

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

05/09/2012

Ejercicio 1. Sean A y B dos conjuntos tales que

$$A \setminus B = \{1, 3, 7, 11\} \quad B \setminus A = \{2, 6, 8\} \quad A \cap B = \{4, 9\}$$

Entonces

1. $A = \{1, 3, 4, 7, 9, 11\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$
2. $A = \{1, 3, 7, 9, 11\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$
3. $A = \{1, 3, 7, 8\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 9, 11\}$
4. $A = \{1, 3, 2, 4, 6, 7, 8\}$ y $B = \{1, 3, 2, 4, 6, 9, 11\}$

Ejercicio 2. Dado el sistema de congruencias

$$\begin{cases} 13x \equiv 21 \pmod{30} \\ 8x \equiv 6 \pmod{35} \end{cases}$$

1. El sistema no tiene solución.
2. El sistema tiene tres soluciones comprendidas entre 1000 y 1500.
3. El sistema tiene una solución comprendida entre 1000 y 1500.
4. El sistema tiene dos soluciones comprendidas entre 1000 y 1500.

Ejercicio 3.

Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. En $X \times X$ definimos la relación de equivalencia $(a, b)R(c, d)$ si $a+b = c+d$. Entonces el cardinal del conjunto cociente es:

1. 81.
2. 17.
3. 22.
4. 18.

Ejercicio 4.

Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la aplicación dada por $f(m, n) = (m + n, m \cdot n)$. Entonces:

1. f no es inyectiva pero sí es sobreyectiva.
2. f no es inyectiva ni sobreyectiva.
3. f es inyectiva y sobreyectiva.
4. f es inyectiva pero no sobreyectiva.

Ejercicio 5. La ecuación $112x + 76y = 3000$

1. tiene 237 soluciones tales que $500 \leq x \leq 5000$.
 2. no tiene solución pues $\text{mcd}(112, 76)$ no tiene inverso módulo
 3. tiene una única solución tal que $500 \leq x \leq 5000$.
 4. no tiene solución porque $\text{mcm}(112, 76)$ no divide a 3000.
- 3000.

Ejercicio 6. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ con coeficientes en \mathbb{Z}_5 es

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

Ejercicio 7. Sea $a = 24^{1234}$. La congruencia $ax \equiv 6 \pmod{11}$ tiene como solución a:

1. $x = 3$.
2. $x = 2$.
3. $x = 7$.
4. $x = 10$.

Ejercicio 8. Determina cuál de los siguientes anillos es un cuerpo.

1. $\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+1}$.
2. $\mathbb{Q}[x]$.
3. $\mathbb{Z}[x]$.
4. $\mathbb{R}[x]_{x^4+x+1}$.

Ejercicio 9. El polinomio $p(x) = x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 5$

1. Es reducible en $\mathbb{Z}_7[x]$.
2. Es reducible en $\mathbb{Z}_2[x]$.
3. Es irreducible en $\mathbb{Z}_3[x]$.
4. Es irreducible en $\mathbb{Z}_5[x]$.

Ejercicio 10. Sea $A = \mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x+1}$, y $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \in A$. Entonces:

1. $p(x)$ no tiene inverso, ya que no es irreducible.
2. $p(x)$ tiene inverso y vale $x^3 + x + 1$.
3. $p(x)$ tiene inverso y vale x^3 .
4. $p(x)$ no tiene inverso, pues $p(1) = 0$.

Ejercicio 11. Sea V un espacio vectorial de dimensión n , y U y W dos subespacios vectoriales distintos, ambos de dimensión $n - 1$. Entonces:

1. $\dim(U \cap W) = n - 2$.
2. $\dim(U \cap W) = 0$.
3. $\dim(U \cap W) = n - 1$.
4. $\dim(U \cap W) = 1$.

Ejercicio 12. Sea $V = \{a(x) \in \mathbb{Z}_2[x] : \deg(a(x)) \leq 3\}$, y $p_1(x) = x^3 + x + 1$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$, $p_3(x) = x^3 + x^2 + x$ y $p_4(x) = x^2 + 1$ elementos de V . Entonces:

1. Forman una base de V .

2. Son linealmente dependientes, pues el tercero es combinación lineal del resto.
3. Son linealmente dependientes, pues el segundo es combinación lineal del resto.
4. Son un sistema de generadores de V .

