

TOPOLOGÍA. Examen del Tema 2
- Licenciatura de Matemáticas. GRUPO 2^o A -
Curso 2010/11
Profesor: Rafael López Camino

Nombre:

Razonar las respuestas

1. Se considera en \mathbb{R} la topología τ que tiene por base $\beta = \{[a, b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Estudiar la continuidad de la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ dada por $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$.
2. Establecer un homeomorfismo entre los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} :
$$A = (0, 1) \cup [2, 3], \quad B = (-1, 0) \cup [3, 4].$$
3. Estudiar en qué puntos es continua la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_i) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$, $f(x) = x^2$, donde τ_i es la topología del punto incluido para $p = 0$.

1. Se considera en \mathbb{R} la topología τ que tiene por base $\beta = \{[a, b); a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Estudiar la continuidad de la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau)$ dada por $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ si $x \geq 0$.

Solución. Una base de entornos de x es $\beta_x = \{[x, y); x < y\}$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < 0$. Entonces $f(x) = 0$. Dado $V' = [0, y)$, se toma $U = [x, x/2)$ como entorno de x . Entonces $f(U) = \{0\} \subset V'$.

Sea ahora $x \geq 0$. Entonces $f(x) = 1$. Sea $V' = [1, y)$. Sea $U = [x, x+1)$ entorno de x que satisface $f(U) = \{1\} \subset V'$. Esto prueba que f es continua en \mathbb{R} .

2. Establecer un homeomorfismo entre los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} :

$$A = (0, 1) \cup [2, 3], \quad B = (-1, 0) \cup [3, 4].$$

Solución. Se sabe que dos intervalos del mismo "tipo" son homeomorfos entre sí. Sean por tanto, f un homeomorfismo entre $(0, 1)$ y $(-1, 0)$ y g otro entre $[2, 3]$ y $[3, 4]$. Se define $\phi : A \rightarrow B$ como $\phi|_{(0,1)} = f$ y $\phi|_{[2,3]} = g$. Es evidente que ϕ es biyectiva al serlo f y g . Además la restricción de ϕ a $(0, 1)$ y $[2, 3]$ son continuas: veámoslo por ejemplo, en $(0, 1)$. Sea $i : (-1, 0) \rightarrow B$ la aplicación inclusión, que es continua. Entonces $\phi|_{(0,1)} = i \circ f$.

Para finalizar, ϕ es continua globalmente ya que $(0, 1)$ y $[2, 3]$ constituyen una partición por abiertos de A : que sea una partición es trivial, y lo mismo con que $(0, 1)$ sea un abierto de A ; por último, $[2, 3]$ es abierto ya que $[2, 3] = (1.5, 3.5) \cap A$.

3. Estudiar en qué puntos es continua la aplicación $f : (\mathbb{R}, \tau_i) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$, $f(x) = x^2$, donde τ_i es la topología del punto incluido para $p = 0$.

Solución. Una base de entornos de x en (\mathbb{R}, τ_i) es $\beta_x = \{U_x := \{x, 0\}\}$.

- (a) f es continua en $x = 0$. Como $f(0) = 0$, dado $(-\epsilon, \epsilon)$ entorno de $f(0)$, se tiene $f(U_0) = \{0\} \subset (-\epsilon, \epsilon)$.
- (b) f no es continua si $x \neq 0$. Supongamos que $x > 0$. Sea $\epsilon = x/2$ y $V' = (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Entonces $f(U_x) = \{0, x^2\} \not\subset V'$. De la misma forma se hace si $x < 0$.