

Cálculo
1ºE Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial (Tipo I)
Curso 2014/2015

1. (2.5 puntos) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 1}{\cos^2(x)} \right)^{1/x^2}.$$

Solución: El límite pedido presenta una indeterminación del tipo “ 1^∞ ”.

Aplicamos la regla del número e . Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 1}{\cos^2(x)} \right)^{1/x^2} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 1}{\cos^2(x)} - 1 \right) = L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 1}{\cos^2(x)} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)x^2}$$

aplicamos la regla de L'Hôpital, ya que que presenta una indeterminación del tipo “ $0/0$ ”. Pero antes de eso, apartamos el factor $1/(\cos^2(x))$ que no tiende a cero (tiende a 1); es decir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 1}{\cos^2(x)} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2(x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 1 - \cos^2(x)}{x^2}$$

Nos queda entonces calcular el segundo límite que es el que presenta una indeterminación del tipo “ $0/0$ ”.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 1 - \cos^2(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2\cos(x)\sin(x)}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Obsérvese que hemos aplicado la regla de L'Hôpital dos veces consecutivas.

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 1}{\cos^2(x)} \right)^{1/x^2} = e^2.$$

2. (3 puntos) Se considera la función $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$.

- a) ¿Existe algún $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?
- b) ¿Es estrictamente monótona la función f ?
- c) Calcula la imagen de f .

Solución:

- a) Para responder a la pregunta vamos a ver si hay algún punto en el que la recta tangente tenga pendiente cero (así sería horizontal). Es decir, vamos a buscar algún punto en el que la función derivada se anule (la función dada es derivable por ser composición de derivables). Calculamos su derivada:

$$f'(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}} \left(\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \right) = e^{\frac{1+x}{1-x}} \frac{2}{(1-x)^2}.$$

Es evidente que la derivada no se anula nunca; por tanto, no existe ningún punto del dominio donde la recta tangente sea horizontal.

- b) La derivada de f es positiva (todos sus factores lo son). En consecuencia, la función es estrictamente creciente en $] -\infty, 1[$ y también en $]1, +\infty[$.
- c) Para calcular la imagen descomponemos el dominio en la unión de $] -\infty, 1[$ y $]1, +\infty[$.

$$f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = f(]-\infty, 1[) \cup f(]1, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)[\cup] \lim_{x \rightarrow 1+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

Hemos aplicado en cada subintervalo la continuidad y monotonía creciente de la función f . Para terminar, calculamos los límites planteados:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Por tanto, la imagen es $]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, +\infty[= \mathbb{R}^+ \setminus \{\frac{1}{e}\}$.

3. (2.5 puntos) Determina el número de soluciones reales de la ecuación:

$$3x^4 - 8x^3 = 24.$$

Solución: Consideremos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 24$$

Determinar el número de soluciones reales de la ecuación planteada es equivalente a determinar el número de ceros de la función f .

En principio, al tratarse de una función polinómica de grado par, no tenemos garantías de que tenga algún cero. Por tanto, estudiamos la derivada de f .

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x - 2)$$

Observamos que la derivada se anula en dos puntos (los puntos críticos de f son $x = 0$ y $x = 2$). Sabemos entonces, aplicando el teorema de Rolle, que f , a lo sumo, tendrá 3 ceros. Vamos a determinar cuántos exactamente tiene con el análisis de la función.

Estudiamos los intervalos de monotonía determinados por los puntos críticos. Esto es:

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente}$$

$$0 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente}$$

$$x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente}$$

Por tanto, en el punto $x = 2$ se alcanza un mínimo relativo y en $x = 0$ no se alcanza extremo. Además, $f(0) = -24$; y $f(2) = -40$. La función en $-\infty$ tiende a $+\infty$ y decrece a -24 . Aplicando el teorema de Bolzano, aseguramos la existencia de un cero antes de $x = 0$. Por otra parte, la función sigue decreciendo al mínimo (absoluto) en $x = 2$ donde vale -40 , y entonces comienza a crecer hasta $+\infty$. Entonces, la función tiene otro cero después de $x = 2$. En consecuencia, f tiene dos ceros.

4. (2 puntos) De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos sumen 10, halla las dimensiones de aquél cuyo perímetro sea mínimo.

Solución: Llamemos x e y a los catetos del triángulo rectángulo dado. Sabemos que $x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$. Para obtener el perímetro, tenemos que sumar todos sus lados (catetos e hipotenusa). Es claro que la hipotenusa es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto, el perímetro será:

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 10 + \sqrt{x^2 + (10 - x)^2} = 10 + \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$$

La función que hay que optimizar es:

$$f(x) = 10 + \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$$

Esta función se podría definir en todo \mathbb{R} , pero como x e y representan dimensiones, consideramos como dominio de f el intervalo $[0, 10]$. Al ser un intervalo compacto, vamos a calcular los puntos críticos en el interior. Para ello calculamos la derivada de f :

$$f'(x) = \frac{4x - 20}{2\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = \frac{2x - 10}{\sqrt{2x^2 - 20x + 100}}$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \in]0, 10[$. Para finalizar, evaluamos f en los extremos del intervalo y comparamos con $f(5)$:

$$f(0) = 20 = f(10) > f(5) = 10 + \sqrt{50}$$

Concluimos entonces que el mínimo absoluto de f se alcanza en $x = 5$. Así que la solución del problema es que los catetos del triángulo sean iguales a 5.

Granada, 28 de noviembre de 2014