TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 3
– Grado en Matemáticas. Curso 2^0-B –
Curso 2012/13

<u>**Nombre:**</u>

RAZONAR TODAS LAS RESPUESTAS

1. Estudiar la compacidad del espacio $([-1,1],\tau)$, donde $\tau = \{O \subset [-1,1] : 0 \notin O\} \cup \{O \subset [-1,1] : (-1,1) \subset O\}$. Estudiar qué subconjuntos son compactos.

2. Probar que no son homeomorfos los siguientes pares de espacios topológicos:

   (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (b) $A = (0,1)$ y $B = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$.

   (c) $A = \mathbb{S}^1$ y $B = \mathbb{S}^1(-1,0) \cup \mathbb{S}^1(1,0)$.

3. (a) Probar que $B = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) - \{(0,0)\}$ tiene exactamente cuatro componentes conexas.

   (b) En un espacio (X,τ), sea $\{x_n\} \to x$. Probar que $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

1. El espacio es compacto. Sea $[-1,1] = \cup_{i\in I} O_i$, $O_i \in \tau$. Tomamos $i_0 \in I$ tal que $0 \in O_{i_0}$. Por tanto dicho abierto es del segundo tipo, es decir, $(-1,1) \subset O_{i_0}$. Sean ahora O_{i_1} y O_{i_2} los abiertos que contienen respectivamente a $x=1$ y a $x=-1$. Entonces $X = O_{i_0} \cup O_{i_1} \cup O_{i_2}$.

   Sea $A \subset [-1,1]$ y sea $A \subset \cup_{i\in I} O_i$, $O_i \in \tau$. Distinguimos casos dependiendo si $0 \in A$ o $0 \notin A$. En el primer caso, sea $i_0 \in I$ tal que $0 \in O_{i_0}$. Por tanto dicho abierto es del segundo tipo, es decir, $(-1,1) \subset O_{i_0}$. Si $A \subset (-1,1)$, dicho abierto ya recubre A, y si A tiene más puntos, son a lo más, $x=1$ o $x=-1$ (o $A = [-1,1]$ que es compacto). Sea ahora el abierto que contenga a $x=1$ o a $x=-1$, que junto a O_{i_0} recubriría, en un número finito (dos) de abiertos, el conjunto A. Esto prueba que A es compacto.

   Si $0 \notin A$, sabemos de clase que $\tau_{|A}$ es la topología discreta. Por tanto, A es compacto si y sólo si A es finito.

2. (a) El conjunto A es un abierto porque es una bola. El conjunto B es cerrado porque es la adherencia de (la bola) A. Además, B es acotado (por ejemplo, por la bola de radio 2 centrada en el origen). Esto prueba que B es compacto, pero A no lo es, ya que es abierto y $\mathbb{R}^2$ es conexo.

   (b) Supongamos que existe $f : B \to A$ un homeomorfismo. Sea $O = (0,0)$. Entonces $f : B - \{O\} \to A - \{f(O)\}$ es también un homeomorfismo. El segundo conjunto no es conexo, ya que no es un intervalo de $\mathbb{R}$, concretamente: $A = (0, f(O)) \cup (f(O), 1)$. Pero esto es una partición por abiertos (son intervalos abiertos) y conexos (por ser intervalos). Esto prueba que $A - \{f(O)\}$ tiene exactamente dos componentes conexas.

   Veamos que $B - \{O\}$ tiene cuatros componentes conexas. Dicho conjunto se puede escribir como

$$B - \{O\} = \{(x,x) : x > 0\} \cup \{(x,x) : x < 0\} \cup \{(x,-x) : x > 0\} \cup \{(x,-x) : x < 0\}.$$

   Cada uno de dichos subconjuntos es conexo y es un abierto en $B - \{O\}$, y tendríamos una partición del espacio por abiertos y conexos, luego serían las componentes conexas. Ya que hay cuatro, no podría ser homeomorfo al otro conjunto. El razonamiento se hace para el primer conjunto: para los otros es análogo, o si se quiere, mediante giros de 90, 180 y 270 grados de $\mathbb{R}^2$, se llevaría el primer trozo en cada uno de los otros).

Sea $C = \{(x,x) : x > 0\}$. Este conjunto es homeomorfo a $(0,\infty)$ ya que C es el grafo de la función $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ y el dominio de esta función es $(0,\infty)$. Esto prueba que C es conexo. Para probar que es abierto en el espacio, basta darse cuenta que

$$C = ((B - \{O\}) \cap (\{(x,y) : x > 0\})) \cup ((B - \{O\}) \cap (\{(x,y) : y > 0\}))\,.$$

(c) Sea $f : B \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo y $O = (0,0)$. Entonces $f : B - \{O\} \to \mathbb{S}^1 - \{f(O)\}$. El segundo espacio es homeomorfo a $\mathbb{R}$, que es conexo. El primer espacio no es conexo. Para ello basta darse cuenta de la partición por abiertos:

$$B - \{O\} = ((B - \{O\}) \cap \{(x,y) : x > 0\}) \cup ((B - \{O\}) \cap \{(x,-x) : x < 0\})\,.$$

3. (a) El razonamiento es parecido al hecho en el ejercicio 2, b). Primero escribimos:

$$B = \{(x,0) : x > 0\} \cup \{(x,0) : x < 0\} \cup \{(0,x) : x > 0\} \cup \{(0,x) : x < 0\}.$$

Cada uno de dichos subconjuntos son conexos y abiertos en B, luego son las componentes conexas. El razonamiento se hace para el primero. Sea $A = \{(x,0) : x > 0\}$. Entonces $A = (0,\infty) \times \{0\} \cong (0,\infty)$, luego es conexo. Además

$$A = (B \cap \{(x,y) : y < x\}) \cup (B \cap \{(x,y) : y > -x\}),$$

que es unión de dos abiertos de B, luego abierto en B.

(b) Sea $A \subset \cup_{i\in I} O_i$, $O_i \in \tau$. Tomamos $i_0 \in I$ tal que $x \in O_{i_0}$. Tomando este entorno de x y por la definición de convergencia de sucesiones, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in O_{i_0}$ para $n \geq m$. Para los primeros elementos de la sucesión, tomamos el abierto que contenga a cada uno de dichos elementos:

$$x_n \in O_{i_n}, n = 1, \ldots, m-1.$$

Por tanto $A \subset O_{i_0} \cup O_{i_1} \cup \ldots \cup O_{i_{m-1}}$.