ALUMNO:__________________________________ DNI:______________ GRUPO: ____

Lógica y Métodos Discretos

Examen de Teoría

(29/06/2011)

Ejercicio 1. ***(1 punto)***
Trazamos n rectas en el plano de forma que:

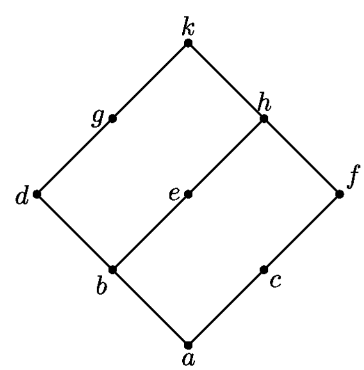
- *ningún par de rectas distintas son paralelas*
- *por ningún punto del plano pasan más de dos rectas*

y llamamos R_n al número de regiones en que queda dividido el plano.

1. *Obtén una relación entre R_n y R_{n-1}.*
2. *Calcula una fórmula general que exprese el valor de R_n.*
3. *Da el valor de R_{10}.*

Ejercicio 2. ***(1 punto)***
Supongamos que tenemos un árbol en el que hay 15 *vértices de grado* 2*,* 23 *vértices de grado* 3*,* 15 *vértices de grado* 4*,* 8 *vértices de grado* 5 *y el resto, vértices de grado uno. ¿Cuántos lados tiene dicho árbol?.*

Ejercicio 3. ***(0'75 puntos)***
Consideramos el retículo cuyo diagrama de Hasse es:



Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

1. *¿Es L un retículo distributivo?.*
2. *¿Es L un retículo complementado?.*

Considera ahora el subconjunto de L, $S = \{b, d, e, h\}$. De S, calcula el conjunto de cotas superiores y el conjunto de cotas inferiores. Da, si existen, los elementos: supremo, ínfimo, máximo, mínimo, maximales y minimales.

Ejercicio 4. ***(0'75 puntos)***
Dada la función booleana $f(x, y, z, t) = \sum m(0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15)$, obtén una expresión reducida de f como suma de productos.

Ejercicio 5. ***(1 punto)***
Tenemos 3 cajas numeradas, y 31 bolas indistinguibles.

1. *¿De cuántas formas podemos distribuir las 31 bolas en las 3 cajas?.*
2. *¿En cuántas de ellas, la caja primera tiene menos bolas que la suma de las que tienen las cajas 2 y 3?.*
3. *¿De cuántas formas podemos repartir las bolas de forma que ninguna caja tenga más bolas que las otras dos juntas?.*

Ejercicio 6. ***(1 punto)***
Sean α, β, γ fórmulas y Γ un conjunto de fórmulas. Demuestra que la fórmula

$$(\alpha \to \gamma) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma))$$

es una tautología.

Supongamos ahora que $\Gamma \vDash \alpha \to \gamma$. Demuestra que

$$\Gamma \vDash (\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma)$$

Ejercicio 7. ***(1 punto)***
Consideramos un lenguaje de primer orden $\mathbf{L}$ con dos símbolos de función f y g (el primero 1-ario y el segundo binario), y con un símbolo de predicado binario P. Sea α la fórmula

$$\forall x \exists y \exists z P(x, g(f(y), f(z)))$$

Y consideramos la estructura $\mathcal{E}$:

- *Dominio: $\mathbb{Z}_7$.*
- *Funciones: $f(x) = x^2$; $g(x, y) = x + y$.*
- *Predicado: $P(x, y) \equiv x = y$. Es decir, $P(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x = y, \\ 0 & si\ x \neq y. \end{cases}$*

Calcula el valor de verdad de la fórmula α en la estructura $\mathcal{E}$.

Ejercicio 8. ***(1'5 puntos)***
Considera las siguientes fórmulas:

- $\varphi_1 = \forall x((P(x) \wedge \exists y(Q(y, x) \wedge s(y))) \to u(x))$
- $\varphi_2 = \forall x(P(x) \wedge v(x) \to s(x))$
- $\varphi_3 = \forall x(P(x) \wedge \neg v(x) \to \neg r(x))$
- $\varphi_4 = \forall x(\exists y(Q(y, x) \wedge P(y)) \to P(x))$
- $\varphi_5 = P(a) \wedge Q(a, b)$
- $\psi = \exists x(\neg r(x) \vee \exists y(Q(x, y) \wedge u(y)))$.

Demuestra que

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \} \vDash \psi$$