AED/MD

EXÁMENES

1º GRADO INGENIERÍA INFORMÁTICA

Universidad de Granada

MATEMÁTICA DISCRETA. EXAMEN DE FEBRERO (02-02-07)					
TITULACIÓN:			GRUPO:		CALIFICACIÓN:
Ing.Inf.	Sistemas	Gestión	A	B	
APELLIDOS:					NOMBRE: DNI:

Ejercicio 1
Sea $\{F_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que para todo $m \geq 0$ se verifica:

$$\sum_{k=0}^{m} F_k^2 = F_m \cdot F_{m+1},$$

Solución:
Demostremos esta igualdad por inducción.
Para $m = 0$, tenemos que comprobar que $F_0^2 = F_0 F_1$, lo cual es cierto, pues $0 = 0$.
Supongamos que la fórmula es cierta para un número natural m, es decir, $\sum\limits_{k=0}^{m} F_k^2 = F_m \cdot F_{m+1}$. En tal caso se tiene que

$$\sum_{k=0}^{m+1} F_k^2 = \sum_{k=0}^{m} F_k^2 + F_{m+1}^2 = F_m \cdot F_{m+1} + F_{m+1}^2 = F_{m+1} \cdot (F_m + F_{m+1}) = F_{m+1} \cdot F_{m+2}.$$

Ejercicio 2

Determina el número entero entre 1500 y 2500 que verifica:

1. sus dos últimas cifras en base 2 son 11,
2. sus dos últimas cifras en base 3 son 00 y
3. sus dos últimas cifras en base 5 son 12.

Solución:
Denominemos a este número x. La primera condición nos dice que $x \equiv 3(\text{mód } 4)$. Aclaremos esto último.

> Si la expresión de x en base 2 es $(a_n a_{n-1} \dots a_2 11)_2$ significa que
> $x = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_2 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 4 \cdot (a_n 2^{n-2} + a_{n-1} 2^{n-3} + \cdots + a_2) + 3,$
> es decir, $x - 3$ es múltiplo de 4.

La segunda condición nos dice que $x \equiv 0(\text{mód } 9)$, mientras que la tercera que $x \equiv 7(\text{mód } 25)$.
Por tanto, lo que hemos de resolver es el sistema de congruencias

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \ (\text{mód } 4) \\ x &\equiv 0 \ (\text{mód } 9) \\ x &\equiv 7 \ (\text{mód } 25) \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lll}
x \equiv 3 \ (m\acute{o}d\ 4) & \Longrightarrow & x = 3+4k \\
\left.\begin{array}{l} x = 3+4k \\ x \equiv 0 \ (m\acute{o}d\ 9) \end{array}\right\} & \Longrightarrow & 3+4k \equiv 0 \ (m\acute{o}d\ 9) \\
 & & 4k \equiv -3 \ (m\acute{o}d\ 9) \\
 & & 4k \equiv 6 \ (m\acute{o}d\ 9) \\
 & & 7\cdot 4k \equiv 7\cdot 6 (m\acute{o}d\ 9) \\
 & & k \equiv 6 \ (m\acute{o}d\ 9) \Longrightarrow k = 6+9k' \\
\left.\begin{array}{l} x = 3+4k \\ k = 6+9k' \end{array}\right\} & \Longrightarrow & x = 3+4(6+9k') = 27+36k' \\
\left.\begin{array}{l} x = 27+36k' \\ x \equiv 7 \ (m\acute{o}d\ 25) \end{array}\right\} & \Longrightarrow & 27+36k' \equiv 7 \ (m\acute{o}d\ 25) \\
 & & 36k' \equiv -20 \ (m\acute{o}d\ 25) \\
 & & 11k' \equiv 5 \ (m\acute{o}d\ 25) \\
 & & 16\cdot 11k' \equiv 16\cdot 5 \ (m\acute{o}d\ 25) \\
 & & k' \equiv 5 \ (m\acute{o}d\ 25) \Longrightarrow k' = 5+25k''.
\end{array}
$$

Y por tanto, $x = 27+36(5+25k'') = 207+900k''$.
Buscamos ahora la solución en el intervalo dado.

$$1500 \leq 207+900k'' \leq 2500 \Longrightarrow k'' = 2$$

Por tanto, $x = 2007$.

Ejercicio 3
Calcula el resto de dividir el polinomio $X^{123}+25X^{44}+35X^2+7$ entre $X+25$ en $\mathbb{Z}_{41}[X]$.
Solución
Se tiene que $X+25 = X-16$. Por el teorema del resto, el resto de dividir $p(X) = X^{123}+25X^{44}+35X^2+7$ entre $X-16$ es igual al resultado de evaluar el polinomio p en $X = 16$.
Dado que $mcd(16,41) = 1$, por el teorema de Fermat se verifica que $16^{\varphi(41)} = 1$ en $\mathbb{Z}_{41}$, y como 41 es primo, $\varphi(41) = 40$. Por tanto, $16^{40} = 1$. En tal caso,

$$p(16) = 16^{123}+25\cdot 16^{44}+35\cdot 16^2+7 = (16^{40})^3\cdot 16^3+25\cdot 16^{40}\cdot 16^4+35\cdot 16^2+7 =$$

$$= 16^3+25\cdot 16^4+35\cdot 16^2+7 = 4096+25\cdot 65536+35\cdot 256+7 = 37+40+22+7 = 94 = 24$$

El resto por tanto es 24.

Ejercicio 4
Calcula el m.c.d. de los polinomios $2X^3+2X+1$ y X^4+X^2+2 en $\mathbb{Z}_5[X]$.
Solución:
Para ello, utilizamos el algoritmo de Euclides. Realizamos entonces divisiones sucesivas hasta obtener resto 0.

$$
\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ \cline{6-9}
4 & 0 & 4 & 2 & & 3 & 0 & & \\ \cline{1-4}
 & 0 & 0 & 2 & 2 & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc|ccc}
2 & 0 & 2 & 1 & & & 2 & 2 & \\ \cline{7-9}
3 & 3 & & & & & 1 & 4 & 2 \\ \cline{1-2}
 & 3 & 2 & & & & & & \\
 & 2 & 2 & & & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 4 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|cc}
2 & 2 & 2 & \\ \cline{3-4}
3 & & 1 & 1 \\ \cline{1-1}
 & 2 & & \\
 & 3 & & \\ \cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}
$$

Es decir:
$X^4 + X^2 + 2 = (2X^3 + 2X + 1)(3X) + 2X + 2$,
$2X^3 + 2X + 1 = (2X + 2)(X^2 + 4X + 2) + 2$,
$2X + 2 = 2(X + 1) + 0$.
Por tanto, 2 es un máximo común divisor de los polinomios dados. Como el máximo común divisor lo tomamos siempre mónico, multiplicamos por una constante (3), y nos queda que $mcd(X^4 + X^2 + 2, 2X^3 + 2X + 1) = 1$.

Ejercicio 5
Se considera $D(84)$, el conjunto de los divisores positivos de 84, con la relación de orden "*divide a*".

1. Calcula cuántos elementos tiene $D(84)$.
2. Calcula las cotas superiores e inferiores, el supremo y el ínfimo, el máximo y el mínimo y los elementos maximales y minimales de $A = \{2, 4, 6, 12, 14\}$ dentro de $D(84)$.
3. Razona si $D(84)$ es o no un álgebra de Boole.

Solución:

1. La factorización de 84 como producto de primos es $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. El número de divisores es entonces $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$. Éstos son:

$$D(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$$

2. Tenemos:

Cotas superiores	$\{84\}$
Cotas inferiores	$\{1, 2\}$
Supremo	84
Ínfimo	2
Máximo	No tiene
Mínimo	2
Elementos maximales	$\{12, 14\}$
Elementos minimales	$\{2\}$

3. El conjunto $D(84)$ no es un álgebra de Boole, ya que tiene 12 elementos, y el número de elementos de un álgebra de Boole finita es una potencia de 2. También podría argumentarse comprobando que no es un retículo complementado, ya que los elementos 2, 6, 14 y 42 no tienen complemento.

Ejercicio 6
Se considera la expresión booleana $Y(X' + XZ) + X'Y'$ y sea $F : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$ la función booleana que define.

1. Da la forma normal canónica disyuntiva.

2. Simplifica esta expresión booleana (halla una forma mínima).

3. Escribe esta función booleana utilizando únicamente el operador $\uparrow$, "NAND".

X	Y	$\uparrow$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Solución

1. Podemos proceder de dos formas

   - Operando a partir de la expresión booleana que nos define f hasta llegar a una expresión como suma de minterm.
   $$\begin{aligned} F(X,Y,Z) = \; & Y(X' + XZ) + X'Y' = \\ & YX' + YXZ + X'Y' = \\ & X'Y(Z + Z') + XYZ + X'Y'(Z + Z') = \\ & X'YZ + X'YZ' + XYZ + X'Y'Z + X'Y'Z' \end{aligned}$$
   - calculando explícitamente los valores de la función F.

X	Y	Z	XZ	$X' + XZ$	$Y(X' + XZ)$	$X'Y'$	$Y(X' + XZ) + X'Y'$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1

   Y por tanto, se tiene que

$$F(X,Y,Z) = X'Y'Z' + X'Y'Z + X'YZ' + X'YZ + XYZ$$

2. Dibujamos un diagrama de Karnaugh con la función F

	YZ	$Y'Z$	$Y'Z'$	YZ'
X	1			
X'	1	1	1	1

Y por tanto, la expresión simplificada de F seía

$$F(X,Y,Z) = X' + YZ.$$

3. Para escribir la función F usando únicamente el operador $\uparrow$ podemos proceder como sigue:

   - Puesto que $X \uparrow Y = (XY)' = X' + Y'$ tenemos que
     $$X' = X' + X' = X \uparrow X$$
     $$X + Y = X'' + Y'' = X' \uparrow Y' = (X \uparrow X) \uparrow (Y \uparrow Y)$$
     $$XY = (XY)'' = (X \uparrow Y)' = (X \uparrow Y) \uparrow (X \uparrow Y)$$
     De donde:
     $$\begin{aligned} F(X,Y,Z) = \ & X' + YZ = \\ & (X' \uparrow X') \uparrow (YZ \uparrow YZ) = \\ & [(X \uparrow X) \uparrow (X \uparrow X)] \uparrow [((Y \uparrow Z) \uparrow (Y \uparrow Z)) \uparrow ((Y \uparrow Z) \uparrow (Y \uparrow Z))] \end{aligned}$$
   - También se podría haber hecho:

     $$F(X,Y,Z) = X' + YZ = X' + (YZ)'' = X \uparrow (YZ)' = X \uparrow (Y \uparrow Z)$$

Ejercicio 7
Calcula de cuántas formas distintas pueden reordenarse las letras de la palabra ANACONDA.
De todas las anteriores, determina cuántas hay que empiecen o terminen por A.
Solución:
La palabra ANACONDA tiene 8 letras, de las que hay tres aes, dos enes, mientras que las otras no aparecen repetidas. El número total de ordenaciones distintas es entonces:

$$P_8^{3,2,1,1,1} = \frac{8!}{3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 3360$$

Si queremos saber cuántas empiezan o terminan por A, contamos primero las que empiezan por A.
En este caso, hemos de ordenar las letras de NACONDA (y colocar una A al principio), y esto puede hacerse de $\frac{7!}{2!2!} = 1260$ formas distintas.
A continuación contamos las que terminan por A, o lo que es equivalente, contamos las ordenaciones de las letras de ANACOND, que vuelven a ser 1260.
Por último, contamos las que empiezan y terminan por A, y éstas son $\frac{6!}{2!} = 360$.
El principio de inclusión-exclusión nos dice que el número de palabras que pueden formarse ordenando las letras de ANACONDA, y que empiezan o terminan por A es

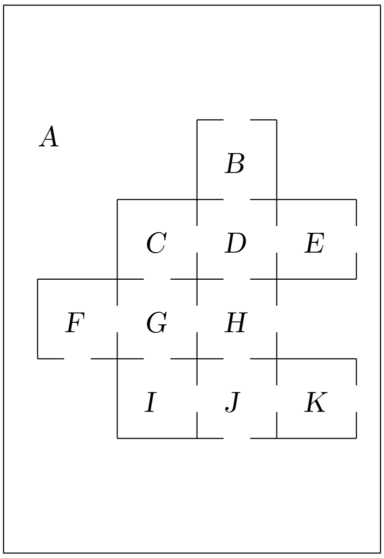
$$1260 + 1260 - 360 = 2160$$

Ejercicio 8

Una casa está dividida en habitaciones tal y como se indica en la figura de la derecha.

1. *Estudia si es posible pasar por todos los huecos (puertas), una sola vez, y volver al punto de partida.*

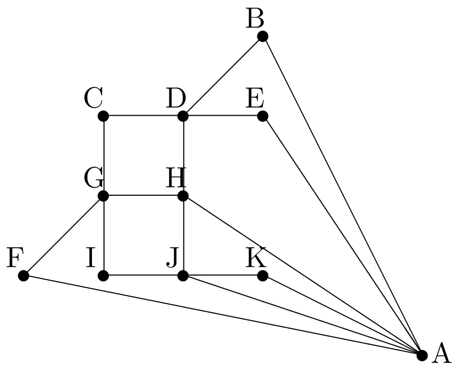
2. *Estudia si es posible pasar por cada habitación (indicadas por las letras de la figura), una sola vez, y volver al punto de partida.*



NOTAS:
(1) El exterior, señalado por A, se considera una habitación.
(2) Si se puede, dar el recorrido mediante una lista de las habitaciones; si no es posible hacer un recorrido, dar una respuesta razonada, concisa y clara, no vale con decir que no es posible encontrar un camino.

Solución:

Para responder a estas cuestiones representamos el la casa mediante un grafo, en el que los vértices serán las habitaciones y habrá un lado uniendo dos vértices si entre las correspondientes habitaciones hay una puerta que las comunica.
El grafo entonces sería éste:



1. Lo que se nos pregunta aquí es si el grafo es de Euler. Para esto, vemos si el grado de cada vértice es par, en cuyo caso el grafo será de Euler.

$$gr(A) = 6;\ gr(B) = gr(C) = gr(E) = gr(F) = gr(I) = gr(K) = 2;$$
$$gr(D) = gr(G) = gr(H) = gr(J) = 4.$$

Por tanto el grafo es de Euler y es posible encontrar un camino que recorra todos los lados (puertas) una sola vez y regrese al punto de partida.

Un posible camino podría ser

$$A\ B\ D\ C\ F\ G\ F\ A\ E\ D\ H\ A\ K\ J\ H\ G\ I\ J\ A$$

2. En este caso se nos pregunta si el grafo es Hamiltoniano. La respuesta es que no. Para razonar esto nos fijamos en los vértices A, B, D, E.

   Si tenemos un camino de Hamilton, en un instante pasará por el vértice B. Dado que podemos elegir el sentido del camino, supongamos que lo hace en el sentido "D B A".

   Si la continuación del camino es el vértice E, el siguiente vértice tiene que ser D, y tendríamos un camino que pasa dos veces por el vértice D.

   Si la continuación es cualquier otro vértice conectado con A (F, H, K, J), cuando el camino pase por E, deberá hacerlo, bien A E D, bien D E A, con lo que uno de los vértices (A o D) se repite.

   En cualquier caso, el camino pasa dos veces por el vértice A o por el vértice D.

Ejercicio 9
De un árbol se conoce que tiene 8 vértices de grado 2, 13 vértices de grado 3, 9 vértices de grado 4, 1 vértice de grado 7 y el resto de grado 1. Determina el número de vértices del árbol.
Solución:
Llamemos m al número de vértices de grado 1 y n al número total de vértices. Es claro entonces que $m + 8 + 13 + 9 + 1 = n$, es decir, $n = m + 31$. Al ser un árbol, el número de lados es $n - 1 = m + 30$. Puesto que la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de lados, tenemos que

$$m \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 1 \cdot 7 = 2(m + 30)$$

$$m + 98 = 2m + 60$$

$$m = 38.$$

Y por tanto, el número de vértices es $38 + 31 = 69$.

Matemática Discreta

(04/12/2006)

Solución

Ejercicio 1. Demuestra que para cualquier número natural $n \geq 1$ se verifica que

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}.$$

Solución:
Lo demostraremos por inducción.
Para $n = 1$ el resultado es cierto, pues $1 \cdot 2^1 = 2$ y $2 + (1-1) \cdot 2^{1+1} = 2$.
Supongamos que $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$, y comprobemos que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k = 2 + (n+1-1) \cdot 2^{n+1+1}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\ &= 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\ &= 2 + (n-1+n+1) \cdot 2^{n+1} \\ &= 2 + 2n \cdot 2^{n+1} \\ &= 2 + n \cdot 2^{n+2} \\ &= 2 + (n+1-1) \cdot 2^{n+1+1} \end{aligned}$$

como queríamos

Ejercicio 2. Factoriza como producto de irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ el polinomio $3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 6$.

Solución:
En primer lugar buscamos las raíces racionales. En principio, las posibles raíces son:

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 6,\ -6,\ \frac{1}{3},\ \frac{-1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{-2}{3}$$

pues el numerador debe ser un divisor del término independiente y el denominador del coeficiente líder.

También sabemos que si $\frac{a}{b}$ es una raíz, entonces $a - b$ es un divisor de $p(1) = 15$. Las posibles raíces son entonces

$$2,\ -2,\ 6,\ \frac{2}{3},\ \frac{-2}{3}$$

Como $a + b$ debe ser un divisor de $p(-1) = -5$, nos quedan entonces como posibles raíces -2, $\frac{2}{3}$ y $\frac{-2}{3}$. Evaluamos entonces:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 5 & -4 & 5 & 6 \\ -2 & & -6 & 2 & 4 & -1 \\ \hline & 3 & -1 & -2 & 9 & -12 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 5 & -4 & 5 & 6 \\ \frac{2}{3} & & 2 & \frac{14}{3} & \frac{4}{9} & \frac{98}{27} \\ \hline & 3 & 7 & \frac{2}{3} & \frac{49}{9} & \frac{260}{27} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 5 & -4 & 5 & 6 \\ \frac{-2}{3} & & -2 & -2 & 4 & -6 \\ \hline & 3 & 3 & -6 & 9 & 0 \end{array}$$

Por tanto, tenemos que

$$3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^3 + 3x^2 - 6x + 9) = (3x+2)(x^3 + x^2 - 2x + 3).$$

Y como $x^3 + x^2 - 2x + 3$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ (ya que al reducirlo módulo 2 nos queda $x^3 + x^2 + 1$, que es irreducible), la factorización de $p(x)$ como producto de irreducibles es $(3x+2)(x^3 + x^2 - 2x + 3)$.

Ejercicio 3. ¿Cuántos números hay, entre 30000 y 50000, que acaben en 16, y que al dividirlos por 138 den resto 82?.

Solución:

Un número x termina en 16 si al restarle 16 nos sale múltiplo de 100, es decir, si $x \equiv 16 (\text{mód } 100)$, mientras que la segunda condición nos dice que $x \equiv 82 (\text{mód } 138)$. Por tanto, hemos de resolver el sistema de congruencias

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 16 (\text{mód } 100) \\ x \equiv 82 (\text{mód } 138) \end{array}\right\}$$

$x = 16 + 100k$	Solución de la primera congruencia
$16 + 100k \equiv 82 (\text{mód } 138)$	Introducimos la solución en la segunda
$100k \equiv 66 (\text{mód } 138)$	
$50k \equiv 33 (\text{mód } 69)$	Dividimos por $2 = \text{mcd}(100, 138)$
$1450k \equiv 957 (\text{mód } 69)$	Multiplicamos por $29 = 50^{-1}$ en $\mathbb{Z}_{69}$ (calculado más abajo)
$k \equiv 60 (\text{mód } 69)$	Reducimos módulo 69
$k = 60 + 69k'$	Solución de la congruencia
$x = 16 + 100(60 + 69k') = 6016 + 6900k'$	Sustituimos el valor de k

				0
				1
69	50	19	1	-1
50	19	12	2	3
19	12	7	1	-4
12	7	5	1	7
7	5	2	1	-11
5	2	1	2	29

Le imponemos a la solución que se encuentre en el intervalo pedido.

$$30000 \leq 6016 + 6900k' \leq 50000 \Longrightarrow 23984 \leq 6900k' \leq 43984 \Longrightarrow \frac{23984}{6900} \leq k' \leq \frac{43984}{6900} \Longrightarrow 3'47 \leq k' \leq 6'37$$

y como $k' \in \mathbb{Z}$ deducimos que $4 \leq k' \leq 6$, luego hay 3 números en las condiciones pedidas.

Ejercicio 4. Calcula un polinomio $p(x)$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$, de grado 3, tal que $p(1) = 3$, $p(2) = 2$ y $p(x) \equiv (x^2 + x + 1) \text{mód } x + 1$.

Lo que tenemos es que resolver el siguiente sistema de congruencias

$$\begin{array}{rcrl} p(x) & \equiv & 3 & (\text{mód } x - 1) \\ p(x) & \equiv & 2 & (\text{mód } x - 2) \\ p(x) & \equiv & x^2 + x + 1 & (\text{mód } x + 1), \end{array}$$

y como $x^2 + x + 1 \equiv 4^2 + 4 + 1 (\text{mód } x + 1)$ el sistema queda

$$\begin{array}{rcrl} p(x) & \equiv & 3 & (\text{mód } x - 1) \\ p(x) & \equiv & 2 & (\text{mód } x - 2) \\ p(x) & \equiv & 1 & (\text{mód } x - 4) \end{array}$$

Resolvemos dicho sistema de congruencias:

$p(x) = 3 + (x-1)c_1(x)$

$3 + (x-1)c_1(x) \equiv 2(\text{mód } x-2)$

$c_1(x) \equiv -1(\text{mód } x-2)$

$c_1(x) = 4 + (x-2)c_2(x)$

$p(x) = 3 + (x-1)(4 + (x-2)c_2(x)) = 4x + 4 + (x-1)(x-2)c_2(x)$

$4x + 4 + (x-1)(x-2)c_2(x) \equiv 1(\text{mód } x-4)$ y

$20 + (4-1)(4-2)c_2(x) \equiv 1(\text{mód } x-4)$

$6c_2(x) \equiv -19(\text{mód } x-4)$

$c_2(x) \equiv 1(\text{mód } x-4)$

$c_2(x) = 1 + (x-4)c(x)$

$p(x) = 4x+4+(1+(x-4)c(x))(x-1)(x-2) = 4x+4+1(x-1)(x-2)+(x-1)(x-2)(x-4)c(x)$ nos queda por tanto $p(x) = x^2 + x + 1 + (x^3 + 3x^2 + 4x + 2)c(x)$.

Como piden un polinomio de grado 3, elegimos $c(x)$ de grado 1 (por ejemplo, tomamos $c(x) = 1$, y nos queda

$$p(x) = x^3 + 4x^2 + 3$$

También podemos resoverlo por el método de Lagrange.

$p_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{x^2+4x+3}{3} = 3^{-1}(x^2+4x+3) = 2(x^2+4x+3) = 2x^2+3x+1,$

$p_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{x^2+4}{-2} = \frac{x^2+4}{3} = 3^{-1}(x^2+4) = 2(x^2+4) = 2x^2+3,$

$p_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{x^2+2x+2}{6} = x^2+2x+2.$

Y por tanto, el polinomio interpolador de Lagrange es:

$p(x) = 3 \cdot p_1(x) + 2 \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_4(x) = (x^2+4x+3) + (4x^2+1) + (x^2+2x+2) = x^2+x+1$

Luego todos los polinomios que satisfacen las condiciones del enunciado son los que resultan de sumarle al polinomio obtenido un polinomo que tenga como raíces a $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$, es decir, un múltiplo de $(x-1)(x-2)(x-4)$.

Ejercicio 5. Consideramos el conjunto $A = \{(1,2),\ (4,3),\ (3,5),\ (2,7),\ (5,7),\ (4,8)\} \subseteq \mathbb{N}^2$.

1. Dibuja los diagramas de Hasse de A, considerando, por una parte el orden producto, y por otra el orden lexicográfico.

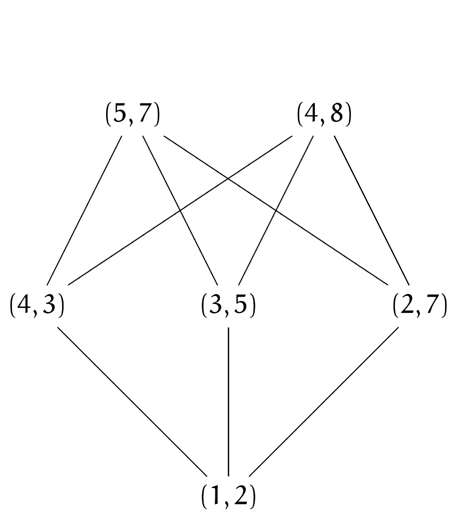
2. Estudia si $(A, \leq_{prod})$ es un retículo, y en caso afirmativo si es distributivo y/o complementado.

3. Estudia si $(A, \leq_{lex})$ es un retículo, y en caso afirmativo si es distributivo y/o complementado.

4. Calcula cotas inferiores, elementos maximales y minimales, máximo y mínimo, supremo e ínfimo de $(A, \leq_{prod})$.

Solución:

1. Los diagramas de Hasse de ambos conjuntos ordenados son:



2. Como puede apreciarse, $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$ no es un retículo, pues no existe el supremo de $(5,7)$ y $(4,8)$.

3. Dado que $(A, \leq_{\mathrm{lex}})$ es un conjunto totalmente ordenado, es un retículo distributivo. No es complementado.

4. Se tiene que:

   a) Cotas inferiores de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$
   b) Elementos maximales de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: $\{(5,7),(4,8)\}$
   c) Elementos minimales de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: $\{(1,2)\}$
   d) Máximo de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: No existe.
   e) Mínimo de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: $(1,2)$.
   f) Supremo de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: $(5,8)$.
   g) Ínfimo de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: $(1,2)$.

Ejercicio 6. Dada la función booleana $f(x,y,z) = (x \uparrow y) + (x+z')(x'+y)$ calcula su forma normal disyuntiva ($x \uparrow y = x$ NAND y).

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= (x \uparrow y) + (x+z')(x'+y) \\
&= (xy)' + (x+z')(x'+y) \\
&= x' + y' + xx' + xy + z'x' + z'y \\
&= x'(y+y') + (x+x')y' + xy + x'z' + yz' \\
&= x'y + x'y' + xy' + x'y' + xy + x'z' + yz' \\
&= xy + xy' + x'y + x'y' + x'z' + yz' \\
&= xy(z+z') + xy'(z+z') + x'y(z+z') + x'y'(z+z') + x'(y+y')z' + (x+x')yz' \\
&= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + x'yz' + x'y'z' + xyz' + x'yz' \\
&= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z'
\end{aligned}
$$

Ejercicio 7. Se quiere formar un comité de 10 personas. Hay 13 candidatos: 6 hombre y 7 mujeres.

1. ¿De cuántas formas puede hacerse?

2. ¿Y si queremos que haya igual número de hombres que de mujeres?

3. ¿Y si queremos que haya más mujeres que hombres?

Solución:

1. Tenemos que elegir, de un conjunto de 13 personas, un total de 10. Esto podemos hacerlo de

$$\binom{13}{10} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286$$

formas diferentes.

2. Si queremos que haya igual número de hombres que de mujeres, tendremos que elegir, por una parte, 5 hombres de entre 6 candidatos (tenemos $\binom{6}{5} = 6$ formas distintas de hacerlo, y por otra parte, 5 mujeres de entre 7 candidatas (lo que podemos hacer de $\binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ formas distintas). El principio del producto nos dice que la elección podemos hacerla de $6 \cdot 21 = 126$ formas diferentes.

