Cálculo I

28 de enero de 2014

1. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que A está acotado, con $\inf A = -2$ y $\sup A = 1$ y que B está minorado con $\inf B = 0$. Probar que el conjunto

$$C = \left\{ \frac{|a|}{\sqrt{1+b^2}} \; : \; a \in A, \; b \in B \right\}$$

está mayorado y calcular su supremo.

2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión verificando que

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2}{\sqrt[4]{1+x_n^4}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiar la convergencia de las sucesiones $\{x_n\}$ y $\left\{ \sqrt[n]{n x_n} \right\}$.

3. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}$

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \;\; \forall x \in \mathbb{R}^- , \qquad f(x) = \frac{1-x}{1+x} \;\; \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Estudiar la continuidad de f y calcular $f(\mathbb{R})$ y $f([-1,1])$.