Cálculo

1ºA Grado en Ingeniería Informática

Primer Parcial (Tipo II)

Curso 2014/2015

1. **(2.5 puntos)** Se considera la función $f: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \log\left(\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right)$.

   a) ¿Existe algún $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?

   b) ¿Es estrictamente monónota la función f?

Solución:

a) Se trata de una función derivable en todo el dominio. Para que la recta tangente a la gráfica de f en un punto sea horizontal, la derivada en dicho punto tendrá que ser cero. Por tanto, calculamos la derivada de f.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}} \frac{\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x)) + \cos(x)(1+\operatorname{sen}(x))}{(1-\operatorname{sen}(x))^2} \\
&= \frac{2\cos(x)}{\left(\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right)(1-\operatorname{sen}(x))^2} = \frac{2\cos(x)}{(1+\operatorname{sen}(x))(1-\operatorname{sen}(x))} \\
&= \frac{2\cos(x)}{1-\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{2\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2}{\cos(x)}
\end{aligned}$$

Obsérvese que hemos usado la fórmula fundamental de trigonometría para simplificar la expresión:

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}(x)^2 = 1 \;\Rightarrow\; 1 - \operatorname{sen}^2(x) = \cos^2(x)$$

De la expresión de la derivada se deduce que nunca se anula en el dominio dado ; es decir, $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Por tanto la respuesta es que no hay ningún punto donde la recta tangente sea horizontal.

b) El apartado anterior nos da la información de que la derivada no se anula nunca en $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, con lo deducimos que f es estrictamente monótona. Como además $f'(x) > 0$, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (todos sus factores son positivos), tenemos que f es estrictamente creciente.

Nota: Haciendo uso de las propiedades del logaritmo, podríamos haber simplificado la función f del siguiente modo:

$$f(x) = \log\left(\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right) = \log(1+\operatorname{sen}(x)) - \log(1-\operatorname{sen}(x))$$

Y de esta forma la derivada se simplifica bastante. De hecho:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)} - \frac{-\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)} = \frac{\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x)) + \cos(x)(1+\operatorname{sen}(x))}{1-\operatorname{sen}^2(x)} \\ &= \frac{2\cos(x) - \cos(x)\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

2. **(3 puntos)** Calcula:

   a) Calcula el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \cos(x)$ en el punto $a = 0$ y de orden 4.

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\operatorname{sen}(x) - x}{x}\right)^{1/x}$.

   Solución:

   a) Para calcular el polinomio de Taylor de la función coseno en $a = 0$ de orden 4 tenemos que calcular las derivadas sucesivas en el cero hasta la de orden 4. Es decir,

$$\begin{aligned} f(x) = \cos(x) &\Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = -\operatorname{sen}(x) &\Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos(x) &\Rightarrow f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \operatorname{sen}(x) &\Rightarrow f'''(0) = 0 \\ f^{(iv)}(x) = \cos(x) &\Rightarrow f^{(iv)}(0) = 1 \end{aligned}$$

   Entonces, el polinomio de Taylor pedido es:

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

   b) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo "0/0". Parta resolver dicha indeterminacación aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x) - x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x) - 1}{1} = \lim_{x\to 0}(2\cos(x) - 1) = 1,$$

   con lo que el límite pedido presenta una indeterminación del tipo "1^∞".

Aplicamos ahora la regla del número e. Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(x)-x}{x}\right)^{1/x}=e^{L}\iff \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(x)-x}{x}-1\right)=L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(x)-x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(x)-2x}{x^{2}}\right)$$

aplicamos la regla de L'Hôpital, ya que que presenta una indeterminación del tipo "$0/0$". Nos queda entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x)-2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\,\mathrm{sen}(x)}{1}=0$$

Obsérvese que hemos aplicado la regla de L'Hôpital dos veces consecutivas.

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(x)-x}{x}\right)^{1/x}=e^{0}=1\ .$$

3. **(2 puntos)** Entre todos los rectángulos de perímetro 12, halla las dimensiones de aquél cuya diagonal sea menor.

Solución: Llamemos x e y a los lados del rectángulo. Sabemos entonces que su perímetro (la suma de sus lados) es:

$$2x+2y=12\ \Leftrightarrow\ x+y=6\ .$$

La función que hay que maximizar es la diagonal; esto es, la hipotenusa del triángulo rectángulo que divide a dicho rectángulo por la mitad, es decir: $\sqrt{x^2+y^2}$. Si despejamos y en función de x: $y=6-x$, la función a estudiar es $\sqrt{x^2+(6-x)^2}$. Es decir:

$$f(x)=\sqrt{x^2+(6-x)^2}=\sqrt{x^2+36-12x+x^2}=\sqrt{2x^2-12x+36}$$

Esta función (un polinomio de grado 2) se podría definir en todo $\mathbb{R}$; pero si las variables x e y indican dimensiones, podemos considerar que el dominio es $[0,6]$.

Buscamos posibles puntos de extremos en $]0,6[$. Para ello, calculamos puntos críticos:

$$f'(x)=\frac{4x-12}{2\sqrt{2x^2-12x+36}}=0\ \Leftrightarrow\ x=3$$

Para calcular el mínimo absoluto, al ser el dominio un intervalo compacto, sólo nos queda evaluar la función:

$$f(0) = 6 = f(6) > f(3) = \sqrt{18}\ .$$

Por tanto las dimensiones que hacen que la diagonal del rectángulo dado sea mínima son los lados iguales a 3.

4. **(2.5 puntos)** Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = xe^{-x^2}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

Calcula la imagen de f.

Solución: La función dada es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Para calcular su imagen, vamos a buscar posibles extremos relativos calculando sus puntos críticos. Para ello, derivamos f.

$$f'(x) = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2) = \frac{1}{2}e^{-x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + x\right)\ .$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Observemos la simetría en los puntos obtenidos. Este hecho se debe a que la función f es impar.

Calculemos los intervalos de monotonía para decidir si los puntos críticos obtenidos son de extremo relativo o no:

Si $x < -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} + x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente

Si $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} + x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente

Si $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} - x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente

Si $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}} - x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente

Se deduce entonces que en el punto $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ se alcanza un mínimo relativo y en el punto $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ se alcanza un máximo relativo. En el punto $x = 0$ no se alcanza extremo.

Calculamos la imagen de f:

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f\left(\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) \cup f\left(\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) \cup f\left(\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right]\right) \\ &= \left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[\cup \left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \cup \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \end{aligned}$$

Obsérvese que hemos empleado la continuidad y la monotonía de f en cada intervalo para calcular su imagen. Calculamos los límites en los extremos del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0 \;\; \text{(utilizando la Regla de L'Hôpital)}\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0 \;\; \text{(utilizando la Regla de L'Hôpital)}\,,$$
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}\,,$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}\,.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}, 0\right] \cup \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\right] \cup \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\right] \\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\right] = \left[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right] \end{aligned}$$

Obsérvese la simetría impar que presenta la imagen de f.

Granada, 27 de noviembre de 2014