TOPOLOGÍA I

Prueba Tema 1

21 de noviembre de 2013

1. En $\mathbb{R}$ se considera la familia de intervalos

$$\mathcal{B}' = \{]m,n[\ :\ m < n \in \mathbb{Z}\}.$$

   (a) Demostrar que existe una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}'$ es una familia de abiertos y cerrados en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

   (b) Probar que $\mathcal{B}'$ es base de una topología $\mathcal{T}'$ sobre $\mathbb{R}$.

   (c) Comparar $\mathcal{T}$ con $\mathcal{T}'$ y deducir que $\mathcal{B}'$ no es base de $\mathcal{T}$.

   (d) Calcular interior y adherencia de $]1,3[$ y $\mathbb{Z}$ en ambas topologías.

2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$. Demostrar:

   (a) A es abierto si y solo si $A \cap Fr(A) = \emptyset$.

   (b) A es cerrado si y solo si $Fr(A) \subset A$.

3. Se considera $\mathbb{N}$ con la topología $\mathcal{T}$, tal que $O_n = \{1, \ldots, n\}$ es un entorno básico de $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Probar que $O_n \in \mathcal{T}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Hallar el interior y la adherencia de $\{2, 4\}$ en $A = \{2, 3, 4\}$ con $\mathcal{T}_A$.

Puntuación: 1^o) 5 puntos, 2^o) y 3^o) 2'5 puntos.
Tiempo: 2 horas.

TOPOLOGÍA I

Prueba Tema 2

9 de enero de 2014

1. Sea $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ la esfera unidad.
   Estudiar para que valores de $a \in [-1, +1]$ son homeomorfos
   $$\mathbb{S}_a^+ = \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{R}^2 \times [a, +\infty[\qquad y \qquad \mathbb{S}_a^- = \mathbb{S}^2 \cap \mathbb{R}^2 \times]-\infty, a],$$
   con las topologías usuales inducidas.
   Encontrar, si es posible, dos homeomorfismos distintos.

2. Sea $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ el espacio topológico producto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$.
   (a) Estudiar si la aplicación $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$, dada por
   $$f(x_1, x_2) = (x_2, x_1), \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$
   es continua, abierta o cerrada.
   (b) Lo mismo para $p_1 \circ f$, con $p_1 : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ proyección.

3. Se considera el disco unidad cerrado $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ con la relación de equivalencia
   $$xRy \Leftrightarrow x = y \text{ ó } x, y \in \mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$
   (a) Estudiar si la proyección $\pi : (D, \mathcal{T}_{uD}) \longrightarrow (D_{/R}, \mathcal{T}_{uD/R})$ es continua, abierta o cerrada.
   (b) Probar que $(D_{/R}, \mathcal{T}_{uD/R})$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^2, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^2})$.

   (Se puede usar que toda sucesión en D tiene una parcial convergente).

Puntuación: 1º) 2'5 puntos, 2º) 3'5 puntos y 3º) 4 puntos.
Tiempo: 2 horas.

TOPOLOGÍA I

12 de febrero de 2014

1. En $\mathbb{R}$ se define la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{\{q\} \;/\; q \in \mathbb{Q}\} \cup \{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\;/\; x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q},\ \varepsilon > 0\}.$$

   (a) Demostrar que $\mathcal{B}$ es base de una topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{R}$.

   (b) Comparar $\mathcal{T}$ con la topología usual $\mathcal{T}_u$.

   (c) Calcular interior, adherencia y frontera de los subconjuntos $A = [0, \sqrt{2}]$ y $B = \{\sqrt{n} \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

2. (a) Determinar la menor topología $\mathcal{T}$ sobre $\mathbb{N}$, tal que $O_n = \{1, ..., n\} \in \mathcal{T}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y la aplicación $f : (\mathbb{N}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{T})$, dada por

$$f(2n) = 2n-1 \qquad y \qquad f(2n-1) = 2n,$$

   es cerrada.

   (b) Caracterizar los homeomorfismos de $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ en $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ y encontrar un homeomorfismo del produto $(\mathbb{N}^2, \mathcal{T}(\mathcal{T} \times \mathcal{T}))$ que no sea producto de ellos.

3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff. Probar:

   (a) Si $f : ([0,1], \mathcal{T}_{u[0,1]}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ es una aplicación continua, con

$$f(0) \in A \subset X \qquad y \qquad f(1) \in X - A,$$

   entonces existe $t \in [0,1]$ tal que $f(t) \in Fr(A)$.

   (b) No existe una topología $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}$ sobre X con $(X, \mathcal{T}')$ compacto y $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

4. En $X = \mathbb{R} \times \{-1, +1\}$ se considera la relación de equivalencia:

$$(x_1, x_2) R (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \ \ o \ \ x_1, y_1 \leq -2 \ \ o \ \ x_1, y_1 \geq +2.$$

   (a) Estudiar si la proyección $p : (X, \mathcal{T}_{uX}) \longrightarrow (X_{/R}, \mathcal{T}_{uX/R})$ es abierta o cerrada.

   (b) Probar que $(X_{/R}, \mathcal{T}_{uX/R})$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1})$.

Puntuación: todos igual.
Tiempo: 3 horas.