(x)(i) = \begin{cases} f(x(i), x(i + n_1), \dots, x(i + n_k)) & \text{si } i \in \tau, \\ x(i) & \text{si } i \notin \tau. \end{cases}$$

Es decir,  $F_\tau$  aplica la función de transición local solo sobre los elementos de  $\tau \subset \mathbb{Z}^d$ .

Notar que cada célula  $i \in \mathbb{Z}^d$  es actualizada con probabilidad  $\mu(U_i)$ .

Esta nueva definición de autómata celular  $m$ -asíncrono, incluye la de autómata celular síncrono. Fijada una  $\sigma$ -álgebra  $\mathbb{B}$  sobre  $\mathbb{Z}^d$  y sea  $C_0 = (A, \mu_0)$  un autómata celular  $m$ -asíncrono donde  $\mu_0 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  viene dada por:

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d), \quad \mu_0(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbb{Z}^d \in A, \\ 0 & \text{si } \mathbb{Z}^d \notin A. \end{cases}$$

De esta manera,  $\mu_0(\{\mathbb{Z}^d\}) = 1$  y por lo tanto, en cada instante de tiempo se aplicará la función de transición local sobre  $\mathbb{Z}^d$ .

Por otro lado, también contiene el concepto de evolución totalmente asíncrona comentado en la introducción, esto es, en cada instante se aplica la función de transición local a una sola célula.

**Definición 3.1.7.** Consideramos ahora el autómata celular  $m$ -asíncrono  $C = (A, \mu_1)$  donde  $\mu_1 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  verifica lo siguiente:

1.  $\mu_1(U_i) > 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$
2.  $\mu_1(U_i \cap U_j) = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}^d.$

Así solo los ultrafiltros de la forma  $\{k\}$  ( $k \in \mathbb{Z}^d$ ) se les aplica la función de transición local.

Por último, contiene el concepto de evolución  $\alpha$ -asíncrona que nos interesa.

**Definición 3.1.8.** Dado  $C = (A, \mu_2)$  un autómata celular  $m$ -asíncrono y sea  $\alpha \in (0, 1)$  la probabilidad con la que se actualizan las células, donde  $\mu_2 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  satisface:

1.  $\mu_2(U_i) = \alpha, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d.$
2.  $\forall A \subseteq \mathbb{Z}^d \quad \text{finito}, \quad \mu_2(\bigcap_{a \in A} U_a) = \prod_{a \in A} \mu_2(U_a).$

y lo notaremos  $C(\alpha)$ .

### Juego de vida de Conway

**Definición 3.1.9.** El juego de vida de Conway es un autómata celular síncrono:

$$C = (\mathbb{Z}^2, N, Q, f)$$

donde

- $N = \{(-1, 1), (0, 1), (1, 1), (-1, 0), (1, 0), (-1, -1), (0, -1), (1, -1)\},$
- $Q = \{0, 1\},$
- $f : \{0, 1\}^9 \rightarrow \{0, 1\}$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 = 0 \text{ y } \sum_{i=1}^8 x_i = 3 \\ 1 & \text{si } x_0 = 1 \text{ y } \sum_{i=1}^8 x_i \in \{2, 3\} \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^8 x_i \notin \{2, 3\} \end{cases} \quad (3.1)$$

y  $x = (x_0, x_1, \dots, x_8) = (c, c + n_1, \dots, c + n_8)$  con  $c \in \mathbb{Z}^d$  célula.

### Juego de vida de Conway $\alpha$ -asíncrono

**Definición 3.1.10.** El juego de vida de Conway  $\alpha$ -asíncrono es un autómata celular  $m$ -asíncrono formado por  $C = (\mathbb{Z}^2, N, Q, f)$ , el autómata celular síncrono definido anteriormente 3.1.9, y una medida de probabilidad  $\mu : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$  verificando las condiciones expuestas en 3.1.8 para  $\alpha \in (0, 1)$ .

## 3.2. Teoría de la probabilidad

El contenido de esta sección está extraído de los siguientes textos: [27–29].

**Definición 3.2.1.** Una  $\sigma$ -álgebra,  $\mathbb{F}$ , sobre un conjunto  $X$ , es una colección no vacía de subconjuntos de  $X$  cerrados para uniones numerables y para la operación de complementario, esto es:

- $\forall A \in \mathbb{F}$  se verifica que  $A^c \in \mathbb{F}$ .
- $\forall A_n \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N}$  se verifica que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathbb{F}$ .

**Definición 3.2.2.** Sean un conjunto  $X$  con su  $\sigma$ -álgebra asociada,  $\mathbb{F}$ , el par  $(X, \mathbb{F})$  es un espacio medible.

**Definición 3.2.3.** Una función medible es una función entre espacios medibles,  $g : (X, \mathbb{F}) \rightarrow (X', \mathbb{F}')$  tal que:  $g^{-1}(A) \in \mathbb{F} \quad \forall A \in \mathbb{F}'$ .