3. Para que haya más mujeres que hombres, podemos elegir 6 mujeres ($\binom{7}{6} = 7$ formas) y 4 hombres ($\binom{6}{4} = 15$), o elegir 7 mujeres (una única forma de elegirlas) y 3 hombres ($\binom{6}{3} = 20$ formas distintas).

   En resumen:

6 mujeres y 4 hombres	$7 \cdot 15 = 105$	formas distintas.
7 mujeres y 3 hombres	$1 \cdot 20 = 20$	formas distintas.

   Por el principio de la suma, hay $105 + 20 = 25$ formas distintas de elegir un comité con más mujeres que hombres.

Ejercicio 8. La siguiente es la matriz de adyacencia de un grafo G (sin vértices ni lados paralelos).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & 0 & 1 \\ 0 & 1 & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & 0 & * & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 1 \\ 0 & * & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Completa los elementos que faltan de la matriz, y contesta razonadamente a las siguientes cuestiones sobre el grafo G:

1. ¿Es G un grafo de Euler?.

2. ¿Es G un grafo de Hamilton?.

3. ¿Es G bipartido?.

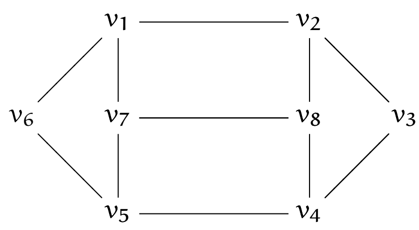
4. Da, si es posible, un camino de longitud 3 de v_3 a v_7.

Solución:

Al ser un grafo no dirigido, la matriz de adyacencia es simétrica, y al no tener lados paralelos, todos los elementos de la diagonal son cero. la matriz de adyacencia del grafo es entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

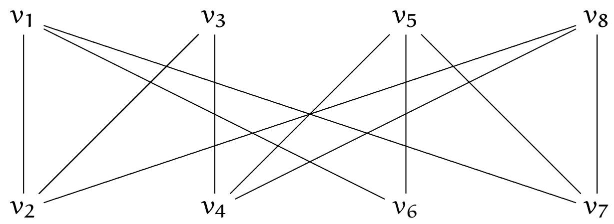
Una representación del grafo podría ser:



1. Claramente no es un grafo de Euler, pues hay vértices de grado impar ($v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8$).

2. Sí es un grafo de Hamilton. Un circuito de Hamilton es $v_1v_2v_3v_4v_8v_7v_5v_6v_1$.

3. El grafo es bipartido, pues no tiene ciclos de longitud impar. Para verlo más claro, podemos representar el grafo como sigue:



4. Caminos de longitud 3 de v_3 a v_7 hay cuatro, que son $v_3v_4v_5v_7$, $v_3v_4v_8v_7$, $v_3v_2v_8v_7$ y $v_3v_2v_1v_7$.

Matemática Discreta
Ingeniería Informática
Ingeniería Técnica en Informática de Gestión
Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas.
30 de enero de 2003

SOLUCIONES

Ejercicio 1. (1 punto) Demuestra por inducción que $11^{2n+1} + 10^{2n+1}$ es un múltiplo de 7 para todo $n \geq 0$.

Solución 1. Base de la inducción: Para $n = 0$, $11^1 + 10^1 = 21$ que es múltiplo de 7.

Hipótesis de inducción: Para un cierto número natural n se verifica que $11^{2n+1} + 10^{2n+1}$ es múltiplo de 7.

Paso inductivo: Calculamos

$$11^{2(n+1)+1} + 10^{2(n+1)+1} = 11^{2n+3} + 10^{2n+3} =$$

sumando y restando el mismo número

$$= 11^2 11^{2n+1} + (11^2 10^{2n+1} - 11^2 10^{2n+1}) + 10^{2n+3} =$$

sacando factor común adecuadamente

$$= 11^2(11^{2n+1} + 10^{2n+1}) + 10^{2n+1}(-11^2 + 10^2)$$

En esta expresión el primer sumando es múltiplo de 7 por hipótesis de inducción y el segundo contiene al factor (-21) que es múltiplo de 7; así la propiedad también ocurre para $n + 1$.

Ejercicio 2. (1 punto) Resuelve la ecuación

$$1993^{1993} \equiv 3n \pmod{13}$$

Solución 2. En primer lugar calculamos 1993^{1993} módulo 13. Como $1993 = (153)(13) + 4$, tenemos que $1993^{1993} \equiv 4^{1993} \pmod{13}$. **Método 1:** Usando el Teorema de Fermat: Si p es primo, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ si $(a, p) = 1$. Así como $1993 = (166)(12) + 1$ tenemos $(4^{12})^{166} 4^1 \equiv 1^{166} 4 \equiv 4 \pmod{13}$. **Método 2:** Reducimos el exponente $4^{1993} \equiv 4^{(2)(996)+1} \equiv (4^2)^{996} 4 \equiv 3^{996} 4 \equiv (3^2)^{498} 4 \equiv ((-4)^2)^{249} 4 \equiv 3^{249} 4 \equiv (3^3)^{63} 4 \equiv 1^{63} 4 \equiv 4 \pmod{13}$

Por tanto tenemos que resolver $3n \equiv 4 \pmod{13}$ y como el inverso de 3 en $\mathbb{Z}_{13}$ es 9 nos queda $n \equiv 10 \pmod{13}$.

Ejercicio 3. (2 puntos) Resuelve en $\mathbb{Z}_7[x]$ el siguiente sistema de congruencias.

$$\begin{cases} (3x^3 + 2x + 1)a(x) \equiv 2x^2 + 2 \pmod{x + 2} \\ (2x^2 + 2x)a(x) \equiv 3 \pmod{x + 4} \end{cases}$$

Solución 3. Simplificamos los coeficientes en ambas ecuaciones tomando restos el módulo correspondiente; para ello no es necesario dividir por el módulo puesto que al ser polinomios de grado uno podemos usar el Teorema del factor y obtener el resto evaluando los polinomios en el escalar adecuado. El sistema queda

$$\begin{cases} a(x) \equiv 3 \pmod{x+2} \\ 3a(x) \equiv 3 \pmod{x+4} \end{cases}$$

y dividiendo por 3 en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} a(x) \equiv 3 \pmod{x+2} \\ a(x) \equiv 1 \pmod{x+4} \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos $a(x) = 3 + (x+2)p(x)$ y sustituyendo en la segunda $3 + (x+2)p(x) \equiv 1 \pmod{x+4}$. Como $x + 2 \equiv 5 \pmod{x+4}$ tenemos $5p(x) \equiv 5$ y por tanto $p(x) \equiv 1 \pmod{x+4}$.

Así $p(x) = 1 + (x+4)q(x)$ y sustituyendo en la expresión de $a(x)$:

$$a(x) = 3 + (x+2)(1 + (x+4)q(x)) = (x+5) + (x+2)(x+4)q(x)$$

donde $q(x)$ toma valores en $\mathbb{Z}_7[x]$.

Ejercicio 4. (2 puntos) Estudia si es o no es irreducible el polinomio

$$p(x) = x^4 + 11x^3 + 6x^2 + 2x + 1$$

en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Z}_5[x]$. En caso de que sea reducible encuentra su descomposición como producto de factores irreducibles.

Solución 4. En $\mathbb{Z}[x]$: Reduciendo a $\mathbb{Z}_2[x]$ queda $p(x) = x^4 + x^3 + 1$ que no tiene raices y por tanto no tiene factores irreducibles de grado 1; como el único polinomio irreducible de grado 2 en $\mathbb{Z}_2[x]$ es x^2+x+1 y tampoco divide a $p(x)$, entonces no tiene factores irreducibles de grado 2 y por tanto es irreducible.

En $\mathbb{Z}_5[x]$ el polinomio queda $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$ que tiene por raiz a -1, por tanto descompone. Dividiendo por $x + 1$ obtenemos

$$p(x) = (x+1)(x^3 + x + 1)$$

y el factor de grado 3 no tiene raices, por tanto esta es la descomposición en irreducibles pedida.

Ejercicio 5. En $\mathbb{N}^3$ consideramos el conjunto

$$S = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}.$$

Consideremos cada uno de los siguientes órdenes en $\mathbb{N}^3$,

(a) orden producto cartesiano ($\leq$),

(b) orden lexicográfico ($\preceq_{\text{lex}}$),

(c) orden grado total lexicográfico ($\preceq_{\text{tdeg}}$).

1.- (1’2 puntos) Dibuja el diagrama de Hasse de S con el orden inducido correspondiente.

2.- (0’4 puntos) ¿En algún caso forman un subretículo de $\mathbb{N}^3$ con el orden correspondiente?

3.- (0’4 puntos) ¿En algún caso forman un álgebra de Boole?

Solución 5. 1. Los diagramas de Hasse correspondientes son

2. Sí, en todos los casos. Con el primer orden se comprueba que el supremo y el ínfimo de cada pareja en $\mathbb{N}^3$ vuelve a estar en el conjunto. En los dos últimos, como se trata de órdenes totales, esto ocurre para cualquier subconjunto.

3. Sí, en el primer caso el diagrama de Hasse obtenido es el del álgebra de Boole con 3 átomos.

Ejercicio 6. (2 puntos). Responde razonadamente a las siguientes preguntas.

1. ¿Cuántos lados hay que eliminar de K_{2n+1} para obtener $K_{n,n+1}$?
2. ¿Para que valores de n es $K_{n,n+1}$ plano?
3. ¿Para que valores de n es $K_{n,n+1}$ un circuito de Euler?
4. ¿Para que valores de n es $K_{n,n+1}$ un camino de Euler?
5. ¿Para que valores de n es $K_{n,n+1}$ un grafo de Hamilton?

Solución 6. 1. K_{2n+1} tiene $\frac{(2n+1)(2n+1-1)}{2} = n(2n+1)$ lados mientras que $K_{n,n+1}$ tiene sólo $n(n+1)$ lados. Restando obtenemos que hay que quitar n^2 lados.

2. Debe ser $n \leq 2$ porque si $n > 2$ entonces $K_{n,n+1}$ contiene como subgrafo a $K_{3,3}$ que no es plano.

3. Como para que sea un circuito de Euler es condición necesaria (y suficiente) que tenga todos los vértices de grado par, entonces $K_{n,n+1}$ nunca lo será puesto que unos vértices tienen grado n y otros $n+1$ y uno de estos dos números es impar por ser consecutivos.

4. Un camino de Euler tiene que tener exactamente dos vértices de grado impar por tanto el único es $K_{2,3}$.

5. Para construir un circuito cualquiera en un grafo bipartido siempre se visitan tantos vértices de un conjunto como del otro; para que un bipartido sea de Hamilton ambos conjuntos deber tener el mismo número de vértices. Por tanto $K_{n,n+1}$ nunca es de Hamilton.

Matemática Discreta

Alumno:____ **DNI:**____________

I. Informática   I.T.I. Gestión   I.T.I. Sistemas   Grupo:

(06/09/05)

Ejercicio 1. *Demuestra por inducción que para cualquier número natural $n \geq 0$, el número $n(n^2+2)$ es múltiplo de* 3.

Solución:

- En primer lugar, se comprueba fácilmente que $0(0^2+2) = 0$ es múltiplo de 3.
- Supongamos que $n(n^2+2) = 3k$, para k un número natural. En ese caso, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} (n+1)((n+1)^2+2) & = & (n+1)(n^2+2n+1+2) = \\ & = & n(n^2+2+2n+1)+1(n^2+2n+3) = \\ & = & n(n^2+2)+n(2n+1)+n^2+2n+3 = \\ & = & n(n^2+2)+2n^2+n+n^2+2n+3 = \\ & = & 3k+3n^2+3n+3 = \mathbf{3(k+n^2+n+1)} \end{array}$$

Por el principio de inducción deducimos que $n(n^2+2)$ es múltiplo de 3 para cualquier $n \in \mathbb{N}$. ■

Ejercicio 2. *¿Cuántas soluciones tiene la ecuación diofántica*

$$210x - 91y = 77$$

que verifiquen que $-500 \leq x, y \leq 500$?

Solución:

Calculamos el máximo común divisor de 210 y 91 haciendo uso del algoritmo de Euclides.

$$\begin{array}{rcl} 210 & = & 91 \cdot 2 + 28 \\ 91 & = & 28 \cdot 3 + 7 \\ 28 & = & 7 \cdot 4 \end{array}$$

Vemos que $mcd(210, 91) = 7$, y puesto que $7|77$, la ecuación tiene solución.

Hallamos una solución particular de $210\ u + 91\ v\ =\ 7$:

$$\begin{array}{rcl} 7 & = & 91 + 28 \cdot (-3) = \\ & = & 91 + (210 + 91 \cdot (-2)) \cdot (-3) = 210 \cdot (-3) + 91 \cdot 7 \end{array}$$

Multiplicando por 11, obtenemos:

$$77 = 210 \cdot (-33) + 91 \cdot 77 = 210 \cdot (-33) - 91 \cdot (-77)$$

Puesto que $\frac{210}{7} = 30$ y $\frac{91}{7} = 13$, la solución general de la ecuación $210x - 91y = 77$ es:

$$\begin{array}{rcl} x & = & -33 + 13k \\ y & = & -77 + 30k \end{array} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Acotamos ahora las posibles soluciones:

$$-500 \leq -33 + 13k \leq 500 \Longrightarrow -467 \leq 13k \leq 533 \Longrightarrow \frac{-467}{13} \leq k \leq \frac{533}{13} \Longrightarrow -38 \leq k \leq 41$$

$$-500 \leq -77 + 30k \leq 500 \Longrightarrow -423 \leq 30k \leq 577 \Longrightarrow \frac{-423}{30} \leq k \leq \frac{577}{30} \Longrightarrow -14 \leq k \leq 19$$

Por tanto, la ecuación $210x - 91y = 77$ tiene treinta y cuatro soluciones comprendidas en el intervalo $[-500, 500]$ (las correspondientes a los valores de $k = -14, -13, \cdots, 18, 19$). ■

Ejercicio 3. *Calcula de forma exacta la suma de todos los números de la forma* $3+5k$*, con* $k \geq 0$*, y que sean menores o iguales que* 12345*.*

Solución: Se tiene que $3+5k \leq 12345 \Longrightarrow 5k \leq 12342 \Longrightarrow k \leq 2468$. Por tanto, hemos de calcular la suma:

$$\sum_{k=0}^{2468}(3+5k)$$

y esa suma vale:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2468}(3+5k) &= \sum_{k=0}^{2468} 3 + \sum_{k=0}^{2468} 5k = \\
&= 3\cdot 2469 + 5\cdot \sum_{k=0}^{2468} k \\
&= 7407 + 5\cdot \frac{2468\cdot 2469}{2} = \\
&= 7407 + 5\cdot 3046746 = 7407 + 15233730 = 15241137
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 4. *Calcula cuantos elementos tiene* $A = \mathbb{Z}_7[x]_{x^3+2x+3} = \frac{\mathbb{Z}_7[x]}{(x^3+2x+3)}$.
¿Es A *un cuerpo?.*

Solución: Se tiene que

$$A = \{[q(x)] : q(x) \in \mathbb{Z}_7[x];\ gr(q(x)) \leq 2\}$$

es decir, A está en biyección con los posibles restos de dividir un polinomio de $\mathbb{Z}_7[x]$ por x^3+2x+3. Por tanto,

$$A = \{[a_0 + a_1x + a_2x^2] : a_i \in \mathbb{Z}_7\}$$

El número de elementos de A es entonces $7\cdot 7\cdot 7 = 343$ (pues tenemos 7 posibilidades para elegir cada uno de los coeficientes a_0, a_1 y a_2).

Para estudiar si A es o no un cuerpo, necesitamos comprobar si el polinomio $p(x) = x^3+2x+3$ es o no irreducible, y al ser dicho polinomio de grado 3 basta comprobar si tiene o no raíces. Se tiene entonces:

- $p(0) = 0^3 + 2\cdot 0 + 3 = 3$
- $p(1) = 1^3 + 2\cdot 1 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$
- $p(2) = 2^3 + 2\cdot 2 + 3 = 1 + 4 + 3 = 1$
- $p(3) = 3^3 + 2\cdot 3 + 3 = 6 + 6 + 3 = 1$
- $p(4) = 4^3 + 2\cdot 4 + 3 = 1 + 1 + 3 = 5$
- $p(5) = 5^3 + 2\cdot 5 + 3 = 6 + 3 + 3 = 5$
- $p(6) = 6^3 + 2\cdot 6 + 3 = 6 + 5 + 3 = 0$

Como tiene una raíz (6), deducimos que el polinomio no es irreducible, luego A no es un cuerpo.

■

Ejercicio 5. *Calcula el valor de* a *para que el polinomio* $p(x) = x^2+118x+a \in \mathbb{Z}_{127}[x]$ *tenga exactamente una raíz.*

Solución:

Para que el polinomio tenga sólo una raíz, éste ha de ser de la forma $(x-b)^2$. Para que este polinomio adopte esta forma, la única posibilidad es que sea $x^2+118x+a = (x+59)^2 = x^2+118x+59^2 = x^2+118x+52$. Por tanto, $a = 52$.

También podría resolverse teniendo en cuenta que el polinomio debe tener una raíz doble, y eso ocurre si, y sólo si, $118^2 - 4a = 0$, es decir, $81 = 4a$. Como el inverso de 4 módulo 127 es 32, deducimos que a debe valer $81 \cdot 32 = 52$.

Otra forma de hacerlo es a partir del hecho de que este polinomio tiene una raíz doble si, y sólo si, $mcd(p(x), p'(x)) \neq 1$. Puesto que $gr(p'(x)) = 1$, la única posibilidad es que $p'(x)|p(x)$. Calculamos $p'(x)$, y obtenemos que $p'(x) = 2x + 118 = 2(x + 59) = 2(x - 68)$, por tanto, para que $p(x)$ tenga únicamente una raíz, ésta debe ser 68. Evaluamos Calculamos $p(68)$ y nos queda:

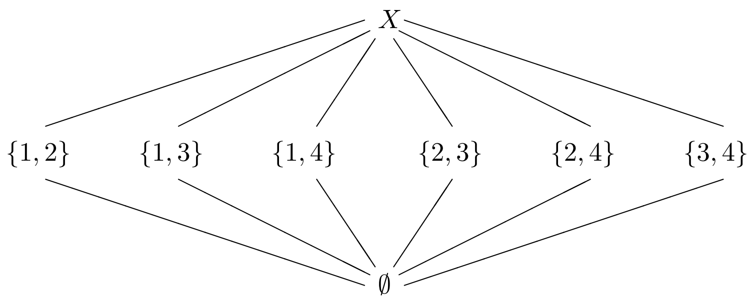
$$p(68) = 68^2 + 118 \cdot 68 + a = 52 + 23 + a = 75 + a$$

de donde $a = -75 = 52$. ■

Ejercicio 6. *Estudia si el conjunto formado por todos los subconjuntos de $X = \{1, 2, 3, 4\}$ que tienen un número par de elementos es un retículo con el orden dado por la inclusión.*

Solución:

Para estudiar si es o no retículo, dibujamos su diagrama de Hasse:



y como puede apreciarse es un retículo.

El supremo de dos subconjuntos cualesquiera de dos elementos es X, y el ínfimo $\emptyset$. En cualquier otro caso, el supremo de dos subconjuntos es uno de ellos, y el ínfimo el otro.

■

Ejercicio 7. *En el conjunto $(D(90), |)$ calcula razonadamente todos los complementarios del número* 30.

Solución:

Sabemos que dados $x, y \in D(n)$ se tiene que $x \vee y = mcm(x, y)$ y $x \wedge y = mcd(x, y)$. Por tanto, encontrar un complemento de 30 en $D(90)$ es encontrar un divisor de 90, x, tal que $mcd(30, x) = 1$ y $mcm(30, x) = 90$. Puesto que $mcd(30, x) \cdot mcm(30, x) = 30 \cdot x$ deducimos que, de existir x, éste debería valer 3. Pero esto no es posible, pues $mcd(30, 3) = 3 \neq 1$.

Por tanto, 30 no tiene complemento en $D(90)$.

■

Ejercicio 8. *Sea G un grafo con cinco vértices. Demuestra que si G no es un circuito de Euler (G no tiene un camino cerrado de Euler), entonces G es plano.*

Solución:

Si el grafo no fuera plano, contendría un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$. Puesto que nuestro grafo tiene cinco vértices, la posibilidad de $K_{3,3}$ queda descartada.

Ahora bien, si el grafo contuviera un subgrafo homeomorfo a K_5, y dado que el grafo tiene 5 vértices, el propio grafo sería K_5, pero este grafo es un circuito de Euler, pues todos los vértices tienen grado par (cuatro).

■

Ejercicio 9. *Demuestra que si en un árbol todos los vértices tienen grado impar entonces el número de lados de dicho árbol ha de ser impar.*

Solución:

Sea n_1 el número de vértices de grado 1, n_3 el número de vértices de grado 3, y así sucesivamente. En tal caso, se tiene que

$$n_1 + 3n_3 + 5n_5 + \cdots = 2l$$

y puesto que en un árbol el número de lados es 1 menos que el número de vértices se tiene también:

$$n_1 + n_3 + n_5 + \cdots = l + 1$$

Restando ambas igualdades nos queda:

$$2n_3 + 4n_5 + 6n_6 + \cdots = l - 1$$

y como el miembro de la izquierda es un número par, deducimos que $l - 1$ es par, luego l es impar. ■

Ejercicio 10. *Calcula cuantos números naturales menores o iguales que 2000 hay que no sean ni múltiplos de 8 ni múltiplos de 14.*

Solución:

Vamos a hallar en primer lugar, cuantos hay que sean múltiplos de 8, o múltiplos de 14. Sea $A = \{0, 8, 16, \cdots, 1992, 2000\}$, es decir, números naturales menore o iguales que 2000, y que son múltiplos de 8, y sea $B = \{0, 14, 28, \cdots, 1974, 1988\}$, es decir, los números naturales menores o iguales que 2000 y que son múltiplos de 14.

Entonces A tiene 251 elementos (pues $2000 = 8 \cdot 250$), y B tiene 143 elementos (pues $1988 = 14 \cdot 142$).

Sabemos que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, luego nos falta conocer cuantos elementos tiene $A \cap B$. Pero en $A \cap B$ están los múltiplos comunes de 8 y 14, es decir, los múltiplos de su mínimo común múltiplo, que vale 56. Por tanto, $A \cap B = \{0, 56, \cdots, 1904, 1960\}$, que tiene 36 elementos (pues $1960 = 56 \cdot 35$). Deducimos entonces que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 251 + 143 - 36 = 358$$

Es decir, existen 358 números naturales menores o iguales que 2000 que son múltiplos de 8 o múltiplos de 14.

Los números naturales menores que 2000, que no son ni múltiplos de 8 ni múltiplos de 14 serán todos los números naturales menores que 2000 (en total 2001) menos los que acabamos de obtener.

Hay por tanto $2001 - 358 = 1643$ números naturales, menores que 2000, y que no son ni múltiplos de 8, ni múltiplos de 14.

■

Matemática Discreta

Alumno:____ **DNI:**____________

I. Informática   I.T.I. Gestión   I.T.I. Sistemas   Grupo:

(14/09/2006)

Ejercicio 1. *¿Es cierto que para cualquier número natural* $n \geq 1$ *se verifica que*

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq n+1\ ?$$

Justifica la respuesta.

Solución:

No sólo es cierta la desigualdad, sino que se da la igualdad entre los dos miembros, aunque aquí demostraremos la desigualdad.

Haremos la demostración por inducción.

- En primer lugar, probamos que se da la desiguandad para $n = 1$. En este caso, lo que hemos de probar es que $\left(1+\frac{1}{1}\right) \leq 2$, lo cual es cierto, ya que $2 \leq 2$.

- En segundo lugar supondremos que se da la desigualdad para un número natural n y demostraremos que sigue siendo cierta para el número siguiente. Es decir, supongamos que

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq n+1$$

En tal caso, se tiene que

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\leq$$

$$\leq (n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = (n+1)\cdot\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right) = n+2$$

como queríamos.

Como hemos dicho al principio, en realidad se tiene que

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)= n+1$$

La demostración sería totalmente análoga a la hecha aquí.

Ejercicio 2. *¿Cuántos números naturales hay, menores que* 10000*, que acaben en* 7*, y que al dividirlos por* 55 *den resto* 12*?.*

Justifica la respuesta.

Solución:

Un número n acaba en 7 si al dividirlo por 10 da resto 7, es decir, $n \equiv 7 (\text{mód } 10)$

Decir que un número n da resto 12 al dividirlo por 52 es lo mismo que decir que $n \equiv 12 (\text{mód } 55)$.

Por tanto, hemos de encontrar las soluciones menores que 10000 al sistema de congruencias

$$\begin{array}{rcll} n & \equiv & 7 & (\text{mód } 10) \\ n & \equiv & 12 & (\text{mód } 55) \end{array}$$

Las soluciones de la primera congruencia son los números de la forma

$$n = 7 + 10k$$

Introducimos esta solución en la segunda, y nos queda:

$$\begin{array}{rcll} 7+10k & \equiv & 12 & (m\acute{o}d\ 55) \\ 10k & \equiv & 5 & (m\acute{o}d\ 55) \quad \text{dividimos toda la congruencia por 5} \\ 2k & \equiv & 1 & (m\acute{o}d\ 11) \quad \text{multiplicamos por el inverso de 2 en } \mathbb{Z}_{11} \\ k & \equiv & 6 & (m\acute{o}d\ 11) \end{array}$$

Y por tanto $k = 6 + 11k'$.

Por tanto, las soluciones del sistema son de la forma $n = 7 + 10(6 + 11k') = 67 + 110k'$, con k' un número entero cualquiera.

Acotamos el valor de k' para que la solución esté en el rango pedido.

$$0 \leq 67 + 110k' \leq 9999 \implies -67 \leq 110k' \leq 9932 \implies \frac{-67}{110} \leq k' \leq \frac{9932}{110}$$

y como $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$0 \leq k' \leq 90$$

Lo que da un total de 91 soluciones.

Ejercicio 3. *Sean* $x = 48572)_{16}$ *e* $y = 95883)_{16}$. *Expresa el valor de* $x + y$ *en base* 8.

Solución:

Podemos plantear este ejercicio de varias formas:

1. Sumamos los números en base 16, pasamos el resultado a base 2, y posteriormente a base 8.

$$\begin{array}{cccccc} & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 \\ + & 9 & 5 & 8 & 8 & 3 \\ \hline & D & D & D & F & 5 \end{array}$$

   Como $16 = 2^4$ cada cifra del número en base 16 da lugar a 4 cifras en base 2. Tenemos entonces que

$$x + y = DDDF5)_{16} = 11011101110111110101)_2$$

   Para pasar de base 2 a base $8 = 2^3$ basta con ir agrupando de 3 en 3, empezando por la derecha (por ejemplo $101)_2 = 5)_8$). Así, nos queda:

$$x + y = 3356765)_8$$

2. Reducimos ambos números a base 10, los sumamos, y después los pasamos a base 8.

   $x = 48572)_{16} = 4 \cdot 16^4 + 8 \cdot 16^3 + 5 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16 + 2 = 296306$

   $y = 95883)_{16} = 9 \cdot 16^4 + 5 \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16 + 3 = 612483$

   $x + y = 296306 + 612483 = 908789$

   $908789 = 8 \cdot 113598 + \underline{5}$

   $113598 = 8 \cdot 14199 + \underline{6}$

   $14199 = 8 \cdot 1774 + \underline{7}$

   $1774 = 8 \cdot 221 + \underline{6}$

   $221 = 8 \cdot 27 + \underline{5}$

   $27 = 8 \cdot \underline{3} + \underline{3}$

   La expresión de $x + y$ en base 8 viene dada por los números que hemos subrayado. Es decir,

$$x + y = 3356765)_8$$

3. Pasamos x e y a base 2, sumamos, y después pasamos a base 8.

$$x = 48572)_{16} = 1001000010101110010)_2 \qquad y = 95883)_{16} = 10010101100010000011)_2$$

La suma es entonces:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccc}
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
+ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

y por tanto $x + y = 11011101110111110101)_2 = 3356765)_8$.

