Prueba de clase 19 de Mayo de 2015

Alumno:______________________________________ **D.N.I.:**________________

1. Sea $\alpha = \forall x(P(x,a) \to \exists y Q(f(y),x)) \vee \exists x \neg Q(x,x)$.

   a) Consideramos las siguientes estructuras:

   - Estructura 1:
     - Dominio: $\mathbb{Z}_4$.
     - Asignación de constantes: $a = 0$.
     - Asignación de funciones: $f(x) = 2x$.
     - Asignación de predicados: $P(x,y) \equiv x^2 = y$; $Q(x,y) \equiv x = y$.
   - Estructura 2:
     - Dominio: $\mathbb{N}$.
     - Asignación de constantes: $a = 2$.
     - Asignación de funciones: $f(x) = x^2$.
     - Asignación de predicados: $P(x,y) \equiv y|x$ (es decir, x es múltiplo de y); $Q(x,y) \equiv 2y = x^2$.

   Calcula el valor de verdad de α en ambas estructuras.

   b) Estudia el carácter de α (universalmente válida, satisfacible y refutable, contradicción).

Solución 1. a) *En la estructura 1, observamos que $\exists x \neg Q(x,x)$ es falso, puesto que $Q(x,x)$ significa $x = x$, lo que siempre ocurre. Hay que interpretar por tanto el otro miembro de la fórmula. Como el dominio tiene solo 4 elementos podemos recorrer todas las posibles asignaciones de x para determinar si el $\forall x$ es cierto:*

x	$x^2 = 0$	$\exists y(2y = x)$	$(x^2 = 0) \to \exists y(2x = y)$
0	V	V $(y = 0)$	V
1	F		V
2	V	V $(y = 0)$	V
3	F		V

como es verdadero para todos los valores de x, entonces la fórmula es verdadera. En la estructura 2 es más fácil, porque $\exists x \neg Q(x,x)$ es verdadera, ya que para $x = 1$, $2x \neq x^2$, y por tanto ya hemos encontrado x tal que $I(\neg Q(x,x)) = 1$. Así que la fórmula también es verdadera en esta estructura.

b) *Es satisfacible como demuestran las dos interpretaciones del apartado anterior. También es refutable, para ello tomamos la interpretación:*

- *Dominio: $\mathbb{Z}_2$.*
- *Asignación de constantes: $a = 0$.*
- *Asignación de funciones: $f(x) = 1$ (una función cte).*
- *Asignación de predicados: $P = \{(1,0)\}$; $Q = \{(1,0),(0,1)\}$.*

$\exists x \neg Q(x,x)$ es falsa puesto que $(0,0),(1,1) \notin Q$, y tomando $x = 1$ se tiene $I(P(1,0)) = 1$ pero $Q(f(y),1) = Q(1,1)$ es falso con lo que la implicación es falsa para $x = 1$.

2. Consideramos el siguiente lenguaje de primer orden:

   - Símbolos de constante: $\mathcal{C} = \{a,\ b\}$.
   - Símbolos de función: $\mathcal{F} = \{s^1,\ m^2\}$.
   - Símbolos de predicado: $\mathcal{R} = \{P^1,\ Pr^1,\ M^2,\ E^2\}$.

   Y consideramos la siguiente estructura:

   - Dominio: $\mathbb{N}$.

- Asignación de constantes: $a = 0$; $b = 2$.
- Asignación de funciones: $s(x) = x + 1$; $m(x, y) = x + y$; $p(x, y) = x \cdot y$.
- Asignación de predicados: $P(x) \equiv x$ es par; $Pr(x) \equiv x$ es primo; $M(x, y) \equiv x < y$; $E(x, y) \equiv x = y$.

Expresa en este lenguaje los siguientes enunciados:

a) Todo número es menor que su doble.

b) El único primo y par es el dos.

