GEOMETRÍA I. Examen del Tema 3

– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –

Curso 2013/14

Nombre:

1. Probar que la aplicación $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(A) = A + A^t$ es lineal y hallar una base del núcleo. Hallar una base de la imagen.

2. Hallar un isomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to P_2[x]$ tal que $f(U) = W$, donde $U = \{(x, y, z) : x - 2y = 0\}$ y $W = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0 + a_1 + 2a_2 = 0\}$. Hallar la imagen de $(4, 2, -3)$.

3. Hallar la base dual de $B = \{(0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, -1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Respecto de dicha base, hallar las coordenadas de una base de $\mathrm{an}(U)$ donde $U = \{(x, y, z) : x - y = 0\}$.

4. Sea $f : V \to V$ una aplicación lineal tal que $f \circ f = f$. Probar que $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Hallar un endomorfismo no trivial de $\mathbb{R}^2$ con la anterior propiedad.

`Razonar todas las respuestas`

SOLUCIONES

1. (a) Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Usamos que la traspuesta de la suma de matrices es la suma de las traspuestas y que la traspuesta de un escalar por una matriz es el escalar por la traspuesta de la matriz. Por tanto

$$\begin{aligned} f(\lambda A + \mu B) &= (\lambda A + \mu B) + (\lambda A + \mu B)^t = \lambda A + \mu B + \lambda A^t + \mu B^t \\ &= \lambda(A + A^t) + \mu(B + B^t) = \lambda f(A) + \mu f(B). \end{aligned}$$

Sea $A \in Ker(f)$. Entonces $f(A) = A + A^t = 0$, es decir, $A^t = -A$. Por tanto, el núcleo de f es el subespacio de las matrices antisimétricas, cuya base es $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$.

(b) Un sistema de generadores de la imagen es la imagen de una base. Tomando la base usual $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, tenemos

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, f(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Escribiendo en coordenadas respecto de la base usual, tenemos

$$\{(2,0,0,0), (0,1,1,0), (0,1,1,0), (0,0,0,2)\}.$$

Evidentemente el tercer vector está repetido, luego se quita. Y como sabemos que $r(f) = 4 - n(f) = 4 - 1 = 3$, entonces los que quedan son linealmente independientes. Por tanto, una base de la imagen es $\{f(e_1), f(e_2), f(e_4)\}$.

2. (a) Para que sea isomorfismo, basta con llevar una base en otra base. Damos el isomorfismo mediante la imagen de una base. Calculamos bases de U y W sin más que resolver el sistema de ecuaciones. Para el primero, tenemos $U =< (2,1,0), (0,0,1) >$ y $W =< 1 - x, 2 - x^2 >$. Ampliamos la base de U a una de $\mathbb{R}^3$, y del mismo modo, hacemos con la de W: $B = \{(2,1,0), (0,0,1), (0,1,0)\}$ y $B' = \{1 - x, 2 - x^2, 1\}$. Definimos f mediante

$$f(2,1,0) = 1 - x,\ f(0,0,1) = 2 - x^2,\ f(0,1,0) = 1,$$

probando que es un isomorfismo. Para probar que $f(U) = W$, basta con darse cuenta de

$$f(U) = f(< (2,1,0), (0,0,1) >) =< f(2,1,0), f(0,0,1) >=< 1-x, 2-x^2 >= W.$$

(b) Para hallar $f(4,2,-3)$, hallamos las coordenadas de $(4,2,-3)$ respecto de B: $(4,2,-3) = 2(2,1,0) - 3(0,0,1) + 0(0,1,0)$. Por tanto,

$$f(4,2,-3) = 2f(2,1,0) - 3f(0,0,1) + 0f(0,1,0) = -4 - 2x + 3x^2.$$

3. (a) Sea $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ base dual pedida. Sabemos que $\alpha_1(x, y, z) = ax + by + cz$ con $\alpha_1(e_i) = \delta_{1i}$. Sustituyendo por la base de la cual es dual, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{c} b + c = 1 \\ b + 2c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{array} \right. \Rightarrow a = 3, b = 2, c = -1.$$

Y así hacemos para α_2 y α_3, obteniendo

$$\alpha_1(x, y, z) = 3x + 2y - z,\ \alpha_2(x, y, z) = -2x - y + z,\ \alpha_3(x, y, z) = x.$$

(b) Sabemos por teoría que las coordenadas respecto de una base B^* de una base del anulador de U es tomar los coeficientes de las ecuaciones cartesianas de U, cuando éstas son respecto de B. Tomamos la base usual de $\mathbb{R}^3$. Entonces $an(U) =< (1, -1, 0) >=< \omega_1 - \omega_2 >$, donde $B_u^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Por tanto, lo que se pregunta son las coordenadas de $\omega_1 - \omega_2$ respecto de la base dual calculada anteriormente. Si escribimos todo respecto de B_u^*, el sistema que hay que resolver es

$$(1, -1, 0) = \lambda(3, 2, -1) + \mu(-2, -1, 1) + \delta(1, 0, 0),$$

obteniendo $(-1, -1, 2)$.

4. (¡Hecho en clase!) Para ver que está en suma directa es suficiente con que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ y que $dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim(V)$. Esto último viene asegurado por la fórmula de las dimensiones. Para la intersección, sea $v \in Ker(f) \cap Im(f)$. Ya que $v \in Im(f)$, existe $u \in V$ tal que $f(u) = v$. Por tanto,

$$0 = f(v) = f(f(u)) = (f \circ f)/u) = f(u) = v,$$

donde la primera igualdad se debe a que $v \in Ker(f)$ y la última, a que $f(u) = v$.

5. Sea $B = \{e_1, e_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Definimos $f(e_1) = 0$ y $f(e_2) = e_2$. Entonces

$$(f \circ f)(e_1) = f(f(e_1)) = f(0) = 0 = f(e_1),\quad (f \circ f)(e_2) = f(f(e_2)) = f(e_2).$$

Por tanto, $f \circ f = f$ para una base, luego también para cualquier vector por linealidad.

Si tomamos B la base usual, entonces en el caso anterior tenemos: $f(x, y) = f(xe_1 + ye_2) = x(0, 0) + ye_2 = (0, y)$.