Ejercicio 4. *Calcula el inverso de* 244 *en* $\mathbb{Z}_{2749}$.

Solución:
Utilizamos el algoritmo extendido de Euclides
$2749 = 244 \cdot 11 + 65$
$244 = 65 \cdot 3 + 49$
$65 = 49 \cdot 1 + 16$
$49 = 16 \cdot 3 + 1$
A partir de las divisiones construimos la tabla para el cálculo del inverso.

a	b	r	c	v
				0
				1
2749	244	65	11	-11
244	65	49	3	34
65	49	16	1	-45
49	16	1	3	169

Y por tanto, el inverso de 244 en $\mathbb{Z}_{2749}$ es 169.

Ejercicio 5. *Factoriza como producto de irreducibles el polinomio* $x^5 + x^4 + 3x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$

Solución:
En primer lugar comprobamos si tiene o no raíces. Dados los coeficientes, las posibles raíces racionales son $1, -1, 3, -3$ (el numerador debe ser un divisor del término independiente y el denominador del coeficiente líder) Probamos entonces:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -3 \\
1 & & 1 & 2 & 2 & 5 & 5 \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & 5 & 5 & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & -3 \\
-1 & & -1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0
\end{array}$$

Por tanto -1 es una raíz, y el polinomio $x^5+x^4+3x^2-3$ se puede factorizar como $(x+1)(x^4+3x-3)$.
Este último polinomio es irreducible. Basta aplicar el criterio de Eisenstein para el primo $p = 3$ (o reducirlo módulo 2). Por tanto, la factorización anterior es la factorización como producto de irreducibles. Es decir:

$$x^5 + x^4 + 3x^2 - 3 \;=\; (x + 1) \cdot (x^4 + 3x - 3)$$

Ejercicio 6. *Calcula un polinomio de grado 7, en* $\mathbb{Z}_7[x]$*, tal que* $p(1) = 0$*,* $p(2) = 4$ *y* $p(5) = 3$.

Solución:
Calculamos el polinomio usando la fórmula de interpolación de Lagrange. Para esto, sean los polinomios:
$p_1(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(1-2)(1-5)} = \frac{x^2-7x+10}{(-1)(-4)} = \frac{x^2+3}{4} = 4^{-1}(x^2 + 3) = 2(x^2 + 3) = 2x^2 + 6.$

$p_2(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(2-1)(2-5)} = \frac{x^2-6x+5}{1\cdot(-3)} = \frac{x^2+x+5}{4} = 4^{-1}(x^2 + x + 5) = 2(x^2 + x + 5) = 2x^2 + 2x + 3$

$p_5(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(5-1)(5-2)} = \frac{x^2-3x+2}{4\cdot 3} = \frac{x^2+4x+2}{5} = 5^{-1}(x^2 + 4x + 2) = 3(x^2 + 4x + 2) = 3x^2 + 5x + 6$

El polinomio interpolador es por tanto

$$0\cdot p_1(x)+4\cdot p_2(x)+3\cdot p_5(x)=4(2x^2+2x+3)+3(3x^2+5x+6)=x^2+x+5\ +\ 2x^2+x+4=3x^2+2x+2$$

Para que cumpla las condiciones del enunciado, el polinomio debe tener grado 7. Le sumamos entonces un polinomio $q(x)$, de grado 7, que verifique que $q(1)=q(2)=q(5)=0$. Un polinomio de esas características debe ser múltiplo de $(x-1)(x-2)(x-5)=x^3-8x^2+17x-10=x^3+6x^2+3x+4$. Valdría entonces, por ejemplo, $q(x)=x^4(x^3+6x^2+3x+4)=x^7+6x^6+3x^5+4x^4$ (en lugar de x^4 podríamos haber tomado cualquier otro polinomio de grado 4).

Por tanto, el resultado final es:

$$p(x)=x^7+6x^6+3x^5+4x^4+3x^2+2x+2$$

Otra forma de plantear el problema sería resolviendo el sistema de congruencias en $\mathbb{Z}_7[x]$.

$$\begin{array}{rcll} p(x) & \equiv & 0 & (\textit{mód}\ x-1) \\ p(x) & \equiv & 4 & (\textit{mód}\ x-2) \\ p(x) & \equiv & 3 & (\textit{mód}\ x-5) \end{array}$$

cuya solución es $p(x)=3x^2+2x+2+(x^3+6x^2+3x+4)\cdot q(x):\ q(x)\in\mathbb{Z}_7[x]$.

Ejercicio 7. *En la escuela, se quiere ofertar 8 asigntaturas optativas para un curso determinado, de las que hay que elegir 3. Hay dos opciones posibles:*

- *Se ofertan las 8 en un único cuatrimestre, y los alumnos deben elegir las* 3.
- *Se ofertan 3 en el primer cuatrimestre, y los alumnos deben elegir una, y se ofertan las otras 5 en el segundo cuatrimestre y los alumnos deben elegir dos de ellas.*

Razona cual de las dos posibilidades da más opciones de elección a los alumnos.

Solución:

En el primer caso, los alumnos deben elegir 3 asignaturas de 8 posibles. Esto pueden hacerlo de $\binom{8}{3}=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}=56$ formas distintas.

En el segundo caso, en el primer cuatrimestre los alumnos tienen 3 posibilidades de elegir (una asignatura entre 3 posibles). Por cada una de esas elecciones pueden hacer un total de $\binom{5}{2}=10$ elecciones en el segundo cuatrimestre. En total, el número de opciones distintas es $3\cdot10=30$.

Por tanto, la primera opción es la que ofrece más posibilidades de elección a los alumnos.

Ejercicio 8. *Prueba que en un retículo distributivo* $(L,\vee,\wedge)$ *se da la siguiente igualdad para cualesquiera* $x,y,z\in L$.

$$(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)=(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$$

Solución:

Se tiene que:

$$\begin{array}{ll}
(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x) & \\
=[(x\wedge y)\vee(y\wedge z)]\vee(z\wedge x) & \text{por la propiedad asociativa de } \vee \\
=[y\wedge(x\vee z)]\vee(z\wedge x) & \text{por la propiedad distributiva de } \wedge \text{ respecto a } \vee \\
=\big[[y\wedge(x\vee z)]\vee z\big]\wedge\big[[y\wedge(x\vee z)]\vee x\}\big] & \text{propiedad distributiva} \\
=\big[(y\vee z)\wedge[(x\vee z)\vee z]\big]\wedge\big[(y\vee x)\wedge[(x\vee z)\vee x]\big] & \text{propiedad distributiva} \\
=(y\vee z)\wedge(z\vee z\vee x)\wedge(x\vee y)\wedge(z\vee x\vee x) & \text{propiedad distributiva y conmutativa} \\
=(y\vee z)\wedge(z\vee x)\wedge(x\vee y)\wedge(z\vee x) & \text{idempotencia} \\
=(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x) & \text{propiedad conmutativa e idempotencia}
\end{array}$$

Ejercicio 9. *Da un ejemplo de un grafo, con 6 vértices o menos, tal que no sea plano y no contenga un circuito de Hamilton.*

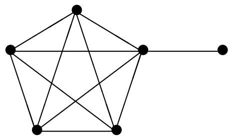
Justifica la respuesta.

Solución:

Para que no sea plano, debe contener un subgrafo que pueda contraerse a K_5 o a $K_{3,3}$. Dado que $K_{3,3}$ tiene 6 vértices, y es un grafo Hamiltoniano, nuestro grafo no contendrá a $K_{3,3}$, luego debe contener a K_5.

Como K_5 también es Hamiltoniano, a K_5 hemos de añadirle un vértice.

Después de esto, un grafo con tales características podría ser



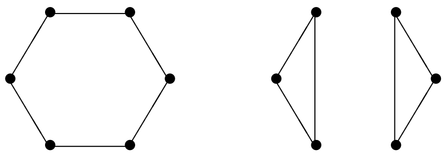
Tal grafo tiene 6 vértices, no es plano por contener a K_5, y no contiene ningún circuito de Hamilton al tener un vértice de grado

Ejercicio 10. *Da dos grafos regulares, no isomorfos entre sí, pero que tengan igual número de vértices y de lados.*

Justifica la respuesta.

Solución:

Una pareja de grafos podría ser:



Ambos tienen 6 vértices, 6 lados. Todos los vértices tienen grado 2, y sin embargo no son isomorfos, pues uno es conexo y el otro no.

Ejercicio 1. El número de soluciones del sistema

$$\begin{cases} 6x \equiv 10 \pmod{14} \\ 9x \equiv 6 \pmod{24} \end{cases}$$

en el intervalo $[700, 1000]$ es

1. 3
2. 6
3. 7
4. 11

Ejercicio 2. Un número n se escribe en base b con 16 cifras. El número de cifras de n en base b^2 es:

1. $\sqrt{16} = 4$.
2. $\frac{16}{2} = 8$.
3. Depende del valor de b.
4. $16^2 = 256$.

Ejercicio 3. Sea p un número primo. La congruencia $ax \equiv 1 (mod\ p^2)$

1. No tiene solución, pues p^2 no es primo.
2. Tiene solución si, y sólo si, $ax \equiv 1(mod\ p)$ tiene solución.
3. Tiene solución, ya que $mcd(a,1)|p^2$.
4. Tiene solucion salvo que a sea múltiplo de p^2.

Ejercicio 4. El resto de dividir 305^{401} entre 13 es

1. 6
2. 11
3. 2
4. 0

Ejercicio 5. La solución general de la ecuación diofántica

$$307x + 421y = 12$$

es

1. $x = 48 + 421k$, $y = -35 + 307k$ con $k \in \mathbb{Z}$
2. $x = 48$, $y = -35$
3. $x = (48)(12) + 421k$, $y = (-35)(12) - 307k$ con $k \in \mathbb{Z}$
4. $x = 48 + 421k$, $y = -35 - 307k$ con $k \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 6. ¿Cuál de los siguientes anillos es un cuerpo?

1. $\mathbb{Z}[x]$
2. $\mathbb{Q}[x]_{x^2-1}$
3. $\mathbb{Z}_2[x]_{x^2+1}$
4. $\mathbb{Z}_3[x]_{x^2+1}$

Ejercicio 7. Dado el polinomio $q(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2$

1. Es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$, pues no tiene raíces enteras.
2. Sus factorizaciones módulo p, son:

   p=2: $q(x) = x^4 = x^2 \cdot x^2$.
   p=3: $q(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)$.
   p=5: $q(x) = (x^2 + 3x + 3)(x^2 + 3x + 4)$.
   p=7: $q(x) = (x^2 + x + 6)(x^2 + 2x + 5)$.

   luego el polinomio es reducible en $\mathbb{Z}[x]$.
3. El polinomio es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ por ser irreducible en $\mathbb{Z}[x]$.
4. Por el criterio de Eisenstein deducimos que es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

Ejercicio 8. ¿Cuál de los siguientes tipos de polinomios son múltiplos de $x^2 - 1$?

1. $x^{2n} + 1$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
2. $x^{4n} + x^{2n} - 2$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
3. $x^{2n} - x^n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
4. $x^{2n} - 2x^n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Ejercicio 9. ¿Cuál de los siguientes polinomios es reducible en $\mathbb{Q}[X]$?

1. $x^3 + x + 1$
2. $x^5 + 7x + 7$
3. $x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1$
4. $x^3 + 3x^2 + x + 2$

Ejercicio 10. Dado el siguiente teorema

Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{N}$. Entonces $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

con demostración por inducción en n.

PRIMER PASO: Para $n = 1$ el resultado es trivialmente cierto.

PASO DE INDUCCIÓN: Supuesto cierto para n, tomamos $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{N}$. Entonces:

Por hipótesis de inducción $x_1 = x_2 = x_n$, y también $x_2 = \cdots = x_{n+1}$. De aquí deducimos que $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$.

Por tanto el resultado es cierto para $n + 1$, luego es cierto para todo n.

Entonces:

1. La demostración es correcta. Es la excepción que confirma la regla del principio de inducción.
2. La demostración es incorrecta, pues hay el primer paso debería ser $n = 0$.
3. La demostración es incorrecta, pues el paso de inducción sólo es válido para $n \geq 2$.
4. La demostración es incorrecta pues se ha usado mal el principio de inducción. Este nos asegura que $x_1 = \cdots = x_n$, pero no que $x_2 = \cdots = x_{n+1}$.

Ejercicio 11. ¿Cuántas álgebras de Boole hay con 18 elementos?

1. 4
2. ninguna
3. infinitas
4. 6

Ejercicio 12. Sea S un conjunto de 25 elementos. En el conjunto ordenado por la inclusión $\mathcal{P}(S) \setminus \{S\}$ ¿cuántos elementos maximales hay?

1. ninguno
2. 1
3. 25
4. $600 = (25) \cdot (24)$

Ejercicio 13. En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se consideran los órdenes producto cartesiano ($\leqslant_{car}$) y lexicográfico ($\leqslant_{lex}$). Determinar la afirmación correcta:

1. Para cualquier par de elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si $x \leqslant_{car} y$ entonces $x \leqslant_{lex} y$.
2. Para cualquier par de elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si $x \leqslant_{lex} y$ entonces $x \leqslant_{car} y$.
3. Existen elementos tales que $x \leqslant_{car} y$ pero $x \nleqslant_{lex} y$.
4. Existen elementos tales que $x \nleqslant_{lex} y$ pero $x \leqslant_{car} y$.

Ejercicio 14. En el conjunto ordenado de los divisores positivos de 70 el resultado de la operación

$$(7 \vee 14) \wedge 35$$

es

1. 7
2. 35
3. 1
4. no existe porque este conjunto no es un álgebra de Boole.

Ejercicio 15. La tabla de verdad

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

corresponde a la función booleana

1. $(\overline{x_1}x_2 + x_1)\overline{x_3}$
2. $x_1\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}x_2x_3 + (\overline{x_1})(\overline{x_2})x_3$
3. $\overline{x_1\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}x_2x_3 + (\overline{x_1})(\overline{x_2})x_3}$
4. $(x_1 + \overline{x_2} + x_3)(\overline{x_1} + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)$

Ejercicio 16. ¿Cuántos grafos (sin lazos ni lados paralelos) hay que no sean isomorfos entre si y que tengan 4 vértices y 4 lados?

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

Ejercicio 17. Un grafo (sin lazos ni lados paralelos) tiene 9 vértices, con grados 1,2,3,4,5,6,7,8,9 respectivamente. Entonces:

1. Es un grafo de Euler.
2. No existe un grafo con esas condiciones.
3. El grafo contiene un camino cerrado de longitud mayor o igual que 3, y por tanto no es un árbol.

4. Existe un lado que si se lo quitamos obtenemos un grafo que no es conexo.

Ejercicio 18. ¿Qué ha de ocurrir en un grafo (sin lazos ni lados paralelos) conexo para que cualesquiera dos vértices distintos estén unidos por un único camino?

1. Que sea plano.
2. Que sea completo.
3. Que no contenga ciclos (o circuitos).
4. Que sea de Euler

Ejercicio 19. Sean G y G' dos grafos isosmorfos ¿cuál de las siguientes afirmaciones no es necesariamente cierta?

1. Sus matrices de adyacencia son del mismo orden.
2. Sus matrices de adyacencia tienen que ser iguales.
3. Ambos tienen el mimo número de vértices.
4. Ambos tienen el mismo número de componenetes conexas.

Ejercicio 20. Las formas distintas en las que 12 bolas iguales pueden repartirse entre tres cajas numeradas son

1. $\binom{12}{3}$
2. $\binom{14}{2}$
3. $\binom{15}{3}$
4. $\binom{12}{3} \cdot 3!$

Ejercicio 21. ¿Cuantos números en base 3 tienen exactamente 5 cifras?

1. 3^4
2. 3^5
3. $2 \cdot 3^4$
4. $5 \cdot 3$

Ejercicio 22. ¿Cuál es el m.c.d. de los polinomios $x^4+x^3+x^2+x$ y x^5+x^2+x+1 en $\mathbb{Z}_2[x]$?

1. $x^2 + 1$
2. $x^2 + x$
3. $x^4 + x^3 + x^2 + x$

4. 1

Ejercicio 23. ¿Cuántos elementos tiene el anillo $\mathbb{Z}_5[X]_{x^2+2x+1}$?

1. 5^2
2. 2^5
3. $5 \cdot 2$
4. $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 24. ¿Cuándo un número escrito en base 11 es múltiplo de 10?

1. Cuando termina en 0.
2. Cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 10.
3. Cuando escrito en base 10 es múltiplo de 11.
4. Cuando la suma de las cifras que ocupan lugar par menos la suma de las cifras que ocupan lugar impar es múltiplo de 10.

1. Cuál de los siguientes valores de n es solución de la ecuación

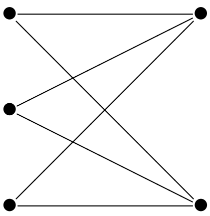
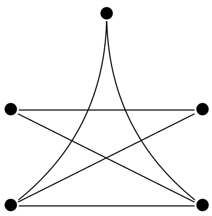
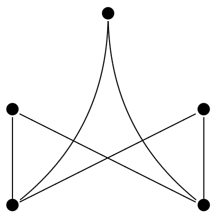
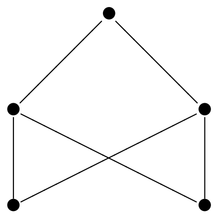
$$1211^{339} n \equiv 20 \pmod{17}.$$

a) 4 *b)* 8 *c)* 12 *d)* 16

2. Sea $f(x) = x^3 + 5x^2 + x - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$. Para que valor de p el polinomio f es irreducible.

a) 2 *b)* 3 *c)* 5 *d)* 7

3. En $\mathbb{N}^2$ denotamos $\leq$ al orden producto y $\preceq_{lex}$ al orden lexicográfico. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
   a) $(\mathbb{N}^2, \preceq_{lex})$ es un conjunto bien ordenado.
   b) $(\mathbb{N}^2, \preceq_{lex})$ es un conjunto totalmente ordenado.
   c) Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$, si $\alpha \leq \beta$ entonces $\alpha \preceq_{lex} \beta$.
   d) Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$, si $\alpha \preceq_{lex} \beta$ entonces $\alpha \leq \beta$.
4. De los siguientes grafos hay tres isomorfos entre sí y un cuarto que no lo es. Encuentra este último.

a)  *b)*  *c)*  *d)* 

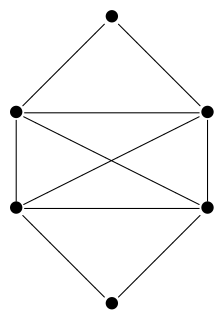
5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
   a) Todo conjunto totalmente ordenado (también llamado cadena) y finito es un retículo distributivo.
   b) Todo conjunto totalmente ordenado (también llamado cadena) y finito es un retículo complementado.
   c) Existen retículos complementados pero no distributivos.
   d) Existen retículos distributivos pero no complementados.
6. La afirmación "$7^n - 1$ es múltiplo de 6" es
   a) Verdadera para todos los números naturales. Se prueba por inducción. Para n=0 es cierto; hipótesis de inducción "$7^{n-1} - 1 = 6k$"; paso inductivo: $7^n - 1 = 7(7^{n-1} - 1) =$(usando hipótesis de inducción)$= 7 \cdot 6k$.
   b) Verdadera para todos los números naturales. Se prueba por inducción. Para n=0 es cierto; hipótesis de inducción completa "$7^k - 1$ es múltiplo de 6 para todo número natural $k < n$"; paso inductivo: $7^n - 1 = (7^{\frac{n}{2}} - 1)(7^{\frac{n}{2}} + 1)$, usando hipótesis de inducción completa, como $\frac{n}{2} < n$ el primer factor es múltiplo de 6 y por tanto el producto que lo contiene también.

   c) Verdadera para todos los números naturales. Se prueba por inducción. Para n=0 es cierto; hipótesis de inducción "$7^{n-1}-1 = 6k$"; paso inductivo: $7^n-1 = 7^n-7^{n-1}+7^{n-1}-1 = 7^{n-1}(7-1)+(7^{n-1}-1)$, usando hipótesis de inducción el segundo sumando es múltiplo de 6 y el primero es $(7^{n-1})6$, por tanto la suma es múltiplo de 6.
   d) Falsa, falla para n=13.

7. El polinomio $2X^4 + 4X^3 - 2X + 2$ es
   a) irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.
   b) irreducible en $\mathbb{C}[X]$.
   c) reducible en $\mathbb{R}[X]$.
   d) irreducible en $\mathbb{Z}_3[X]$.
8. El resto de dividir el polinomio $X^{2n} - 1$ entre $X - 1$ es

   a) $X^{2n-1} + X^{2n-2} + \cdots + X + 1$ *b)* $X + 1$ *c)* 0 *d)* 1

9. El retículo $(D(36), |)$ de los divisores positivos de 36 verifica
   a) es un álgebra de Boole.
   b) el complementario de 12 es 9.
   c) ningún elemento tiene complemento.
   d) $D(36) \setminus \{1\}$ tiene dos elementos minimales.
10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el grafo



   es falsa?
   a) es un circuito de Euler.
   b) es plano.
   c) es bipartido.
   d) contiene un subgrafo isomorfo a K_4.
11. ¿Cuál es la base en la que es cierta la siguiente igualdad?

$$52 \cdot 25 = 1693$$

   a) 6 *b)* 5 *c)* 7 *d)* En ninguna de las otras

12. Consideremos los siguientes elementos de $\mathbb{N}^3$:

$$(1,1,0),\ (1,3,1),\ (1,0,1),\ (1,2,2),\ (2,2,2).$$

¿Cómo quedarían ordenados de menor a mayor los anteriores elementos con el orden lexicografico?

a) Están ya ordenados de menor a mayor.
b) Hay elementos incomparables y no pueden ordenarse.
c) $(1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,2,2),\ (1,3,1),\ (2,2,2)$.
d) $(1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,3,1),\ (1,2,2),\ (2,2,2)$.

13. Sea

$$f(x,y,z,t) = xyzt + xy'zt + xyzt' + xy'zt' + x'y'z't' + x'yz't' + x'y'z't + x'yz't$$

una función booleana. ¿Con cuál de las siguientes funciones coincide?

a) $g(x,y,z,t) = xy + z't'$.
b) $g(x,y,z,t) = xz + x'z'$.
c) $g(x,y,z,t) = xzt + x'z'$.
d) $g(x,y,z,t) = xyz + xz' + y$.

14. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de adyacencia de un grafo no dirigido. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Es de Euler.
b) Es de Hamilton.
c) No es ni de Euler ni de Hamilton.
d) Es de Euler, pero no de Hamilton.

15. Sean $a, b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa.

a) $a|b$ y $a|c \Rightarrow a|(b^c + c^b)$.
b) $a|b \Rightarrow a|(a+b)$.
c) $a|(b+c)$ y $a|b \Rightarrow a|c$.
d) $a|b^c \Rightarrow a|b$.

16. En $\mathbb{N}^2$ definimos la siguiente relación binaria

$$(x_1,x_2) \leq (y_1,y_2) \Leftrightarrow 2^{x_1}3^{x_2} \leq 2^{y_1}3^{y_2}.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la cierta?

a) Es un orden total, pero no un buen orden.
b) Es un buen orden.
c) Lo anterior no es un orden.

d) Es un orden, pero no es total.

17. El numero de divisores positivos de $14^2 \times 21^{90}$ es

a) 25389 *b)* 273 *c)* 92 *d)* 2410

18. El número de unidades (elementos con inverso multiplicativo) del anillo $\mathbb{Z}_{12}$ es

a) 0 *b)* 4 *c)* 6 *d)* 11

19. Cuántas relaciones de orden total distintas se pueden definir sobre un conjunto de cardinal 5.

a) 120 *b)* 32 *c)* 25 *d)* 1

20. Sea G un grafo no dirigido con 100 vértices sin lazos ni lados paralelos. Cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente falsa.
a) G tiene exactamente 3 vértices de grado 2.
b) G tiene 5000 lados.
c) G es plano.
d) G es bipartido.

21. El número de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod 4 \\ 2x \equiv 11 \pmod 3 \\ 4x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$$

comprendidas entre 2500 y 3500 es

a) 5 *b)* 9 *c)* 16 *d)* 0

Matemática Discreta
Ingeniería Informática
Ingeniería Técnica en Informática de Gestión
Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas.
30 de enero de 2003

SOLUCIONES

Ejercicio 1. (1 punto) Demuestra por inducción que $11^{2n+1} + 10^{2n+1}$ es un múltiplo de 7 para todo $n \geq 0$.

Solución 1. Base de la inducción: Para $n = 0$, $11^1 + 10^1 = 21$ que es múltiplo de 7.

Hipótesis de inducción: Para un cierto número natural n se verifica que $11^{2n+1} + 10^{2n+1}$ es múltiplo de 7.

Paso inductivo: Calculamos

$$11^{2(n+1)+1} + 10^{2(n+1)+1} = 11^{2n+3} + 10^{2n+3} =$$

sumando y restando el mismo número

$$= 11^2 11^{2n+1} + (11^2 10^{2n+1} - 11^2 10^{2n+1}) + 10^{2n+3} =$$

sacando factor común adecuadamente

$$= 11^2(11^{2n+1} + 10^{2n+1}) + 10^{2n+1}(-11^2 + 10^2)$$

En esta expresión el primer sumando es múltiplo de 7 por hipótesis de inducción y el segundo contiene al factor (-21) que es múltiplo de 7; así la propiedad también ocurre para $n + 1$.

Ejercicio 2. (1 punto) Resuelve la ecuación

$$1993^{1993} \equiv 3n \pmod{13}$$

Solución 2. En primer lugar calculamos 1993^{1993} módulo 13. Como $1993 = (153)(13) + 4$, tenemos que $1993^{1993} \equiv 4^{1993} \pmod{13}$. **Método 1:** Usando el Teorema de Fermat: Si p es primo, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ si $(a, p) = 1$. Así como $1993 = (166)(12) + 1$ tenemos $(4^{12})^{166} 4^1 \equiv 1^{166} 4 \equiv 4 \pmod{13}$. **Método 2:** Reducimos el exponente $4^{1993} \equiv 4^{(2)(996)+1} \equiv (4^2)^{996} 4 \equiv 3^{996} 4 \equiv (3^2)^{498} 4 \equiv ((-4)^2)^{249} 4 \equiv 3^{249} 4 \equiv (3^3)^{63} 4 \equiv 1^{63} 4 \equiv 4 \pmod{13}$

Por tanto tenemos que resolver $3n \equiv 4 \pmod{13}$ y como el inverso de 3 en $\mathbb{Z}_{13}$ es 9 nos queda $n \equiv 10 \pmod{13}$.

Ejercicio 3. (2 puntos) Resuelve en $\mathbb{Z}_7[x]$ el siguiente sistema de congruencias.

$$\begin{cases} (3x^3 + 2x + 1)a(x) \equiv 2x^2 + 2 \pmod{x + 2} \\ (2x^2 + 2x)a(x) \equiv 3 \pmod{x + 4} \end{cases}$$

Solución 3. Simplificamos los coeficientes en ambas ecuaciones tomando restos el módulo correspondiente; para ello no es necesario dividir por el módulo puesto que al ser polinomios de grado uno podemos usar el Teorema del factor y obtener el resto evaluando los polinomios en el escalar adecuado. El sistema queda

$$\begin{cases} a(x) \equiv 3 \pmod{x+2} \\ 3a(x) \equiv 3 \pmod{x+4} \end{cases}$$

y dividiendo por 3 en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} a(x) \equiv 3 \pmod{x+2} \\ a(x) \equiv 1 \pmod{x+4} \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos $a(x) = 3 + (x+2)p(x)$ y sustituyendo en la segunda $3 + (x+2)p(x) \equiv 1 \pmod{x+4}$. Como $x + 2 \equiv 5 \pmod{x+4}$ tenemos $5p(x) \equiv 5$ y por tanto $p(x) \equiv 1 \pmod{x+4}$.

