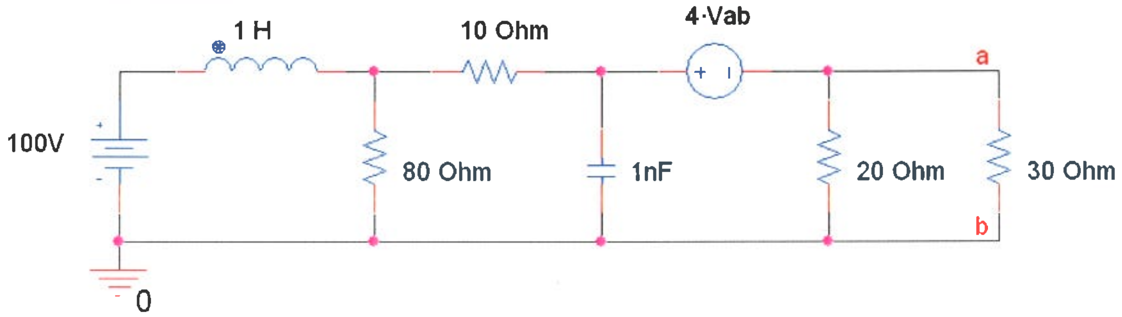
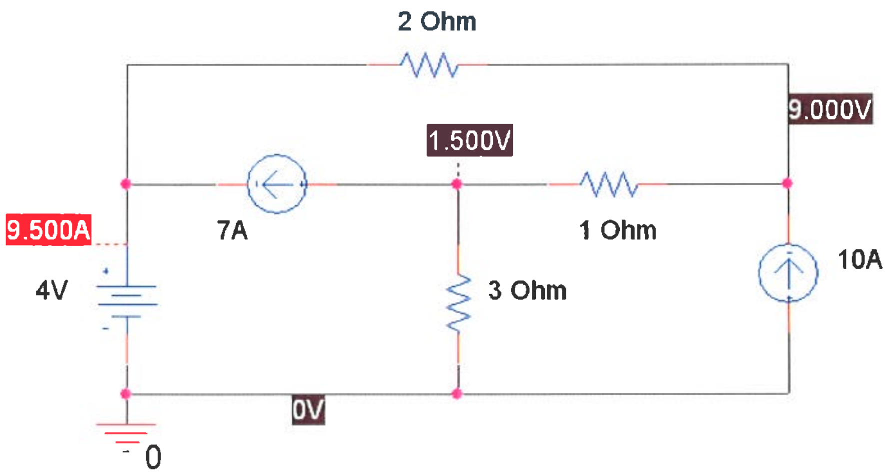
Examen de Análisis de Circuitos. Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación. 12 de febrero de 2015.

NOMBRE: **DNI:**

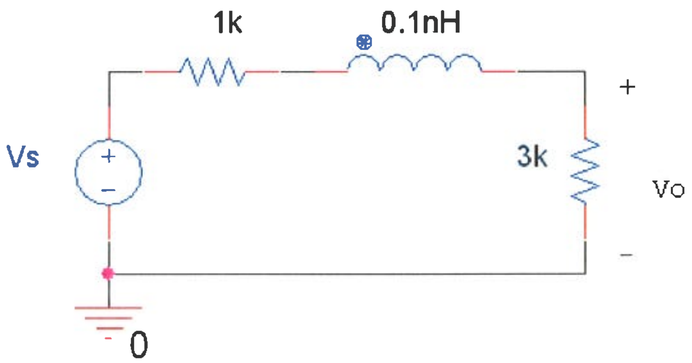
1. Determine el equivalente Thévenin del siguiente circuito entre los terminales A y B (en DC) . **(2 puntos)**



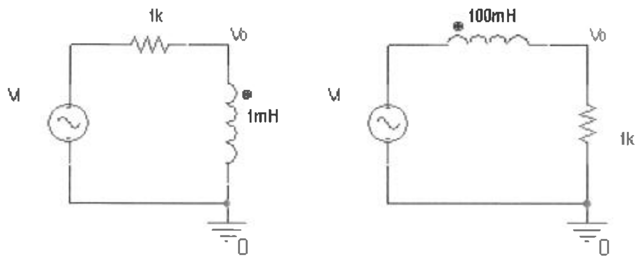
2. Dado el siguiente circuito, en el que se muestran las tensiones en todos los nudos y las corrientes que circulan, calcule **(1.5 puntos)**:
   - La potencia disipada en cada elemento.
   - Comprobar que la potencia total disipada es igual que la potencia total generada por las fuentes.



