Geometría II. Curso 2012-2013.
Grado en Matemáticas
Convocatoria extraordinaria de septiembre

1. a) **(1,5 puntos)** Definid el concepto de endomorfismo autoadjunto de un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$. A partir de esta definición y de la de vector propio, demostrad que si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbf{V}$ son dos vectores propios de un endomorfismo autoadjunto f, correspondientes a valores propios distintos, entonces $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son ortogonales.

   b) Responded razonadamente si son ciertas o no las dos afirmaciones siguientes:

      (i) **(1 punto)** En un espacio vectorial métrico cualquiera $(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ dos vectores ortogonales distintos y no nulos son siempre linealmente independientes.

      (ii) **(1 punto)** En el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ con su métrica estándar consideramos el giro g_θ de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$ en el sentido inducido por la base usual y la simetría ortogonal h con respecto a la recta de ecuación $y = 0$. Entonces, $f = g_\theta \circ h$ es la simetría ortogonal con respecto a la recta de ecuación $(\cos\theta - 1)\, x + (\operatorname{sen}\theta)\, y = 0$.

2. **(2 puntos)** Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial tridimensional y $\mathcal{B} = (\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3)$ una base de $\mathbf{V}$. Consideremos $f \in End\,\mathbf{V}$ del que se sabe lo siguiente:

   (i) $f(\overline{b}_1) = 3\overline{b}_1 + 2\overline{b}_2 + 2\overline{b}_3, \quad f(\overline{b}_2) = 2\overline{b}_1 + 2\overline{b}_2$.

   (ii) $M(f, \mathcal{B})$ es simétrica.

   (iii) El vector $\overline{u} = 2\overline{b}_1 - 2\overline{b}_2 - \overline{b}_3$ está en el núcleo de f.

   Calculad $M(f, \mathcal{B})$ y estudiad si f es diagonalizable. En caso afirmativo, obtened una base $\mathcal{C}$ de $\mathbf{V}$ tal que $M(f, \mathcal{C})$ sea diagonal.

3. **(1,5 puntos)** Sea $F(x, y) = xy$ la forma cuadrática asociada a una métrica $\mathbf{g}$ de $\mathbb{R}^2$. Encontrad una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ sea diagonal. Deducid de qué tipo es la métrica $\mathbf{g}$.

4. En el espacio vectorial $\mathbf{S}_2$ de las matrices simétricas de orden 2 consideramos la forma bilineal $\mathbf{g}$ definida como:
$$\mathbf{g}(A, C) = traza(A\,C),$$
   y el endomorfismo $f : \mathbf{S}_2 \to \mathbf{S}_2$ siguiente:
$$f\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} & -\sqrt{2}\,c \end{pmatrix}.$$

   a) **(1,5 puntos)** Demostrad que $\mathbf{g}$ es una métrica euclídea sobre $\mathbf{S}_2$. Calculad una base ortonormal de $(\mathbf{S}_2, \mathbf{g})$.

   b) **(1,5 puntos)** Probad que f es una isometría de $(\mathbf{S}_2, \mathbf{g})$. Estudiad los subespacios propios de f y deducid que se trata de la composición de una reflexión y de un giro.