MILAN

TOPOLOGÍA I

13 de febrero de 2013

1. En $\mathbb{R}$ se define la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{T} = \{O \subseteq \mathbb{R} \;/\; \mathbb{R} - O \text{ es compacto en } (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)\} \cup \{\phi\}$$

   (a) Demostrar que $\mathcal{T}$ es una topología sobre $\mathbb{R}$.

   (b) Comparar $\mathcal{T}$ con la topología usual $\mathcal{T}_u$.

   (c) Calcular interior, adherencia y frontera de $A = [0,1] \cup [2,3]$ y $B =]0, \infty[$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

2. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación biyectiva. Probar que son equivalentes:

   (a) f es continua y abierta.

   (b) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}, \;\; \forall A \subset X$.

3. (a) Razonar si puede existir una biyección abierta del plano $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ en la esfera $(\mathbb{S}^2, (\mathcal{T}_u)_{\mathbb{S}^2})$. $(\mathcal{T}_u)_{\mathbb{R}^2}$

   (b) Probar que si $\mathcal{B}$ es una base de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$, entonces las componentes conexas de los elementos de $\mathcal{B}$ forman otra base de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$.

4. Razonar si los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T}_u)$ son homeomorfos:

   (a) $(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \bigcup (\{0\} \times \mathbb{S}^1)$,

   (b) $\mathbb{S}^2$,

   (c) $\mathbb{S}^2 - \{N, S\}$,

   (d) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$,

   (e) $(\mathbb{R} \times \{(0,0)\}) \bigcup \mathbb{S}^2$.

Puntuación: todos igual.
Tiempo: 3 horas.