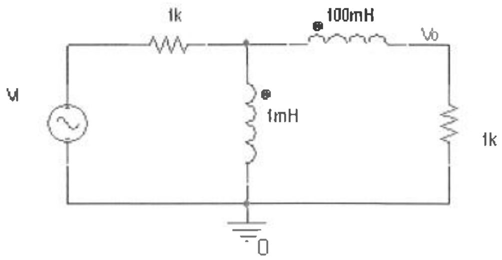
3. En la fuente de tensión de la figura se produce un escalón en t = 0, que hace que la tensión de entrada al circuito pase de 2 V a 4 V. Calcule **(2 puntos)**:
   - Los valores estacionarios de v_o antes y después del salto de tensión.
   - Determinar i(t) en el transitorio que tiene lugar entre los valores estacionarios y el tiempo de transición entre ellos (tiempo de subida).



4. En la figura (a) se representan dos redes RL que se comportan como filtros paso-alta y paso-baja, respectivamente.
   - Obtenga la función de transferencia y represente el diagrama de bode de cada uno de los circuitos de la figura (a) **(1 punto)**.
   - Si se conectan en cascada, tal como muestra la figura (b), obtenga la función de transferencia y el diagrama de Bode **(1 punto)**.

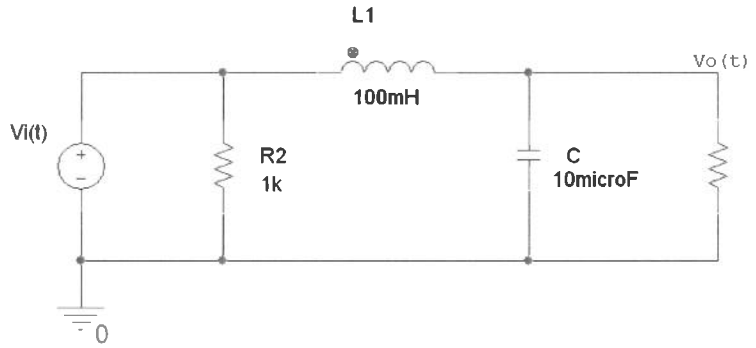


(A)



(B)

5. Para el circuito de la figura, determine:
   - La función de transferencia T(s) **(1 punto)**
   - La tensión de salida $v_o(t)$ cuando $v_i(t) = \delta(t)$ **(0.75 puntos)**
   - Si $v_i(t) = [5\cos(10^3 t) + 10\cos(10^5 t)]$ V, determine $v_o(t)$. **(0.75 puntos)**



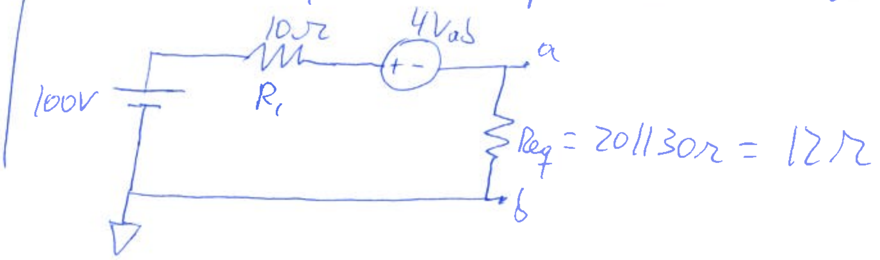
AN ABBREVIATED LIST OF LAPLACE TRANSFORM PAIRS

$f(t)(t > 0^-)$	TYPE	$F(s)$
$\delta(t)$	(impulse)	1
$u(t)$	(step)	$\frac{1}{s}$
t	(ramp)	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	(exponential)	$\frac{1}{s+a}$
$\sin \omega t$	(sine)	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	(cosine)	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$te^{\ at}$	(damped ramp)	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$e^{-at}\sin \omega t$	(damped sine)	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos \omega t$	(damped cosine)	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

