GEOMETRÍA I. Examen final

– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –

Curso 2011/12

Nombre:

1. (a) En $\mathbb{R}^3$ sean $\{v_1, v_2, v_3\}$ linealmente dependientes. ¿El primer vector v_1 es combinación lineal de v_2 y v_3?
   (b) ¿Existen sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados con 4 ecuaciones y 2 incógnitas? ¿y de 4 incógnitas y 2 ecuaciones?
   (c) Si $f : V \to V'$ es un isomorfismo y $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ¿λf es un isomorfismo?
   (d) Si $f \in L(V, V')$, probar que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t))$.

2. Hallar una base de

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 2y + z - t = 0, -2x + y - 2z + 2t = 0, x + z - t = 0\}.$$

   Ampliar hasta una base B de $\mathbb{R}^4$ y hallar la expresión de B^* respecto de B_u^*. Hallar las coordenadas de la forma lineal $\psi(x, y, z, t) = x$ respecto de B^*.

3. Se consideran $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$ y $W =< (1, a, 1) >$ donde $a \in \mathbb{R}$. Según el parámetro a, hallar $\dim(U \cap W)$. Probar que la aplicación lineal $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a - c, a - b, -b + c)$$

   satisface $\mathrm{Im}(f) = U$.

4. Definir un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(1, 0, 1) = (2, 0, 1)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. Hallar una base de $\mathrm{Ker}(f)$ y de $\mathrm{an}(\mathrm{Ker}(f))$.

Razonar todas las respuestas.

Todas las preguntas puntuan igual.

Soluciones (puede haber diferentes maneras correctas de responder a las preguntas)

1. (a) No necesariamente. Basta tomar $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,2,0)\}$. No son linealmente independientes pues $0(1,0,0)-2(0,1,0)+1(0,2,0)$ es una combinación lineal no trivial de los tres vectores que da el elemento neutro. Por otro lado, $(1,0,0)$ no es combinación lineal de $\{(0,1,0),(0,2,0)\}$ pues $<(0,1,0),(0,2,0)>=<(0,1,0)>$ y $(1,0,0)\notin<(0,1,0)>$.

   (b) Sí en el primer caso y no en el segundo. Por ejemplo $x=0, y=0, x+y=0, x-y=0$ es compatible determinado (con solución trivial). En el segundo caso, si el sistema es determinado, entonces $r(A)$ es el número de incógnitas, es decir, 4, pero $r(A)=r(A|b)\leq 2$, lo cual es imposible.

   (c) Sí. Como f es isomorfismo, $\dim(V)=\dim(V')$. Por tanto, λf será isomorfismo si es inyectiva. Sea $v\in\operatorname{Ker}(\lambda f)$. Entonces $(\lambda f)(v)=0$, es decir, $\lambda f(v)=0$. Como $\lambda\neq 0$, entonces $f(v)=0$, es decir, $v\in Ker(f)=\{0\}$. Por tanto, $v=0$ y $\operatorname{Ker}(\lambda f)=\{0\}$.

   (d) Ver las soluciones del examen del tema 3.

2. Resolvemos el sistema de ecuaciones. Como es homogéneo, y

$$r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

   entonces $\dim(U)=2$ y una base se obtiene tomando parámetros a z y t. Podemos quitar la segunda o tercera ecuación y $U=<(-1,0,1,0),(1,0,0,1)>$.

