
EJERCICIOS PARA ENTREGAR. TEMAS 2 Y 3

Números naturales y enteros. Cuerpos finitos

Ejercicio 1 (El problema del mono y los cocos). Cinco hombres y un mono naufragan en una isla desierta. Durante el primer día los hombres se dedican a recoger cocos. Al final del día deciden dejar el reparto para el día siguiente. Por la noche, uno de ellos despierta y, desconfiado, decide separar su parte. Divide los cocos en cinco montones, toma su parte y, como sobra un coco, se lo da al mono. Poco después, un segundo náufrago se despierta y hace lo mismo. Al dividir los cocos en cinco montones, vuelve a sobrar un coco y también se lo da al mono. Uno tras otro, el tercero, cuarto y quinto náufragos hacen lo mismo. Al día siguiente por la mañana, dividen los cocos en cinco montones sin que sobre ninguno. ¿Cuántos cocos se habían recolectado inicialmente?

Ejercicio 2. Sea a el número que resulta de escribir tu fecha de nacimiento con el formato AAAAMMDD. Calcula tres soluciones positivas y dos negativas del siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{array}{rcl} 2134x & \equiv & 213800 \quad (\text{mód } 214867) \\ 219873x & \equiv & 40328 \quad (\text{mód } 300529) \\ 123456x & \equiv & 673319 \quad (\text{mód } 735047) \\ ax & \equiv & 54321 \quad (\text{mód } 123457) \end{array}$$

Ejercicio 3. Sean $K_1 = \mathbb{Z}_2[x]_{x^3+x+1}$ y $K_2 = \mathbb{Z}_2[x]_{x^3+x^2+1}$.

1. Determina los elementos de K_1 y K_2 .
2. Comprueba que K_1 y K_2 son cuerpos.
3. Construye las tablas de multiplicar de K_1 y K_2 .
4. Determina un elemento $a \in K_2$ que satisfaga la ecuación $a^3 + a + 1 = 0$.
5. Da un isomorfismo $K_1 \rightarrow K_2$.

Ejercicio 4. Sea $A = \mathbb{Z}_3[x]_{x^4+x^3+x+2}$. Realiza en A los siguientes cálculos:

1. $(x^3 + 2x + 1) \cdot (x^2 + x + 2)$.
2. $(x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x^3 + x + 1)$.
3. $(x^3 + 1)^{-1} \cdot (x^2 + 2) + x^3$.
4. $(x + 1)^{21}$.