**Definición 3.2.4.** La tupla  $(X, \mathbb{F}, P)$  es un espacio de probabilidad si:

- $X$  es el espacio de muestreo, esto es, algún conjunto no vacío.
- $\mathbb{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de sucesos.
- $P : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$  es una medida de probabilidad, esto es,  $P$  satisface los siguientes axiomas de Kolmogorov:
  1. Para cada  $A \in \mathbb{F}$ , existe un número  $P(A) \geq 0$ , esto es, la probabilidad del suceso  $A$ ,
  2.  $P(X) = 1$ .
  3. Sean  $A_n, n \geq 1$  disjuntos, entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

**Definición 3.2.5.** Los sucesos  $A_n, n \geq 1$  son independientes si y solo si

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right) = \prod_{n \geq 1} P(A_n).$$

**Definición 3.2.6.** Un conjunto  $A$  es abierto si, para cada punto  $x \in A$ , existe una bola de centro el punto y radio  $\epsilon > 0$ ,  $B(x, \epsilon) = \{z : |z - x| < \epsilon\}$ , tal que  $B(x, \epsilon) \subset F$ . Así la  $\sigma$ -álgebra de Borel, es aquella generada por los conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$ .

De ahora en adelante supondremos que se ha fijado el espacio medible dado por  $X = \mathbb{R}$  y  $F = \mathbb{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}$ .

### Variables aleatorias

**Definición 3.2.7.** Una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad  $(X, \mathbb{B}, P)$  es una función medible  $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Cada valor de  $A$  se corresponde con un subconjunto de puntos de  $X$  que se aplica en dicho valor:  $\{w \in X : A(w) = x\}$ , que notaremos por simplicidad  $\{X = x\}$ . A parte de los anteriores conjuntos también nos resultarán de interés lo siguientes:

$$\{w \in X : A(w) \leq x\} = \{A \leq x\}$$

$$\{w \in X : A(w) < x\} = \{A < x\}$$

$$\{w \in X : A(w) > x\} = \{A > x\}$$

$$\{w \in X : A(w) \geq x\} = \{A \geq x\}$$

**Proposición 3.2.1.** Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función real de variable real, medible y  $A$  es una variable aleatoria entonces  $A' = g(A)$  es una variable aleatoria.

**Definición 3.2.8.** Las variables aleatorias  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son independientes si y solo si, para arbitrarios conjuntos de la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $B_1, B_2, \dots, B_n$ :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n \{A_k \in B_k\}\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k \in B_k).$$

**Definición 3.2.9.** Dada una variable aleatoria  $A$  se define su función de distribución como  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  dada por:

$$x \mapsto F(x) = P(A \leq x).$$

**Proposición 3.2.2.** La función de distribución de la variable aleatoria  $A$  satisface:

- Es monótona no decreciente.
- Dada una sucesión decreciente de elementos de  $\mathbb{R}$ ,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$  convergente a  $x \in \mathbb{R}$  se tiene  $\lim_{x_n \rightarrow x} F(x_n) = F(x)$ , es decir, es continua a la derecha.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .

**Definición 3.2.10.** Sea  $F$  una función de distribución definimos la función de densidad como la función integrable,  $f$ , tal que:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall a < b.$$

**Definición 3.2.11.** Sea  $A$  una variable aleatoria, definimos su valor esperado o esperanza como sigue:

$$\mathbb{E}(A) = \int_X A(w)dP(w).$$

Adicionalmente si  $\mathbb{E}|A| < \infty$ , diremos que  $A$  es integrable.

**Definición 3.2.12.** Sea una variable aleatoria  $A$ , definimos:

- Los momentos de orden  $n$  de  $A$ :  $\mathbb{E}(A^n) = \int_X A(w)^n dP(w)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- Los momentos centrados de orden  $n$  de  $A$ :  $\mathbb{E}_c(A^n) = \mathbb{E}((A - \mathbb{E}(A))^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Notar que los momentos no existen necesariamente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definición 3.2.13.** Definimos la varianza de la variable aleatoria  $A$  con esperanza  $\mu < \infty$  y  $\mathbb{E}_c(A^2) < \infty$  como:

$$var(A) \equiv \mathbb{E}_c(A^2) = \mathbb{E}(A^2) - \mu^2.$$

**Definición 3.2.14.** A la raíz cuadrada positiva de la varianza la notaremos  $\sigma(A) = +\sqrt{var(A)}$  y diremos que es la desviación estándar de la variable aleatoria  $A$ .

**Proposición 3.2.3.** Sea  $A$  una variable aleatoria con esperanza  $\mu < \infty$  y varianza  $\sigma^2 < \infty$  y sea  $A' = aA + b$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$\mathbb{E}(A') = a\mu + b \quad y \quad var(A') = a^2\sigma^2.$$

### Variables aleatorias discretas

**Definición 3.2.15.** Una variable aleatoria  $A$  diremos que es discreta si toma valores en un conjunto numerable, esto es,  $\exists E = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tal que  $P(A \in E) = 1$ .