1.- • $V_T = V_{ab})_{I_S=0}$

DC:

→ Circuito equivalente para calcular V_{ab}:

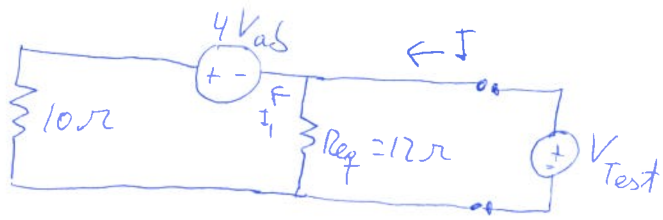


$$100V = I\cdot(R_1+R_{eq}) + 4V_{ab} = I\cdot(R_1+R_{eq}) + 4\cdot I\cdot R_{eq}$$

$$I = \frac{100V}{R_1+5R_{eq}} = \frac{100V}{10\Omega+60\Omega} = 1'429A \Rightarrow \underline{V_T} = V_{ab}\Big|_{I_S=0} = I\cdot R_{eq} = \underline{17'14V}$$

• Req $R_T = R)_{V_T=0}$

$$R_T = \frac{V_{Test}}{I}$$

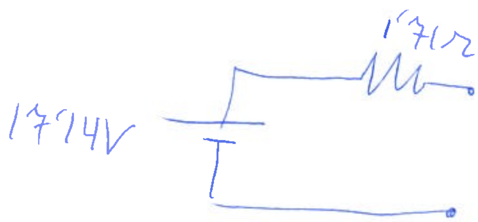


$$V_{Test} = -4V_{Test} + I_1\cdot 10\Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{5V_{Test}}{10\Omega} = \frac{V_{Test}}{2\Omega}$$

$$I = \frac{V_{Test}}{R_{eq}} + \frac{V_{Test}}{2\Omega} = \frac{V_{Test}}{R_{eq}\|2\Omega} \Rightarrow \underline{R_T} = R_{eq}\|2\Omega = \underline{1'71\Omega}$$

• Circuito eq. Th.:



2.-

(2)- a) 3 NUDOS PRINCIPALES (A PARTE DE $\underline{\perp}$)

1 TIENE TENSIÓN FIJADA ⇒ SÓLO DOS INCÓGNITAS

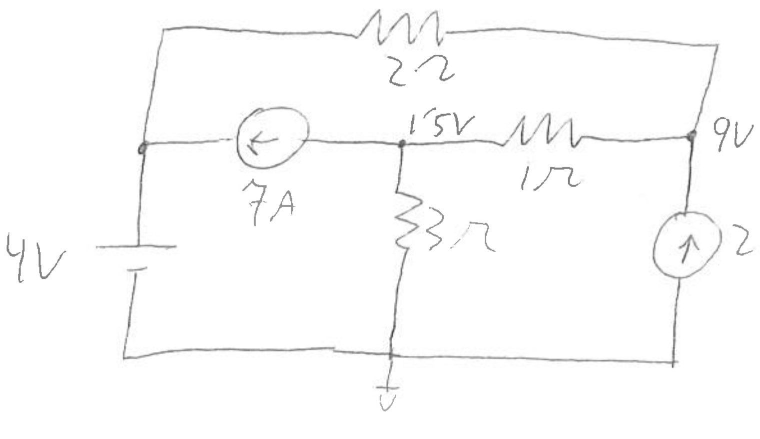
$$-7A + \frac{0 - V_B}{3\Omega} + \frac{V_C - V_B}{1\Omega} = 0$$

$$\frac{V_B - V_C}{1\Omega} + 2(V_C - 4V) + \frac{4V - V_C}{2\Omega} = 0$$

solució:

$V_B = 1'5V$; $V_C = 9V$

b)



