

Geometría II. Grado en Matemáticas

Convocatoria de septiembre. Curso 2013-2014

1. (4p) Se considera la siguiente matriz con coeficientes reales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Sea g la métrica de \mathbb{R}^3 cuya matriz en la base usual es A . Sea f el endomorfismo de \mathbb{R}^3 cuya matriz en la base usual es A .

- (a) Calcular la signatura y clasificar la métrica g según los valores de a .
 - (b) Para $a = 1$ obtener una base conjugada (= ortogonal) para la métrica g .
 - (c) ¿Para qué valores de a es f autoadjunto en (\mathbb{R}^3, g_u) ? Para $a = 2$ calcular, si es posible, una base ortogonal de (\mathbb{R}^3, g_u) formada por vectores propios de f .
 - (d) ¿Existen valores de a para los que f es una isometría en (\mathbb{R}^3, g_u) ? Para dichos valores, describir las isometrías obtenidas.
2. (3p) Se considera el espacio vectorial euclídeo $(S_2(\mathbb{R}), g)$, donde $S_2(\mathbb{R})$ es el espacio de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales y $g(M, N) = \text{traza}(MN)$.
- (a) Calcular la proyección ortogonal de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio dado por $U = \{M \in S_2(\mathbb{R}) / \text{traza}(M) = 0\}$.
 - (b) Determinar el giro de ángulo $\pi/4$ y eje $L(I_2)$.
3. (3p) Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:
- (a) Sea A una matriz antisimétrica de orden 3. ¿Es siempre $\lambda = 0$ un valor propio de A ?
 - (b) ¿Es cierto que si dos matrices cuadradas son congruentes, entonces sus determinantes son iguales?
 - (c) Sea g una métrica sobre V y $u, v \in V$ vectores tales que $g(u, v) = 0$, $g(u, u) \neq 0$ y $g(v, v) \neq 0$. Probar que u y v son linealmente independientes.
 - (d) ¿Es cierto que toda matriz ortogonal de orden 3 con determinante positivo es diagonalizable?

Dentro de cada ejercicio todos los apartados tienen la misma puntuación

Duración: 3 horas y media

Granada, 15 de septiembre de 2014