Solución 2. a*)* $\forall x M(x, p(2, x))$ *o* $\forall x M(x, m(x, x))$

b*)* $\forall x[Pr(x) \wedge P(x) \rightarrow E(x, b)]$

3. Calcula una forma prenexa con el menor número de cuantificadores posible, una forma de Skolem y una forma clausular para la fórmula

$$\forall x[\exists y(P(y) \wedge Q(x, y))] \vee \forall y[\forall z Q(y, f(z)) \rightarrow P(y)]$$

Solución 3. *En primer lugar usamos* $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$*:*

$$\forall x[\exists y(P(y) \wedge Q(x, y))] \vee \forall y[\forall z Q(y, f(z)) \rightarrow P(y)] \equiv$$

$$\equiv \forall x[\exists y(P(y) \wedge Q(x, y))] \vee \forall y[\neg\forall z Q(y, f(z)) \vee P(y)] \equiv$$

$$\equiv \forall x[\exists y(P(y) \wedge Q(x, y))] \vee \forall y[\exists z \neg Q(y, f(z)) \vee P(y)] \equiv$$

como z no es libre en $P(y)$, llevamos el cuantificador $\exists z$ hacia la izquierda

$$\equiv \forall x[\exists y(P(y) \wedge Q(x, y))] \vee \forall y \exists z[\neg Q(y, f(z)) \vee P(y)] \equiv$$

ahora, como x no es libre en la subfórmula de la derecha e y no es libre en la de la izquierda tenemos

$$\equiv \forall x \forall y[\exists y(P(y) \wedge Q(x, y))] \vee \exists z[\neg Q(y, f(z)) \vee P(y)] \equiv$$

ahora, puesto que tenemos dos $\exists$ ligados por una disyunción podremos aplicar $\exists x\alpha \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$ si ambas variables son idénticas, para lo que cambiamos y por z en la subfórmula de la izquierda

$$\equiv \forall x \forall y[\exists z(P(z) \wedge Q(x, z))] \vee \exists z[\neg Q(y, f(z)) \vee P(y)] \equiv$$

$$\equiv \forall x \forall y \exists z[(P(z) \wedge Q(x, z)) \vee \neg Q(y, f(z)) \vee P(y)] \equiv$$

lo que nos da una **forma prenexa** *con el menor número de cuantificadores. Ahora eliminamos el cuantificador existencial sustituyendo z por $g(x, y)$ obtenemos una* **forma de Skolem***:*

$$\forall x \forall y[(P(g(x, y)) \wedge Q(x, g(x, y))) \vee \neg Q(y, f(g(x, y))) \vee P(y)]$$

y por último aplicando la distributiva tenemos la **forma clausular***:*

$$\forall x \forall y[(P(g(x, y)) \vee \neg Q(y, f(g(x, y))) \vee P(y)] \wedge \forall x \forall y[Q(x, g(x, y))) \vee \neg Q(y, f(g(x, y))) \vee P(y)]$$

4. Estudia si los siguientes conjuntos de cláusulas son satisfacibles o insatisfacibles:

a)

$$\{Q(g(x), x, a) \vee Q(g(y), x, b),\ \neg Q(g(x), a, x)\}$$

b)

$$\{Q(x, f(b), g(x)),\ \neg Q(y, f(y), g(a))\}$$

Solución 4. a) *En este conjunto hay dos posibles estrategias: primero unificar los dos literales Q de la primera cláusula para obtener un factor lo cual no es posible; o bien calcular dos resolventes sucesivas. En este segundo caso puede hacerse la unificación del primer literal de la primera cláusula con el literal de la segunda cláusula:*

$$\begin{array}{rl} & Q(g(x_1), x_1, a) \vee Q(g(y), x_1, b) \\ & \neg Q(g(x_2), a, x_2) \\ \hline \sigma = (x_1|a; x_2|a); & Q(g(y), a, b) \end{array}$$

y ahora resolvemos de nuevo con la segunda cláusula

$$\begin{array}{rl} & Q(g(y), a, b) \\ & \neg Q(g(x_2), a, x_2) \\ \hline \sigma = (y|b; x_2|b); & \square \end{array}$$

