UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES I
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE. 10 de septiembre de 2014

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.

[6] Ejercicio 1.- Resuelve las siguientes cuestiones

1. Determina la o las funciones $M(t,x)$ para las que la ecuación diferencial
$$M(t,x) + (te^{tx} + 2tx + \frac{1}{t})x' = 0$$
es exacta.

2. Halla la solución general de la ecuación
$$x'' + \frac{2}{t}x' + x = \frac{1}{t},$$
sabiendo que $\varphi(t) = \frac{\cos t}{t}$ es una solución de la ecuación homogénea asociada.

3. Demuestra que toda solución no trivial de la ecuación $x'' + x' - e^{-t}x = 0$ tiene a lo sumo un cero.

[4] Ejercicio 2.-

1. Sea $M \in C^1(I; M_n(\mathbb{R}))$ tal que $M(t)M'(t) = M'(t)M(t),\ t \in I$. Demuestra que $\frac{d}{dt}\left(e^{M(t)}\right) = M'(t)e^{M(t)},\ t \in I$.

2. Comprueba que si $A \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$ es tal que, fijado $t_0 \in I$, $A(t)$ conmuta con $B(t) := \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds,\ t \in I$, entonces $e^{B(t)}$ es la matriz fundamental principal en t_0 del sistema $x' = A(t)x$.

3. Sabiendo que si $L = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, entonces $e^L = \begin{pmatrix} \cosh a & \sinh a \\ \sinh a & \cosh a \end{pmatrix}$, determina la matriz fundamental principal en 0 del sistema
$$x' = \begin{pmatrix} 0 & \cos t \\ \cos t & 0 \end{pmatrix} x.$$

4. Estudia la existencia de soluciones 2π-periódicas del sistema
$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -\cos t \\ -\cos t & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$