Así $p(x) = 1 + (x+4)q(x)$ y sustituyendo en la expresión de $a(x)$:

$$a(x) = 3 + (x+2)(1 + (x+4)q(x)) = (x+5) + (x+2)(x+4)q(x)$$

donde $q(x)$ toma valores en $\mathbb{Z}_7[x]$.

Ejercicio 4. `(2 puntos)` Estudia si es o no es irreducible el polinomio

$$p(x) = x^4 + 11x^3 + 6x^2 + 2x + 1$$

en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Z}_5[x]$. En caso de que sea reducible encuentra su descomposición como producto de factores irreducibles.

Solución 4. **En** $\mathbb{Z}[x]$: Reduciendo a $\mathbb{Z}_2[x]$ queda $p(x) = x^4 + x^3 + 1$ que no tiene raices y por tanto no tiene factores irreducibles de grado 1; como el único polinomio irreducible de grado 2 en $\mathbb{Z}_2[x]$ es x^2+x+1 y tampoco divide a $p(x)$, entonces no tiene factores irreducibles de grado 2 y por tanto es irreducible.

En $\mathbb{Z}_5[x]$ el polinomio queda $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$ que tiene por raiz a -1, por tanto descompone. Dividiendo por $x+1$ obtenemos

$$p(x) = (x+1)(x^3 + x + 1)$$

y el factor de grado 3 no tiene raices, por tanto esta es la descomposición en irreducibles pedida.

Ejercicio 5. En $\mathbb{N}^3$ consideramos el conjunto

$$S = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}.$$

Consideremos cada uno de los siguientes órdenes en $\mathbb{N}^3$,

(a) orden producto cartesiano ($\leq$),

(b) orden lexicográfico ($\preceq_{\text{lex}}$),

(c) orden grado total lexicográfico ($\preceq_{\text{tdeg}}$).

1.- `(1'2 puntos)` Dibuja el diagrama de Hasse de S con el orden inducido correspondiente.

2.- `(0'4 puntos)` ¿En algún caso forman un subretículo de $\mathbb{N}^3$ con el orden correspondiente?

3.- `(0'4 puntos)` ¿En algún caso forman un álgebra de Boole?

Solución 5. 1. Los diagramas de Hasse correspondientes son

2. Sí, en todos los casos. Con el primer orden se comprueba que el supremo y el ínfimo de cada pareja en $\mathbb{N}^3$ vuelve a estar en el conjunto. En los dos últimos, como se trata de órdenes totales, esto ocurre para cualquier subconjunto.

3. Sí, en el primer caso el diagrama de Hasse obtenido es el del álgebra de Boole con 3 átomos.

Ejercicio 6. `(2 puntos)`. Responde razonadamente a las siguientes preguntas.

1. ¿Cuántos lados hay que eliminar de K_{2n+1} para obtener $K_{n,n+1}$?
2. ¿Para que valores de n es $K_{n,n+1}$ plano?
3. ¿Para que valores de n es $K_{n,n+1}$ un circuito de Euler?
4. ¿Para que valores de n es $K_{n,n+1}$ un camino de Euler?
5. ¿Para que valores de n es $K_{n,n+1}$ un grafo de Hamilton?

Solución 6. 1. K_{2n+1} tiene $\frac{(2n+1)(2n+1-1)}{2} = n(2n+1)$ lados mientras que $K_{n,n+1}$ tiene sólo $n(n+1)$ lados. Restando obtenemos que hay que quitar n^2 lados.

2. Debe ser $n \leq 2$ porque si $n > 2$ entonces $K_{n,n+1}$ contiene como subgrafo a $K_{3,3}$ que no es plano.

3. Como para que sea un circuito de Euler es condición necesaria (y suficiente) que tenga todos los vértices de grado par, entonces $K_{n,n+1}$ nunca lo será puesto que unos vértices tienen grado n y otros $n+1$ y uno de estos dos números es impar por ser consecutivos.

4. Un camino de Euler tiene que tener exactamente dos vértices de grado impar por tanto el único es $K_{2,3}$.

5. Para construir un circuito cualquiera en un grafo bipartido siempre se visitan tantos vértices de un conjunto como del otro; para que un bipartido sea de Hamilton ambos conjuntos deber tener el mismo número de vértices. Por tanto $K_{n,n+1}$ nunca es de Hamilton.

EXAMEN DE MATEMÁTICA DISCRETA

(grupos de sistemas y gestión tarde)

1. ¿Existe alguna base en la que la igualdad $135 \times 44 = 4335$ sea cierta?

2. Resolver el siguiente sistema de congruencias

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 6 \pmod{8} \end{array}\right\}$$

3. Calcular el número de divisores positivos de 5400.

4. Demostrar que el polinomio $x^n + 7$ no tiene raices múltiples en $\mathbb{R}$.

5. Enunciar el Teorema del resto.

6. En $\mathbb{N}^2$ definimos la siguiente relación de orden

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq a_2 \text{ y } b_1 \leq b_2.$$

   ¿Es $(\mathbb{N}^2, \leq)$ un retículo?

7. Sea $\mathcal{B}$ el álgebra de Boole formada por todas las funciones booleanas elementales $f : 2^5 \to 2$ ¿Cuántos átomos tiene $\mathcal{B}$?

8. Definir el concepto de grafo completo.

9. ¿Cuántos lados tiene un bosque de n vértices y k componentes conexas?

EXAMEN DE MATEMÁTICA DISCRETA (5-2-2004)

Nombre: ______________________ Apellidos: ______________________

Titulación: ______________________ Grupo: ______________________

- **Cada cuestión tiene un valor de** $0{,}65$ **puntos.**
- **El valor de los apartados de cada problema se encuentra al lado del número del apartado.**
- **La respuesta a toda cuestión ha de escribirse en el hueco que se encuentra debajo.**
- **Toda respuesta a una cuestión que no esté razonada no será considerada válida.**

Problema 1

1. ($0{,}75$ puntos) Calcula una solución particular de la ecuación diofántica:

$$79257x + 78610y = 1$$

2. ($0{,}25$ puntos) Encuentra el inverso (para el producto) de 79257 en $\mathbb{Z}_{78610}$.
3. ($0{,}25$ puntos) Encuentra el inverso (para el producto) de 78610 en $\mathbb{Z}_{79257}$.
4. ($0{,}5$ puntos) Calcula **todas** las soluciones de la ecuación diofántica

$$79257x + 78610y = 10$$

Problema 2

1. (0,5 puntos) Calcula todos los polinomios irreducibles mónicos (es decir, que tienen coeficiente líder igual a 1) de grado 2 en $\mathbb{Z}_3[X]$
2. (0,5 puntos) Demuestra que el polinomio $X^4 + X^2 + X + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_3[X]$.
3. (0,5 puntos) Demuestra que si p es primo y $m(X)$ es un polinomio en $\mathbb{Z}_p[X]$, entonces el conjunto cociente $(\mathbb{Z}_p[X])_{m(X)}$ tiene $p^{grado(m(x))}$ elementos.
4. (0,25 puntos) ¿Cuántos elementos de $(\mathbb{Z}_3[X])_{X^4+X^2+X+1}$ tienen inverso para el producto?

Cuestión 1. Da la expresión en base 9 del número natural que en base 3 se escribe de la forma siguiente:

$$10210122110122001211001$$

Cuestión 2. Sea $D(1800)$ el conjunto formado por todos los divisores positivos de 1800. Sobre este conjunto definimos el orden

$$x \leq y \Leftrightarrow x \text{ divide a } y$$

Calcula los elementos maximales de $D(1800) \setminus \{1800\}$.

Cuestión 3. ¿Cuántos vértices ha de tener un grafo plano, regular de grado 5 y con 20 caras?

Cuestión 4. Sea f la función Booleana elemental tal que dado un número escrito en binario y comprendido entre 0 y 15 nos devuelve 1 si es múltiplo de 3 y 0 en otro caso. Escribe su forma normal canónica disyuntiva.

Cuestión 5. Dadas las siguientes congruencias:

$$\text{(a) } 2x \equiv 4 (\text{mod } 35), \text{ (b) } 2x \equiv 4 (\text{mod } 105), \text{ (c) } 3x \equiv 6 (\text{mod } 105)$$

¿Cuáles de ellas tienen las mismas soluciones que la ecuación $6x \equiv 12 (\text{mod } 105)$?

Cuestión 6. Calcula el resto de dividir el polinomio $x^{1321} + 5$ por el polinomio $x + 3$ en el anillo $\mathbf{Z}_7[x]$.

Cuestión 7. ¿Cuántos números de cinco dígitos (en base 10) empiezan por 4, terminan en 5 y sus cifras suman 18?

Cuestión 8. Considerando los números que escritos en base 3 tienen seis dígitos ¿Cuántos de ellos tienen exáctamente dos dígitos iguales a 0?

Cuestión 9. Sea G un grafo bipartido y A su matriz de adyacencia ¿Por qué todos los valores de la diagonal de la matriz A^3 son iguales a 0?

Cuestión 10. Sea G un circuito de Euler con n vértices. Demuestra que si tiene sólo dos vértices de grado 2, entonces tiene al menos $2n-2$ lados?

Matemática Discreta
Ingeniería Informática
Ingeniería Técnica en Informática de Gestión
Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas.
30 de enero de 2003

NOMBRE: Grupo:

Ejercicio 1. (1 punto) Demuestra por inducción que $11^{2n+1} + 10^{2n+1}$ es un múltiplo de 7 para todo $n \geq 0$.

Ejercicio 2. (1 punto) Resuelve la ecuación

$$1993^{1993} \equiv 3n \pmod{13}$$

Ejercicio 3. (2 puntos) Resuelve en $\mathbb{Z}_7[x]$ el siguiente sistema de congruencias.

$$\begin{cases} (3x^3 + 2x + 1)a(x) \equiv 2x^2 + 2 \pmod{x + 2} \\ (2x^2 + 2x)a(x) \equiv 3 \pmod{x + 4} \end{cases}$$

Ejercicio 4. (2 puntos) Estudia si es o no es irreducible el polinomio

$$p(x) = x^4 + 11x^3 + 6x^2 + 2x + 1$$

en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Z}_5[x]$. En caso de que sea reducible encuentra su descomposición como producto de factores irreducibles.

Ejercicio 5. En $\mathbb{N}^3$ consideramos el conjunto

$$S = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}.$$

Consideremos cada uno de los siguientes órdenes en $\mathbb{N}^3$,

(a) orden producto cartesiano ($\leq$),

(b) orden lexicográfico ($\preceq_{\text{lex}}$),

(c) orden grado total lexicográfico ($\preceq_{\text{tdeg}}$).

1.- (1'2 puntos) Dibuja el diagrama de Hasse de S con el orden inducido correspondiente.

2.- (0'4 puntos) ¿En algún caso forman un subretículo de $\mathbb{N}^3$ con el orden correspondiente?

3.- (0'4 puntos) ¿En algún caso forman un álgebra de Boole?

Ejercicio 6. (2 puntos). Responde razonadamente a las siguientes preguntas.

1. ¿Cuántos lados hay que eliminar de K_{2n+1} para obtener $K_{n,n+1}$?
2. ¿Para que valores de n es $K_{n,n+1}$ plano?
3. ¿Para que valores de n es $K_{n,n+1}$ un circuito de Euler?
4. ¿Para que valores de n es $K_{n,n+1}$ un camino de Euler?
5. ¿Para que valores de n es $K_{n,n+1}$ un grafo de Hamilton?

ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS DISCRETAS / FINITAS 8 DE SEPTIEMBRE DE 2004

Tipo I

	a	b	c	d
1				x
2			x	
3		x		
4		x		
5	x			
6			x	
7			x	
8			x	
9				x
10			x	
11	x			
12	x			
13	x			
14				x
15	x			
16		x		
17		x		
18			x	
19	x			
20	x			

Tipo II

	a	b	c	d
1		x		
2	x			
3		x		
4			x	
5		x		
6			x	
7	x			
8				x
9				x
10			x	
11			x	
12		x		
13				x
14		x		
15		x		
16		x		
17				x
18				x
19				x
20		x		

Tipo III

	a	b	c	d
1			x	
2		x		
3	x			
4				x
5	x			
6				x
7			x	
8				x
9		x		
10		x		
11		x		
12	x			
13			x	
14			x	
15				x
16		x		
17				x
18			x	
19			x	
20				x

Tipo IV

	a	b	c	d
1		x		
2			x	
3				x
4	x			
5		x		
6			x	
7			x	
8			x	
9				x
10		x		
11				x
12	x			
13			x	
14		x		
15				x
16		x		
17	x			
18			x	
19			x	
20		x		

ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS FINITAS/DISCRETAS

1 de Febrero de 2005

Tipo I				
	a	b	c	d
1			x	
2				x
3			x	
4	x			
5				x
6			x	
7				x
8	x			
9	x			
10		x		
11		x		
12	x			
13			x	
14		x		
15				x
16		x		
17	x			
18			x	
19		x		
20	x			

Tipo II				
	a	b	c	d
1		x		
2			x	
3				x
4		x		
5	x			
6				x
7			x	
8		x		
9				x
10	x			
11	x			
12			x	
13				x
14				x
15		x		
16	x			
17			x	
18	x			
19				x
20		x		

Tipo III				
	a	b	c	d
1	x			
2		x		
3	x			
4			x	
5			x	
6		x		
7		x		
8				x
9		x		
10				x
11				x
12				x
13		x		
14			x	
15	x			
16				x
17				x
18		x		
19			x	
20			x	

Tipo IV				
	a	b	c	d
1				x
2	x			
3		x		
4				x
5		x		
6	x			
7	x			
8			x	
9			x	
10			x	
11			x	
12		x		
13	x			
14	x			
15			x	
16			x	
17		x		
18				x
19	x			
20				x

Álgebra y Estructuras Discretas / Finitas — 29 de Enero de 2008

Soluciones

Tipo 1

	a	b	c	d
1	✓			
2		✓		
3	✓			
4		✓		
5			✓	
6	✓			
7	✓			
8	✓			
9		✓		
10		✓		
11				✓
12	✓			
13		✓		
14	✓			
15			✓	
16	✓			
17	✓			
18			✓	
19		✓		
20		✓		

Tipo 2

	a	b	c	d
1			✓	
2	✓			
3		✓		
4		✓		
5	✓			
6		✓		
7	✓			
8				✓
9	✓			
10		✓		
11	✓			
12	✓			
13		✓		
14	✓			
15		✓		
16		✓		
17			✓	
18	✓			
19			✓	
20	✓			

Tipo 3

	a	b	c	d
1	✓			
2		✓		
3	✓			
4		✓		
5		✓		
6			✓	
7			✓	
8	✓			
9		✓		
10	✓			
11		✓		
12	✓			
13				✓
14	✓			
15		✓		
16	✓			
17			✓	
18	✓			
19	✓			
20		✓		

Tipo 4

	a	b	c	d
1	✓			
2			✓	
3				✓
4	✓			
5			✓	
6	✓			
7			✓	
8		✓		
9	✓			
10	✓			
11				✓
12		✓		
13			✓	
14			✓	
15			✓	
16			✓	
17				✓
18		✓		
19	✓			
20	✓			

ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS FINITAS/DISCRETAS

1 de Febrero de 2005

Tipo I

	a	b	c	d
1			x	
2				x
3			x	
4	x			
5				x
6			x	
7				x
8	x			
9	x			
10		x		
11		x		
12	x			
13			x	
14		x		
15				x
16		x		
17	x			
18			x	
19		x		
20	x			

Tipo II

	a	b	c	d
1		x		
2			x	
3				x
4		x		
5	x			
6				x
7			x	
8		x		
9				x
10	x			
11	x			
12			x	
13				x
14				x
15		x		
16	x			
17			x	
18	x			
19				x
20		x		

Tipo III

	a	b	c	d
1	x			
2		x		
3	x			
4			x	
5			x	
6		x		
7		x		
8				x
9		x		
10				x
11				x
12				x
13		x		
14			x	
15	x			
16				x
17				x
18		x		
19			x	
20			x	

Tipo IV

	a	b	c	d
1				x
2	x			
3		x		
4				x
5		x		
6	x			
7	x			
8			x	
9			x	
10			x	
11			x	
12		x		
13	x			
14	x			
15			x	
16			x	
17		x		
18				x
19	x			
20				x

Tipo 1

	a	b	c	d
1				x
2		x		
3			x	
4	x			
5				x
6	x			
7	x			
8	x			
9	x			
10	x			
11	x			
12		x		
13			x	
14	x			
15	x			
16				x
17			x	
18				x
19	x			
20			x	

Tipo 2

	a	b	c	d
1			x	
2		x		
3			x	
4			x	
5		x		
6		x		
7			x	
8		x		
9			x	
10		x		
11			x	
12				x
13				x
14			x	
15	x			
16				x
17		x		
18	x			
19		x		
20			x	

Tipo 3

	a	b	c	d
1				x
2				x
3		x		
4		x		
5		x		
6				x
7	x			
8			x	
9			x	
10		x		
11	x			
12			x	
13			x	
14				x
15			x	
16			x	
17			x	
18				x
19			x	
20		x		

Tipo 4

	a	b	c	d
1		x		
2		x		
3		x		
4		x		
5			x	
6			x	
7		x		
8	x			
9		x		
10			x	
11		x		
12	x			
13	x			
14		x		
15	x			
16		x		
17	x			
18		x		
19				x
20	x			

1. Dado un grupo $(G, *)$ y la aplicación $f : G \to G$ definida por $f(a) = a * a$, entonces
   a) f es un homomorfismo de grupos, aunque no es inyectivo.
   b) f es un homomorfismo de grupos, aunque no es sobreyectivo.
   c) f es un isomorfismo de grupos.
   d) f no es necesariamente un homomorfismo de grupos.
2. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros la operación $\odot$ se define mediante la ecuación $a \odot b = ab + 2a + 2b + 2$
   a) La operación $\odot$ no es asociativa.
   b) La operación $\odot$ no tiene elemento neutro.
   c) La operación $\odot$ tiene elemento neutro, pero no todo entero tiene un elemento simétrico o inverso respecto de esta operación.
   d) $(\mathbb{Z}, \odot)$ es un grupo conmutativo.
3. La aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = n + (-1)^n$,
   a) no es inyectiva ni sobreyectiva,
   b) es biyectiva,
   c) es inyectiva, pero no sobreyectiva,
   d) es sobreyectiva, pero no inyectiva.
4. El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$$

   vale

   a) -9 b) -3 c) 0 d) 3

5. Cuántas aplicaciones existen de $\{a, b, c, d\}$ en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

   a) 625 b) 20 c) 9 d) 256

6. Sean $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{1,4\}$ y $D = \{a\}$. El cardinal del conjunto $(A \times B) \setminus (C \times D)$ es

   a) 8 b) 9 c) 10 d) 12

7. El orden de la permutación
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$
   es

   a) 6 b) 8 c) 12 d) 24

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(x,y,z) = (x+y, 2x+2y)$. La dimensión del núcleo de f es

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

9. Sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$. El subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^3$ verificando que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ es
   a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\}$.
   b) $W = \{0\}$.
   c) $W = \mathbb{R}^3$.
   d) $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{smallmatrix} x-y & =0 \\ x-z & =0 \end{smallmatrix}\right\}$.

10. Dado el sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{Z}_7$
$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$
   cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
   a) Es compatible determinado.
   b) Es incompatible.
   c) Es compatible indeterminado.
   d) Tiene exactamente 35 soluciones.

11. Los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son

a) $\{1,3,0\}$ b) $\{1,2,3,4,5\}$ c) $\{0,1,2,3\}$ d) No tiene valores propios

12. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$$

una matriz cuyos valores propios son 0 y 1. Los espacios propios de A tienen por ecuaciones

a) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x+2y=0 \\ z=0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+y+2z=0\right\}$

b) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+2y=0\right\}$ y $V_1 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+y+2z=0\right\}$

c) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x+2y=0 \\ x+y+2z=0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+y+2z=0\right\}$

d) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x+2y=0 \\ z=0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x+y=0 \\ z=0 \end{smallmatrix}\right\}$

13. Sea $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_p)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_3$ (p es un número primo). Entonces

a) A es diagonalizable y la base canónica es una base de vectores propios.

b) A es diagonalizable y todos los vectores de $(\mathbb{Z}_p)^3$ son propios.

c) A no es diagonalizable.

d) A es diagonalizable si y sólo si $\lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_3 = 0$.

14. Sea $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \mid \det(A) = 0\}$. Entonces

a) V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 4.

b) V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 0.

c) V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 3.

d) V no es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

15. Consideremos los subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^4$ definidos por las ecuaciones

$$U_1 = \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z + t = 0 \end{cases} \text{ y } U_2 = \begin{cases} y + 3t = 0 \\ x + z + 3t = 0 \end{cases}$$

Una base de $U_1 + U_2$ es

a) $\{(1,0,4,0),(1,0,0,3),(0,1,0,0)\}$

b) $\{(1,0,4,0),(1,0,0,3),(0,0,1,3)\}$

c) $\{(1,0,4,0),(1,0,0,3),(1,1,1,3)\}$

d) $\{(1,0,4,0),(1,0,0,3)\}$

16. En $\mathbb{Z}$ definimos la relación de equivalencia $xRy \iff 9 \mid x^2 - y^2$. El cardinal de $\mathbb{Z}/R$ es

    a) 1 b) 4 c) 6 d) 9

17. Sea

$$\begin{aligned} f : \{0, 1, 2, \ldots, 14\} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{15} \\ a &\longmapsto (2^a \text{ mód } 15) \end{aligned}$$

    El cardinal de $\mathrm{im}(f)$ es

    a) 1 b) 4 c) 10 d) 15

18. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$$

    es

    a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

19. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ dos bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ tales que $v'_1 = v_1 + 2v_2 + v_3$, $v'_2 = -v_2 + v_3$ y $v'_3 = -v_1 + v_2 - 5v_3$. Si las coordenadas de x respecto de la base B son $(1, -2, 3)$, entonces las coordenadas de x respecto de B' son:

    a) $(3, 10, 2)$ b) $(-2, 7, -16)$ c) $(0, 5, -18)$ d) $(-9, 4, 2)$

20. Sean $\sigma_1 = (2, 3, 8, 6)(4, 2, 5)$ y $\sigma_2 = (4, 5)(7, 1, 6)(6, 8)(4, 5)$. Entonces la permutación σ que satisface la igualdad $\sigma^7 = \sigma^{-4}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma^{12}$ es
    a) $(3, 4, 5, 2, 8)(7, 1, 6)$
    b) $(1, 6, 8)(2, 5, 4, 7, 3)$
    c) $(2, 5, 1, 8, 7, 3, 4)$
    d) $(7, 5, 2, 1, 6)(8, 3, 4)$

1. Sean $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ y $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Definimos la relación de equivalencia siguiente sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$:

$$B \; R \; C \;\Leftrightarrow\; B \cup A = C \cup A.$$

Entonces el cardinal del conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R$ es igual a

(a) 4 (b) 16 (c) 64 (d) 128

2. El número de aplicaciones del conjunto $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ en el conjunto

$$\{f : \{1, 2\} \to \{3, 4, 5\} \mid f \text{ es aplicación}\}$$

es igual a

(a) 9^2 (b) 2^9 (c) 4^9 (d) 9^4

3. Dado $A \subseteq X$, recordemos que $X - A$ también se denota como $X \setminus A$ así como $\overline{A}$. Si $A, B \subseteq X$, entonces el subconjunto $(X - (A \cap B)) \cap A$ es igual a

(a) $\varnothing$ (b) $(X - A) \cup B$ (c) $(X - B) \cap A$ (d) X

4. Definimos en $\mathbb{Z}_7$ la siguiente relación binaria: $x \; R \; y \;\Leftrightarrow\; x + y = 0$. Entonces:
   a) R no es relación de equivalencia,
   b) R es relación de equivalencia y $\mathbb{Z}_7/R$ tiene cardinal 4,
   c) R es relación de equivalencia y $\mathbb{Z}_7/R$ tiene cardinal 3,
   d) R es relación de equivalencia y $\mathbb{Z}_7/R$ tiene 5 elementos.
5. En S_9 no existen permutaciones de orden

(a) 20 (b) 12 (c) 15 (d) 18

6. Dado un grupo G, consideramos la aplicación $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ para todo $x \in G$. Entonces
   a) f es biyectiva y además es un homomorfismo de grupos,
   b) aunque f no es biyectiva, sin embargo sí es un homomorfismo de grupos,
   c) f es biyectiva, aunque no es un homomorfismo de grupos,
   d) f no es biyectiva ni tampoco es un homomorfismo de grupos.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para la permutación?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

a) σ es impar,
b) σ es un ciclo,
c) $\sigma = (1,4)(4,3)(2,5)(7,9)$ es una descomposición de σ en ciclos disjuntos,
d) $\sigma^{61} = \sigma$.

8. El cardinal del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por el conjunto $\{(1,1,1),(1,2,1)\}$ es:

(a) 25 (b) 10 (c) 125 (d) 15

9. Sean $U_1 = \langle(1,2,3),(1,1,1)\rangle$ y $U_2 = \langle(0,0,1),(3,5,7)\rangle$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
a) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$
b) $U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0)\}$
c) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0)\}$
d) $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$

10. ¿Cuál de los siguientes espacios vectoriales no es isomorfo a $\mathbb{R}^3$?
a) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0\}$,
b) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0, x_2+x_3 = 0\}$,
c) $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid c+d=0\}$,
d) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1+x_2=0, 3x_1+x_4=0\}$.

11. Sean $B = \{v_1,v_2\}$ y $B' = \{v_1' = 5v_1 - 3v_2, v_2' = -2v_1 + v_2\}$ dos bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Si las coordenadas de w respecto de la base B son $(3,-2)$, entonces las coordenadas de w respecto de la base B' son

(a) $(19,-11)$ (b) $(1,1)$ (c) $(21,-8)$ (d) $(3,4)$

12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $f(1,1) = (1,-1)$ y $f(3,5) = (-1,-1)$. Entonces la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$. Entonces una base para $\mathrm{Im}(f)$ es:
    a) $\{(1, 1, 2), (0, 0, 1)\}$,
    b) $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$,
    c) $\{(1, 1, 2), (2, 1, 3)\}$,
    d) $\{(1, 1, 2)\}$.
14. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $\dim(N(f)) = 1$. Entonces:
    a) f es inyectiva,
    b) f es sobreyectiva,
    c) f es biyectiva,
    d) f es un isomorfismo.
15. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$. Entonces el rango de A es igual a

    (a) 4 (b) 1 (c) 3 (d) 2

16. Acerca del sistema siguiente con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & 1 \\ (a-1)x & + & y & & & = & a \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

    podemos afirmar que
    a) es siempre compatible determinado,
    b) la compatibilidad o incompatibilidad depende del valor de a,
    c) es siempre compatible indeterminado,
    d) es siempre incompatible.
17. ¿Cuál de las siguientes matrices no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. ¿Cuál de los siguientes conjuntos constituye una base para $\mathbb{Q}^3$ formada por vectores propios para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}?$$

a) $\{(0,1,1),(1,1,2),(1,2,3)\}$,
b) $\{(-1,0,1),(1,1,2),(1,1,1)\}$,
c) $\{(1,1,2),(1,1,0),(-1,0,1)\}$,
d) $\{(0,1,1),(1,2,1),(-1,0,1)\}$.