$2V_x = 2\frac{A}{V} \cdot (9V - 4V) = 10\ A$

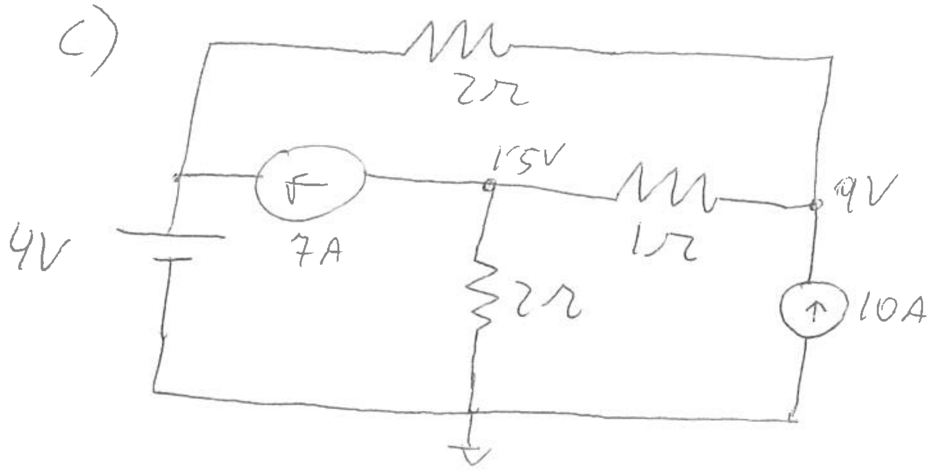
$$P_{2\Omega} = \frac{(5V)^2}{2\Omega} = \frac{25V^2}{2\Omega} = 12'5W$$

$$P_{1\Omega} = \frac{(9V - 1'5V)^2}{1\Omega} = 56'25W$$

$$P_{3\Omega} = \frac{(1'5V)^2}{3\Omega} = 0'75W.$$

TOTAL DISIPADO RESISTENCIAS: 69'5W

c)



POTENCIA (DISIPADA) EN FUENTES:

- $P_{4V} = V \cdot I = 4V \cdot 9'5A = 38\,W$ ¡NO GENERA, DISIPA!

$$I = 7A + \frac{5V}{2\Omega} = 9'5\,A$$

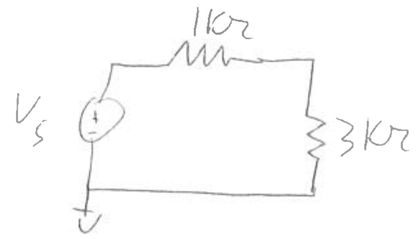
- $P_{7A} = 7A \cdot V = 7A \cdot (1'5V - 4V) = 7A \cdot (-)2'5V = -17'5\,W$
  ¡GENERA!

- $P_{10A} = 10A \cdot (0 - 9V) = -90\,W$
  ¡GENERA!

TOTAL GENERADO POR FUENTES: $+107'5\,W$

TOTAL DISIPADO EN CIRCUITO: $69'5W + 38\,W = 107'5$

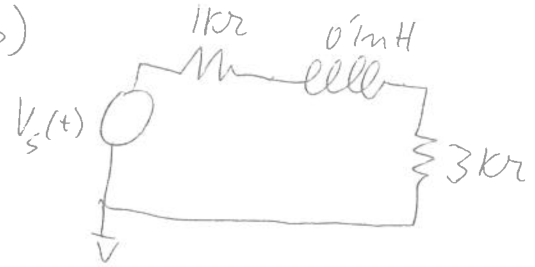
3.- a) DC



$$V_o = V_s \cdot \frac{3k\Omega}{3k\Omega + 1k\Omega}$$

- $V_o(0^-) = V_s(0^-) \cdot 0'75 = 1'5V$
- $V_o(t \to \infty) = V_s(t \to \infty) \cdot 0'75V = 3V$

b)



$$V_s(t) = i \cdot (1k\Omega + 3k\Omega) + L\frac{di}{dt}$$

Ponemos en la forma:

$$\tau \frac{dx}{dt} + x = K$$

$$\frac{L}{4k\Omega}\frac{di}{dt} + i = \frac{V_s(t)}{4k\Omega} = 1mA \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{L}{4k\Omega} = 0'025\,\mu s$$

