Cálculo

1ºA Grado en Ingeniería Informática

Examen Parcial (I)
Curso 2011/2012

1. **(2 puntos)** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$x_1 = 3/4$$
$$x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n} \ , \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

   a) Comprobar que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.

   b) Calcular, si existe, el límite de $\{x_n\}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = 1 - \sqrt{1-3/4} = 1 - 1/2 = 1/2 < x_1 = 1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona decreciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 > x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n > x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} > x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n > x_{n+1} \ \Rightarrow \ 1 - x_n < 1 - x_{n+1} \ \Rightarrow \ \sqrt{1-x_n} < \sqrt{1-x_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \ -\sqrt{1+x_n} > -\sqrt{1+x_{n+1}} - 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1-x_n} > 1 - \sqrt{1-x_{n+1}} \ \Rightarrow \ x_{n+1} > x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona decreciente.

b) Al ser decreciente, ya sabemos que la sucesión está acotada superiormente por $x_1 = 3/4$. Veamos que está acotada inferiormente por cero. Esto es, que $x_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 3/4 > 0$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n > 0$.
- Comprobamos que $x_{n+1} > 0$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n > 0 \ \Rightarrow \ 1 - x_n < 1 \ \Rightarrow \ \sqrt{1-x_n} < 1$$

$$\Rightarrow \ 1 - \sqrt{1-x_n} - 1 > 1 - 1 \ \Rightarrow \ x_{n+1} > 0$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

c) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ y nos queda que $x = 1 - \sqrt{1-x}$. Resolvemos la ecuación:

$$1-x = \sqrt{1-x} \Rightarrow (1-x)^2 = 1-x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 0$ y $x = 1$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser menor o igual que $3/4$. El motivo es que $3/4 \geq x_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 0$.

2. **(3 puntos)** Calcular el límite de las sucesiones siguientes:

a) $\left\{\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{2n(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}\right\}$

Solución:

a) Aplicamos el criterio de Stolz (tenemos una indeterminación de "$\frac{\infty}{\infty}$" y además la sucesión del denominador es creciente). Si llamamos x_n al numerador y y_n al denominador:

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^3-n^3} = \frac{4n^2+4n+1}{n^3+3n^2+3n+1-n^3} =$$
$$\frac{4n^2+4n+1}{3n^2+3n+1}$$

Por tanto $\lim \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim \dfrac{4n^2+4n+1}{3n^2+3n+1} = \dfrac{4}{3}$. Y, aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim\left\{\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}\right\} = \frac{4}{3}$$

b) Introducimos dentro de la raíz n-sima el factor $\frac{1}{n}$, con lo que la sucesión a estudiar es:

$$\left\{\sqrt[n]{\frac{2n(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{n^n}}\right\}$$

Aplicamos el criterio de la raíz; esto es, si llamamos x_n a la sucesión radicando, tenemos que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+2)(2n+3)(2n+4)\cdots(3n)(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2n(2n+1)(2n+2)\cdots(3n)} =$$

$$\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{2n(2n+1)(n+1)} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{2n(2n+1)(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

La primera fracción es una sucesión de tipo racional que converge a $\frac{3^3}{2^2}$ y la segunda fracción es de tipo exponencial: $\frac{n}{n+1}^{n}$. Esta última presenta una indeterminación de "1^∞", por lo que, aplicando el criterio del número e, nos queda que

$$n\left(\frac{n}{n+1}-1\right) = \frac{-n}{n} = -1 \Rightarrow \text{lím}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Como consecuencia de todo lo anterior:

$$\text{lím}\left\{\sqrt[n]{\frac{2n(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{n^n}}\right\} = \frac{27}{4e}$$

3. **(4 puntos)** Estudiar el carácter de las siguientes series.

   a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{-n^3}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

   c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{n!}$.

   d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3(n+3)(n+4)}$.

   Sumar, si es posible, una de las dos últimas series.

   Solución:

   a) Aplicamos el criterio de la raíz (ya que el término general presenta una potencia n-sima). Por tanto, estudiamos el límite de $\sqrt[n]{a_n}$, siendo $a_n = \left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{-n^3}$.

   $$\sqrt[n]{\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{-n^3}} = \left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{-n^3/n} = \left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{-n^2}$$

   Esta sucesión presenta una indeterminación de "1^∞", por lo que aplicamos el criterio del número e:

   $$(-n^2)\left[1+\frac{4}{n^2}-1\right] = (-n^2)\left(\frac{4}{n^2}\right) = -4 \to -4 \Rightarrow \sqrt[n]{\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{-n^3}} \to e^{-4} = \frac{1}{e^4} < 1$$

   Por tanto, el criterio nos asegura que la serie dada es convergente.

b) Arreglamos, en primer lugar, el término general de la serie, multiplicando numerador y denominador por el conjugado del numerador:

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}+n}$$

Así, la serie que nos queda, vamos a compararla con $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ (que es divergente, por ser la serie armónica). Aplicamos, entonces, el criterio de comparación por paso al límite:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}+n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}+n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}}+1} \to 1/2 \neq 0$$

Por tanto, el criterio es concluyente, y la serie dada diverge, igual que la armónica.

c) Aplicamos el criterio del cociente, ya que aparecen factoriales en la expresión del término general de la serie. Así, si llamamos $a_n = \frac{n+1}{n!}$ tenemos que estudiar el límite del cociente siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{(n+1)!}\frac{n!}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)} \to 0 < 1$$

Por tanto, la serie dada es convergente. Vamos a sumarla:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + e = e + e = 2e$$

d) Comparamos con la serie armónica $\sum \frac{1}{n^2}$ que es convergente.

$$\frac{\frac{1}{3(n+3)(n+4)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{3(n+3)(n+4)} \to \frac{1}{3} \neq 0$$

Por tanto, la serie es convergente. Calculamos su suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3(n+3)(n+4)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

Descomponemos el término general:

$$\frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}$$

y así, las sumas parciales de la serie se pueden calcular de la forma siguiente:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{n+4} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \lim s_n = \lim \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+4}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3(n+3)(n+4)} = \frac{1}{9}$$

Granada, 10 de diciembre de 2010