19. Sea la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Entonces $f^*(\{0,1,-1\})$ es igual a:

(a) $\{0,1\}$ (b) $\{-1,0,1\}$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $\{0\}$

20. Sea σ una permutación de orden 30. Entonces el cardinal del conjunto

$$\{\sigma^i \mid 25 \le i \le 40\}$$

es

(a) 16 (b) 15 (c) 30 (d) 10

1. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. El cardinal del conjunto $A \times (A \cup B)$ es

   a) 6 b) 12 c) 16 d) 24

2. La aplicación $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x, y) = 2x + 3y$ es
   a) inyectiva y no sobreyectiva,
   b) sobreyectiva y no inyectiva,
   c) inyectiva y sobreyectiva,
   d) no inyectiva y no sobreyectiva.

3. Sea $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Para cada $A \subseteq X$ llamamos ΣA a la suma de los elementos de A, es decir, $\Sigma\{-3, -2, 0, 4\} = -1$ por ejemplo. Convenimos también que $\Sigma\varnothing = 0$. Sea R la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$ definida por ARB si y sólo si $\Sigma A = \Sigma B$. El cardinal del conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R$ es

   a) 0 b) 9 c) 21 d) 512

4. Sobre los grupos $(\mathbb{Z}, +)$ (los enteros con la suma usual de enteros) y $(\{1, -1\}, \cdot)$ (con el producto usual) definimos la aplicación

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \{1, -1\}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ -1 & \text{si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

   Entonces
   a) f es un homomorfismo sobreyectivo de grupos no inyectivo,
   b) f es un homomorfismo inyectivo de grupos no sobreyectivo,
   c) f es un isomorfismo (homomorfismo biyectivo) de grupos,
   d) f no es un homomorfismo de grupos.

5. Sea $\sigma = (12345)(246)^{-1}$. Entonces σ^{327} es igual a

   a) Identidad b) σ c) σ^2 d) σ^3

6. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{v_1' = v_1, v_2' = v_1 + v_2, v_3' = v_1 + v_2 + v_3\}$ dos bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Si las coordenadas de x respecto de la base B' son $(1, -1, 1)$, entonces las coordenadas de x respecto de B son

a) $(1,0,1)$ b) $(1,0,-1)$ c) $(1,2,-1)$ d) $(0,0,1)$

7. Consideremos la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z)=(x+y,x+z,2x+y+z)$. Entonces
   a) La dimensión de la imagen de f es 2.
   b) La dimensión del núcleo de f es 2.
   c) f es sobreyectiva.
   d) f es inyectiva.
8. Consideremos los siguientes subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^4$: $U_1=\langle(1,1,2,0),(3,1,4,1)\rangle$, y $U_2=\langle(0,1,0,3),(1,0,1,3)\rangle$. Una base de $U_1\cap U_2$ es
   a) $\{(2,0,2,1)\}$
   b) $\{(1,1,2,0),(3,1,4,1),(0,1,0,3),(1,0,1,3)\}$
   c) $\{(1,1,2,0)\}$
   d) $\{(2,0,2,1),(1,0,1,3)\}$
9. Dada la matriz
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\3&1&2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{Z}_5),$$
   a) A tiene dos valores propio de multiplicidades algebraicas 1 y 2 respectivamente.
   b) A tiene tres valores propios.
   c) A tiene un único valor propio de multiplicidad algebraica 3.
   d) A tiene un único valor propio de multiplicidad algebraica 1.
10. Sea $V=\big\{a(x)\in\mathbb{Z}_3[x]\mid \text{el grado de } a(x) \text{ es menor o igual que } 2\big\}$. Entonces
   a) V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$ de dimensión 3.
   b) V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$ de dimensión 2.
   c) V no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$.
   d) V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$ de dimensión infinita.
11. La matriz
$$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\\frac{-3}{2}&1&0\\\frac{1}{2}&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$$

representa un endomorfismo de $\mathbb{Q}^3$ en $\mathbb{Q}^3$. Una base de $\mathbb{Q}^3$ formada por vectores propios de A es

a) $\{(0,1,1),(0,-1,1),(4,-3,1)\}$
b) $\{(0,4,1),(1,-1,1),(4,-3,1)\}$
c) $\{(0,1,1),(0,-1,1),(0,0,2)\}$
d) $\{(0,1,1),(0,-1,1),(1,-1,1)\}$

12. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Cual de las siguientes afirmaciones es falsa?
   a) Si f es inyectiva entonces f_* es inyectiva.
   b) Si f es inyectiva entonces f^* es inyectiva.
   c) Si f es sobreyectiva entonces f_* es sobreyectiva.
   d) Si f es inyectiva entonces f^* es sobreyectiva.

ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS FINITAS/DISCRETAS

29 de Enero de 2008

Tipo 1				
	a	b	c	d
1	x			
2		x		
3	x			
4		x		
5			x	
6	x			
7	x			
8	x			
9		x		
10		x		
11				x
12	x			
13		x		
14	x			
15			x	
16	x			
17	x			
18			x	
19		x		
20		x		

Tipo 2				
	a	b	c	d
1			x	
2	x			
3		x		
4		x		
5	x			
6		x		
7	x			
8				x
9	x			
10		x		
11	x			
12	x			
13		x		
14	x			
15		x		
16		x		
17			x	
18	x			
19			x	
20	x			

Tipo 3				
	a	b	c	d
1	x			
2		x		
3	x			
4		x		
5		x		
6			x	
7			x	
8	x			
9		x		
10	x			
11		x		
12	x			
13				x
14	x			
15		x		
16	x			
17			x	
18	x			
19	x			
20		x		

Tipo 4				
	a	b	c	d
1	x			
2			x	
3				x
4	x			
5			x	
6	x			
7			x	
8		x		
9	x			
10	x			
11				x
12		x		
13			x	
14			x	
15			x	
16			x	
17				x
18		x		
19	x			
20	x			

Soluciones del examen extraordinario de Septiembre de 2008

Juan Manuel Urbano Blanco

1. El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

cuyos coeficientes están en $\mathbb{Z}_7$, es

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 6

Solución:

Aplicamos las operaciones elementales de fila siguientes a la matriz dada teniendo en cuenta que estamos en $\mathbb{Z}_7$:

$$F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1,\ F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1,\ F_4 \leftarrow F_4 - 4F_1.$$

Resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora aplicamos $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2$ y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente aplicamos $F_4 \leftarrow F_4 + F_3$ y queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

que es una matriz triangular y por tanto su determinante es $1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-2) = 6$ en $\mathbb{Z}_7$.

2. El sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{r} ax+y+z=1 \\ -x+ay+z=0 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right.$$

con coeficientes en $\mathbb{R}$,
a) siempre es compatible determinado.
b) es incompatible para algunos valores de a.
c) siempre es compatible indeterminado.
d) siempre es compatible, aunque puede ser determinado o indeterminado dependiendo de a.

Solución:
La matriz de los coeficientes el sistema es

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y su determinate es igual a a^2+3. Como la expresión a^2+3 es distinta de cero para todo $a \in \mathbb{R}$, vemos que $|A| \neq 0$ y por tanto el rango de A es igual a 3 independientemente de a. Por consiguiente el rango de la matriz ampliada también será igual a 3 que es igual al número de incógnitas, con lo cual el sistema es compatible determinado independientemente de a.

3. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyos coeficientes están en $\mathbb{Z}_5$, es

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Solución:

Teniendo presente ahora que la aritmética se realiza en $\mathbb{Z}_5$, le aplicamos las operaciones elementales de fila siguientes a la matriz dada,

$$F_2 \leftarrow F_2 - F_1,\ F_3 \leftarrow F_3 - F_1,\ F_4 \leftarrow F_4 - 2F_1,$$

y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora aplicamos $F_2 \leftarrow F_2 - 3F_3,\ F_4 \leftarrow F_4 + 2F_3,\ F_2 \leftrightarrow F_3$ y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

de lo cual es evidente que el rango de A es igual a 3.

4. Dados $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^5$ con $\dim\mathcal{U} = 3$ y $\dim\mathcal{W} = 3$, ¿cuál de las siguientes situaciones es posible?
a) $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = 6,\ \dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{W}) = 0$.
b) $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = 5,\ \dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{W}) = 1$.
c) $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = 4,\ \dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{W}) = 3$.
d) $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = 3,\ \dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{W}) = 1$.

<u>Solución:</u>
Hay que recordar la fórmula

$$\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{W}) - \dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{W}).$$

Substituyendo vemos que únicamente las dos primeras posibilidades del enunciado son posibles. Ahora bien, la primera no es posible pues $\mathcal{U}+\mathcal{W}$ es un subespaio vectorial de $\mathbb{R}^5$ el cual tiene dimensión 5. Por tanto $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) \leq 5$, con lo cual la respuesta al ejercicio es $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = 5,\ \dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{W}) = 1$.

5. Si B es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $B' = \{(1,1),(1,2)\}$ es otra base de $\mathbb{R}^2$, entonces el vector cuyas cordenadas respecto de B' son $(3,-1)$, es

(a) $(2,1)$ (b) $(7,-4)$ (c) $(4,3)$ (d) $(-3,2)$

Solución:

En el enunciado nos dan los vectores de una base B', que al no decirse nada, se supone que están escritos en función de los vectores de la base canónica B. Por la teoría vista en clase, las ecuaciones de cambio de base de B' a B, son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Según el enunciado v es un vector de $\mathbb{R}^2$ cuyas cordenadas respecto de B' son $(3,-1)$, es decir, $x' = 3,\ y' = -1$. Substituyendo en las ecuaciones anteriores, obtenemos $x = 2,\ y = 1$. Por tanto la respuesta es $(2,1)$.

6. En $\mathbb{Q}^4$ se considera el subespacio vectorial generado por $\{(1,-1,1,1),(1,1,-1,1)\}$. ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones corresponde a unas ecuaciones cartesianas de dicho subespacio?

a) $x+y+z-t=0$.

b) $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ x+y+z-t=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y+t=0 \\ y+z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y-z-t=0 \\ x-t=0 \end{cases}$

Solución:

Es posible que si calculamos unas ecuaciones cartesianas para el subespacio dado, $\mathcal{U}$, éstas no sean las mismas que las ecuaciones cartesianas que hemos de identificar. Por tanto, lo más apropiado es ver en primer lugar que $\mathcal{U}$ tiene dimensión 2 (ésto es inmediato ya que los dos generadores de $\mathcal{U}$ no son proporcionales), con lo cual el número mínimo de ecuaciones implícitas de $\mathcal{U}$ será $4-2=2$. Ésto ya descarta la primera posibilidad. Ahora simplemente vemos en cual de las tres posibilidades restantes los dos genradosres de $\mathcal{U}$ verifican las dos

ecuaciones dadas. Una simple comprobación nos permite ver que la respuesta es
$$\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

7. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales
$$\mathcal{U} = \{(x, y, z) \mid x - y + 3z = 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{W} = \langle (3, 0, -1), (2, -1, -1) \rangle.$$
Una base de $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ es
a) $\{(1, 1, 0)\}$.
b) $\{(5, -1, -2), (1, 4, 1)\}$.
c) $\{(0, 0, 0)\}$.
d) $\{(-1, 2, 1), (2, -2, -1)\}$.

Solución:

Hay varias formas de resolver este ejercicio. En primer lugar, recordando las nociones de teoría, obtenemos que $\dim(\mathcal{U}) = \dim(\mathcal{W}) = 2$. Podríamos calcular una ecuación implícita para $\mathcal{W}$ y nos daríamos cuenta de que ésta es proporcional a la ecuación implícita de $\mathcal{U}$, con lo cual obtendríamos que $\mathcal{U} = \mathcal{W}$. Otro camino consiste en comprobar que los vectores que generan a $\mathcal{W}$ cumplen la ecuación de $\mathcal{U}$, con lo cual $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$. Como ambos subespacios tiene igual dimensión, concluimos que $\mathcal{U} = \mathcal{W}$. De una forma u otra, llegamos a que $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \mathcal{U} = \mathcal{W}$ lo que nos permite descartar las opciones (a) y (c), aunque esta última hay que descartarla de entrada, pues el vector cero no forma parte de ninguna base. De entre las respuestas (b) y (d) nos quedamos con aquella en la cual los dos vectores dados no sean proporcionales y además verifiquen las ecuaciones de $\mathcal{U}$. Obtenemos que una base de $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \mathcal{U} = \mathcal{W}$ es $\{(5, -1, -2), (1, 4, 1)\}$.

Si en vez de trabajar en $\mathbb{R}^3$ estuviesemos en otro espacio de dimensión mayor, como por ejemplo $\mathbb{R}^4$, quizá la forma más general de resolver este ejercicio sería encontrar en primer lugar unas ecuaciones implícitas para $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ y a continuación elegir la opción apropiada teniendo en cuenta que los vectores dados han de ser linealmente independientes y verificar determinadas ecuaciones implícitas. Para obtener unas ecuaciones implícitas para $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$, una posibilidad es obtener unas ecuaciones paramétricas para $\mathcal{W}$ (lo cual es inmediato) y substituirlas en las implícitas de $\mathcal{U}$ con lo cual llegaríamos a las relaciones que han de verificar los parámetros para que un vector genérico pertenezca a la intersección (tal y como vimos en los ejemplos de clase), etc. Otra forma (quizás) más laboriosa de calcular unas ecuaciones implícitas para $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ consiste en calcular una base para $\mathcal{U}$ resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones implícitas y "juntarla" con el sistema de generadores de $\mathcal{W}$. De este conjunto ampliado de vectores, reducimos mediante operaciones elementales de fila y obtenemos una base para $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$, de la cual calculamos unas ecuaciones implícitas para $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre cierta?
   a) f no es sobreyectiva.
   b) f es inyectiva.
   c) f no es inyectiva.
   d) f es sobreyectiva.

   Solución:
   De la fórmula $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$, siendo $V = \mathbb{R}^3$, vemos que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq 3$. Como $\mathrm{Im}(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, el cual tiene dimensión 4, resulta que el subespacio $\mathrm{Im}(f)$ nunca podrá ser igual a $\mathbb{R}^4$. Por tanto f nunca será sobreyectiva. Las restantes posibilidades son falsas ya que para cada una de ellas se puede dar un ejemplo que la contradice.

9. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z).$$

   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
   a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(f)$.
   b) $\{(1, -1, -1)\}$ es una base de $N(f)$.
   c) $\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim N(f)$.
   d) $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(f)$.

   Solución:

La matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $|A| = -2 \neq 0$, aplicando la teoría sabemos que f es sobreyectiva y en particular $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Al ser $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, dicho conjunto también será una base de $\mathrm{Im}(f)$.

(La segunda opción se descarta fácilmente, pues $f(1,-1,-1) \neq (0,0,0)$).

10. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x,y,z,t) = (x+y, z, t, x+y+z+t).$$

Una base de $\mathrm{Ker}(f)$ es
a) $\{(1,-1,0,0),(1,1,0,2)\}$.
b) $\{(1,-1,0,0),(0,0,0,0)\}$.
c) $\{(7,-7,0,0)\}$.
d) $\{(0,0,0,0)\}$.

Solución:

La opción (a) no puede ser, pues aunque $f(1,-1,0,0) = (0,0,0,0)$, sin embargo $f(1,1,0,2) \neq (0,0,0,0)$.

Las opciones (b) y (d) tampoco, pues el vector nulo no forma parte de ninguna base.

Por tanto la respuesta es la opción (c).

11. Sea

$$A = \{f : \{0,1,2\} \to \{a,b\} \mid f \text{ es aplicación}\}.$$

Entonces el cardinal de $\mathcal{P}(A)$ es

(a) 2^5 (b) 6^2 (c) 4^3 (d) 2^8

Solución:

Aplicando la teoría obtenemos en primer lugar que el cardinal de A es $2^3 = 8$ y por tanto el cardinal de $\mathcal{P}(A)$ es 2^8.

12. Sean los conjuntos $A = \{2k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}\}$ y $B = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}\}$. Entonces el cardinal del conjunto

$$((\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})) \setminus (A \times B)$$

es

(a) $\mathrm{infinito}$ (b) 4 (c) 9 (d) 6

Solución:
El conjunto $((\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})) \setminus (A \times B)$ es infinito, pues por ejemplo éste contiene todos los pares ordenados de la forma $(2k+1, 2k)$ con k variando en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

13. Dado el conjunto $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y los subconjuntos $A = \{1,3,5,6\}$, $B = \{6,7,9\}$ y $C = \{3,8\}$, entonces el conjunto

$$\overline{(A \cap (B \cup A)) \cup C}$$

es igual a

(a) $\{2,4,7,9\}$ (b) $\{1,3,5,6,8\}$ (c) $\{1,2,4,7,8,9\}$ (d) $\{2,3,5,8\}$

Solución:
Recordando la teoría del Tema 1, siempre se verifica que $A \cap (B \cup A) = A$ (ésta es una de las dos leyes de absorción del álgebra de conjuntos). Por tanto hemos de calcular $\overline{A \cup C}$. Fácilmente se comprueba que dicho conjunto es igual a $\{2,4,7,9\}$.

14. Señale la respuesta correcta: *La expresión* $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
a) *define una aplicación* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ *que no es inyectiva ni sobreyectiva.*
b) *define una aplicación inyectiva* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.
c) *define una aplicación sobreyectiva* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.
d) *no define una aplicación* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

Solución:
Por ejemplo, ya que $f(-1) = -2$, y $-2 \notin \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$, concluimos que la expresión dada no define una aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

15. Sea G un grupo en el que se verifica

$$g * g = 1$$

para cada elemento $g \in G$, siendo 1 el elemento neutro. Entonces
a) G es un grupo no conmutativo.
b) la única posibilidad es $G = \{1\}$.
c) todo elemento del grupo G es su propio inverso.
d) para cualesquiera $a, b \in G$, se verifica que $a * b \neq b * a$.

Solución:
La condición $g * g = 1$ para todo $g \in G$ equivale a $g = g^{-1}$ para todo $g \in G$ por lo que la respuesta correcta ha de ser la (c).
Sabemos de la relación de ejercicios que la condición dada en el enunciado implica que G ha de ser conmutativo, lo cual excluye la opción (a). La opción (b) se excluye considerando el grupo $(\mathbb{Z}_2, +)$. Este ejemplo también permite excluir la opción (d).

16. Sea $H = \{\sigma \in S_9 \mid \sigma(2) = 2 \text{ y } \sigma(8) = 8\}$. Entonces
a) H no es un subgrupo de S_9 pero la composición de dos elementos de H está en H.
b) H no es subgrupo de S_9 pero el inverso de todo elemento de H está en H.
c) H es un subgrupo de S_9 con 7! elementos.
d) H es un subgrupo de S_9 con 2^7 elementos.

Solución:
Es un ejercicio rutinario comprobar que H es un subgrupo de S_9 (pues la permutación identidad de S_9 pertenece a H, si $\sigma \in H$ entonces $\sigma^{-1} \in H$, y si $\alpha, \beta \in H$ entonces $\alpha \circ \beta \in H$). Finalmente, si de nueve elementos fijamos dos (2 y 8), los restantes siete se pueden permutar de 7! formas, de ahí que la respuesta sea la opción (c).

17. Sea $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)(3\,4\,7)(4\,8\,9)$. Entonces
a) $\sigma^{125} = \sigma^{-1}$
b) $\sigma^{125} = \sigma$
c) $\sigma^{125} = \sigma^2$

d) $\sigma^{125} = \sigma^{36}$

Solución:

Lo primero que hacemos es transformar σ en un producto de ciclos disjuntos. Obtenemos $\sigma = (1,2,3,5)(4,8,9,7)$ cuyo orden es igual a 4. Por tanto $\sigma^{125} = \sigma^{r}$ para cualquier número entero r tal que $r \equiv 125 \mod 4$. De los exponentes con los que aparece σ en las partes derechas de la opciones dadas, el único que cumple lo anterior es $r = 1$, por lo que $\sigma^{125} = \sigma$.

18. Los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

en $\mathbb{Z}_5$, escribiendo todos los que son iguales entre sí una sóla vez, son

(a) $1,2$ (b) $0,1$ (c) 0 (d) $0,1,2$

Solución:

Aplicando la definición calculamos el polinomio característico de la matriz A, teniendo en cuenta que las operaciones se hacen en $\mathbb{Z}_5$. Obtenemos $|A - xI| = -x^3 + 4x^2 + 3x$. Vemos que $\alpha = 0$ es un valor propio de A. Para concluir basta ver que el polinomio $-x^2+4x+3$ no tiene raíces en $\mathbb{Z}_5$, con lo cual el único valor propio de A en $\mathbb{Z}_5$ es 0.

19. De una matriz cuadrada A de orden 4 sobre $\mathbb{Z}_5$ sabemos que tiene sólo dos subespacios propios dados por

$$V_1 \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ t=0 \end{cases}$$

$$V_2 \equiv \begin{cases} x=z \\ x=t \\ y=0 \end{cases}$$

Entonces:

a) A no es diagonalizable.

b) No podemos decidir si A es o no diagonalizable pues no conocemos sus valores propios.

c) A es diagonalizable y una matriz de paso es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) A es diagonalizable y una matriz de paso es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

Tanto V_1 como V_2 son subespacios vectoriales de $(\mathbb{Z}_5)^4$ que es un espacio vectorial de dimensión 4 sobre $\mathbb{Z}_5$. Sea λ_1 el valor propio de A asociado al subespacio propio V_1 y sea λ_2 el valor propio de A asociado al subespacio propio V_2.

Como las dos ecuaciones implícitas que definen a V_1 son linealmente independientes, tenemos que $\dim(V_1) = 4 - 2 = 2$. De manera análoga las ecuaciones implícitas que definen a V_2 son linealmente independientes y por tanto $\dim(V_2) = 4 - 3 = 1$.

Por otra parte sabemos que la multiplicidad algebraica de cada valor propio de A es mayor o igual que la multiplicidad geométrica de dicho valor propio.

Deducimos de todo lo anterior que la multiplicidad algebraica de λ_1 más la multiplicidad algebraica de λ_2 ha de ser mayor o igual que $2 + 1 = 3$ y menor o igual que el orden de la matriz A, es decir, 4.

Ésto implica que todos los valores propios de A pertenecen al cuerpo $\mathbb{Z}_5$, de entre los cuales hay uno cuya multiplicidad algebraica es estrictamente mayor que su multiplicidad geométrica. Por consiguiente la matriz A no puede ser diagonalizable.

20. Consideremos la aplicación f definida del grupo $(\mathbb{Z}, +)$ en sí mismo por

$$f(x) = 2x - 1.$$

Entonces

a) f es un homomorfismo de grupos puesto que $f(1) = 1$.

b) f no es un homomorfismo de grupos.

c) f es un homomorfismo de grupos sobreyectivo.

d) f es un homomorfismo de grupos inyectivo.

Solución:

En este ejemplo 0 es el elemento neutro del grupo. Hay varias formas de concluir que f no es homomorfismo de grupos. Por ejemplo, $f(0) \neq 0$.

ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS FINITAS/DISCRETAS

17 de Diciembre de 2007

APELLIDOS, NOMBRE: ....

DNI: .... GRUPO: ....

1. Sea la aplicación $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x, y) = 5x - y$, donde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
   a) ¿Es f inyectiva?¿Es f sobreyectiva?¿Es f biyectiva?
   b) Calcule el subconjunto $f_*(A)$, siendo $A = \{(a, 4a) \mid a \in \mathbb{N}\}$.

2. Para el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, consideramos la siguiente relación de equivalencia R sobre $\mathcal{P}(X)$:
$$A \ R \ B \ \Leftrightarrow \ A \cup \overline{B} = \overline{A} \cup B.$$
   Calcule razonadamente el cardinal del conjunto cociente $\frac{\mathcal{P}(X)}{R}$.

3. *a*) Escriba la permutación $\tau = (1, 8, 2, 3, 6, 7)(2, 1, 4, 8, 7, 6)(1, 3, 5, 2, 4)$ como producto de ciclos disjuntos.
   b) Dada la permutación $\beta = (1, 2, 3, 4, 5, 6)(7, 8, 9, 10)$, calcule β^{3598}.
   c) Sea $A = \{\alpha \in \mathcal{S}_{10} \mid \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha = \beta\}$. ¿Es A un subgrupo de S_{10}?

4. Calcule el rango de la matriz siguiente sobre $\mathbb{Z}_5$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ definida por
$$f(x, y, z) = (x - y - z, \ 2x + y + 4z, \ -3x + y - z).$$
   a) Escriba la matriz asociada a f respecto de la base canónica $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{Q}^3$.
   b) Calcule una base para $\mathrm{N}(f)$, el núcleo de f.
   c) Calcule unas ecuaciones implícitas para $\mathrm{Im}(f)$, el subespacio imagen de f.
   d) ¿Es $\mathbb{Q}^3 = \mathrm{N}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

6. Diagonalice la matriz siguiente con coeficientes en $\mathbb{R}$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$: $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y-4z=0\}$ y $U_2 = \langle (1,3,5),(1,2,2) \rangle$. Una base de $U_1 \cap U_2$ es:
   a) $\{(3,6,6)\}$
   b) $\{(2,0,1),(4,1,2)\}$
   c) $\{(-1,2,1)\}$
   d) $\{\overrightarrow{0}\}$
2. Sean $B_1 = \{v_1, v_2\}$ y $B_2 = \{u_1, u_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$ tales que $v_1 = -2u_1 - u_2$ y $v_2 = 5u_1 + 2u_2$. Si w es un vector de $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas respecto de B_1 son $(8,3)$, entonces las coordenadas de w respecto de B_2 son:

   (a) $(1,2)$ (b) $(-1,-2)$ (c) $(2,1)$ (d) $(-2,-1)$
3. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (x+y+z, -2x+3y+z, x+6y+4z)$. ¿Cuál de los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ no pertenece a $Im(f)$?

   (a) $(1,0,3)$ (b) $(1,-1,2)$ (c) $(2,-5,1)$ (d) $(2,-1,4)$
4. Sobre una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = ax+b$ se sabe que $(f \circ f)(x) = 4x+2$. Entonces $f^{-1}(x)$ puede ser igual a:

   (a) $2x + \frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ (d) $\frac{-1}{2}x + \frac{1}{8}$
5. Si para dos elementos a y b pertenecientes a un grupo $(G, \cdot)$ se verifica que $a^2 = b^2$, entonces:

   (a) $a \cdot b = b \cdot a$ (b) $b^{-1} \cdot a = a \cdot b^{-1}$ (c) $a = b$ (d) $b^{-1} \cdot a = b \cdot a^{-1}$
6. Sea la relación de equivalencia R definida en el grupo simétrico $\mathcal{S}_5$ como $\alpha \; R \; \beta$ si y sólo si α y β tienen el mismo orden. Entonces el cardinal del conjunto cociente $\mathcal{S}_5/R$ es igual a

   (a) 5 (b) 4 (c) 6 (d) 7
7. El valor del determinante $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ sobre $\mathbb{R}$ es igual a:

   (a) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ (b) $a^4 - b^4$ (c) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ (d) $a^4 - a^3b + ab^3 - b^4$
8. Dada la permutación $\alpha = (4,1,5,7,2)(6,4,8,3,1,9)$, entonces a^{2008} es igual a

   (a) α^4 (b) $\mathbf{1}$ (c) α^2 (d) α^6
9. Sobre una aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ se sabe que $f(1,2,3) = (4,1,2)$ y $f(2,1,1) = (3,2,1)$. Entonces:
   a) $f(1,1,3) = (2,3,3)$.
   b) $f(1,1,3) = (4,1,1)$.

c) $f(1,1,3)$ no se puede calcular a partir de los datos del enunciado.
d) $f(1,1,3) = (1,2,1)$.

