ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS FINITAS/DISCRETAS

Convocatoria Septiembre 2010 — Tipo 1

Ejercicio 1. Dada $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$, entonces A^{13} vale:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 4x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$.

Entonces $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$

(a) Si V es el subespacio generado por los vectores $(1,2,1)$, $(2,1,1)$, $(-1,-1,1)$.

(b) Si V es el subespacio de ecuación $2x + 2y + z = 0$.

(c) Si V es el subespacio generado por los vectores $(1,-2,2)$, $(2,1,3)$.

(d) Si V es el subespacio generado por $(1,1,1)$, $(2,-1,1)$.

Ejercicio 3. En el conjunto $M_2(\mathbb{Z}_2)$ definimos la relación de equivalencia $ARB \iff A^2 = B^2$. Entonces:

(a) La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pertenece a la clase de equivalencia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) El conjunto cociente está formado por un solo elemento.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$.

(d) La clase $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$ tiene cardinal uno.

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $f(1,1) = (5,-2)$ y $f(2,3) = (8,-3)$. Entonces $f(3,5)$ es igual a

(a) $(11,-4)$. (b) $(13,-5)$. (c) $(15,-1)$. (d) $(16,-7)$.

Ejercicio 5. Sean en $\mathbb{R}^3$ los conjuntos $B_1 = \{(1,0,1); (0,1,1); (1,1,1)\}$ y $B_2 = \{(1,-1,0); (2,1,1); (1,1,2)\}$. Entonces:

(a) La matriz del cambio de base de B_2 a B_1 es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) La matriz del cambio de base de B_2 a B_1 es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) No existe matriz del cambio de base de B_2 a B_1.

(d) La matriz del cambio de base de B_2 a B_1 es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$, y sea $U = \{B \in M_2(\mathbb{Z}_5) : A \cdot B = B \cdot A\}$. Entonces:

(a) U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{Z}_5)$ de dimensión 2.

(b) U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{Z}_5)$ de dimensión 1.

(c) U es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{Z}_5)$ de dimensión 3.

(d) U no es subespacio vectorial.

Ejercicio 7. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & + & y & + & 5z & = & 6 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & a^2+1 \end{array} \right.$$

(a) El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a, pero el número de soluciones depende de a.

(b) El sistema es incompatible, independientemente del valor de a.

(c) El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a, y tiene 7 soluciones.

(d) Según el valor de a el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible.

Ejercicio 8. Dados U el subespacio de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por los vectores $(3,1,4)$ y $(4,3,2)$ y V el subespacio de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$, una base de $U+V$ es

(a) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

(b) $\{(1,2,4),(4,3,2)\}$.

(c) $\{(1,1,2)\}$.

(d) $\{(4,2,1),(2,3,0)\}$.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^2$ la aplicación lineal cuya matriz en la base $B = \{(1,2),(1,1)\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces, la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{Z}_3^2$ es:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10. ¿Cuál de las siguientes matrices de $M_3(\mathbb{R})$ no es diagonalizable?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 11. Sea A el conjunto de todas las aplicaciones lineales $f : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^3$ que verifican que $N(f) = Im(f)$. Entonces el cardinal del conjunto A es:

(a) 1.

(b) 7.

(c) 49.

(d) 0.

Ejercicio 12. La permutación $\alpha = (1\,4\,8)(2\,3\,5)$ es igual a

(a) $(3\,5)(4\,8)(2\,5)(1\,4)$.

(b) $(1\,4)(4\,8)(3\,5)(2\,3)$.

(c) $(1\,8)(1\,4)(2\,3)(3\,5)$.

(d) $(2\,5)(2\,3)(1\,4)(1\,8)$.

Ejercicio 13. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Entonces

(a) Existe un número real a para el que el rango de A vale 1.

(b) Existe $a \in \mathbb{R}$ para el que el rango de A vale 2.

(c) El rango de A vale 4 para cualquier valor real del parámetro a.

(d) Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el rango de A vale 3.

Ejercicio 14. Sean $U = L[(1,2,1)]$ y $V \equiv x + 2y + z = 0$ dos subespacios de $\mathbb{Z}_5^3$. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z}_5)$ una matriz para la que U es el subespacio propio de valor propio 3, y V el subespacio propio de valor propio 4. Entonces:

(a) A no es diagonalizable.

(b) A es diagonalizable, y una matriz de paso a una forma diagonal es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) A es diagonalizable, y una matriz de paso a una forma diagonal es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(d) A es diagonalizable, y una matriz de paso a una forma diagonal es $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 15. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sea $f : \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$ la aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas de $\mathbb{Z}_5^4$ y $\mathbb{Z}_5^3$ es la matriz A. Entonces:

(a) El núcleo de f es el subespacio de ecuación $x + y + 2z + t = 0$.

(b) f es sobreyectiva.

(c) La imagen de f es el subespacio generado por $(2, 3, 2)$ y $(3, 1, 2)$.

(d) f es inyectiva.

Ejercicio 16. Sean A, B, C subconjuntos no vacíos de una conjunto X, tales que $A \subsetneq B$ y $B \cap C = \emptyset$. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es falsa?

(a) $\overline{A} \cup \overline{C} = X$ (b) $C \subseteq \overline{B}$ (c) $B \subseteq \overline{A}$ (d) $\overline{A} \cap \overline{C} \neq \emptyset$

Ejercicio 17. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite por filas es:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 18. En S_{10} no existen permutaciones de orden:

(a) 20.

(b) 30.

(c) 25.

(d) 15.

Ejercicio 19. Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ verifica que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces A^{-1} es igual a:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 20. Sea la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x - 2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Entonces

(a) f es inyectiva pero no es sobreyectiva.

(b) f es sobreyectiva pero no es inyectiva.

(c) f no es inyectiva ni sobreyectiva.

(d) f es biyectiva.