Álgebra II. Doble grado Informática-Matemáticas.

Control Primero. Curso 2014-2015.

9 de Abril de 2015.

Ejercicio 1 (3 puntos).

a) Sea G un grupo y $X \subseteq G$, $Y \subseteq G$ dos subconjuntos no vacíos de G. Demostrar que si $H_1 = \langle X \rangle$ y $H_2 = \langle Y \rangle$ entonces $H_1 \vee H_2 = \langle X \cup Y \rangle$.

b) Sea G un grupo y $x, y \in G$ dos elementos tales que $xy \in Z(G)$. Demostrar que $xy = yx$.

c) Sea p un número primo y m un entero no nulo tal que $m.c.d.(p, m) = 1$. Demostrar que $m^{p-1} \equiv 1 (mod\, p)$. (Pista: Considerar la clase de m módulo p en el grupo $U(\mathbb{Z}_p)$ de la unidades de $\mathbb{Z}_p$)

Ejercicio 2 (3 puntos).

1. Describir los subgrupos de orden 2 y los subgrupos de orden ~~8~~ 4 del grupo diédrico D_8. (Pista: Utilizar que $Z(D_8) = \langle r^4 \rangle = \{1, r^4\}$)
2. Describir el retículo de subgrupos del grupo cíclico $G = C_{30}$. ¿Cuántos elementos $y \in G$ existen tal que $G = \langle y \rangle$?

Ejercicio 3 (4 puntos). Sean $\sigma, \tau \in S_9$ las permutaciones definidas por

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9), \quad \tau = (2\,9)(3\,8)(4\,7)(5\,6)$$

1. Calcular el orden de σ y de τ. Razonar que si un grupo tiene un elemento de orden 2 y uno de orden 9 entonces su orden es al menos 18.
2. Prueba que $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$.
3. Razona que el subgrupo $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ generado por ambas permutaciones tiene exactamente 18 elementos. ¿Puedes listarlos todos ellos?

Álgebra II. Doble grado Informática-Matemáticas.

Control Segundo. Curso 2014-2015.

3 de Junio de 2015.

Ejercicio 1 (3 puntos).

a) Determinar todos los grupos abelianos (salvo isomorfismo) de orden 72, dando en cada caso sus factores invariantes, divisores elementales, descomposición cíclica y descomposición cíclica primaria.

b) Dar una serie de composición, longitud y factores de composición de los grupos S_8, D_{12} y C_{45}.

Ejercicio 2 (3 puntos).

1. Demostrar que no existen grupos simples de orden 105. Mas concretamente, probar que que todo grupo de orden 105 admite un subgrupo normal de orden 3, ó un subgrupo normal de orden 5 ó un subgrupo normal de orden 7.

2. Demostrar que todo grupo de orden 105 es soluble.

Ejercicio 3 (4 puntos).

1. ¿Es verdad que los 5-subgrupos de Sylow de S_{10} son isomorfos a $C_5 \times C_5$?

2. Sea G un 2-grupo finito que actúa sobre un conjunto finito X, cuya cardinalidad es un número impar. ¿Podemos afirmar que existe al menos un elemento en X que queda fijo bajo la acción de G?

3. Razonar que el grupo de los cuaternios no es producto directo interno de dos subgrupos propios suyos.

Álgebra II. Doble grado Informática-Matemáticas.

Examen Final. Curso 2014-2015.

16 de Junio de 2015.

Ejercicio 1 (2,5 puntos). **Pregunta Teórica:**

Exponer los conocimientos sobre uno de los dos temas siguientes:

1. Teorema sobre la descomposición de una permutación en producto de ciclos disjuntos. Teorema sobre la paridad de una permutación.
2. Teoremas de Sylow.

Ejercicio 2 (2,5 puntos). **Cuestiones:**

a) Demostrar que si K es un subgrupo normal de un grupo G entonces $[K,K]$ es también un subgrupo normal de G.

b) Dar un ejemplo de dos grupos no isomorfos que tengan los mismos factores de composición.

c) Sea G un grupo no abeliano de orden 36. Demostrar que algún subgrupo de Sylow de G no es normal.

d) Sea D_n el grupo diédrico de orden $2n$. Si la descomposición de n en factores primos es $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$, demostrar que $l(D_n) = e_1 + \cdots + e_r + 1$, y que

$$fact(G) = (C_{p_1}, \overset{(e_1)}{\ldots}, C_{p_1}, \ldots, C_{p_r}, \overset{(e_r)}{\ldots}, C_{p_r}, C_2).$$

e) Para cada entero positivo k, llamemos $N(k)$ al número de grupos no isomorfos de orden k. Rellenar la siguiente tabla:

k=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N(k) =															

Ejercicio 3 (2,5 puntos). Sea $S = \{(i, j) \mid i, j = 1,2,3\}$ y sea $G = S_3$. Definimos una acción $G \times S \to S$ por $\sigma * (i, j) = (\sigma(i), \sigma(j))$.

1. Determinar las órbitas de esta acción.

2. Para cada órbita $\mathcal{O}(s)$ determinar $Stab_G(s)$

Ejercicio 4 (2,5 puntos). Sea K un subgrupo normal de un grupo finito G y sea P un p-subgrupo de Sylow de G.

1. Demostrar que $K \cap P$ es un p-subgrupo de Sylow de K.

2. Demostrar que KP/K es un p-subgrupo de Sylow de G/K.