**Definición 3.2.16.** La función de distribución de una variable aleatoria discreta  $A$  es la siguiente:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(A \leq x) = \sum_{x_n \in E, x_n \leq x} P(A = x_n).$$

**Definición 3.2.17.** Sea una variable aleatoria discreta  $A$ , definimos:

- Los momentos de orden  $n$  de  $A$ :  $\mathbb{E}(A^n) = \sum_{x_m \in E} x_m^n P(A = x_m)$ .
- Los momentos centrados de orden  $n$  de  $A$ :  $\mathbb{E}_c(A^n) = \sum_{x_m \in E} (x_m - \mu)^n P(A = x_m)$ .

El momento  $n = 1$  se conoce como valor esperado o esperanza:

$$\mathbb{E}(A) \equiv \sum_{x_m \in E} x_m P(A = x_m).$$

**Definición 3.2.18** (Tipos de convergencia: convergencia en probabilidad, convergencia casi segura y convergencia en distribución). Sean  $A_n, n \in \mathbb{N}$  y  $A$  variables aleatorias, definimos:

- $A_n \rightarrow A$  en probabilidad, si para todo  $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|A_n - A| > \epsilon) = 0$  y lo notaremos  $A_n \xrightarrow{P} A$ .
- $A_n \rightarrow A$  casi seguramente, si  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A) = 1$  y lo notaremos  $A_n \xrightarrow{c.s.} A$ .
- $A_n \rightarrow A$  en distribución, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \leq x) = P(A \leq x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  donde  $x \mapsto P(A \leq x)$  es una función continua y lo notaremos  $A_n \xrightarrow{d} A$ .

**Definición 3.2.19.** Sea  $i$  el número complejo  $i = \sqrt{-1}$ , la extensión de la función exponencial  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  al cuerpo de los números complejos es  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$z \mapsto \exp(iz) = e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Notar que el módulo de la exponencial compleja está acotado por la unidad :

$$|\exp(iz)| = |\cos z + i \sin z| = \sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z} = 1.$$

Esta propiedad de la exponencial compleja nos asegura la existencia para toda variable aleatoria de la siguiente definición.

**Definición 3.2.20.** La función característica asociada a la variable aleatoria  $A$  es la función  $\phi_A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por:

$$\phi_A(t) = \mathbb{E}(e^{itA}).$$

**Proposición 3.2.4.** Sea  $\phi_A$  la función característica de la variable aleatoria  $A$ , entonces:

- $|\phi_A(t)| \leq \phi_A(0) = 1$ .
- $\phi_A$  es una función uniformemente continua.
- $\phi_{cA+b}(t) = e^{itb} \phi_A(ct)$ ,  $c, b \in \mathbb{R}$ .
- Sea  $A_1, A_2, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$  una sucesión finita de variables aleatorias independientes, entonces:

$$\phi_{\sum_{i=1}^n A_i}(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{A_i}(t).$$

Además si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son idénticamente distribuidas:

$$\phi_{\sum_{i=1}^n A_i}(t) = (\phi_{A_1}(t))^n.$$

- Si  $\mathbb{E}(A^k) < \infty$  su derivada  $k$ -ésima evaluada en 0 es  $\phi_A^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(A^k)$ .

### Distribución normal

**Definición 3.2.21.** Diremos que una variable aleatoria  $A$  sigue una distribución normal con media  $\mu < \infty$  y varianza  $\sigma^2 < \infty$ ,  $N(\mu, \sigma^2)$ , si  $A$  tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Además su función característica es:

$$\phi_A(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

**Proposición 3.2.5.** Sean  $A, A'$  variables aleatorias pertenecientes a distribuciones normales con medias  $\mu, \mu' < \infty$  y varianzas  $\sigma_0^2, \sigma_1^2 < \infty$ ,  $N(\mu, \sigma_0^2)$  y  $N(\mu', \sigma_1^2)$  respectivamente, entonces la variable aleatoria dada por la suma  $A+A'$  es una variable aleatoria que pertenece a una distribución normal  $N(\mu + \mu', \sigma_0^2 + \sigma_1^2)$ .

**Proposición 3.2.6.** Sea  $N(\mu, \sigma^2)$  una distribución normal con media  $\mu < \infty$  y varianza  $\sigma^2 < \infty$ , entonces el 68.27% de los valores de la distribución normal se encuentran en el intervalo  $[\mu + \sigma, \mu - \sigma]$ , el 95.45% en el intervalo  $[\mu + 2\sigma, \mu - 2\sigma]$  y el 99.7% en el intervalo  $[\mu + 3\sigma, \mu - 3\sigma]$ , estos intervalos se conocen también como intervalos de confianza de la distribución normal.



**Teorema central del límite**

**Teorema 3.2.1.** Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  variables aleatorias independientes, con esperanza  $\mu < \infty$ , varianza  $\sigma^2 < \infty$  e idénticamente distribuidas. Entonces:

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Previa a la demostración del teorema central del límite, introducimos las herramientas matemáticas que nos harán posible su demostración.