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_7)$, podemos afirmar que:
a) A tiene tres valores propios distintos en $\mathbb{Z}_7$.
b) A no tiene ningún valor propio en $\mathbb{Z}_7$.
c) A tiene sólo un valor propio en $\mathbb{Z}_7$.
d) A tiene exactamente dos valores propios distintos en $\mathbb{Z}_7$.

11. Sea $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 3z - t = 0\}$. En el espacio vectorial cociente $\mathbb{R}^4/U$, el vector $[(5,2,-1,2)]$ es igual a:

(a) $[(2,-1,3,-1)]$ (b) $[(2,1,4,-3)]$ (c) $[(2,-1,1,5)]$ (d) $[(-2,6,1,-1)]$

12. La dimensión del subespacio núcleo de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (x+y+z, -2x+3y+z, x+6y+4z)$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

13. Sean el espacio vectorial $V = (\mathbb{Z}_5)^3$ y su subespacio vectorial $U = \langle (1,3,2), (2,1,1) \rangle$. ¿Para cuál de los siguientes subespacios vectoriales W de V se verifica que $V = U \oplus W$?
a) $W = \langle (3,4,3) \rangle$.
b) $W = \langle (2,1,3), (3,4,2) \rangle$.
c) $W = \langle (2,3,1), (4,1,2) \rangle$.
d) $W = \{(x,y,z) \in V \mid 4x - 3y = 0, x - z = 0\}$.

14. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que

$$\left.\begin{array}{rcl} A + B & = & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ A - B & = & \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Entonces $A \cdot B$ es igual a

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

15. La aplicación $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $f(x,y) = (x-1, x+y+1)$
a) es inyectiva pero no es sobreyectiva.
b) es sobreyectiva pero no es inyectiva.
c) es biyectiva.
d) no es inyectiva ni sobreyectiva.

16. El sistema $\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & + & 5y & = & 4 \\ 2x & + & y & = & 5 \end{array}\right.$ en $\mathbb{Z}_7$ es
a) incompatible.

b) compatible determinado.
c) compatible indeterminado y su número de soluciones es menor o igual que 21.
d) compatible indeterminado y su número de soluciones es mayor que 21.

17. Sean $v_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 3, 2, 1, 1)$, $v_3 = (1, -5, -6, 9, 1)$ y $v_4 = (1, -4, 2, a, 5)$ vectores de $\mathbb{R}^5$. Entonces v_1, v_2, v_3, v_4 son vectores:
a) linealmente independientes para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.
b) linealmente dependientes para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.
c) linealmente independientes sólo para un único valor de $a \in \mathbb{R}$.
d) linealmente dependientes sólo para un único valor de $a \in \mathbb{R}$.

18. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$. ¿Para cuál de las siguientes matrices regulares $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_7)$ se verifica que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ es una matriz diagonal?

(a) $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $P = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

19. Sean A y B conjuntos tales que $|A| = 8$ y $|B| = 9$. De los siguientes cuatro conjuntos, ¿cuál de ellos tiene cardinal distinto del cardinal de los tres conjuntos restantes?
a) $\mathcal{P}(A \times B)$
b) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
c) El conjunto de todas las aplicaciones de A en $\mathcal{P}(B)$.
d) El conjunto de todas las aplicaciones de B en $\mathcal{P}(A)$.

20. Sea V el conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, con a y b números reales. Entonces V con respecto de las operaciones suma de matrices y producto de un número real por una matriz,
a) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión dos.
b) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ isomorfo a $\mathbb{R}^3$.
c) no es un espacio vectorial, ya que la suma de matrices no es una operación binaria en V.
d) no es un espacio vectorial, ya que en V hay matrices no nulas cuyo determinante no es cero.

ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS FINITAS/DISCRETAS

4 de Septiembre de 2007

Tipo 1

	a	b	c	d
1	x			
2		x		
3				x
4			x	
5				x
6			x	
7			x	
8	x			
9		x		
10				x
11			x	
12		x		
13			x	
14	x			
15			x	
16			x	
17		x		
18			x	
19		x		
20	x			

Tipo 2

	a	b	c	d
1				x
2			x	
3		x		
4				x
5		x		
6		x		
7	x			
8				x
9				x
10		x		
11				x
12			x	
13	x			
14				x
15	x			
16				x
17				x
18		x		
19			x	
20			x	

Tipo 3

	a	b	c	d
1			x	
2			x	
3	x			
4		x		
5	x			
6	x			
7		x		
8			x	
9			x	
10	x			
11	x			
12				x
13		x		
14			x	
15				x
16	x			
17	x			
18				x
19	x			
20		x		

Tipo 4

	a	b	c	d
1		x		
2	x			
3		x		
4	x			
5			x	
6				x
7				x
8		x		
9	x			
10			x	
11		x		
12	x			
13				x
14		x		
15		x		
16		x		
17			x	
18	x			
19		x		
20				x

ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS FINITAS/DISCRETAS

13 de Febrero de 2007

Tipo 1

	a	b	c	d
1		x		
2		x		
3				x
4		x		
5	x			
6			x	
7	x			
8			x	
9				x
10	x			
11		x		
12				x
13			x	
14		x		
15			x	
16		x		
17				x
18	x			
19				x
20	x			

Tipo 2

	a	b	c	d
1				x
2			x	
3	x			
4	x			
5			x	
6		x		
7			x	
8				x
9	x			
10		x		
11	x			
12		x		
13		x		
14				x
15				x
16			x	
17			x	
18		x		
19			x	
20				x

Tipo 3

	a	b	c	d
1	x			
2	x			
3		x		
4				x
5				x
6				x
7				x
8		x		
9		x		
10			x	
11			x	
12	x			
13	x			
14			x	
15		x		
16				x
17		x		
18				x
19		x		
20			x	

Tipo 4

	a	b	c	d
1			x	
2				x
3			x	
4			x	
5		x		
6	x			
7		x		
8	x			
9			x	
10				x
11				x
12			x	
13				x
14	x			
15	x			
16	x			
17	x			
18			x	
19	x			
20		x		

1. Sean $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{a, b, c\}$. Entonces el cardinal de $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$ es

   (a) 256 (b) 225 (c) 125 (d) 243

2. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{4, 6, 8, 9\}$ y $D = \{1, 2, 6, 7, 9\}$, el cardinal del conjunto $((A \setminus B) \times C) \cup ((B \cap D) \times (C \cup A))$ es

   (a) 23 (b) 0 (c) 28 (d) 31

3. Dada la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(n) = \frac{n}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces:
   a) f es sobreyectiva y no es inyectiva.
   b) f es inyectiva y no es sobreyectiva.
   c) f es biyectiva.
   d) f no es inyectiva ni sobreyectiva.

4. Para un número entero z denotamos por $|z|$ el valor absoluto de z, es decir,

$$|z| = \begin{cases} z & \text{si } z \geq 0 \\ -z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

   Consideramos la siguiente relación de equivalencia R definida sobre el conjunto $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100\}$:

$$a \; R \; b \;\Leftrightarrow\; |a - 8| = |b - 8|.$$

   Entonces el cardinal del conjunto cociente X/R es igual a

   (a) 13 (b) 56 (c) 93 (d) 85

5. Sea la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 8 & 6 & 1 & 9 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Entonces:
   a) El orden de σ es 4.
   b) σ es impar.
   c) σ es un ciclo.
   d) σ es el cuadrado de una trasposición.

6. Sea la permutación $\alpha = (6,7,8,1,2)(3,1,4,9,5,7,6)$. Entonces α^{2006} es igual a

   (a) α^{4391} (b) α^{3072} (c) α^{5301} (d) α^{2867}

7. Dados dos subgrupos H_1 y H_2 de un grupo G, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre falsa?
   a) $H_1 \times H_2$ es un subgrupo de $G \times G$.
   b) $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo de G.
   c) $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.
   d) $H_1 \setminus H_2$ es un subgrupo de G.
8. Sean $B = \{v_1, v_2\}$ y $B' = \{v_1', v_2'\}$ dos bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ tales que $v_1' = v_1 + v_2$ y $v_2' = v_1 - v_2$. Si las coordenadas de un vector $w \in V$ respecto de la base B son $(3,5)$, entonces las coordenadas de w respecto de la base B' son

   (a) $(4,-1)$ (b) $(1,1)$ (c) $(1,-1)$ (d) $(2,0)$

9. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \langle(1,1,2,2),(3,3,4,4)\rangle \quad \text{y} \quad W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0, t=0\},$$

   la dimensión de $U \cap W$ es igual a

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

10. Sea el conjunto $V = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$. Entonces respecto de las operaciones usuales:
    a) V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 6.
    b) V no tiene estructura de espacio vectorial ya que la matriz nula de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ no pertenece a V.
    c) V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3.
    d) V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 0.
11. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales

$$U = \{(x,y,z) \mid x=0\} \quad y \quad W = \{(x,y,z) \mid y=0\}.$$

    Entonces el subespacio vectorial $U + W$ es:

a) $\left\{(x,y,z) \mid \begin{array}{c} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$

b) $\mathbb{R}^3$

c) $\{(x,y,z) \mid x+y=0\}$

d) $\{(x,y,z) \mid z=0\}$

12. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^4 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ una aplicación lineal verificando que

$$\{(1,1,1),(2,3,2),(0,0,4)\} \subseteq \mathrm{Im}(f).$$

Entonces:

a) f es inyectiva y no sobreyectiva.
b) f es sobreyectiva y no inyectiva.
c) f es biyectiva.
d) f no es inyectiva ni sobreyectiva.

13. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^2 \to (\mathbb{Z}_7)^2$ una aplicación lineal tal que $f(1,2) = (0,6)$ y $f(1,4) = (4,1)$. Entonces $f(5,3)$ es igual a:

(a) $(4,6)$ (b) $(3,0)$ (c) $(1,1)$ (d) $(0,2)$

14. Sea $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$ la aplicación definida por

$$f(x,y,z) = (x-y+2z, 2x+y+z, -x+2y+z, x+2y+2z).$$

Unas ecuaciones implícitas para el subespacio $\mathrm{Im}(f)$ son:

a) $x+3y+3z-4t=0$.

b) $\left\{\begin{array}{c} 5x-y+3z=0 \\ x-y+t=0 \end{array}\right.$

c) $17x-13y+3z+12t=0$.

d) $\left\{\begin{array}{c} x-y-z=0 \\ x-t=0 \end{array}\right.$

15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $f(x,y,z) = (x+y+z,0,0)$. Una base del núcleo de f es:

(a) $\{(0,0,0)\}$ (b) $\{(1,-1,0),(0,1,-1)\}$ (c) $\{(1,1,1),(1,0,0)\}$ (d) $\{(1,1,-2)\}$

16. Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rl} x+3y+\ \ z &= 0\\ 2x+\qquad+\ \ z &= 0\\ x+4y+2z &= 1\end{array}\right.$$

con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) El sistema es compatible determinado.
b) El sistema es incompatible.
c) El sistema es compatible indeterminado.
d) Ninguna de las anteriores es cierta.

17. ¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$?

$$\left\{\begin{array}{rl} x+\ \ y+\ \ z &= 1\\ x+\qquad+2z &= 0\\ 3x+\ \ y\qquad &= 1\end{array}\right.$$

(a) 15 (b) 0 (c) 10 (d) 5

18. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&0&3\\1&4&4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5),$$

¿para cuál de las siguientes matrices $P\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$ se verifica que $P^{-1}\cdot A\cdot P$ es una matriz diagonal?

(a) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}3&1&1\\0&2&1\\2&3&0\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}4&1&1\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}1&4&2\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}$

19. ¿Cuál es el valor del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

cuyos coeficientes están en $\mathbb{Z}_7$?.

(a) 6 (b) 4 (c) 2 (d) 0

20. Se considera el conjunto $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid det(A) = 1\}$ junto con el producto usual de matrices. Entonces:
a) G es un grupo no conmutativo.
b) G no es un grupo.
c) G es un grupo conmutativo.
d) G es un anillo considerando además la suma usual de matrices.

ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS FINITAS/DISCRETAS

7 de Febrero de 2006

Tipo I				
	a	b	c	d
1	x			
2			x	
3		x		
4			x	
5	x			
6	x			
7				x
8	x			
9	x			
10			x	
11		x		
12		x		
13				x
14	x			
15		x		
16		x		
17				x
18			x	
19		x		
20	x			

Tipo II				
	a	b	c	d
1				x
2				x
3	x			
4	x			
5			x	
6				x
7		x		
8			x	
9		x		
10	x			
11				x
12	x			
13			x	
14			x	
15	x			
16			x	
17	x			
18	x			
19			x	
20		x		

Tipo III				
	a	b	c	d
1		x		
2		x		
3				x
4				x
5		x		
6			x	
7	x			
8		x		
9				x
10				x
11	x			
12			x	
13	x			
14		x		
15			x	
16	x			
17			x	
18				x
19	x			
20				x

Tipo IV				
	a	b	c	d
1			x	
2	x			
3			x	
4		x		
5				x
6		x		
7			x	
8				x
9			x	
10		x		
11			x	
12				x
13		x		
14				x
15				x
16			x	
17		x		
18		x		
19				x
20			x	

ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS FINITAS/DISCRETAS

13 de Diciembre de 2006

APELLIDOS, NOMBRE: ....

DNI: .... GRUPO: ....

1. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $f(x, y, z) = (x-z, -2x+y+3z, x+2y+z)$, calcule los valores de a para los cuales el vector $v = (a+3, 3, 1)$ pertenece a $\mathrm{Im}(f)$.
2. Discuta según los valores del parámetro a, y resuelva en los casos de compatibilidad, el sistema siguiente con coeficientes en $\mathbb{R}$:
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & & & = & a^2 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$
3. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Demuestre que si H es un subgrupo de G, entonces $f_*(H)$ es un subgrupo de G'.
4. Sean los conjuntos $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Consideramos la siguiente relación de equivalencia R sobre $\mathcal{P}(X)$:
$$A \; R \; B \;\Leftrightarrow\; A \cup Y = B \cup Y.$$
Calcule razonadamente el cardinal del conjunto cociente.
5. Sean las aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Demuestre que si $g \circ f$ es inyectiva y f sobreyectiva, entonces g es inyectiva.
6. Sea $\mathcal{S}_8$ el grupo simétrico de grado 8 y sea $H = \{\sigma \in \mathcal{S}_8 \mid \sigma^3 = \mathbf{1}\}$. Estudie si H es o no un subgrupo de $\mathcal{S}_8$.
7. Dadas la permutaciones $\alpha = (2, 3, 6, 7)(1, 4, 2, 7, 6)$ y $\beta = (1, 5, 3)(7, 4, 5, 6, 2)$, calcule el orden de la permutación $\sigma = \beta^{-1}\alpha^3$.
8. Estudie si la matriz siguiente con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$ es o no diagonalizable:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
9. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$, $U = \langle(3, 2, 1, -4), (5, 1, 2, -1), (1, 3, 0, -7)\rangle$ y $W = \langle(2, 4, -2, -1), (4, 3, -1, 2), (-1, -2, 1, \frac{1}{2})\rangle$, calcule una base para el subespacio $U \cap W$.
10. Sean A y B matrices pertenecientes a $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ y sea λ un valor propio tanto para la matriz A como para la matriz B. Sea $v \in \mathbb{R}^4$ un vector propio asociado a λ como valor propio para A y como valor propio para B. Si $(A+B)^2 = A^2 + B^2$, demuestre que $\lambda = 0$ o bien $v = \vec{0}$.

1. Sean $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ y $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Definimos la relación de equivalencia siguiente sobre el conjunto $\mathcal{P}(X)$:

$$B \; R \; C \;\Leftrightarrow\; B \cup A = C \cup A.$$

Entonces el cardinal del conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R$ es igual a

(a) 4 (b) 16 (c) 64 (d) 128

2. El número de aplicaciones del conjunto $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ en el conjunto

$$\{f : \{1, 2\} \to \{3, 4, 5\} \mid f \text{ es aplicación}\}$$

es igual a

(a) 9^2 (b) 2^9 (c) 4^9 (d) 9^4

3. Dado $A \subseteq X$, recordemos que $X - A$ también se denota como $X \setminus A$ así como $\overline{A}$. Si $A, B \subseteq X$, entonces el subconjunto $(X - (A \cap B)) \cap A$ es igual a

(a) $\emptyset$ (b) $(X - A) \cup B$ (c) $(X - B) \cap A$ (d) X

4. Definimos en $\mathbb{Z}_7$ la siguiente relación binaria: $x \; R \; y \;\Leftrightarrow\; x + y = 0$. Entonces:
   a) R no es relación de equivalencia,
   b) R es relación de equivalencia y $\mathbb{Z}_7/R$ tiene cardinal 4,
   c) R es relación de equivalencia y $\mathbb{Z}_7/R$ tiene cardinal 3,
   d) R es relación de equivalencia y $\mathbb{Z}_7/R$ tiene 5 elementos.
5. En S_9 no existen permutaciones de orden

(a) 20 (b) 12 (c) 15 (d) 18

6. Dado un grupo G, consideramos la aplicación $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ para todo $x \in G$. Entonces
   a) f es biyectiva y además es un homomorfismo de grupos,
   b) aunque f no es biyectiva, sin embargo sí es un homomorfismo de grupos,
   c) f es biyectiva, aunque no es un homomorfismo de grupos,
   d) f no es biyectiva ni tampoco es un homomorfismo de grupos.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para la permutación?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

   a) σ es impar,
   b) σ es un ciclo,
   c) $\sigma = (1,4)(4,3)(2,5)(7,9)$ es una descomposición de σ en ciclos disjuntos,
   d) $\sigma^{61} = \sigma$.

8. El cardinal del subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por el conjunto $\{(1,1,1),(1,2,1)\}$ es:

   (a) 25 (b) 10 (c) 125 (d) 15

9. Sean $U_1 = \langle(1,2,3),(1,1,1)\rangle$ y $U_2 = \langle(0,0,1),(3,5,7)\rangle$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
   a) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$
   b) $U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0)\}$
   c) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \{(0,0,0)\}$
   d) $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$

10. ¿Cuál de los siguientes espacios vectoriales no es isomorfo a $\mathbb{R}^3$?
   a) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0\}$,
   b) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0, x_2+x_3=0\}$,
   c) $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid c+d=0\}$,
   d) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1+x_2=0, 3x_1+x_4=0\}$.

11. Sean $B = \{v_1, v_2\}$ y $B' = \{v_1' = 5v_1 - 3v_2, v_2' = -2v_1 + v_2\}$ dos bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Si las coordenadas de w respecto de la base B son $(3,-2)$, entonces las coordenadas de w respecto de la base B' son

   (a) $(19,-11)$ (b) $(1,1)$ (c) $(21,-8)$ (d) $(3,4)$

12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $f(1,1) = (1,-1)$ y $f(3,5) = (-1,-1)$. Entonces la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$. Entonces una base para $\mathrm{Im}(f)$ es:
   a) $\{(1, 1, 2), (0, 0, 1)\}$,
   b) $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$,
   c) $\{(1, 1, 2), (2, 1, 3)\}$,
   d) $\{(1, 1, 2)\}$.
14. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $\dim(N(f)) = 1$. Entonces:
   a) f es inyectiva,
   b) f es sobreyectiva,
   c) f es biyectiva,
   d) f es un isomorfismo.
15. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$. Entonces el rango de A es igual a

   (a) 4 (b) 1 (c) 3 (d) 2

16. Acerca del sistema siguiente con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ (a-1)x + y = a \\ y + z = 1 \end{cases}$$

   podemos afirmar que
   a) es siempre compatible determinado,
   b) la compatibilidad o incompatibilidad depende del valor de a,
   c) es siempre compatible indeterminado,
   d) es siempre incompatible.
17. ¿Cuál de las siguientes matrices no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

18. ¿Cuál de los siguientes conjuntos constituye una base para $\mathbb{Q}^3$ formada por vectores propios para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}?$$

a) $\{(0,1,1),(1,1,2),(1,2,3)\}$,
b) $\{(-1,0,1),(1,1,2),(1,1,1)\}$,
c) $\{(1,1,2),(1,1,0),(-1,0,1)\}$,
d) $\{(0,1,1),(1,2,1),(-1,0,1)\}$.

19. Sea la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Entonces $f^*(\{0,1,-1\})$ es igual a:

(a) $\{0,1\}$ (b) $\{-1,0,1\}$ (c) $\mathbb{Q}$ (d) $\{0\}$

20. Sea σ una permutación de orden 30. Entonces el cardinal del conjunto

$$\{\sigma^i \mid 25 \leq i \leq 40\}$$

es

(a) 16 (b) 15 (c) 30 (d) 10

1. Dado un grupo $(G, *)$ y la aplicación $f : G \to G$ definida por $f(a) = a * a$, entonces
   a) f es un homomorfismo de grupos, aunque no es inyectivo.
   b) f es un homomorfismo de grupos, aunque no es sobreyectivo.
   c) f es un isomorfismo de grupos.
   d) f no es necesariamente un homomorfismo de grupos.
2. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros la operación $\odot$ se define mediante la ecuación $a \odot b = ab + 2a + 2b + 2$
   a) La operación $\odot$ no es asociativa.
   b) La operación $\odot$ no tiene elemento neutro.
   c) La operación $\odot$ tiene elemento neutro, pero no todo entero tiene un elemento simétrico o inverso respecto de esta operación.
   d) $(\mathbb{Z}, \odot)$ es un grupo conmutativo.
3. La aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = n + (-1)^n$,
   a) no es inyectiva ni sobreyectiva,
   b) es biyectiva,
   c) es inyectiva, pero no sobreyectiva,
   d) es sobreyectiva, pero no inyectiva.
4. El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$$

   vale

   a) -9 b) -3 c) 0 d) 3

5. Cuántas aplicaciones existen de $\{a, b, c, d\}$ en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

   a) 625 b) 20 c) 9 d) 256

6. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{1, 4\}$ y $D = \{a\}$. El cardinal del conjunto $(A \times B) \setminus (C \times D)$ es

   a) 8 b) 9 c) 10 d) 12

7. El orden de la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

   es

   a) 6 b) 8 c) 12 d) 24

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y)$. La dimensión del núcleo de f es

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

9. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. El subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^3$ verificando que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ es
   a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$.
   b) $W = \{0\}$.
   c) $W = \mathbb{R}^3$.
   d) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{smallmatrix} x-y & =0 \\ x-z & =0 \end{smallmatrix}\right\}$.

10. Dado el sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

   cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
   a) Es compatible determinado.
   b) Es incompatible.
   c) Es compatible indeterminado.
   d) Tiene exactamente 35 soluciones.

11. Los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son

a) $\{1,3,0\}$ b) $\{1,2,3,4,5\}$ c) $\{0,1,2,3\}$ d) No tiene valores propios

12. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$$

una matriz cuyos valores propios son 0 y 1. Los espacios propios de A tienen por ecuaciones

a) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x+2y=0 \\ z=0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+y+2z=0\}$

b) $V_0 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+2y=0\}$ y $V_1 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+y+2z=0\}$

c) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x+2y=0 \\ x+y+2z=0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+y+2z=0\}$

d) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x+2y=0 \\ z=0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x+y=0 \\ z=0 \end{smallmatrix}\right\}$

13. Sea $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_p)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_3$ (p es un número primo). Entonces

a) A es diagonalizable y la base canónica es una base de vectores propios.

b) A es diagonalizable y todos los vectores de $(\mathbb{Z}_p)^3$ son propios.

c) A no es diagonalizable.

d) A es diagonalizable si y sólo si $\lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_3 = 0$.

14. Sea $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \mid \det(A) = 0\}$. Entonces

a) V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 4.

b) V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 0.

c) V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 3.

d) V no es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

15. Consideremos los subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^4$ definidos por las ecuaciones

$$U_1 = \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z + t = 0 \end{cases} \text{ y } U_2 = \begin{cases} y + 3t = 0 \\ x + z + 3t = 0 \end{cases}$$

Una base de $U_1 + U_2$ es

a) $\{(1, 0, 4, 0), (1, 0, 0, 3), (0, 1, 0, 0)\}$

b) $\{(1, 0, 4, 0), (1, 0, 0, 3), (0, 0, 1, 3)\}$

c) $\{(1, 0, 4, 0), (1, 0, 0, 3), (1, 1, 1, 3)\}$

d) $\{(1, 0, 4, 0), (1, 0, 0, 3)\}$

16. En $\mathbb{Z}$ definimos la relación de equivalencia $xRy \iff 9 \mid x^2 - y^2$. El cardinal de $\mathbb{Z}/R$ es

    a) 1 b) 4 c) 6 d) 9

17. Sea

$$\begin{aligned} f : \{0, 1, 2, \ldots, 14\} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{15} \\ a &\longmapsto (2^a \text{ mód } 15) \end{aligned}$$

    El cardinal de $\mathrm{im}(f)$ es

    a) 1 b) 4 c) 10 d) 15

18. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$$

    es

    a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

19. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ dos bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ tales que $v_1' = v_1 + 2v_2 + v_3$, $v_2' = -v_2 + v_3$ y $v_3' = -v_1 + v_2 - 5v_3$. Si las coordenadas de x respecto de la base B son $(1, -2, 3)$, entonces las coordenadas de x respecto de B' son:

    a) $(3, 10, 2)$ b) $(-2, 7, -16)$ c) $(0, 5, -18)$ d) $(-9, 4, 2)$

20. Sean $\sigma_1 = (2, 3, 8, 6)(4, 2, 5)$ y $\sigma_2 = (4, 5)(7, 1, 6)(6, 8)(4, 5)$. Entonces la permutación σ que satisface la igualdad $\sigma^7 = \sigma^{-4}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma^{12}$ es
    a) $(3, 4, 5, 2, 8)(7, 1, 6)$
    b) $(1, 6, 8)(2, 5, 4, 7, 3)$
    c) $(2, 5, 1, 8, 7, 3, 4)$
    d) $(7, 5, 2, 1, 6)(8, 3, 4)$

1. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. El cardinal del conjunto $(A \cap B) \times (A \cup B)$ es

   (a) 14 (b) 16 (c) 24 (d) 30

2. La aplicación $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x, y) = 21x + 6y$ es
   a) inyectiva y no sobreyectiva,
   b) sobreyectiva y no inyectiva,
   c) inyectiva y sobreyectiva,
   d) no inyectiva y no sobreyectiva.

3. Sean $B = \{v_1, v_2\}$ y $B' = \{v'_1 = 2v_1 + 5v_2, v'_2 = 3v_1 + 7v_2\}$ dos bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$. Si las coordenadas de w respecto de la base B son $(-1, 4)$, entonces las coordenadas de w respecto de la base B' son

   (a) $(5, 12)$ (b) $(19, -13)$ (c) $(-7, 10)$ (d) $(10, 23)$

4. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

   $$f(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y - z, 4x - 2y + 5z).$$

   Entonces
   a) los subespacios núcleo e imagen de f son iguales,
   b) $f^*(\{(-1, 1 - 2)\}) = \varnothing$,
   c) el subespacio núcleo de f tiene dimensión 0,
   d) el subespacio imagen de f tiene dimensión 2.

5. Consideremos los siguientes subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^4$:

   $$U_1 = \langle (1, 1, 2, 0), (3, 1, 4, 1) \rangle \quad \text{y} \quad U_2 = \langle (0, 3, 3, 1), (2, 3, 0, 2) \rangle.$$

   La dimensión de $U_1 \cap U_2$ es

   (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 1

6. Sea $V = \big\{a(x) \in \mathbb{Z}_3[x] \mid \text{el grado de } a(x) \text{ es menor o igual que } 2\big\}$. Entonces una base para V es
   a) $\{2x + x^2, 1 + x + x^2, 1 + 2x^2\}$,
   b) $\{1 + 2x + x^2, 2x + x^2, 1 + x + 2x^2\}$,
   c) $\{1 + x + x^2, x + 2x^2, 1 + 2x + x^2\}$,
   d) $\{2 + x + x^2, 2 + x + 2x^2, x^2\}$.