Así que el conjunto es **insatisfacible**

b) *En este caso solo es posible intentar la resolvente de ambas cláusulas unit:*

$$\{Q(x, f(b), g(x)),\ \neg Q(y, f(y), g(a))\}$$

la primera pasada del algoritmo de unificación nos proporciona el conjunto de discordancia $D_1 = \{x, y\}$ así que realizamos la sustitución $(x|y)$ y nos queda

$$\{Q(y, f(b), g(y)),\ \neg Q(y, f(y), g(a))\}$$

el segundo conjunto de discordancia es $D_2 = \{y, b\}$ así que sustituimos $(y|b)$:

$$\{Q(b, f(b), g(b)),\ \neg Q(b, f(b), g(a))\}$$

pero ahora el conjunto de discordancia es $D_3 = \{b, a\}$ que no contiene variables y por tanto no puede realizarse la unificación con lo que no puede obtenerse ninguna resolvente. Así, por saturación, el conjunto es satisfacible.

5. Utiliza el método de resolución para probar si la siguiente consecuencia lógica ocurre.

$$\{\forall x \forall y[R(x) \wedge Q(y) \to \neg S(x, y)],\ \forall y[D(y) \vee S(a, y)],\ \forall x[D(f(x)) \to S(a, y)]\} \vDash R(a) \to \exists x \neg Q(f(x))$$

Solución 5. *El problema de consecuencia lógica dado puede transformarse usando el* **Teorema de la deducción** *en el siguiente problema equivalente*

$$\{\forall x \forall y[R(x) \wedge Q(y) \to \neg S(x, y)],\ \forall y[D(y) \vee S(a, y)],\ \forall x[D(f(x)) \to S(a, y)],\ R(a)\} \vDash \exists x \neg Q(f(x))$$

que a su vez es equivalente a probar que el conjunto de fórmulas

$$\{\forall x \forall y[R(x) \wedge Q(y) \to \neg S(x, y)],\ \forall y[D(y) \vee S(a, y)],\ \forall x[D(f(x)) \to S(a, y)],\ R(a),\ \neg \exists x \neg Q(f(x))\}$$

es insatisfacible. Por último, sigue siendo equivalente a probar la insatisfacibilidad del conjunto de cláusulas a que dan lugar cada una de las fórmulas, así que calculamos dichas cláusulas:

a) $\forall x \forall y[R(x) \wedge Q(y) \to \neg S(x, y)] \equiv \forall x \forall y[\neg(R(x) \wedge Q(y)) \vee \neg S(x, y)]$
   $\forall x \forall y[\neg R(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg S(x, y)]$ *que ya es forma clausular.*

b) $\forall y[D(y) \vee S(a, y)]$ *es una cláusula.*

c) $\forall x[D(f(x)) \to S(a, y)] \equiv \forall x[\neg D(f(x)) \vee S(a, y)]$ *nos da otra cláusula.*

d) $R(a)$ *es cláusula.*

e) $\neg \exists x \neg Q(f(x)) \equiv \forall x Q(f(x))$ *es la última cláusula.*

Tenemos entonces que probar la insatisfacibilidad del conjunto de cláusulas

$$\{(1)\neg R(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg S(x, y),\ (2)D(y) \vee S(a, y),\ (3)\neg D(f(x)) \vee S(a, y),\ (4)R(a),\ (5)Q(f(x))\}$$

Ahora utilizamos el método de resolución. Un ejemplo de deducción de la cláusula vacía es:

R(2,3) *mediante la sustitución $(y|f(x))$ en ambas se obtiene como resolvente* $(6)\, S(a, f(x))$.

R(6,1) *Renombrando variables en la cláusula (1): $\neg R(x_1) \vee \neg Q(y_1) \vee \neg S(x_1, y_1)$, mediante la sustitución $(y_1|f(x); x_1|a)$ se obtiene la resolvente* $(7)\neg R(a) \vee \neg Q(f(x))$.

R(7,4) *nos da* $(8)\neg Q(f(x))$.

R(8,5) *es la cláusula vacía.*