**Teorema 3.2.2** (Teorema de Taylor). Sea  $k \in \mathbb{N}$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -veces diferenciable en el punto  $a \in \mathbb{R}$ . Entonces existe una función  $h_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + h_k(x)(x-a)^k$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow a} h_k(x) = 0.$$

**Teorema 3.2.3** (Teorema de continuidad). Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$  variables aleatorias entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{A_n} = \phi_A(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

si y solo si

$$A_n \xrightarrow{d} A.$$

*Demostración (Teorema central del límite).* Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con esperanza  $\mu < \infty$  y varianza  $\sigma^2 < \infty$ . Sea ahora

$$Z_n = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}}.$$

Definimos una nueva variable aleatoria,  $Y_i$ , que es la versión normalizada de  $A_i$ :

$$Y_i = \frac{A_i - \mu}{\sigma}$$

Así definida,  $Y_i$  es idénticamente distribuida con esperanza y varianza:

$$E(Y_i) = 0, \text{Var}(Y_i) = 1.$$

Sea ahora  $Z_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}$ , queremos ver que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{Z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Procedemos a desarrollar el siguiente término:

$$\phi_{\frac{Y_1+Y_2+\dots+Y_n}{\sqrt{n}}}(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{\frac{Y_i}{\sqrt{n}}}(t) = \left( \phi_{\frac{Y_1}{\sqrt{n}}}(t) \right)^n.$$

Aplicando el teorema de Taylor para obtener el desarrollo centrado en 0 para  $k = 2$  de  $\phi_{Y_1}(\frac{t}{\sqrt{n}})$ :

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{Y_1}{\sqrt{n}}}(t) &= \phi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \phi_{Y_1}(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\phi'_{Y_1}(0) + \frac{t^2}{2n}\phi''_{Y_1}(0) + \frac{t^2}{n}h_2(t) \\ &= 1 + i\frac{t}{\sqrt{n}}\mathbb{E}(Y_1) - \frac{t^2}{2n}\mathbb{E}(Y_1^2) + \frac{t^2}{n}h_2(t) \\ &= 1 + 0 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{n}h_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

donde  $\lim_{t \rightarrow 0} h_2(\frac{t}{\sqrt{n}}) = 0$ .

Obtenemos que:

$$\left( \phi_{Y_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^n = \left( 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{n}h_2\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right)^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

cuyo límite es la función característica de una variable aleatoria perteneciente a una distribución normal con media 0 y varianza 1, concluimos la demostración aplicando el teorema de continuidad 3.2.3.  $\square$

### Ley de los grandes números

**Teorema 3.2.4.** Sean  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  variables aleatorias independientes, con esperanza  $\mu < \infty$  e idénticamente distribuidas. Entonces el valor medio de  $A_n$ ,  $\bar{\mu}$ , converge casi seguramente a  $\mu$ :

$$\bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \xrightarrow{c.s.} \mu,$$

esto es,  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu} = \mu) = 1$ .

Para obtener una demostración un tanto más breve de éste teorema añadiremos la hipótesis de existencia del momento de orden 4 de  $A_n$ . Una demostración completa del teorema sin la hipótesis adicional se puede consultar en [27].

**Lema 3.2.1.** Sean  $A_n, n \geq 1$  variables aleatorias no negativas, entonces:

$$E\left(\sum_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} E(A_n).$$

**Lema 3.2.2.** En las mismas condiciones de la ley de los grandes números, existe una constante  $K < \infty$  tal que para todo  $n \geq 0$ :

$$\mathbb{E}((\bar{\mu} - n\mu)^4) \leq Kn^2.$$

*Demostración.* Sean

$$Z_k = A_k - \mu \quad y \quad T_n = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{i=1}^n A_i - n\mu.$$

Entonces:

$$\mathbb{E}(T_n^4) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^4\right) = n\mathbb{E}(Z_1^4) + 3n(n-1)\mathbb{E}(Z_1^2 Z_2^2) \leq Kn^2.$$

donde en la segunda igualdad se ha empleado el desarrollo multinomial:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{1 \leq t \leq m} x_t^{k_t},$$

con

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Dado que  $\mathbb{E}(Z_k) = 0 \quad \forall k$  y la independencia de las variables  $Z_k$ , se cancelan todos los sumandos de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_i Z_j^3) &= \mathbb{E}(Z_i) \mathbb{E}(Z_j^3) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j, \\ \mathbb{E}(Z_i Z_j Z_k Z_l) &= \mathbb{E}(Z_i) \mathbb{E}(Z_j) \mathbb{E}(Z_k) \mathbb{E}(Z_l) = 0, \quad 1 \leq i, j, k, l \leq n, \quad i \neq j \neq k \neq l. \end{aligned}$$

y siendo  $K$  adecuadamente elegida, por ejemplo  $K = 4\max \mathbb{E}(Z_1^4), \mathbb{E}(Z_1^2)^2$ .

□

Ya tenemos todos los rudimentos necesarios para proceder a demostrar el teorema de esta sección.