7. Dado un grupo G, consideramos la aplicación $f : G \to G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ para todo $x \in G$. Entonces
   a) f es biyectiva y además es un homomorfismo de grupos,
   b) aunque f no es biyectiva, sin embargo sí es un homomorfismo de grupos,
   c) f es biyectiva, aunque no es un homomorfismo de grupos,
   d) f no es biyectiva ni tampoco es un homomorfismo de grupos.

8. Sean $\alpha = (3, 7, 1, 4)(5, 3, 4)$ y $\beta = (1, 2, 4, 5)$. Si σ es la permutación que satisface $\alpha\sigma\beta = \beta\alpha$, entonces σ es igual a

(a) $(7,2,4,1,5)$ (b) *identidad* (c) $(1,5,7,2,4,3)$ (d) $(5,7,1)(2,4,3)$

9. Sea la permutación $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 10 & 9 & 6 \end{pmatrix}$. El cardinal del conjunto $\{\sigma^n \mid n \in \{1000, 1001, 1002, \ldots, 1840\}\}$ es igual a

   (a) 40 (b) 12 (c) 24 (d) 16

10. Sean $A, B \subseteq X$. El subconjunto $\overline{(A \cap B)} \cap A$ es igual a

    (a) $\varnothing$ (b) $\overline{A} \cup B$ (c) $\overline{\overline{A} \cup B}$ (d) X

11. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_5)$. El rango de A es igual a

    (a) 4 (b) 1 (c) 3 (d) 2

12. Definimos sobre $\mathbb{N} - \{0,1\}$ la siguiente relación binaria: aRb si y sólo si $mcd\{a,b\} \neq 1$. Acerca de la la relación R podemos afirmar que
    a) es transitiva, pero no es simétrica,
    b) no es reflexiva ni transitiva,
    c) es de equivalencia,
    d) es simétrica y reflexiva, pero no es transitiva.
13. Acerca del sistema siguiente con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & z & = & 1 \\ (a-1)x & + & y & & & = & a \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

    podemos afirmar que
    a) es siempre compatible determinado,
    b) la compatibilidad o incompatibilidad depende del valor de a,
    c) es siempre compatible indeterminado,
    d) es siempre incompatible.
14. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5),$$

    sobre la cual se sabe que $\lambda = 3$ es un valor propio. Sea α la multiplicidad algebraica y d la multiplicidad geométrica de λ. Entonces
    a) $d = 2$ y $\alpha = 2$
    b) $d = 1$ y $\alpha = 1$
    c) $d = 1$ y $\alpha = 2$
    d) $d = 2$ y $\alpha = 1$

15. Sean A la matriz asociada a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto de las bases canónicas. Supongamos que existe un número real a tal que $f(2u+v) = a^2 \cdot u + f(v)$ para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces
   a) la matriz A es diagonalizable independientemente del valor de a,
   b) la matriz A no es diagonalizable, sea cual sea el valor de a,
   c) la matriz A es diagonalizable sólo para un número finito de valores de a,
   d) los datos del enunciado son muy generales y a partir de ellos no se puede conocer si la matriz A es o no diagonalizable.
16. Sean $V = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y $U = \{A \in V \mid A = A^t\}$. Entonces
   a) U es un subespacio vectorial de V de dimensión 6,
   b) U no es un subespacio vectorial de V, pues la suma de matrices no es una operación binaria sobre U,
   c) U es un subespacio vectorial de V de dimensión 3,
   d) U es un espacio vectorial, aunque no puede ser un subespacio vectorial de V pues su dimensión es mayor que la dimensión de V.
17. Sean $U_1 = \{(x, y, z) \mid x - y - z = 0\}$ y $U_2 = \{(x, y, z) \mid x + y + 7z = 0\}$ subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Entonces la dimensión del subespacio $U_1 + U_2$ es igual a

   (a) 1 (b) 4 (c) 2 (d) 3

1. Sea σ la permutación
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$
Entonces σ^{1206} es igual a

   a) σ^4 *b)* σ *c)* σ^8 *d)* σ^6

2. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y,\ x - z)$. Entonces la dimensión del núcleo de f es igual a:

   a) 3 *b)* 0 *c)* 2 *d)* 1

3. Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$. Unas ecuaciones implícitas o cartesianas para U son:
   a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
   b) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$
   d) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4. Sea A una matriz cuadrada con coeficientes en $\mathbb{R}$ y con determinante igual a cero. Entonces:
   a) A no es diagonalizable.
   b) A solo es diagonalizable si es simétrica.
   c) El producto de los valores propios de A vale cero.
   d) $\lambda = 0$ es el único valor propio de A.

5. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal inyectiva y $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para V. Entonces $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$...
   a) es una base para V'.
   b) es un sistema de generadores para V'.
   c) es un conjunto de vectores linealmente independientes.
   d) es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

6. Sea A la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$
Entonces el rango de A es igual a

a) 2 *b)* 4 *c)* 1 *d)* 3

7. Acerca del sistema siguiente con coeficientes en $\mathbb{R}$
$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ x + y + z = a \end{cases}$$
podemos afirmar que:
a) Independientemente del valor de a, es compatible determinado.
b) Independientemente del valor de a, es compatible indeterminado.
c) Es siempre incompatible.
d) La compatibilidad o incompatibilidad depende del valor de a.

8. Dadas dos matrices A y B pertenecientes a $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y tales que
$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
entonces $A^2 - B^2$ es igual a

a) $\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. Sean $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$ tales que $v_1 = -2u_1 - u_2$ y $v_2 = 5u_1 + 2u_2$. Si w es un vector de $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{B}_1$ son (a, b), entonces las coordenadas de w respecto de $\mathcal{B}_2$ son

a) $(2a - 5b, a - 2b)$ *b)* $(3a, 2a - b)$ *c)* $(5a + b, 2a - 5b)$ *d)* $(b, -a)$

10. Para cualquier conjunto X denotemos por $|X|$ al cardinal de X, es decir, al número de elementos de X. Dados dos conjuntos A y B tales que $|A \times B| = 112$ y $|\mathcal{P}(A)| = 256$ entonces $|B|$ vale

a) 12 *b)* 17 *c)* 9 *d)* 14

11. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos aplicaciones tales que $(g \circ f)(x) = 16x^2 - 1$ y $f(x) = 2x + 3$. Entonces $g(x)$ es igual a

    a) $4x^2 - 24x + 35$ *b)* $8x^2 - 2$ *c)* $64x^2 + 192x + 143$ *d)* $32x^2 + 1$

12. Definimos sobre $\mathbb{Z}$ la siguiente relación binaria: aRb si y sólo si $a \cdot b \geq 0$. Acerca de la relación R podemos afirmar
    - *a)* R no es reflexiva.
    - *b)* R no es simétrica.
    - *c)* R no es transitiva.
    - *d)* R es relación de equivalencia
13. Indicar cual de las siguientes afirmaciones sobre conjuntos es verdadera:
    - *a)* Si $A \subseteq B$ y $B \not\subseteq C$ entonces $A \not\subseteq C$
    - *b)* Si $a \in A$ y $A \in B$ entonces $\{a\} \in B$
    - *c)* Si $a \in A$ y $A \subseteq B$ entonces $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$
    - *d)* Si $A \in B$ y $A \subseteq B$ entonces $A = \varnothing$
14. Sea $f : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ la aplicación definida por $f(a, b) = (b, 2a)$. El conjunto $f^*(\{(2, 4)\})$ es igual a

    a) $\varnothing$ *b)* $\{(2, 2)\}$ *c)* $\{(1, 4)\}$ *d)* $\{(2, 2), (2, 5)\}$

15. Sea $X = \{0, 1, \ldots, 31\}$. Definimos en X la relación de equivalencia $a \sim b$ si y sólo si el número de '1' en la representación binaria de a y b es el mismo. Por ejemplo, $00001_2 = 1 \sim 2 = 00010_2$, pero $00010_2 = 2 \not\sim 3 = 00011_2$. El cardinal del conjunto cociente $X/\sim$ es igual a

    a) 2 *b)* 4 *c)* 6 *d)* 8

16. En $(\mathbb{Z}_7)^4$ consideramos los subespacios vectoriales de ecuaciones

$$V_1 \equiv \{x + y + 6z + 6t = 0 \qquad V_2 \equiv \begin{cases} x + 6z + t = 0 \\ y + 5t = 0 \end{cases}$$

Una base de $V_1 \cap V_2$ es

a) $\{(1,1,5,4),(3,3,1,5)\}$
b) $\{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,6)\}$
c) $\{(1,0,1,0),(0,1,4,4)\}$
d) $\{(1,0,1,0),(1,1,5,4),(0,0,0,0)\}$

17. Sea $f : (\mathbb{Z}_3)^4 \to (\mathbb{Z}_3)^2$ una aplicación lineal no sobreyectiva tal que $(1,0,0,0) \in \ker f$, $(0,1,2,0) \in \ker f$ y $(1,1) \in \operatorname{im} f$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente falsa?

a) $\dim \ker f = 3$
b) $\dim \operatorname{im} f = 1$
c) $(0,0,1,1) \in \ker f$ y $(0,0,0,2) \in \ker f$
d) $(2,2,1,0) \in \ker f$ y $(0,0,0,1) \in \ker f$

18. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_p)$$

La matriz A es singular (es decir, no tiene inversa para el producto) para el siguiente valor de p

a) $p = 2$ *b)* $p = 3$ *c)* $p = 5$ *d)* $p = 7$

19. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$$

Sea α la multiplicidad algebraica y d la multiplicidad geométrica del valor propio (o autovalor) 3. Entonces

a) $d = 2$ y $\alpha = 2$
b) $d = 1$ y $\alpha = 1$
c) $d = 1$ y $\alpha = 2$
d) $d = 2$ y $\alpha = 1$

20. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) Existe $\sigma \in S_8$ tal que σ tiene orden 15 y paridad par.
b) Existe $\sigma \in S_8$ tal que σ tiene orden 15 y paridad impar.
c) Existe $\sigma \in S_8$ tal que σ tiene orden 6 y paridad par.
d) Existe $\sigma \in S_8$ tal que σ tiene orden 6 y paridad impar.

ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS FINITAS/DISCRETAS

APELLIDOS, NOMBRE: ....

DNI: .... GRUPO: ....

1. Sea la aplicación $f : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y + 1,\ x + z + 2)$.
   a) (**0.5 puntos**) ¿Es f inyectiva?
   b) (**0.5 puntos**) ¿Es f sobreyectiva?
   c) (**0.5 puntos**) Calcular $f_*(\mathbb{N}^3)$
   d) (**0.5 puntos**) Calcular $f^*(A)$ siendo $A = \{(a, a)\ :\ a \in \mathbb{N}\}$

2. Sea la permutación $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$
   a) (**0.75 puntos**) Calcular σ^{1528}
   b) (**0.75 puntos**) Sean $\alpha = (2, 3, 4, 5)$ y $\beta = (1, 3, 5, 7)$. Calcular una permutación δ tal que $\alpha \cdot \delta \cdot \beta^{-1} = \sigma^2$, escribiéndola como producto de ciclos disjuntos.
   c) (**0.5 puntos**) Calcular el conjunto $\{n \in \mathbb{Z}\ :\ \sigma^n \text{ es par}\}$

3. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y $a \in G$. Definimos la aplicación $f : G \to G$ como $f(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$.
   a) (**0.5 puntos**) ¿Es f un homomorfismo de grupos?
   b) (**0.5 puntos**) ¿Es f biyectiva?

4. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ definida por

$$f(x, y, z, t) = (-x + 5y - 3z - 4t,\ 2x - 4y + 2z + 4t,\ -x - y + z,\ 6x - 3y + 6t)$$

   a) (**0.7 puntos**) Calcular una base para $N(f)$, el núcleo de f.
   b) (**0.7 puntos**) Calcular unas ecuaciones cartesianas (o implícitas) para $Im(f)$, la imagen de f.
   c) (**0.7 puntos**) Calcular unas ecuaciones paramétricas para $N(f) \cap Im(f)$.
   d) (**0.4 puntos**) ¿Es $\mathbb{Q}^4 = N(f) \oplus Im(f)$?

5. Sea la matriz $A \in \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{Z}_7)$
   a) (**0.9 puntos**) Calcular los valores propios de A y sus correspondientes multiplicidades.
   b) (**0.9 puntos**) ¿Existen dos matrices $P, D \in M_{3\times3}(\mathbb{Z}_7)$ tales que P sea regular, D sea diagonal y $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$?
   c) (**0.7 puntos**) Calcular explicitamente la matriz A^{300}

MATEMTICA DISCRETA (14-2-02)
Ingeniera Informtica Grupos A y B

NOMBRE: .... **GRUPO:** ....

1.- Demostrar, usando el principio de induccin, que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad \forall n \geq 1$$

2.- Si la expresin en base 5 de los nmeros x e y es respectivamente 3243323423 y 43323332, calcular la expresin de $x + y$ en base 25.

3.- Determinar todos los nmeros naturales menores o iguales que 300 que verifiquen simultneamente las siguientes condiciones:

1. al dividir el doble del nmero por 5 el resto es 2;
2. al dividir el nmero por 4 el resto es 2;
3. al dividir el triple del nmero por 7 el resto es 1.

4.- Calcular en $\mathbb{Z}_{2475}$ o razonar que no es posible:

1. el inverso de 448;
2. tres divisores de cero distintos;
3. un elemento que no tenga inverso y que no sea divisor de cero.

5.- Estudiar la irreducibilidad del polinomio $5x^4 + 6x^3 + 2x^2 + x + 3$ en $\mathbb{Z}[X]$.

6.- Para los siguientes anillos, determinar si son cuerpo, dominio eucldeo, dominio de factorizacin nica o no son dominio:

1. $\mathbb{Z}[X]$;
2. $\mathbb{Z}_7[X]$;
3. $\mathbb{Z}_6[X]$;
4. $\mathbb{Z}_{231}$;
5. $\mathbb{Q}[X]_{X+1}$ (el anillo de clases de resto mdulo $(X + 1)$);
6. $\mathbb{C}[X]$;

7.- Dado el conjunto ordenado representado en el diagrama de Hasse adjunto, se consideran los subconjuntos $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 7\}$ y $C = \{2, 3, 5, 6\}$. Completar el cuadro con los elementos notables de estos subconjuntos que se sealan:

	Cotas superiores	Cotas inferiores	Supremo	nfimo	Mximo	Mnimo
A						
B						
C						

8.- Dado los conjuntos ordenados

A B

determinar el diagrama de Hasse de los conjuntos ordenados:

1. $A \times B$ con el orden producto cartesiano (definido por: $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ si $a_1 \leq a_2$ y $b_1 \leq b_2$);
2. $A \times B$ con el orden lexicogrfico (definido por: $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ si $a_1 < a_2$ o $a_1 = a_2$ pero $b_1 \leq b_2$).

9.- Consideramos los nmeros naturales que en binario tienen slo tres dgitos. Determinar las funciones booleanas elementales de tres variables:

1. f_1 que identifique a las potencias de 2;
2. f_2 que identifique a los nmeros primos.

Para $f_1,\ f_2$ y $\overline{f_1 + f_2}$ dar su tabla de verdad, su forma cannica en mintrminos y una expresin lo ms simplificada posible.

10.- Para qu valores de n y m es el grafo bipartido completo $K_{n,m}$ plano?

MATEMÁTICA DISCRETA. EXAMEN DE FEBRERO (02-02-07)					
TITULACIÓN:			GRUPO:		CALIFICACIÓN:
Ing.Inf.	Sistemas	Gestión	A	B	
APELLIDOS:					NOMBRE: DNI:

Ejercicio 1
Sea $\{F_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que para todo $m \geq 0$ se verifica:

$$\sum_{k=0}^{m} F_k^2 = F_m \cdot F_{m+1},$$

Solución:
Demostremos esta igualdad por inducción.
Para $m = 0$, tenemos que comprobar que $F_0^2 = F_0 F_1$, lo cual es cierto, pues $0 = 0$.
Supongamos que la fórmula es cierta para un número natural m, es decir, $\sum\limits_{k=0}^{m} F_k^2 = F_m \cdot F_{m+1}$. En tal caso se tiene que

$$\sum_{k=0}^{m+1} F_k^2 = \sum_{k=0}^{m} F_k^2 + F_{m+1}^2 = F_m \cdot F_{m+1} + F_{m+1}^2 = F_{m+1} \cdot (F_m + F_{m+1}) = F_{m+1} \cdot F_{m+2}.$$

Ejercicio 2

Determina el número entero entre 1500 y 2500 que verifica:

1. sus dos últimas cifras en base 2 son 11,
2. sus dos últimas cifras en base 3 son 00 y
3. sus dos últimas cifras en base 5 son 12.

Solución:
Denominemos a este número x. La primera condición nos dice que $x \equiv 3(\acute{m}\acute{o}d\ 4)$. Aclaremos esto último.

> Si la expresión de x en base 2 es $(a_n a_{n-1} \ldots a_2 11)_2$ significa que
> $x = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + a_2 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 4 \cdot (a_n 2^{n-2} + a_{n-1} 2^{n-3} + \cdots + a_2) + 3,$
> es decir, $x - 3$ es múltiplo de 4.

La segunda condición nos dice que $x \equiv 0(\text{mód } 9)$, mientras que la tercera que $x \equiv 7(\text{mód } 25)$.
Por tanto, lo que hemos de resolver es el sistema de congruencias

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \ (\text{mód } 4) \\ x &\equiv 0 \ (\text{mód } 9) \\ x &\equiv 7 \ (\text{mód } 25) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
x \equiv 3 \ (m\acute{o}d\ 4) & \Longrightarrow & x = 3+4k \\
\left.\begin{array}{l} x = 3+4k \\ x \equiv 0 \ (m\acute{o}d\ 9) \end{array}\right\} & \Longrightarrow & 3+4k \equiv 0 \ (m\acute{o}d\ 9) \\
 & & 4k \equiv -3 \ (m\acute{o}d\ 9) \\
 & & 4k \equiv 6 \ (m\acute{o}d\ 9) \\
 & & 7\cdot 4k \equiv 7\cdot 6 (m\acute{o}d\ 9) \\
 & & k \equiv 6 \ (m\acute{o}d\ 9) \Longrightarrow k = 6+9k' \\
\left.\begin{array}{l} x = 3+4k \\ k = 6+9k' \end{array}\right\} & \Longrightarrow & x = 3+4(6+9k') = 27+36k' \\
\left.\begin{array}{l} x = 27+36k' \\ x \equiv 7 \ (m\acute{o}d\ 25) \end{array}\right\} & \Longrightarrow & 27+36k' \equiv 7 \ (m\acute{o}d\ 25) \\
 & & 36k' \equiv -20 \ (m\acute{o}d\ 25) \\
 & & 11k' \equiv 5 \ (m\acute{o}d\ 25) \\
 & & 16\cdot 11k' \equiv 16\cdot 5 \ (m\acute{o}d\ 25) \\
 & & k' \equiv 5 \ (m\acute{o}d\ 25) \Longrightarrow k' = 5+25k''.
\end{array}$$

Y por tanto, $x = 27+36(5+25k'') = 207+900k''$.
Buscamos ahora la solución en el intervalo dado.

$$1500 \leq 207+900k'' \leq 2500 \Longrightarrow k'' = 2$$

Por tanto, $x = 2007$.

Ejercicio 3
Calcula el resto de dividir el polinomio $X^{123}+25X^{44}+35X^2+7$ entre $X+25$ en $\mathbb{Z}_{41}[X]$.
Solución
Se tiene que $X+25 = X-16$. Por el teorema del resto, el resto de dividir $p(X) = X^{123}+25X^{44}+35X^2+7$ entre $X-16$ es igual al resultado de evaluar el polinomio p en $X = 16$.
Dado que $mcd(16,41) = 1$, por el teorema de Fermat se verifica que $16^{\varphi(41)} = 1$ en $\mathbb{Z}_{41}$, y como 41 es primo, $\varphi(41) = 40$. Por tanto, $16^{40} = 1$. En tal caso,

$$p(16) = 16^{123}+25\cdot 16^{44}+35\cdot 16^2+7 = (16^{40})^3\cdot 16^3+25\cdot 16^{40}\cdot 16^4+35\cdot 16^2+7 =$$

$$= 16^3+25\cdot 16^4+35\cdot 16^2+7 = 4096+25\cdot 65536+35\cdot 256+7 = 37+40+22+7 = 94 = 24$$

El resto por tanto es 24.

Ejercicio 4
Calcula el m.c.d. de los polinomios $2X^3+2X+1$ y X^4+X^2+2 en $\mathbb{Z}_5[X]$.
Solución:
Para ello, utilizamos el algoritmo de Euclides. Realizamos entonces divisiones sucesivas hasta obtener resto 0.

$$
\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ \cline{6-9}
4 & 0 & 4 & 2 & & 3 & 0 & & \\ \cline{1-4}
 & 0 & 0 & 2 & 2 & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|ccc}
2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & \\ \cline{5-7}
3 & 3 & & & 1 & 4 & 2 \\ \cline{1-2}
 & 3 & 2 & & & & \\
 & 2 & 2 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 4 & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|cc}
2 & 2 & 2 & \\ \cline{3-4}
3 & & 1 & 1 \\ \cline{1-1}
 & 2 & & \\
 & 3 & & \\ \cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}
$$

Es decir:
$X^4 + X^2 + 2 = (2X^3 + 2X + 1)(3X) + 2X + 2$,
$2X^3 + 2X + 1 = (2X + 2)(X^2 + 4X + 2) + 2$,
$2X + 2 = 2(X + 1) + 0$.
Por tanto, 2 es un máximo común divisor de los polinomios dados. Como el máximo común divisor lo tomamos siempre mónico, multiplicamos por una constante (3), y nos queda que $mcd(X^4+X^2+2, 2X^3+2X+1) = 1$.

Ejercicio 5
Se considera $D(84)$, el conjunto de los divisores positivos de 84, con la relación de orden "*divide a*".

1. Calcula cuántos elementos tiene $D(84)$.
2. Calcula las cotas superiores e inferiores, el supremo y el ínfimo, el máximo y el mínimo y los elementos maximales y minimales de $A = \{2, 4, 6, 12, 14\}$ dentro de $D(84)$.
3. Razona si $D(84)$ es o no un álgebra de Boole.

Solución:

1. La factorización de 84 como producto de primos es $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. El número de divisores es entonces $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$. Éstos son:

$$D(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$$

2. Tenemos:

Cotas superiores	$\{84\}$
Cotas inferiores	$\{1, 2\}$
Supremo	84
Ínfimo	2
Máximo	No tiene
Mínimo	2
Elementos maximales	$\{12, 14\}$
Elementos minimales	$\{2\}$

3. El conjunto $D(84)$ no es un álgebra de Boole, ya que tiene 12 elementos, y el número de elementos de un álgebra de Boole finita es una potencia de 2. También podría argumentarse comprobando que no es un retículo complementado, ya que los elementos 2, 6, 14 y 42 no tienen complemento.

Ejercicio 6
Se considera la expresión booleana $Y(X' + XZ) + X'Y'$ y sea $F : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$ la función booleana que define.

1. Da la forma normal canónica disyuntiva.

2. Simplifica esta expresión booleana (halla una forma mínima).

3. Escribe esta función booleana utilizando únicamente el operador $\uparrow$, "NAND".

X	Y	$\uparrow$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Solución

1. Podemos proceder de dos formas

   - Operando a partir de la expresión booleana que nos define f hasta llegar a una expresión como suma de minterm.
   $$\begin{aligned} F(X,Y,Z) = \; & Y(X' + XZ) + X'Y' = \\ & YX' + YXZ + X'Y' = \\ & X'Y(Z + Z') + XYZ + X'Y'(Z + Z') = \\ & X'YZ + X'YZ' + XYZ + X'Y'Z + X'Y'Z' \end{aligned}$$
   - calculando explícitamente los valores de la función F.

X	Y	Z	XZ	$X' + XZ$	$Y(X' + XZ)$	$X'Y'$	$Y(X' + XZ) + X'Y'$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1

   Y por tanto, se tiene que

   $$F(X,Y,Z) = X'Y'Z' + X'Y'Z + X'YZ' + X'YZ + XYZ$$

2. Dibujamos un diagrama de Karnaugh con la función F

	YZ	$Y'Z$	$Y'Z'$	YZ'
X	1			
X'	1	1	1	1

Y por tanto, la expresión simplificada de F seía

$$F(X,Y,Z) = X' + YZ.$$

3. Para escribir la función F usando únicamente el operador $\uparrow$ podemos proceder como sigue:

   - Puesto que $X \uparrow Y = (XY)' = X' + Y'$ tenemos que
     $$X' = X' + X' = X \uparrow X$$
     $$X + Y = X'' + Y'' = X' \uparrow Y' = (X \uparrow X) \uparrow (Y \uparrow Y)$$
     $$XY = (XY)'' = (X \uparrow Y)' = (X \uparrow Y) \uparrow (X \uparrow Y)$$
     De donde:
     $$\begin{aligned} F(X,Y,Z) = \ & X' + YZ = \\ & (X' \uparrow X') \uparrow (YZ \uparrow YZ) = \\ & [(X \uparrow X) \uparrow (X \uparrow X)] \uparrow [((Y \uparrow Z) \uparrow (Y \uparrow Z)) \uparrow ((Y \uparrow Z) \uparrow (Y \uparrow Z))] \end{aligned}$$
   - También se podría haber hecho:
     $$F(X,Y,Z) = X' + YZ = X' + (YZ)'' = X \uparrow (YZ)' = X \uparrow (Y \uparrow Z)$$

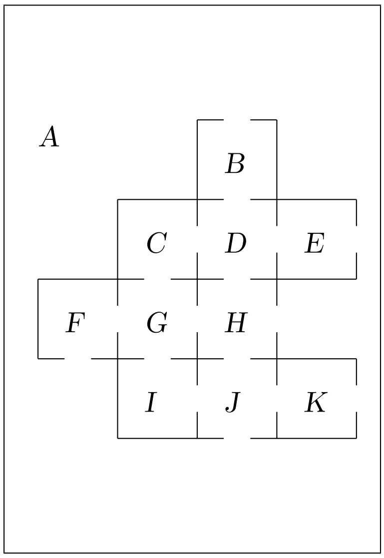
Ejercicio 7
Calcula de cuántas formas distintas pueden reordenarse las letras de la palabra ANACONDA.
De todas las anteriores, determina cuántas hay que empiecen o terminen por A.
Solución:
La palabra ANACONDA tiene 8 letras, de las que hay tres aes, dos enes, mientras que las otras no aparecen repetidas. El número total de ordenaciones distintas es entonces:

$$P_8^{3,2,1,1,1} = \frac{8!}{3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 3360$$

Si queremos saber cuántas empiezan o terminan por A, contamos primero las que empiezan por A.
En este caso, hemos de ordenar las letras de NACONDA (y colocar una A al principio), y esto puede hacerse de $\frac{7!}{2!2!} = 1260$ formas distintas.
A continuación contamos las que terminan por A, o lo que es equivalente, contamos las ordenaciones de las letras de ANACOND, que vuelven a ser 1260.
Por último, contamos las que empiezan y terminan por A, y éstas son $\frac{6!}{2!} = 360$.
El principio de inclusión-exclusión nos dice que el número de palabras que pueden formarse ordenando las letras de ANACONDA, y que empiezan o terminan por A es

$$1260 + 1260 - 360 = 2160$$

Ejercicio 8



Una casa está dividida en habitaciones tal y como se indica en la figura de la derecha.