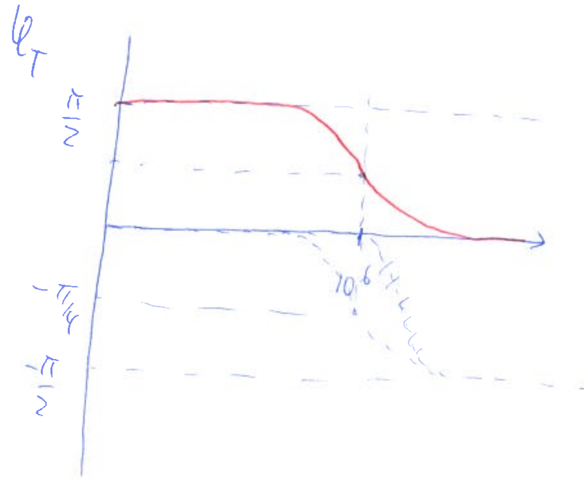
$K = 1mA$

4.-

a.1.

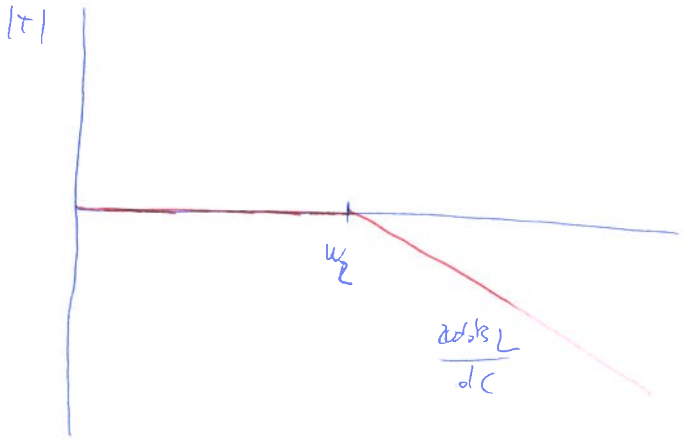
$$V_o(s) = \frac{sL_1 \cdot V_i(s)}{sL_1 + R} = \frac{sL_1/R \; V_i}{s\frac{L_1}{R}+1} = \frac{s/\omega_1}{\frac{s}{\omega_1}+1} V_i \quad \text{con } \omega_1 = R/L_1 = 10^6 \text{ rad/s}$$

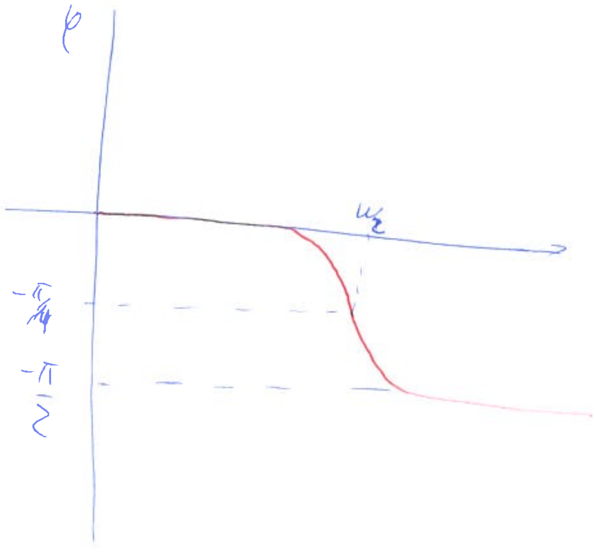
$$AC \rightarrow \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_1}}{\frac{j\omega}{\omega_1}+1}$$