*Demostración (Ley de los grandes números).* Asumamos que  $\mathbb{E}_c(A_n^4) < \infty \quad \forall n$ , aplicando el lema anterior:

$$\mathbb{E}((\bar{\mu} - \mu)^4) \leq \frac{K}{n^2}.$$

Ahora sea  $Y_n = (\bar{\mu} - \mu)^4, \forall n \in \mathbb{N}$  una variable aleatoria por la proposición 3.2.1 y en particular es no negativa, luego podemos aplicar el lema 3.2.1 en la siguiente cadena de igualdades:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n \geq 1} (\bar{\mu} - \mu)^4\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}((\bar{\mu} - \mu)^4) \leq K \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

lo que implica:

$$\left| \sum_{n \geq 1} (\bar{\mu} - \mu)^4 \right| = \sum_{n \geq 1} (\bar{\mu} - \mu)^4 < \infty \quad c.s.$$

Pero si una serie es convergente, entonces la sucesión de su término general de la serie converge a cero, por tanto:

$$\bar{\mu} \rightarrow \mu \quad c.s.$$

□

### 3.3. Fundamentos de las simulaciones Monte Carlo

El nombre *Monte Carlo* fue acuñado por los científicos que trabajaban en el desarrollo de armas nucleares en Los Álamos en la década de los 40 para designar una clase de métodos numéricos basados en el uso de números aleatorios. La esencia de este método reside en la invención de juegos de azar cuyo comportamiento puede ser usado para estudiar algún fenómeno de interés. Se podría pensar que el hecho de que resultados obtenidos por estos métodos estén sujetos a las leyes del azar es un problema, sin embargo, es un problema menor puesto que se puede determinar como de exactos son sus resultados y si se deseara obtener resultados más precisos, bastaría con incrementar el número de experimentos realizados. Actualmente, los métodos de Monte Carlos juegan un papel fundamental en la resolución de problemas matemáticos complejos, en los cuales, o bien los métodos de resolución analíticos o bien los métodos numéricos existentes requieren de grandes periodos de tiempo cómputo.

Curiosamente, en las definiciones de los métodos de Monte Carlo no hay referencia explícita al empleo de la capacidades de cómputo de los ordenadores, sin embargo el gran desarrollo que han experimentado éstos desde el último tercio de siglo XX hasta nuestros días, los ha convertido en herramientas indispensables en las simulaciones Monte Carlo. La generación de números aleatorios ha experimentado también un importante crecimiento en las últimas décadas.

### Generadores de números aleatorios

Los generadores de números aleatorios no generan números realmente aleatorios, es decir, no son variables aleatorias idénticamente distribuidas. Dado un valor de inicialización de la secuencia o semilla generan siempre la misma sucesión de números, por tanto diremos que un generador de números aleatorios produce una secuencia indistinguible de una realmente aleatoria. Dicho ésto, podemos afirmar que un ordenador solo es capaz de generar secuencias de números pseudoaleatorios con un periodo de longitud finita.

Un tipo generador de números aleatorios muy usado venía dado por la siguiente ecuación recurrente:

$$I_{j+1} = aI_j + c \quad \text{mód } (m) \quad (3.2)$$

donde  $a$  es un entero positivo llamado multiplicador y  $c$  es un número natural llamado incremento. Para  $c \neq 0$ , 3.2 es conocido por el nombre: *generador lineal congruente de números aleatorios*. Claramente, en  $n < m$  pasos la ecuación comienza a generar valores duplicados en el mismo orden, conocido ésto, se hacían elecciones particulares de  $a, c$  y  $m$  que obtuvieran en mayor periodo posible. En [30] podemos encontrar algunos resultados notables sobre la elección parámetros  $a, c$  y  $m$ . La elección del valor inicial  $I_0$  no es relevante, pues se generarán todos los naturales posibles entre 0 y  $m-1$  antes de la primera repetición. Sin embargo no es suficiente con generar una sucesión de números de un largo periodo, además deben superar rigurosas baterías de test empíricos que aseguren una buena distribución de las secuencias de números además de la ausencia de patrones en las mismas. En el caso de los generadores lineales congruentes existe un resultado que afirma que las sucesivas  $n$ -tuplas de valores generados residen en al menos  $(n!m)^{\frac{1}{m}}$  hiperplanos paralelos [31], luego esta clase de generadores no son adecuados para la generación de números aleatorios.

Dado el carácter empírico de las baterías de test, superarlas con éxito no aseguran un generador de números perfecto si no que probablemente se trate de un buen generador, ya que eventualmente con el suficiente tiempo se po-

dría encontrar un test que no fuera superado con éxito. Por tanto nos interesaremos en tests que demuestren el mal comportamiento de un generador en un tiempo razonable. Hay numerosas baterías de test, destacamos dos [32,33]: *Dieharder* la cual está basada en los primeros test estadísticos propuestos en *Diehard battery of tests*, incluye también los test desarrollados por el NIST (National Institute for Standards and Technology) y además dispone de un programa, *dieharder*, para realizar dichos tests y ejecutar la batería de test *TestU01*.

Nuestra elección de generador de números aleatorios es una variante del generador *Mersenne Twister* [34] presente en la biblioteca estándar del lenguaje de programación Python, el cual es el generador por defecto en las versiones del lenguaje de programación Python posteriores a la 2.3 [35] y en el lenguaje de programación estadística R [36]. Dicho generador de números aleatorios en su implementación en Python genera números en coma flotante de 53-bits de precisión y tiene un periodo de  $2^{19937} - 1$ .

