

**Geometría II. Grado en matemáticas**  
**Examen final. Curso 2013-2014**  
Toda la asignatura

1. Sea  $f$  el endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  que respecto de la base usual tiene matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Probar que  $\lambda = 1$  es un valor propio de  $f$  y estudiar para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  es diagonalizable.
  - (b) Cuando  $f$  no sea un automorfismo encontrar una base de vectores propios de  $f$ .
  - (c) Para algún valor de  $\alpha$ , encontrar una base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  con su métrica usual formada por vectores propios de  $f$ .
2. Sea  $g_\beta$  la métrica en  $\mathbb{R}^3$  cuya forma cuadrática está dada por:

$$\Phi_\beta(x, y, z) = y^2 + \beta z^2 + 2xy + 2\beta xz.$$

- (a) Clasificar las métricas  $g_\beta$  según los valores de  $\beta \in \mathbb{R}$ .
- (b) Calcular el radical o núcleo de cada  $g_\beta$ .
- (c) Resolver la ecuación  $\Phi_0(x, y, z) = 0$ .

3. Se considera el endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  dado por:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}y - z, \sqrt{2}x + \sqrt{2}z, -x - \sqrt{2}y + z).$$

Demostrar que es una isometría en  $(\mathbb{R}^3, g_u)$ , clasificarla y describir sus elementos geométricos.

4. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:

- (a) Sea  $A \in M_2(\mathbb{R})$  con  $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2$ . ¿Es  $A$  semejante a una matriz diagonal? Si la respuesta es negativa, mostrar un contraejemplo.
- (b) Probar que si  $f : V \rightarrow V$  es una isometría de un espacio vectorial euclídeo  $(V, g)$  y  $\det(f) = -1$ , entonces  $\lambda = -1$  es valor propio de  $f$ .
- (c) ¿Es cierto que en  $(\mathbb{R}^3, g_u)$  ninguna simetría ortogonal respecto a un plano es composición de simetrías ortogonales respecto a rectas?

*Duración: 3 horas*

*Granada, 10 de julio de 2014*

# Geometría II. Grado en matemáticas

## Examen final. Curso 2013-2014

Solo segunda parte

1. Se considera el espacio vectorial euclídeo  $(M_2(\mathbb{R}), g)$ , donde  $M_2(\mathbb{R})$  es el espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales y  $g$  es la métrica definida como  $g(A, C) = \text{tr}(A C^t)$ . Se pide lo siguiente:
  - (a) Calcular el complemento ortogonal en  $(M_2(\mathbb{R}), g)$  del subespacio  $A_2(\mathbb{R})$  formado por las matrices antisimétricas.
  - (b) Obtener dos matrices  $A, C \in S_2(\mathbb{R})$  que sean linealmente independientes, unitarias en  $(M_2(\mathbb{R}), g)$ , y que formen ángulo  $\pi/4$  con la matriz identidad  $I_2$ .

2. Se considera el endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  dado por:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} (x - \sqrt{2}y - z, \sqrt{2}x + \sqrt{2}z, -x - \sqrt{2}y + z).$$

Demostrar que es una isometría en  $(\mathbb{R}^3, g_u)$ , clasificarla y describir sus elementos geométricos.

3. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:
  - (a) Probar que si  $f : V \rightarrow V$  es una isometría de un espacio vectorial euclídeo  $(V, g)$  y  $\det(f) = -1$ , entonces  $\lambda = -1$  es valor propio de  $f$ .
  - (b) Probar que si  $f : V \rightarrow V$  es un endomorfismo diagonalizable, entonces existe una métrica euclídea  $g$  en  $V$  tal que  $f$  es autoadjunto en  $(V, g)$ .
  - (c) ¿Es cierto que en  $(\mathbb{R}^3, g_u)$  ninguna simetría ortogonal respecto a un plano es composición de simetrías ortogonales respecto a rectas?

*Duración: 2 horas y media*

*Granada, 10 de julio de 2014*