   Para ampliar a una base de $\mathbb{R}^4$, buscamos una matriz regular donde se encuentre los dos vectores anteriores, por ejemplo,

$$B=\{(-1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}.$$

   Supongamos que $B_u^*=\{\omega_1,\ldots,\omega_4\}$ y que $B^*=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_4\}$. Entonces $\alpha_1=\sum_i a_i\omega_i$. Aplicando a ambos lados la base B, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} 1 &= -a_1+a_3 \\ 0 &= a_1+a_4 \\ 0 &= a_2 \\ 0 &= a_3 \end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos $a_1 = -1$ y $a_4 = 1$. Se hace esto para todos los elementos α_i, cambiando sólo el término independiente. Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\omega_1 + \omega_4 \\
\alpha_2 &= \omega_4 \\
\alpha_3 &= \omega_2 \\
\alpha_4 &= \omega_1 + \omega_3 - \omega_4
\end{aligned}$$

Para ψ, las coordenadas son

$$(\psi(-1,0,1,0), \psi(1,0,0,1), \psi(0,1,0,0), \psi(0,0,1,0)) = (-1,1,0,0).$$

(se observa que $\psi = -\alpha_1 + \alpha_2$)

3. Se tiene que $\dim(U) = 2$ y $\dim(W) = 1$, con $U =< (1,1,0),(0,1,1) >$. Como $U \cap W \subset U$ y $U \cap W \subset W$, entonces $\dim(U \cap W) \leq 1$.

   Si $\dim(U \cap W) = 1$, entonces $U \cap W = W$, es decir, $W \subset U$. Y esto ocurre si y sólamente si $(1,a,1) \in< (1,1,0),(0,1,1) >$, es decir,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

   En caso contrario, el determinate no es cero y $U \cap W = \{0\}$. Como el determinante es $2 - a$, entonces si $a = 2$, la dimensión es 1, y si $a \neq 2$, la dimensión es cero. (Otra forma: $U + W =< (1,a,1),(1,1,0),(0,1,1) >$. Entonces $\dim(U + W)$ coincide con el rango de la matriz formada por los tres vectores. Ya que hay al menos dos linealmente independientes, entonces el rango será 3 si el determinante no es cero y 2 si es cero. Al calcular el determinante, nos da que $2-a$, luego si $a \neq 2$, $\dim(U+W) = 3$ y si $a = 2$, entonces $\dim(U+W) = 2$. Ahora usamos la fórmula $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ para calcular la dimensión, sabiendo que $\dim(U) = 1$ y que $\dim(W) = 2$.)

   Sea la base usual B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Entonces $\mathrm{Im}(f) = f(B)$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= < f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) > \\
&= < (1,1,0),(0,-1,-1),(-1,0,1),(0,0,0) > \\
&= < (1,1,0),(0,-1,-1) >
\end{aligned}$$

pues en el segundo renglón, el último vector es el cero, los dos primeros son independientes y los tres primeros forman una matriz con determinante nulo. Además, estos dos vectores satisfacen la ecuación cartesiana de U, luego son base de U.

4. Tomamos $B = \{(1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Tomamos un vector linealmente independiente con $(2,0,1)$, por ejemplo, $(0,1,0)$. Entonces se define $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como

$$f : (1,0,1) \longmapsto (2,0,1)$$

$$f : (0,1,0) \longmapsto (0,1,0)$$

$$f : (0,0,1) \longmapsto (0,0,0)$$

Entonces $\mathrm{Im}(f) = f(B) =< (2,0,1),(0,1,0) >$, luego $r(f) = 2$.

Como $(0,0,1) \in Ker(f)$ y se sabe que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - r(f) = 1$, entonces una base de $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,1)\}$.

Para hallar $\mathrm{an}(\mathrm{Ker}(f))$, calculamos las ecuaciones cartesianas de $\mathrm{Ker}(f)$ ya que los coeficientes de las incógnitas determinan las coordenadas de una base de $\mathrm{an}(\mathrm{Ker}(f))$. Como

$$r\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} = 1,$$

entonces $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z); x = 0, y = 0\}$. Luego si $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ es B_u^*, entonces

$$\mathrm{an}(\mathrm{Ker(f)}) = \{\omega_1,\omega_2\}.$$

(También se puede observar que el núcleo de f está generado por el tercer vector de la base usual, luego su anulador está generado por los dos primeros vectores de la base dual a la usual de $\mathbb{R}^3$).