1. Sean $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ y $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Definimos la relación de equivalencia siguiente sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$:

$$B \; R \; C \;\Leftrightarrow\; B \cup A = C \cup A.$$

Entonces el cardinal del conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R$ es igual a

(a) 4 (b) 16 (c) 64 (d) 128

2. El número de aplicaciones del conjunto $\mathcal{P}(\{1,2\})$ en el conjunto

$$\{f : \{1,2\} \to \{3,4,5\} \mid f \text{ es aplicación}\}$$

es igual a

(a) 9^2 (b) 2^9 (c) 4^9 (d) 9^4

3. Dado $A \subseteq X$, recordemos que $X - A$ también se denota como $X \setminus A$ así como $\overline{A}$. Si $A, B \subseteq X$, entonces el subconjunto $(X - (A \cap B)) \cap A$ es igual a

(a) $\varnothing$ (b) $(X - A) \cup B$ (c) $(X - B) \cap A$ (d) X

4. Definimos en $\mathbb{Z}_7$ la siguiente relación binaria: $x \; R \; y \;\Leftrightarrow\; x + y = 0$. Entonces:
   a) R no es relación de equivalencia,
   b) R es relación de equivalencia y $\mathbb{Z}_7/R$ tiene cardinal 4,
   c) R es relación de equivalencia y $\mathbb{Z}_7/R$ tiene cardinal 3,
   d) R es relación de equivalencia y $\mathbb{Z}_7/R$ tiene 5 elementos.
5. En S_9 no existen permutaciones de orden

(a) 20 (b) 12 (c) 15 (d) 18

6. Dado un grupo G, consideramos la aplicación $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ para todo $x \in G$. Entonces
   a) f es biyectiva y además es un homomorfismo de grupos,
   b) aunque f no es biyectiva, sin embargo sí es un homomorfismo de grupos,
   c) f es biyectiva, aunque no es un homomorfismo de grupos,
   d) f no es biyectiva ni tampoco es un homomorfismo de grupos.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para la permutación?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

a) σ es impar,
b) σ es un ciclo,
c) $\sigma = (1,4)(4,3)(2,5)(7,9)$ es una descomposición de σ en ciclos disjuntos,
d) $\sigma^{61} = \sigma$.

8. El cardinal del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por el conjunto $\{(1,1,1),(1,2,1)\}$ es:

(a) 25 (b) 10 (c) 125 (d) 15

9. Sean $U_1 = \langle(1,2,3),(1,1,1)\rangle$ y $U_2 = \langle(0,0,1),(3,5,7)\rangle$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
a) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$
b) $U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0)\}$
c) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0)\}$
d) $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$

10. ¿Cuál de los siguientes espacios vectoriales no es isomorfo a $\mathbb{R}^3$?
a) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0\}$,
b) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0, x_2+x_3=0\}$,
c) $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid c+d=0\}$,
d) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1+x_2=0, 3x_1+x_4=0\}$.

11. Sean $B = \{v_1, v_2\}$ y $B' = \{v_1' = 5v_1 - 3v_2, v_2' = -2v_1 + v_2\}$ dos bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Si las coordenadas de w respecto de la base B son $(3,-2)$, entonces las coordenadas de w respecto de la base B' son

(a) $(19,-11)$ (b) $(1,1)$ (c) $(21,-8)$ (d) $(3,4)$

12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $f(1,1) = (1,-1)$ y $f(3,5) = (-1,-1)$. Entonces la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$. Entonces una base para Im(f) es:
    a) $\{(1, 1, 2), (0, 0, 1)\}$,
    b) $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$,
    c) $\{(1, 1, 2), (2, 1, 3)\}$,
    d) $\{(1, 1, 2)\}$.
14. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $\dim(N(f)) = 1$. Entonces:
    a) f es inyectiva,
    b) f es sobreyectiva,
    c) f es biyectiva,
    d) f es un isomorfismo.
15. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$. Entonces el rango de A es igual a

    (a) 4 (b) 1 (c) 3 (d) 2

16. Acerca del sistema siguiente con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & 1 \\ (a-1)x & + & y & & & = & a \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

    podemos afirmar que
    a) es siempre compatible determinado,
    b) la compatibilidad o incompatibilidad depende del valor de a,
    c) es siempre compatible indeterminado,
    d) es siempre incompatible.
17. ¿Cuál de las siguientes matrices no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. ¿Cuál de los siguientes conjuntos constituye una base para $\mathbb{Q}^3$ formada por vectores propios para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}?$$

a) $\{(0,1,1),(1,1,2),(1,2,3)\}$,
b) $\{(-1,0,1),(1,1,2),(1,1,1)\}$,
c) $\{(1,1,2),(1,1,0),(-1,0,1)\}$,
d) $\{(0,1,1),(1,2,1),(-1,0,1)\}$.

19. Sea la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Entonces $f^*(\{0,1,-1\})$ es igual a:

(a) $\{0,1\}$ (b) $\{-1,0,1\}$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $\{0\}$

20. Sea σ una permutación de orden 30. Entonces el cardinal del conjunto

$$\{\sigma^i \mid 25 \leq i \leq 40\}$$

es

(a) 16 (b) 15 (c) 30 (d) 10