### Métodos Monte Carlo

Los métodos de Monte Carlo se apoyan fundamentalmente en dos grandes resultados de la teoría de la probabilidad: la ley de los grandes números y el teorema central de límite. Ambos nos permiten describir la distribución límite de la suma de las variables aleatorias independientes, proporcionando también una estimación del error.

**Definición 3.3.1.** Una muestra aleatoria simple  $S_n$ , es un conjunto de  $n \in \mathbb{N}$  variables aleatorias,  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , independientes e idénticamente distribuidas. En caso de que la media y la varianza de las variables aleatorias  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sean finitas, las notaremos  $\mu$  y  $\sigma^2$  respectivamente.

La media de una muestra aleatoria simple  $S_n$ ,  $\mu_S = E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i$  es una variable aleatoria gracias al resultado 3.2.1, si además la media  $\mu$  y varianza  $\sigma$  de  $A_i$  son finitas, dicha variable aleatoria tiene la siguiente media y varianza:

$$E(\mu_S) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(A_i) = \mu,$$

$$\text{var}(\mu_S) = \text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{var}(A_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Luego su desviación estándar es  $\sqrt{\text{var}(\mu_S)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

**Definición 3.3.2.** La variable aleatoria  $\mu_S$  anteriormente definida diremos que es un *estimador* del valor esperado  $E(A) = \mu$ .

**Definición 3.3.3.** Sea  $\mu_S$  un estimador de la media de una muestra aleatoria simple,  $S_n$ , de media  $\mu < \infty$  y varianza  $\sigma^2 < \infty$  y  $\delta > 0$ , la desigualdad de Chebychev es:

$$P\left(|\mu_S - \mu| \geq \sqrt{\frac{\text{var}(\mu_S)}{\delta}}\right) = P\left(|\mu_S - \mu| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n\delta}}\right) \leq \delta.$$

El primer gran resultado o *primer teorema fundamental de Monte Carlo* que podemos deducir de los anteriores, en particular es una consecuencia directa del teorema 3.2.4, el estimador  $G$  de la media de una muestra aleatoria simple,  $S_n$ , de media  $\mu < \infty$  y varianza  $\sigma^2 < \infty$  converge en probabilidad al valor esperado  $\mu$ :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|G - \mu| > \epsilon) = 0.$$

Es posible aplicar la desigualdad 3.3.3 para obtener la velocidad de convergencia respecto a  $n$ . Veamos un ejemplo de éste hecho, dado  $\delta = \frac{1}{100}$ :

$$P\left((G - \mu)^2 \geq \frac{100}{n} \sigma^2\right) \leq \frac{1}{100},$$

Haciendo  $n$  lo suficientemente grande, la varianza de  $G$  se hace tan pequeña como se quiera, esto es, disminuye considerablemente la probabilidad de obtener una gran desviación relativa a  $\delta$  entre el valor esperado y el los valores obtenidos.

Es posible obtener un resultado más fuerte que el anterior como consecuencia del teorema 3.2.1. Existe una función de distribución de probabilidad que aproxima los valores del estimador  $G$ , esto es, cuando  $n \rightarrow \infty$ , el teorema central del límite afirma que asintóticamente los valores de  $G$  convergen a una distribución normal 3.2.21. Por tanto, es posible reescribir la función de distribución como sigue:

$$f(G) = \sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{n(G - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ , el valor de  $G$  se encuentra en intervalos cada vez más estrechos centrados en  $\mathbb{E}(G)$  y es posible medir la desviación en unidades de  $\sigma$ , es decir, el valor de  $G$  está dentro del intervalo centrado en  $\mathbb{E}(G)$  de un error estándar el 68.3% de las veces, de dos errores estándar el 95.4% de las veces y de tres errores estándar el 99.7% de las veces, los intervalos son  $[\mathbb{E}(G) + \sqrt{\text{var}(G)}, \mathbb{E}(G) - \sqrt{\text{var}(G)}]$ ,  $[\mathbb{E}(G) + 2\sqrt{\text{var}(G)}, \mathbb{E}(G) - 2\sqrt{\text{var}(G)}]$  y  $[\mathbb{E}(G) + 3\sqrt{\text{var}(G)}, \mathbb{E}(G) - 3\sqrt{\text{var}(G)}]$ , respectivamente 3.2.6. Como comentábamos anteriormente la convergencia es asintótica por lo que inicialmente desconocemos como de grande debe de ser  $n$  para poder aplicar el teorema.

Cuando la varianza no es finita, es posible encontrar una distribución límite para  $G$  que llevará a un caso particular del teorema central del límite, en estos casos la distribución límite no será en general la distribución normal. Un estimador de la varianza de la media estimada viene dado por:

$$var(G_n) = \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \right)^2 \right)$$



# 4

## Análisis

En esta sección expondremos y comentaremos los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas.

### 4.1. Efecto de la variación del parámetro $\alpha$

#### Reducción de la varianza

En la [Figura 4.1](#) visualizamos la evolución del área del cuadrado más pequeño que contiene a todas las células en cada iteración de juego de vida. Para el contenido de esta sección no es relevante la configuración inicial de la que se han obtenido los datos. Cada punto representa una estimación Monte Carlo, para los puntos de color naranja no se puede rechazar la hipótesis nula de que sigan una distribución normal, los de color azul sí rechazan la hipótesis nula y por tanto no podemos afirmar nada acerca de su intervalo de confianza.