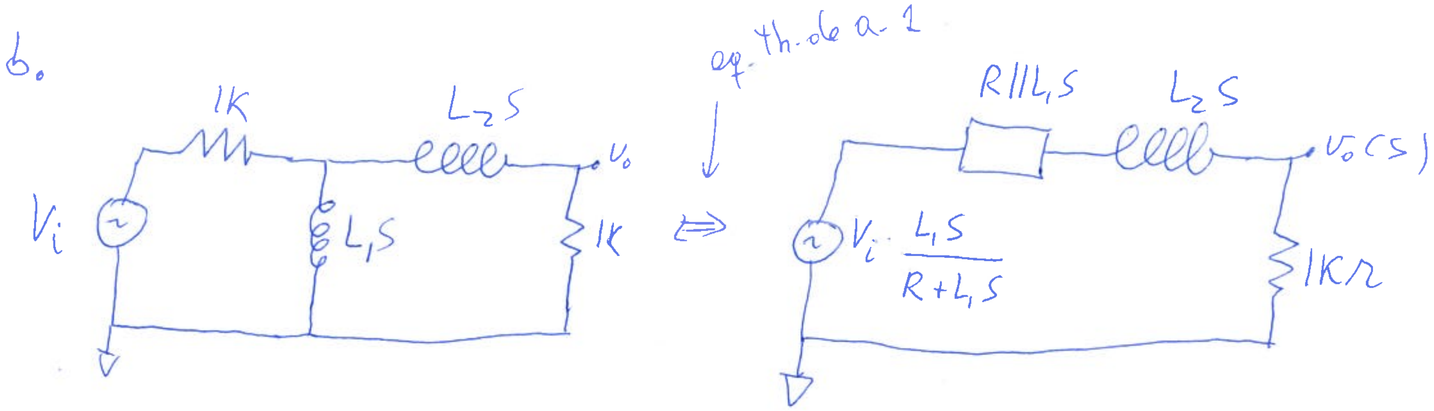
a.2. $$V_o(s) = \frac{R}{R+sL_2} \cdot V_i(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_2}+1} V_i(s) \quad \text{con } \omega_2 = R/L_2 = 10^4 \frac{\text{rad}}{s}$$

$$AC \rightarrow T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_2}+1}$$





b.



$$R\|L_1S = \frac{RL_1S}{R+L_1S} = \frac{L_1\cdot S}{\frac{S}{\omega_1}+1}$$

Divisor de tensión:

$$V_o(s) = \frac{R}{R+L_2S+\frac{RL_1S}{R+L_1S}}\cdot\frac{L_1S}{R+L_1S}\cdot V_i(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{R\cdot L_1\cdot S}{R^2+2L_1S\cdot R+L_2SR+L_1L_2S^2} = \frac{R\cdot L_1\cdot S}{L_1L_2S^2+R(2L_1+L_2)S+R^2} =$$

$$= \frac{R/L_2\cdot S}{S^2+\frac{R(2L_1+L_2)}{L_1L_2}S+\frac{R^2}{L_1L_2}} = \frac{S\cdot\omega_2}{S^2+2\delta\omega_0S+\omega_0^2}$$

Con $\omega_0^2 = \frac{R^2}{L_1L_2} = \omega_1\cdot\omega_2 = 10^{10}\left(\frac{rad}{s}\right)^2 \rightarrow \omega_0 = 10^5\,\frac{rad}{s}$

$$2\delta\omega_0 = \frac{R(2L_1+L_2)}{L_1L_2} = 1k/0'999\,mH \simeq \omega_1 = 10^6\,rad/s$$

(exacto: $1'01\times10^6\,rad/s$)

$$\delta \simeq \frac{w_1}{2w_0} = \frac{10^6}{2\cdot 10^5} = \frac{10}{2} = 5$$

Dos raíces reales diferentes:

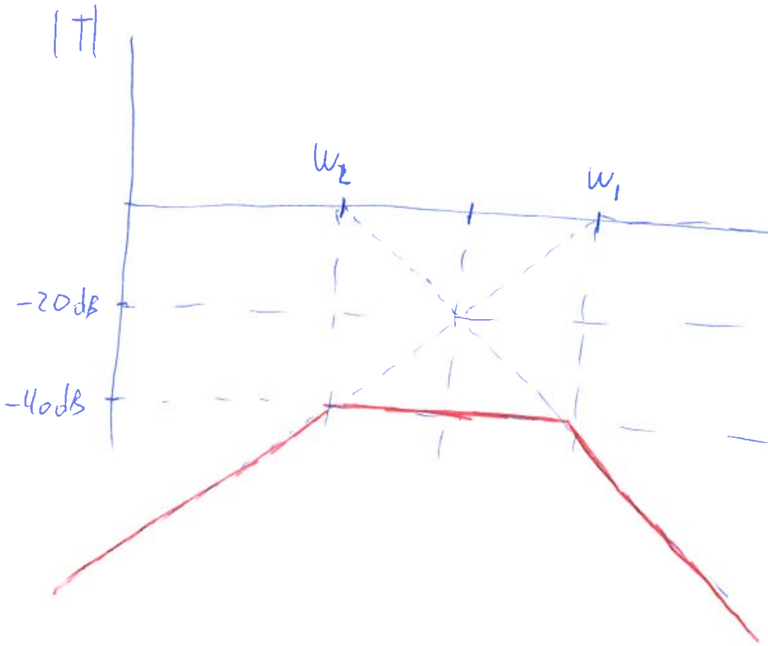
$$s_{1,2} = \frac{-2\delta w_0 \pm \sqrt{4\delta^2 w_0^2 - 4w_0^2}}{2} = -w_0\left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right) =$$

