

Cálculo
1ºG Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial
Curso 2016/2017

1. (1 punto) Calcula los números reales que satisfacen la siguiente inecuación:

$$|x+2| < |x-1|$$

Solución: Elevamos al cuadrado los dos miembros de la inecuación:

$$\begin{aligned} |x+2| < |x-1| &\Leftrightarrow |x+2|^2 < |x-1|^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 < (x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 < x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 6x < -3 \Leftrightarrow x < -1/2 \end{aligned}$$

El intervalo solución es $] -\infty, -1/2[$.

2. (4 puntos) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + \operatorname{sen}(x)}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{x}},$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\log(2x^2) - \log(2x^2 + 4)).$

Solución:

- a) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que, evidentemente, tiende a 1, cuando la variable tiende a cero. Mientras que la expresión que aparece en el exponente tiende a ∞ . En consecuencia, el límite pedido presenta una indeterminación del tipo “ 1^∞ ”.

Aplicamos ahora la regla del número e . Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + \operatorname{sen}(x)}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{e^x + \operatorname{sen}(x)}{1+x^2} - 1 \right] = L.$$

Para resolver este límite, vamos a descomponer la expresión de la siguiente forma:

$$\frac{1}{x} \left[\frac{e^x + \operatorname{sen}(x)}{1+x^2} - 1 \right] = \frac{1}{1+x^2} \left[\frac{e^x + \operatorname{sen}(x) - 1 - x^2}{x} \right]$$

La primera fracción que aparece, sabemos que tienden a 1 cuando x tiende a cero; por tanto, nos ocupamos de la última fracción que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Aplicamos la regla de L’Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \operatorname{sen}(x) - 1 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos(x) - 2x}{1} = 2$$

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + \operatorname{sen}(x)}{1 + x^2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

b) Observamos una indeterminación del tipo “ $\infty - \infty$ ”, por lo que arreglamos la expresión haciendo uso de las propiedades del logaritmo:

$$x^2 (\log(2x^2) - \log(2x^2 + 4)) = x^2 \log \left(\frac{2x^2}{2x^2 + 4} \right) = \log \left[\left(\frac{2x^2}{2x^2 + 4} \right)^{x^2} \right]$$

De esta forma, dentro de la función logaritmo se presenta una indeterminación del tipo “ 1^∞ ”. Nos ocupamos entonces de calcular:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{2x^2 + 4} \right)^{x^2} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{2x^2}{2x^2 + 4} - 1 \right] = L$$

usando la regla del número e :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{2x^2}{2x^2 + 4} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{2x^2 - 2x^2 - 4}{2x^2 + 4} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2}{2x^2 + 4} = -2$$

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\log(2x^2) - \log(2x^2 + 4)) = \log(e^{-2}) = -2.$$

3. (1 punto) Determina el número de soluciones reales de la ecuación:

$$x = 4 \log(x).$$

Solución: Se considera la función $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x - 4 \log(x)$. Se trata, entonces, de determinar el número de ceros de f , que es una función continua y derivable en todo el dominio al ser suma de funciones continuas y derivables en todo \mathbb{R}^+ .

Calculamos su derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x} = \frac{x - 4}{x}.$$

La función f tiene un único punto crítico en $x = 4$. Estudiamos los cambios de signo de la derivada en torno a dicho punto.

$$0 < x < 4 \Rightarrow f'(x) < 0 \quad (f \text{ es estrictamente decreciente}),$$

$$x > 4 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad (f \text{ es estrictamente decreciente})$$

Por tanto, en el punto 4 la función alcanza un mínimo relativo que, al ser el único punto crítico de f , se convierte en el mínimo absoluto y vale $f(4) = 4 - 4\log(4) = 4(1 - \log(4)) < 0$. Estudiamos su comportamiento en 0 y en más infinito:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{utilizando la escala de infinitos})$$

Por tanto, por el teorema de Bolzano, f tiene dos ceros, uno antes de 4 y otro, después de 4.

4. (2 puntos) Se considera la función $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \frac{e^{-1/x^2}}{x}$. Calcula el conjunto imagen de f .

Solución: Se trata de una función continua y derivable en su dominio por ser cociente de funciones continuas y derivables (el numerador es composición de funciones continuas y derivables, y el denominador es un polinomio, que no se anula en el dominio). Además, f es impar ($f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$), por lo que para calcular el conjunto imagen, sólo calculamos la imagen en los positivos, ya que la imagen de los negativos será el intervalo opuesto.

$$f(\mathbb{R}^*) = f(\mathbb{R}^-) \cup f(\mathbb{R}^+) = -f([0, +\infty]) \cup f([0, +\infty]) .$$

Derivamos la función:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x^3} x e^{-1/x^2} - e^{-1/x^2}}{x^2} = \frac{\frac{2}{x^2} e^{-1/x^2} - e^{-1/x^2}}{x^2} = \frac{e^{-1/x^2} (2 - x^2)}{x^4}$$

Factorizamos el numerador:

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x^2} (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)}{x^4}$$

Obtenemos sólo un punto crítico en \mathbb{R}^+ ($x = \sqrt{2}$). Analizando el cambio de signo de la derivada en torno a dicho punto crítico obtenemos:

$$0 < x < \sqrt{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente}$$

$$\sqrt{2} < x \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente}$$

Deducimos que f alcanza en $x = \sqrt{2}$ un punto de máximo relativo y vale $f(\sqrt{2}) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$.

Además:

$$(*) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} y e^{-y^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{2y e^{y^2}} = 0, \text{ y}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

De todo lo anterior:

$$f([0, +\infty]) = f([0, \sqrt{2}]) \cup f([\sqrt{2}, +\infty]) = \left[0, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right] \text{ y, entonces,}$$

$$f(\mathbb{R}^*) = -f([0, +\infty]) \cup f([0, +\infty]) = \left[-\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}, 0\right] \cup \left[0, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right].$$

(*) En el cálculo del límite en el punto cero, hemos hecho un cambio de variable ($y = 1/x$) y hemos aplicado la regla de L'Hôpital.

5. (2 puntos)

- Calcula el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \log(1+x)$ en el punto $a = 0$ y de orden 2.
- Acota el error que se comete cuando aproximamos $\log(3/2)$ utilizando el polinomio de Taylor de f centrado en el cero y de orden 1.

Solución:

- Se trata de una función derivable en cero dos veces (y n veces, con $n \in \mathbb{N}$). Calculamos los coeficientes del polinomio de Taylor, $P_2(x)$ que nos piden:

$$f(x) = \log(1+x) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

Por tanto:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = x - \frac{x^2}{2}.$$

b) Para aproximar el valor que nos piden utilizando el polinomio de Taylor de f centrado en cero y de orden 1, tendremos que considerar $x = 1/2$, para que así $f(1/2) = \log(3/2)$. De esta forma, el error que se comete, y según el teorema de Taylor, será:

$$\text{error} = |R_1(1/2)| = \left| \frac{f''(c)(1/2)^2}{2} \right| = \left| \frac{-1}{(1+c)^2} \frac{1}{2^3} \right| = \frac{1}{8} \frac{1}{(1+c)^2} < \frac{1}{8} = 0,125 ,$$

donde hemos utilizado que $0 < c < 1/2$ y, por tanto, $\frac{1}{(1+c)^2} < 1$.

Granada, 30 de noviembre de 2016