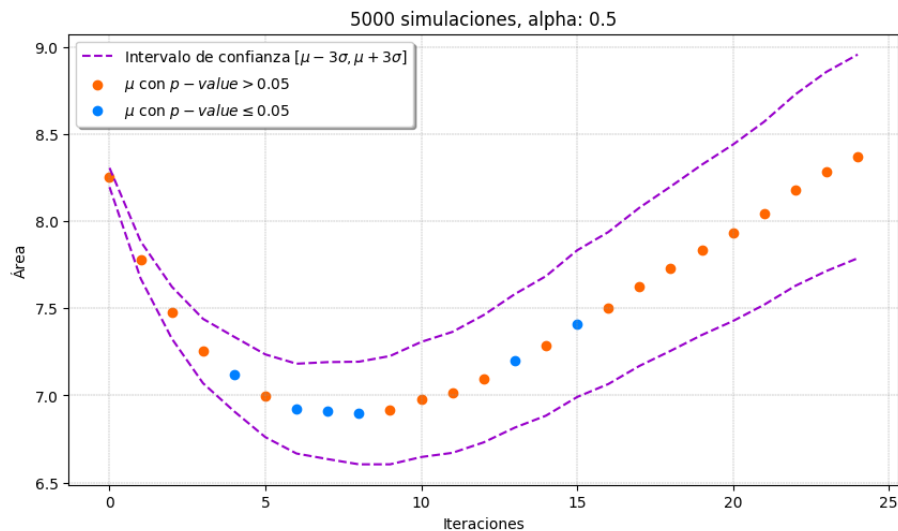


Figura 4.1: Sin Incremento del valor inicial de simulaciones cada iteración.

El intervalo de confianza  $[\mu + 3\sigma, \mu - 3\sigma]$  crece a medida que la iteración se aleja de la configuración inicial, de decir, la varianza aumenta. Es posible reducirla aumentando el número de simulaciones globalmente e incrementando notablemente el tiempo de cálculo. Sin embargo para el número prefijado de simulaciones se obtienen intervalos de confianza lo suficientemente pequeños en las iteraciones iniciales, por tanto proponemos incrementar el número de simulaciones a medida que las iteraciones aumenten. Este incremento requiere de la adición de nuevas simulaciones en cada iteración, las cuales serán escogidas aleatoriamente de las ya existentes modificando la semilla para no obtener simulaciones duplicadas. Experimentalmente hemos observado que un valor que muestra buenos resultados sin aumentar excesivamente el tiempo de cálculo es un incremento en cada iteración de una décima parte del valor inicial de simulaciones. Finalmente es posible observar la reducción del intervalo de confianza que conlleva el dicho incremento en la [Figura 4.2](#).

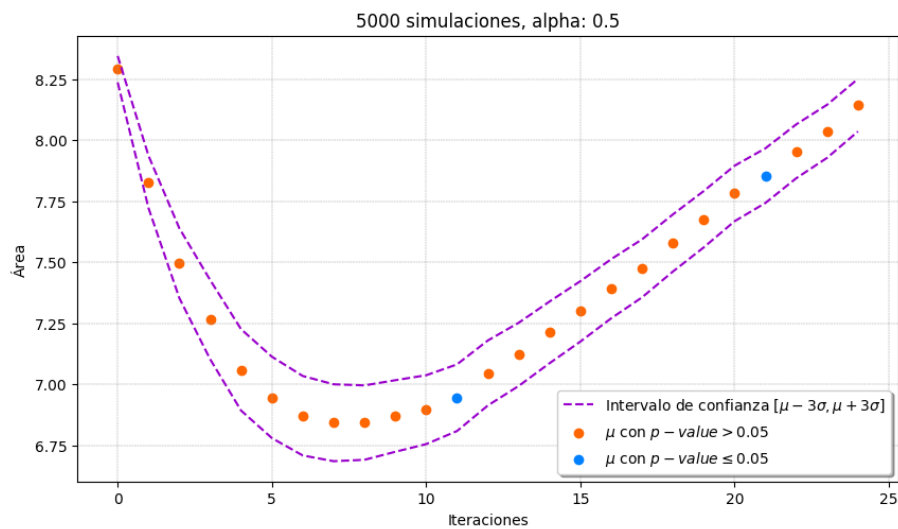


Figura 4.2: Incremento del 10% del valor inicial de simulaciones en cada iteración.

