septiembre. 2013-2014

1. matriz con coeficientes reales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Sea g la métrica de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es A. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base usual es A.

(a) Calcular la signatura y clasificar la métrica g según los valores de a.

(b) Para $a = 1$ obtener una base conjugada (= ortogonal) para la métrica g.

(c) ¿Para qué valores de a es f autoadjunto en $(\mathbb{R}^3, g_u)$? Para $a = 2$ calcular, si es posible, una base ortogonal de $(\mathbb{R}^3, g_u)$ formada por vectores propios de f.

(d) ¿Existen valores de a para los que f es una isometría en $(\mathbb{R}^3, g_u)$? Para dichos valores, describir las isometrías obtenidas.

2. (3p) Se considera el espacio vectorial euclídeo $(S_2(\mathbb{R}), g)$. donde $S_2(\mathbb{R})$ es el espacio de las matrices simétricas de orden 2 con coeficientes reales y $g(M, N) = traza(M\,N)$.

(a) Calcular la proyección ortogonal de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio dado por $U = \{M \in S_2(\mathbb{R}) \,/\, traza(M) = 0\}$.

(b) Determinar el giro de ángulo $\pi/4$ y eje $L(I_2)$.

3. (3p) Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:

(a) Sea A una matriz antisimétrica de orden 3. ¿Es siempre $\lambda = 0$ un valor propio de A?

(b) ¿Es cierto que si dos matrices cuadradas son congruentes, entonces sus determinantes son iguales?

(c) Sea g una métrica sobre V y $u, v \in V$ vectores tales que $g(u, v) = 0$, $g(u, u) \neq 0$ y $g(v, v) \neq 0$. Probar que u y v son linealmente independientes.

(d) ¿Es cierto que toda matriz ortogonal de orden 3 con determinante positivo es diagonalizable?