APELLIDOS: ....

NOMBRE: .... D.N.I.: ....

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

28 de enero de 2015

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la aplicación definida por $f(m, n) = mn + m + 2n$. Estudia si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

Ejercicio 2. En $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ consideramos el orden dado por la inclusión y en $D(20)$ la relación de orden dada por divisibilidad, ($a \leq b$ si $b = ac$ para algún $c \in D(20)$). Consideramos en $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) \times D(20)$ el orden producto.

Dado el subconjunto $A = \{(\{a\}, 4), (\{a\}, 2), (\{a, b\}, 2), (\{a, c\}, 10)\} \subseteq \mathcal{P}(\{a, b, c\}) \times D(20)$, describe los elementos notables de A

Ejercicio 3. Resuelve el siguiente sistema de congruencias

$$\begin{cases} 14x \equiv 10 & (\text{mód } 18) \\ 5x \equiv 4 & (\text{mód } 21) \\ 10x \equiv 12 & (\text{mód } 29) \end{cases}.$$

Ejercicio 4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que el número $10a + b$ es múltiplo de 19. Demuestra que entonces $a + 2b$ es también múltiplo de 19.

Ejercicio 5. Sea $A = \mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x^2+1}$. Calcula, si es posible, $(x + 1)^2(x^3 + x + 1)^{-1}$. ¿Es A un cuerpo?

Ejercicio 6. Discute el siguiente sistema de ecuaciones en $\mathbb{Z}_3$ en función del valor de a:

$$\begin{cases} x \phantom{{}+y} + 2z + t = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ y + z + at = 1 \\ x + 2az = 2 \end{cases}.$$

Ejercicio 7. En el espacio vectorial $(\mathbb{Z}_5)^4$ consideramos los subespacios vectoriales

$$U = \langle (0, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 0) \rangle = L[(0, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 0)]$$

$$W \equiv \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x + y + 2t = 0 \end{cases}.$$

Calcula unas ecuaciones cartesianas de $U + W$ y comprueba si $(1, 2, 2, 2) \in U + W$.

Ejercicio 8. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \to (\mathbb{Z}_7)^3$ la única aplicación lineal tal que

$$\ker(f) = N(f) \equiv \begin{cases} x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}.$$

$$V_2 = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle = L[(1, 0, 1), (1, 1, 0)]$$

donde V_2 denota el subespacio propio de valor propio 2.

Calcula $M_{B_c}(f) = A(f; B_c, B_c)$ donde B_c es la base canónica de $(\mathbb{Z}_7)^3$.

Ejercicio 9. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7),$$

calcula, si es posible, matrices $P, D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7)$ tales que D es diagonal y $A = PDP^{-1}$.

Ejercicio 10. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra `COCODRILO`? ¿Cuántas de ellas tienen las tres `O` juntas? ¿En cuántas de ellas aparecen juntas una `C` y una `R`?