Ejercicio 13. Dados los sistemas de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Z}_7

$$\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + (2b+5)y = 5b+5 \\ x + (b+3)y = 3b+6 \end{cases}$$

1. Son equivalentes para $b = 4$.
2. No son equivalentes para ningún valor de b .
3. Son equivalentes para $b = 6$.
4. Son equivalentes para $b = 2$.

Ejercicio 14. Consideremos el sistema con coeficientes en \mathbb{R}

$$\left. \begin{aligned} \lambda x + y + z &= \lambda \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda \end{aligned} \right\}$$

Entonces:

1. El sistema es compatible determinado si, y sólo si, $\lambda < 0$
2. El sistema es compatible determinado si, y sólo si, $\lambda > 0$
3. El sistema es compatible para $\lambda \neq -2$
4. El sistema es compatible determinado para todos los valores de λ .

Ejercicio 15. Sea $U = \left\{ (x, y, z) \in (\mathbb{Z}_7)^3 : \begin{array}{rcl} 2x + 3y + 4z & = & 0 \\ x + 5y + 2z & = & 0 \end{array} \right\}$. Una base de U es:

1. $\{(2, 2, 1)\}$.
2. $\{(2, 1, 0); (1, 4, 0)\}$.
3. $\{(0, 1, 1)\}$.
4. $\{(0, 1, 1); (2, 1, 0)\}$.

Ejercicio 16. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal para la que el núcleo de f y la imagen de f tienen la misma dimensión. Entonces podemos asegurar que:

1. $\dim(V')$ es par.
2. $\dim(V)$ es par.
3. $\dim(V + V')$ es par.
4. $V = V'$.

Ejercicio 17. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$. Las ecuaciones cartesianas del subespacio $\text{Im}(f)$ son:

1. $x + y - z = 0$.
2. $\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{array}$.
3. $\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}$.

4. Puesto que $\dim(\text{Im}(f)) = 3$, no tiene ecuaciones cartesianas.

Ejercicio 18. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^2 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^4$ la aplicación lineal definida por las condiciones $f(1, 0) = (1, 2, 0, 5)$ y $f(0, 1) = (2, 2, 4, 2)$, y sea $g : (\mathbb{Z}_7)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^2$ la aplicación lineal dada por $g(x, y, z, t) = (x + 4y + z + 3t, 2x + y + 5t)$. Sea U el núcleo de g y V la imagen de f . Una base de $U + V$ es

1. $\{(1, 2, 0, 5), (2, 2, 4, 2), (1, 0, 3, 1), (0, 1, 5, 4)\}$.
2. $\{(1, 0, 4, 4), (1, 0, 3, 1), (0, 1, 5, 4)\}$.
3. $\{(1, 2, 0, 5), (2, 2, 4, 2), (1, 1, 2, 3)\}$.
4. $\{(1, 2, 0, 5), (2, 2, 4, 2), (1, 4, 1, 3), (2, 1, 0, 5)\}$.

Ejercicio 19. Sea $A \in M_4(\mathbb{Z}_5)$ una matriz con dos valores propios, 1 y 3 y tal que los subespacios propios son $V_1 = L[(1, 2, 1, 1)]$ (es decir, el subespacio generado por el vector $(1, 2, 1, 1)$) y $V_3 \equiv x + y + z + 2t = 0$. Entonces, el polinomio característico de A vale:

1. $\lambda^2 + \lambda + 3$.
2. Los datos que tenemos no nos permiten determinar cuál es el polinomio característico de A , pues nos falta la multiplicidad algebraica de los valores propios.
3. $\lambda^4 + \lambda^2 + \lambda + 2$.
4. $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3$

Ejercicio 20. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7)$.

1. A tiene tres valores propios distintos, por tanto es diagonalizable.
2. A no tiene valores propios.
3. A tiene dos valores propios distintos y es diagonalizable.
4. A tiene dos valores propios distintos y no es diagonalizable.