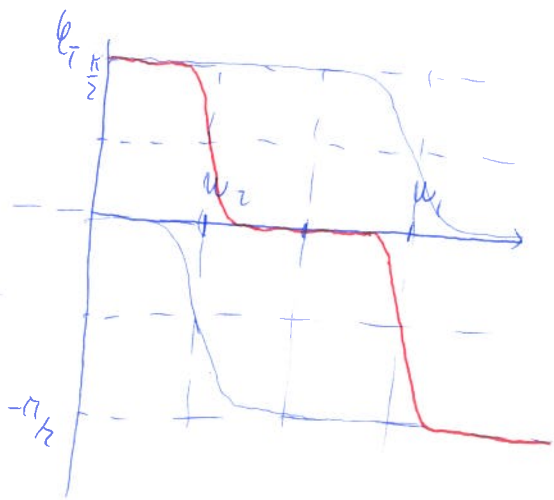
$$\cancel{s_{1,2} \simeq -w_0 \cdot \delta}\quad s_{1,2} = -w_0 \cdot (5 \pm 4'89898) \rightarrow$$

$$\rightarrow s_1 = -9'8989 \cdot 10^5 \text{ rad/s} \simeq -w_1$$

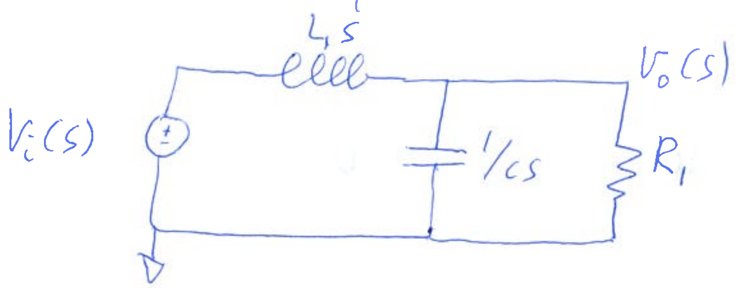
$$s_2 = -0'1010 \cdot 10^5 \text{ rad/s} \simeq -w_2$$

$$T(s) \simeq \frac{w_2 \cdot s}{(s+w_2)(s+w_1)} = \frac{s/w_1}{\left(\frac{s}{w_2}+1\right)\left(\frac{s}{w_1}+1\right)} = T_{a1}(s) \cdot T_{a2}(s)$$





5.- Circuito equivalente:



$$R_1 \parallel \frac{1}{Cs} = \frac{R_1}{1+R_1Cs}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{R_1}{1+R_1Cs}}{\frac{R_1}{1+R_1Cs}+L_1 s} = \frac{R_1}{R_1+L_1s+R_1L_1Cs^2} = \frac{R_1/L_1\cdot\frac{1}{R_1C}}{s^2+\frac{1}{R_1C}s+\frac{1}{L_1C}}$$

$$= \frac{1/L_1C}{s^2+\frac{1}{R_1C}s+\frac{1}{L_1C}} \equiv \frac{\omega_o^2}{s^2+2\delta\omega_o s+\omega_o^2}$$

Con $\omega_o^2 = \frac{1}{L_1C} = 10^6\left(\frac{rad}{s}\right)^2 \to \omega_o = 10^3\ rad/s$

$$2\delta\omega_o = \frac{1}{R_1C} = 100 \Rightarrow \delta = \frac{100}{10^3}\cdot\frac{1}{2} = 0'05$$