### Efecto de la variación de la distribución de probabilidad

# 5

## Conclusiones

---

### 5.1. Teoría de conjuntos

#### Introducción

## Bibliografía

---

- [1] Edward F Moore. Machine models of self-reproduction. 14(1962):17–33, 1962.
- [2] Martin Gardner. Mathematical games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life". *Scientific American*, 223:120–123, 1970.
- [3] Martin Gardner. Wheels, life, and other mathematical amusements. 86, 1983.
- [4] Jan Hemmingsson. Consistent results on 'life'. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 80(1-2):151–153, 1995.
- [5] Hendrik J Blok and Birger Bergersen. Effect of boundary conditions on scaling in the "game of life". *Physical Review E*, 55(5):6249–6252, 1997.
- [6] Carter Bays. Cellular automata in the triangular tessellation. *Complex Systems*, 8(2):127, 1994.
- [7] Nick Owens and Susan Stepney. Investigations of game of life cellular automata rules on penrose tilings: Lifetime, ash, and oscillator statistics. *J. Cellular Automata*, 5(3):207–225, 2010.
- [8] Clifford A Reiter. The game of life on a hyperbolic domain. *Computers & Graphics*, 21(5):673–683, 1997.
- [9] Conway's Game of Life - Boardless approach. [https://web.archive.org/web/20190212184430/https://rosettacode.org/wiki/Conway's\\_Game\\_of\\_Life#Boardless\\_approach](https://web.archive.org/web/20190212184430/https://rosettacode.org/wiki/Conway's_Game_of_Life#Boardless_approach). [Online; accessed 14-February-2019].
- [10] Stephen Wolfram. *Celular Automata and Complexity*. Addison-Wesley, 1994.
- [11] Harold V McIntosh. Wolfram's class iv automata and a good life. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 45(1-3):105–121, 1990.
- [12] Paul Rendell. *Turing universality of the game of life*. Springer, 2002.

- [13] A Turing Machine in Conway's Game of Life, extendable to a Universal Turing Machine. <https://web.archive.org/web/20190118023640/http://rendell-attic.org/gol/tm.htm>. [Online; accessed 14-February-2019].
- [14] Build a working game of Tetris in Conway's Game of Life - StackExchange. <https://web.archive.org/web/20190120082452/https://codegolf.stackexchange.com/questions/11880/build-a-working-game-of-tetris-in-conways-game-of-life>. [Online; accessed 14-February-2019].
- [15] Jean-Philippe Rennard. *Implementation of logical functions in the Game of Life*. Springer, 2002.
- [16] Nazim A Fatès and Michel Morvan. An experimental study of robustness to asynchronism for elementary cellular automata. *arXiv preprint nlin/0402016*, 2004.
- [17] Birgitt Schönfisch and André de Roos. Synchronous and asynchronous updating in cellular automata. *BioSystems*, 51(3):123–143, 1999.
- [18] Birger Blok, Hendrik J.; Bergersen. Synchronous versus asynchronous updating in the “game of life”. *Physical Review E*, 59:3876–3879, 1999.
- [19] Nazim Fates. Critical phenomena in cellular automata: perturbing the update, transitions, the topology. *Acta Physica Polonica B*, 3:315–325, 2010.
- [20] Alberto Dennunzio, Enrico Formenti, Luca Manzoni, and Giancarlo Mauri. m-asynchronous cellular automata: from fairness to quasi-fairness. *Natural Computing*, 12(4):561–572, 2013.
- [21] Noam David Elkies. The still-life density problem and its generalizations. *Voronoi's Impact on Modern Science, Book I*, 1998.
- [22] Matthew Cook. Still life theory. *New Constructions in Cellular Automata*, 226, 2003.
- [23] Still Life - lifewiki. [http://www.conwaylife.com/wiki/Still\\_life](http://www.conwaylife.com/wiki/Still_life). [Online; accessed 21-May-2019].
- [24] Number of stable n-celled patterns still lifes in Conway's game of Life. <https://oeis.org/A019473>. [Online; accessed 21-May-2019].
- [25] Number of n-celled pseudo-still-lives in Conway's game of Life. <https://oeis.org/A056613>. [Online; accessed 21-May-2019].

- [26] ER Berlekamp, JH Conway, and RK Guy. What is life?, chapter 25. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, 2, 1982.
- [27] Allan Gut. *Probability: a graduate course*, volume 75. Springer Science & Business Media, 2013.
- [28] David Williams. *Probability with martingales*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, 1991.
- [29] Michel Loeve. *Probability theory I*. Springer, 4th edition, 1977.
- [30] Donald E. Knuth. *The art of computer programming II*. Addison-Wesley Professional, 3 edition, 1997.
- [31] George Marsaglia. Random numbers fall mainly in the planes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 61(1):25, 1968.
- [32] Dieharder: A Random Number Test Suite. [http://web.archive.org/web/20190402181134/http://webhome.phy.duke.edu/~rgb/General/rand\\_rate.php](http://web.archive.org/web/20190402181134/http://webhome.phy.duke.edu/~rgb/General/rand_rate.php). [Online; accessed 02-April-2019].
- [33] Pierre L'Ecuyer and Richard Simard. Testu01: A library for empirical testing of random number generators. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 33(4):22, 2007.
- [34] Makoto Matsumoto and Takuji Nishimura. Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, 8(1):3–30, 1998.
- [35] Python 2.7.16 Documentation. <http://web.archive.org/web/20170907114211/https://docs.python.org/2.7/library/random.html>. [Online; accessed 29-April-2019].
- [36] R Documentation, random number generation. <https://web.archive.org/web/20190106064055/https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/base/html/Random.html>. [Online; accessed 29-April-2019].