RAÍCES COMPLEJO CONJUGADAS:

$$s_{1,2} = \frac{-2\delta\omega_o \pm\sqrt{4\delta^2\omega_o^2-4\omega_o^2}}{2} = -\delta\omega_o \pm\omega_o\sqrt{\delta^2-1} =$$

$$= -\omega_o\delta \pm j\,\omega_o\sqrt{1-\delta^2} \equiv -\sigma \pm \omega j\ \frac{rad}{s}$$

Con $\sigma = \omega_o\delta = 50$

$\omega = \omega_o\sqrt{1-\delta^2} = \omega_o\cdot 0'998 = 998$

$$s^2+2\delta\omega_o s+\omega_o^2 = (s+\sigma-\underbrace{b}_{w}j)(s+\sigma+\underbrace{b}_{w}j) = (s+\sigma)^2+\omega^2$$

Por tanto:

$$\underline{\underline{T(s)}} = \frac{w_0^2}{s^2+2\delta w_0 s+w_0^2} = \underline{\underline{\frac{w_0^2}{(s+\sigma)^2+w^2}}} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \sigma &= 50 \ \text{rad/s} \\ w &= 998 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

• Si $v_i(t) \Rightarrow v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[T(s)\right] \overset{(*)}{=} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{w_0}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \frac{w_0 \cdot \sqrt{(1-\delta^2)}}{(s+\sigma)^2+w_0^2(1-\delta^2)}\right]$

Sabemos que $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{w}{(s+\sigma)^2+w^2}\right] = e^{-\sigma t} \cdot \text{sen}(wt)$

Por tanto:

$$v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{w_0}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot \frac{w}{(s+\sigma)^2+w^2}\right] = \frac{w_0}{\sqrt{1-\delta^2}} \cdot e^{-\sigma t} \cdot \text{sen}(wt) \cdot \frac{V}{\text{rad/s}}$$

(*) Más fácil:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{w^2}{(\sqrt{1-\delta^2})^2} \cdot \frac{1}{(s+\sigma)^2+w^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{w}{(1-\delta^2)} \frac{w}{(s+\sigma)^2+w^2}\right] =$$

$$\rightarrow \boxed{v_o(t) = \frac{w}{1-\delta^2} \cdot e^{-\sigma t} \cdot \text{sen}(wt) \ \frac{V}{\text{rad/s}}}$$

• $v_i(t) = \underbrace{5V\cos(\omega_1 t)}_{v_{i1}} + \underbrace{10V\cos(\omega_2 t)}_{v_{i2}}$ con $\omega_1 = 10^3\ \text{rad/s}$
$\omega_2 = 10^5\ \text{rad/s}$

Aplicamos superposición y trabajamos, para cada frec, con fasores: $\frac{\tilde V_o}{\tilde V_i} = T(\omega) = T(s=j\omega)$

$$\tilde V_i \rightarrow \tilde V_o = T(\omega)\cdot\tilde V_i = \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2\delta\omega_0(j\omega) + \omega_0^2}\tilde V_i =$$

$$\tilde V_o = \tilde V_i \cdot \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{2\delta\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\delta^2\omega^2}{\omega_0^2}\right]^{1/2}} \angle -\text{arctg}\left(\frac{2\delta\omega/\omega_0}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right)$$

• $\underline{v_{o1}(t)}$ $(\omega_1 = 10^3\ \text{rad/s})$

$$\tilde V_{o1} = \tilde V_{i1}\cdot\frac{1}{2\delta}e^{-j\pi/2} = \frac{5V}{0'1}e^{-j\pi/2}$$

$$v_{o1}(t) = \text{Re}\left[\tilde V_{o1}\cdot e^{j\omega_1 t}\right] = 50V\cos(\omega_1 t - \pi/2)$$

• $v_{o2}(t)$ $(\omega_2 = 10^5\ \text{rad/s}) \gg \omega_0$

$$\tilde V_{o2} = \tilde V_{o2}\cdot\frac{1}{99'50}\cdot e^{-j3'13} \simeq \tilde V_{o2}\cdot\frac{1}{99'50}e^{-j\pi}$$

$$v_{o2}(t) = 100mV\cos(\omega_2 t - \pi)$$

—o—

$$\boxed{v_o(t) = 50V\cos(\omega_1 t - \pi/2) + 100mV\cos(\omega_2 t - \pi)}$$