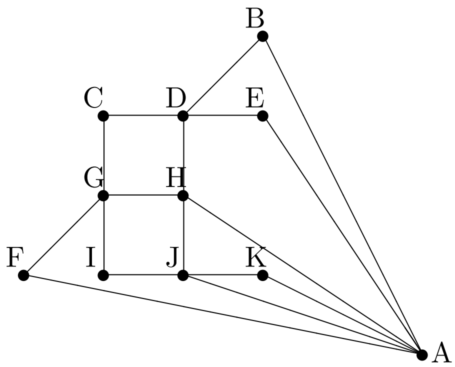
1. *Estudia si es posible pasar por todos los huecos (puertas), una sola vez, y volver al punto de partida.*

2. *Estudia si es posible pasar por cada habitación (indicadas por las letras de la figura), una sola vez, y volver al punto de partida.*

NOTAS:
(1) El exterior, señalado por A, se considera una habitación.
(2) Si se puede, dar el recorrido mediante una lista de las habitaciones; si no es posible hacer un recorrido, dar una respuesta razonada, concisa y clara, no vale con decir que no es posible encontrar un camino.

Solución:

Para responder a estas cuestiones representamos el la casa mediante un grafo, en el que los vértices serán las habitaciones y habrá un lado uniendo dos vértices si entre las correspondientes habitaciones hay una puerta que las comunica.
El grafo entonces sería éste:



1. Lo que se nos pregunta aquí es si el grafo es de Euler. Para esto, vemos si el grado de cada vértice es par, en cuyo caso el grafo será de Euler.

$$gr(A) = 6;\ gr(B) = gr(C) = gr(E) = gr(F) = gr(I) = gr(K) = 2;$$
$$gr(D) = gr(G) = gr(H) = gr(J) = 4.$$

Por tanto el grafo es de Euler y es posible encontrar un camino que recorra todos los lados (puertas) una sola vez y regrese al punto de partida.

Un posible camino podría ser

$$A\ B\ D\ C\ F\ G\ F\ A\ E\ D\ H\ A\ K\ J\ H\ G\ I\ J\ A$$

2. En este caso se nos pregunta si el grafo es Hamiltoniano. La respuesta es que no. Para razonar esto nos fijamos en los vértices A, B, D, E.

   Si tenemos un camino de Hamilton, en un instante pasará por el vértice B. Dado que podemos elegir el sentido del camino, supongamos que lo hace en el sentido "D B A".

   Si la continuación del camino es el vértice E, el siguiente vértice tiene que ser D, y tendríamos un camino que pasa dos veces por el vértice D.

   Si la continuación es cualquier otro vértice conectado con A (F, H, K, J), cuando el camino pase por E, deberá hacerlo, bien A E D, bien D E A, con lo que uno de los vértices (A o D) se repite.

   En cualquier caso, el camino pasa dos veces por el vértice A o por el vértice D.

Ejercicio 9
De un árbol se conoce que tiene 8 vértices de grado 2, 13 vértices de grado 3, 9 vértices de grado 4, 1 vértice de grado 7 y el resto de grado 1. Determina el número de vértices del árbol.
Solución:
Llamemos m al número de vértices de grado 1 y n al número total de vértices. Es claro entonces que $m+8+13+9+1=n$, es decir, $n=m+31$. Al ser un árbol, el número de lados es $n-1=m+30$. Puesto que la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de lados, tenemos que

$$m\cdot 1+8\cdot 2+13\cdot 3+9\cdot 4+1\cdot 7=2(m+30)$$

$$m+98=2m+60$$

$$m=38.$$

Y por tanto, el número de vértices es $38+31=69$.

Matemática Discreta

SOLUCIONES DEL EXAMEN FINAL

Septiembre 2004

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas (tarde) y de Gestión

---

Ejercicio 1: (12 puntos)
Demuestra por inducción que para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$2^{2^n} \equiv 6 \quad mod\, 10.$$

Solución:
Base de inducción: Para $n = 2$

$$2^{2^2} = 2^4 = 16 \equiv 6 \quad mod\, 10.$$

Paso de inducción: Si $2^{2^n} \equiv 6 \quad mod\, 10$,

$$2^{2^{(n+1)}} = 2^{2 \cdot 2^n} = (2^{2^n})^2 \equiv 36 \quad mod\, 10 \equiv 6 \quad mod\, 10.$$

Ejercicio 2: (13 puntos) Escribe en pseudocódigo un algoritmo que verifique si un número a, cuya expresión binaria es $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$, es múltiplo de 2 o de 4. Calcula la complejidad de tu algoritmo.

Solución:
ENTRADA: $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$
$s := 0$
If $a_0 = 0$ then
  If $a_1 = 0$ then $s := es\, múltiplo\, de\, 4$ else $s := es\, múltiplo\, de\, 2$
If $s = 0$ then $s := no\, es\, múltiplo\, de\, 2\, o\, de\, 4$
SALIDA: s

La complejidad del algoritmo anterior es constante, ya que para todo número binario a se realiza, en el peor de los casos, el mismo número de operaciones.

Ejercicio 3:

a) (7 puntos) Determina todos los valores del número entero $n \geq 3$ tales que los números $4n-11$ y $3n-8$ sean primos entre sí.

b) (8 puntos) Unos amigos están decidiendo como pasar la noche. Se dan cuenta que no pueden participar a un certamen de baile en pareja ya que uno de ellos se quedaría sólo. Entonces deciden ir a jugar a los bolos dividiéndose en equipos. Calculan que los equipos no pueden ser todos de tres personas, ya que se quedaría un equipo con sólo dos de ellos, y tampoco pueden ser todos de cinco jugadores, ya que se quedaría un equipo con sólo cuatro personas. ¿Cuántos amigos hay en este grupo?

Solución:

a) Ya que si $n=3 \quad 4n-11=1=3n-8$ y si $n>3$

$$4n-11=(3n-8)+(n-3)$$

$$3n-8=3(n-3)+1$$

$$n-3=(n-3)+0,$$

Los números $4n-11$ y $3n-8$ son primos entre si para todo entero $n>3$.

b) Sea x el número de amigos en el grupo. Se trata de hallar las soluciones positivas del siguiente sistema de ecuaciones de congruencia:

$$\begin{cases} x & \equiv 1 \quad mod\, 2 \\ x & \equiv 2 \quad mod\, 3 \\ x & \equiv 4 \quad mod\, 5. \end{cases}$$

Ya que $2, 3$ y 5 son primos entre si dos a dos, podemos usar el teorema chino de los restos:

$$P_1=\frac{30}{2}=15, \quad , P_2=\frac{30}{3}=10, \quad P_3=\frac{30}{5}=6,$$

$$15\, q_1 \equiv 1 \quad mod\, 2, \quad 10\, q_2 \equiv 1 \quad mod\, 3, \quad 6\, q_3 \equiv 1 \quad mod\, 5.$$

Así que

$$q_1=q_2=q_3=1$$

y

$$x=(15+20+24)+30k=29+30k \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Entonces hay un número mínimo de 29 amigos en el grupo del problema y, más en general, un número de amigos igual a 29 más un múltiplo positivo de 30.

Ejercicio 4: Contesta las siguientes preguntas:

a) (5 puntos)¿Cuántas palabras binarias distintas de 5 bits contienen o tres unos seguidos o tres ceros seguidos?

b) (5 puntos) En un polígono convexo una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos. ¿Cuál es el número de diagonales de un polígono convexo de N lados?

Solución: a) Empezaríamos por contar las que tienen tres unos seguidos. Dichas cadenas pueden ser de la forma $111{*}{*}, {*}111{*}$ *ó* ${*}{*}111$*. Claramente, hay* 2^2 *cadenas de cada tipo. Además, las cadenas de la forma* $1111{*}$ *son de dos de los tipos considerados antes (luego estamos contando esas cadenas dos veces), y lo mismo ocurre con las cadenas de la forma* ${*}1111$ *(observa que, de hecho, la cadena* 1111 *se cuenta 3 veces). Por tanto, en total hay* $32^2 - 2^2 = 8$ *cadenas distintas con tres unos seguidos. Análogamente, hay 8 cadenas distintas con tres ceros seguidos. Como ninguna cadena de 5 bits puede a la vez tener 3 unos y 3 ceros seguidos, el resultado es* $8 + 8 = 16$.

b) En total, hay $\binom{N}{2}$ *pares de vértices en el polígono. De esos pares, exactamente* N *están formados por vértices consecutivos, luego la solución es* $\binom{N}{2} - N$.

Ejercicio 5: En un edificio se tienen nueve oficinas numeradas del 1 al 9 y seis ordenadores identificados con las letras A, B, C, D, E y F. Los ordenadores han ido moviéndose por las oficinas de modo que, en cada momento, había exactamente dos ordenadores a la vez en cada oficina, según la disposición que se deduzca de los siguientes hechos:

1. El ordenador A sólo ha estado:
   - junto con B en las oficinas 6 y 7
   - junto con F en la oficina 1
   - junto con C en la oficina 5

2. Las oficinas 8 y 9 sólo han tenido en común el ordenador B.

3. El ordenador C sólo ha estado en dos oficinas.

4. El ordenador D sólo ha estado:

   - junto con C en la oficina 4
   - junto con E en la oficina 3

5. En la oficina 2 han estado, simultáneamente, los ordenadores E y F.

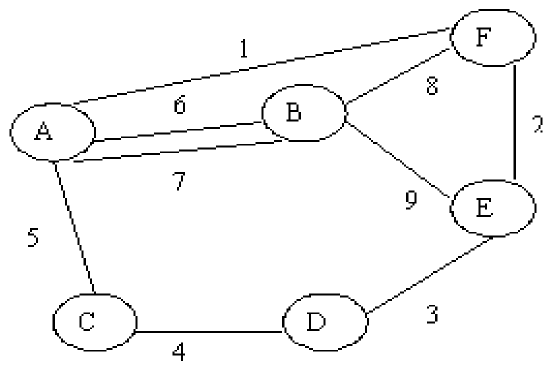
6. El ordenador E ha estado en la oficina 9.

a)(2 puntos) Dibujar el grafo asociado al problema (pista: considerar que cada oficina sirve de 'enlace' entre dos ordenadores).

b) Considerar la siguiente estrategia para inventariar los ordenadores: etiquetamos un ordenador, a continuación nombramos una de las oficinas que lo haya tenido, despúes nombramos otro ordenador que haya estado en la misma oficina y así sucesivamente, de manera que vayamos formando una cadena de la forma $Ordenador_1 Oficina_1 Ordenador_2 Oficina_2 ....$ con la única condición de que $Ordenador_i \neq Ordenador_{i+1}$.

- (4 puntos) ¿Será posible con la estrategia anterior enumerar sin repetición todas las oficinas? ¿Por qué?
- (4 puntos) En caso afirmativo, obtener dicha enumeración por un procedimiento algorítmico.

Solución: a) El grafo natural que se deriva del planteamiento es el siguiente:



b) Lo que en realidad se pide es un camino que recorra todos los arcos del grafo, cada uno exactamente una vez, i.e., un camino euleriano. Existirá, pues un camino euleriano abierto por tener exactemente dos vértices de grado impar. Para encontrar el camino, puede usarse el algoritmo que se deriva del teorema de Euler añadiendo un arco ficticio entre los vértices E y F. Un camino posible es 1234568 *falso* 97, *de donde el camino abierto sería:* 975432168.

Ejercicio 6: Sea el conjunto

$$\mathbb{N}_{13} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}.$$

y considerar la relación $\mathcal{R}$ definida por $a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a$ divide a b.

a) (2 puntos) Representa de dos maneras distintas la relación anterior

b) (4 puntos) Estudia qué propiedades cumple la relación (reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva).

c) (4 puntos) ¿Es una relación de orden total? ¿Es una relación de equivalencia?

Solución: a) Valdría por ejemplo la representación mediante el digrafo asociado a la matriz:

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

así como mediante la tabla:

x												x
x	x	x	x		x						x	
x										x		
x	x			x					x			
x		x						x				
x	x		x				x					
x						x						
x	x	x			x							
x				x								
x	x		x									
x		x										
x	x											
x												

b) Se cumple la propiedad reflexiva (ya que un número siempre se divide a si mismo). No cumple la propiedad simétrica (por ejemplo, $1\mathcal{R}2$ y no $2\mathcal{R}1$) y sí la antisimétrica, pues si un número divide a otro y éste a él, siendo ambos mayores que cero, necesariamente ambos coinciden: si a divide a b, existe un c tal que $a = bc$, si además $b = a\hat{c}$, necesariamente, $a = a\hat{c}c$ y como todos son positivos, necesariamente $c = \hat{c} = 1$. La propiedad transitiva también se cumple: si $a = a'b$ y $b = b'c$, claramente $a = a'b'c$.

c) Es una relación de orden, pero no total (pues, por ejemplo, no podemos relacionar el 11 *con el* 2.*) No es una relación de equivalencia, por no ser simétrica.*

Matemática Discreta

SOLUCIONES DEL EXAMEN PARCIAL

Diciembre 2003

Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas (tarde)

---

1) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = & 4 \\ a_2 = & 10 \\ a_n = & 4a_{n-1} - 3a_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}.$$

Utiliza el método de demostración por inducción completa para verificar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_n = 3^n + 1$.

Base de inducción: $a_1 = 3 + 1$, $a_2 = 9 + 1$ y

$$a_3 = 4a_2 - 3a_1 = 40 - 12 = 28 = 3^3 + 1.$$

Paso de inducción:
Si $a_k = 3^k + 1$ para $1 \leq k \leq n$,

$$a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1} = 4(3^n + 1) - 3(3^{n-1} + 1) = (4-1)3^n + (4-3) = 3^{n+1} + 1.$$

2) Sean "$mcd(b, c)$" un algoritmo que halla el máximo común divisor entre dos números enteros, $a = a_1, a_2, \cdots, a_n$ una lista de n números naturales y p un número natural mayor que 1. Dado el algoritmo:

ENTRADA: $a_1, a_2, \cdots, a_n;\ p$
j:=0,
  For i = 1 to n
    If $mcd(a_i, p) = 1$ then
      j:=j+1
      $b_j := a_i$
  If j>0 then $b := b_1, b_2, \cdots, b_j$ else b:= *no hay*
SALIDA: b

a)(4 puntos) Determina qué problema resuelve el algoritmo dado.
Si b_k es un elemento de la lista b, ¿podemos afirmar que la congruencia $xb_k \equiv 1 \quad mod p$ tiene solución?

El algoritmo dado tiene como salida la lista de los elementos de a que son relativamente primos con p y, entonces, son invertibles módulo p.

b)(1 punto) Calcula la complejidad del algoritmo dado.

La complejidad de este algoritmo es lineal: en el peor de los casos todos los elementos de la lista a son invertibles módulo p y hay un número constante de operaciones que se repite n veces.

3) Si existen, halla todas las soluciones enteras del siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \quad mod 4 \\ x \equiv 3 \quad mod 7 \\ x \equiv 5 \quad mod 15. \end{cases}$$

Siendo $mcd(4,7) = 1$, $mcd(4,15) = 1$, $mcd(7,15) = 1$, podemos aplicar el teorema chino del resto para hallar la única solución módulo $P = 4 \times 7 \times 15 = 420$:

$$x_0 = 1 \times q_1 \times 105 + 3 \times q_2 \times 60 + 5 \times q_3 \times 28,$$

donde $105 \times q_1 \equiv 1 \quad mod 4, \quad 60 \times q_2 \equiv 1 \quad mod 7, \quad 28 \times q_3 \equiv 1 \quad mod 15,$ es decir,

$$1 \times q_1 \equiv 1 \quad mod 4, \quad 4 \times q_2 \equiv 1 \quad mod 7, \quad 13 \times q_3 \equiv 1 \quad mod 15.$$

Se sigue que $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 7$ y

$$x_0 = 1 \times 1 \times 105 + 3 \times 2 \times 60 + 5 \times 7 \times 28 =$$

$$= 105 + 360 + 980 = 105 + 360 + 140 \quad mod 420 =$$

$$= 605 \quad mod 420 = 185 \quad mod 420.$$

Las soluciones del sistema dado son los números enteros de la forma

$$x = 185 + 420k, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

MATEMÁTICA DISCRETA

EXAMEN ORDINARIO, FEBRERO 2009

Alumno: ______________________________________ **D.N.I./Grupo** ______________

Ejercicio 1 Se define la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + n(n+1).$$

Demuestra que $x_n = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$.

Ejercicio 2 Calcula las soluciones enteras de $232x - 341y = 17$.

Ejercicio 3 Sea A el anillo $\mathbb{Z}_2[x]_{1+x^2+x^4}$.

a) En caso de existir, calcula un divisor de cero (no nulo) de A.
b) Determina si x^2 tiene inverso en A, y en caso de existir, encuéntralo.
c) ¿Cuántos elementos tiene A? ¿Es A un cuerpo?

Ejercicio 4 Calcula en $\mathbb{Z}_5[x]$ el resto de dividir $x^{1513} + x^2 + 1$ entre $x + 3$.

Ejercicio 5 Sea L el conjunto de los divisores positivos de 875, con la relación de orden $x \leq y$, si y es múltiplo de x.

a) Calcula los elementos minimales de $L \setminus \{1\}$.
b) Encuentra los elementos de L que tienen complemento.
c) ¿Es un retículo distributivo?
d) ¿Es un álgebra de Boole?

Ejercicio 6 Sea $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función booleana que vale 1 si dos o más argumentos son 1, y 0 en otro caso.

a) Encuentra la forma normal canónica disyuntiva de f.
b) Simplifica la expresión del apartado anterior.

Ejercicio 7

a) Tenemos cinco bolas rojas, cinco blancas y cinco amarillas. ¿De cuántas formas podemos elegir seis de ellas? (Las bolas sólo se distinguen entre ellas por su color.)
b) ¿Cuántos números de tres cifras en base 5 no son múltiplos de 3?

Ejercicio 8 Sea un grafo G cuyo conjunto de vértices es $V = \{0, 1, \ldots, 9\}$ y el de lados $E = \{\{i, j\} \mid i \neq j,\ i + j \equiv 0 \pmod{3}\}$.

a) Determina los grados de los vértices de G. ¿Es G regular?
b) ¿Cuántas componentes conexas tiene G? ¿Son isomorfas entre sí?
c) ¿Es G plano?
d) ¿Son sus componentes conexas grafos de Euler?
e) ¿Cuál es el menor número de colores que podemos usar para colorear G?

Todas las respuestas tienen que ser razonadas, en caso contrario no se puntuarán.

Matemática Discreta

(04/12/2006)

Solución

Ejercicio 1. Demuestra que para cualquier número natural $n \geq 1$ se verifica que

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}.$$

Solución:
Lo demostraremos por inducción.
Para $n = 1$ el resultado es cierto, pues $1 \cdot 2^1 = 2$ y $2 + (1-1) \cdot 2^{1+1} = 2$.
Supongamos que $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$, y comprobemos que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k = 2 + (n+1-1) \cdot 2^{n+1+1}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\
&= 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\
&= 2 + (n-1+n+1) \cdot 2^{n+1} \\
&= 2 + 2n \cdot 2^{n+1} \\
&= 2 + n \cdot 2^{n+2} \\
&= 2 + (n+1-1) \cdot 2^{n+1+1}
\end{aligned}$$

como queríamos

Ejercicio 2. Factoriza como producto de irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ el polinomio $3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 6$.

Solución:
En primer lugar buscamos las raíces racionales. En principio, las posibles raíces son:

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 6,\ -6,\ \frac{1}{3},\ \frac{-1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{-2}{3}$$

pues el numerador debe ser un divisor del término independiente y el denominador del coeficiente líder.

También sabemos que si $\frac{a}{b}$ es una raíz, entonces $a - b$ es un divisor de $p(1) = 15$. Las posibles raíces son entonces

$$2,\ -2,\ 6,\ \frac{2}{3},\ \frac{-2}{3}$$

Como $a + b$ debe ser un divisor de $p(-1) = -5$, nos quedan entonces como posibles raíces -2, $\frac{2}{3}$ y $\frac{-2}{3}$. Evaluamos entonces:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 5 & -4 & 5 & 6 \\
-2 & & -6 & 2 & 4 & -1 \\
\hline
 & 3 & -1 & -2 & 9 & -12
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 5 & -4 & 5 & 6 \\
\frac{2}{3} & & 2 & \frac{14}{3} & \frac{4}{9} & \frac{98}{27} \\
\hline
 & 3 & 7 & \frac{2}{3} & \frac{49}{9} & \frac{260}{27}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 5 & -4 & 5 & 6 \\
\frac{-2}{3} & & -2 & -2 & 4 & -6 \\
\hline
 & 3 & 3 & -6 & 9 & 0
\end{array}$$

Por tanto, tenemos que

$$3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^3 + 3x^2 - 6x + 9) = (3x+2)(x^3 + x^2 - 2x + 3).$$

Y como $x^3 + x^2 - 2x + 3$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ (ya que al reducirlo módulo 2 nos queda $x^3 + x^2 + 1$, que es irreducible), la factorización de $p(x)$ como producto de irreducibles es $(3x+2)(x^3 + x^2 - 2x + 3)$.

Ejercicio 3. ¿Cuántos números hay, entre 30000 y 50000, que acaben en 16, y que al dividirlos por 138 den resto 82?.

Solución:

Un número x termina en 16 si al restarle 16 nos sale múltiplo de 100, es decir, si $x \equiv 16 (\text{mód } 100)$, mientras que la segunda condición nos dice que $x \equiv 82 (\text{mód } 138)$. Por tanto, hemos de resolver el sistema de congruencias

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 16 (\text{mód } 100) \\ x \equiv 82 (\text{mód } 138) \end{array}\right\}$$

$x = 16 + 100k$	Solución de la primera congruencia
$16 + 100k \equiv 82 (\text{mód } 138)$	Introducimos la solución en la segunda
$100k \equiv 66 (\text{mód } 138)$	
$50k \equiv 33 (\text{mód } 69)$	Dividimos por $2 = \mathrm{mcd}(100, 138)$
$1450k \equiv 957 (\text{mód } 69)$	Multiplicamos por $29 = 50^{-1}$ en $\mathbb{Z}_{69}$ (calculado más abajo)
$k \equiv 60 (\text{mód } 69)$	Reducimos módulo 69
$k = 60 + 69k'$	Solución de la congruencia
$x = 16 + 100(60 + 69k') = 6016 + 6900k'$	Sustituimos el valor de k

				0
				1
69	50	19	1	-1
50	19	12	2	3
19	12	7	1	-4
12	7	5	1	7
7	5	2	1	-11
5	2	1	2	29

Le imponemos a la solución que se encuentre en el intervalo pedido.

$$30000 \leq 6016 + 6900k' \leq 50000 \Longrightarrow 23984 \leq 6900k' \leq 43984 \Longrightarrow \frac{23984}{6900} \leq k' \leq \frac{43984}{6900} \Longrightarrow 3'47 \leq k' \leq 6'37$$

y como $k' \in \mathbb{Z}$ deducimos que $4 \leq k' \leq 6$, luego hay 3 números en las condiciones pedidas.

Ejercicio 4. Calcula un polinomio $p(x)$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$, de grado 3, tal que $p(1) = 3$, $p(2) = 2$ y $p(x) \equiv (x^2 + x + 1) \mathrm{mód}\, x + 1$.

Lo que tenemos es que resolver el siguiente sistema de congruencias

$$\begin{array}{rcrl} p(x) & \equiv & 3 & (\text{mód } x - 1) \\ p(x) & \equiv & 2 & (\text{mód } x - 2) \\ p(x) & \equiv & x^2 + x + 1 & (\text{mód } x + 1), \end{array}$$

y como $x^2 + x + 1 \equiv 4^2 + 4 + 1 (\text{mód } x + 1)$ el sistema queda

$$\begin{array}{rcrl} p(x) & \equiv & 3 & (\text{mód } x - 1) \\ p(x) & \equiv & 2 & (\text{mód } x - 2) \\ p(x) & \equiv & 1 & (\text{mód } x - 4) \end{array}$$

Resolvemos dicho sistema de congruencias:

$p(x) = 3 + (x-1)c_1(x)$

$3 + (x-1)c_1(x) \equiv 2(\text{mód } x-2)$

$c_1(x) \equiv -1(\text{mód } x-2)$

$c_1(x) = 4 + (x-2)c_2(x)$

$p(x) = 3 + (x-1)(4+(x-2)c_2(x)) = 4x + 4 + (x-1)(x-2)c_2(x)$

$4x + 4 + (x-1)(x-2)c_2(x) \equiv 1(\text{mód } x-4)$ y

$20 + (4-1)(4-2)c_2(x) \equiv 1(\text{mód } x-4)$

$6c_2(x) \equiv -19(\text{mód } x-4)$

$c_2(x) \equiv 1(\text{mód } x-4)$

$c_2(x) = 1 + (x-4)c(x)$

$p(x) = 4x + 4 + (1+(x-4)c(x))(x-1)(x-2) = 4x + 4 + 1(x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x-4)c(x)$ nos queda por tanto $p(x) = x^2 + x + 1 + (x^3 + 3x^2 + 4x + 2)c(x)$.

Como piden un polinomio de grado 3, elegimos $c(x)$ de grado 1 (por ejemplo, tomamos $c(x) = 1$, y nos queda

$$p(x) = x^3 + 4x^2 + 3$$

También podemos resoverlo por el método de Lagrange.

$p_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{x^2+4x+3}{3} = 3^{-1}(x^2+4x+3) = 2(x^2+4x+3) = 2x^2+3x+1$,

$p_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{x^2+4}{-2} = \frac{x^2+4}{3} = 3^{-1}(x^2+4) = 2(x^2+4) = 2x^2+3$,

$p_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{x^2+2x+2}{6} = x^2+2x+2$.

Y por tanto, el polinomio interpolador de Lagrange es:

$p(x) = 3 \cdot p_1(x) + 2 \cdot p_2(x) + 1 \cdot p_4(x) = (x^2+4x+3) + (4x^2+1) + (x^2+2x+2) = x^2+x+1$

Luego todos los polinomios que satisfacen las condiciones del enunciado son los que resultan de sumarle al polinomio obtenido un polinomo que tenga como raíces a $x = 1$, $x = 2$ y $x = 4$, es decir, un múltiplo de $(x–1)(x–2)(x–4)$.

Ejercicio 5. Consideramos el conjunto $A = \{(1,2),\ (4,3),\ (3,5),\ (2,7),\ (5,7),\ (4,8)\} \subseteq \mathbb{N}^2$.

1. Dibuja los diagramas de Hasse de A, considerando, por una parte el orden producto, y por otra el orden lexicográfico.

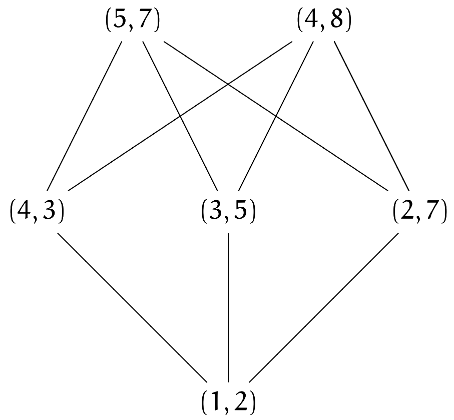
2. Estudia si $(A, \leq_{prod})$ es un retículo, y en caso afirmativo si es distributivo y/o complementado.

3. Estudia si $(A, \leq_{lex})$ es un retículo, y en caso afirmativo si es distributivo y/o complementado.

4. Calcula cotas inferiores, elementos maximales y minimales, máximo y mínimo, supremo e ínfimo de $(A, \leq_{prod})$.

Solución:

1. Los diagramas de Hasse de ambos conjuntos ordenados son:



2. Como puede apreciarse, $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$ no es un retículo, pues no existe el supremo de $(5,7)$ y $(4,8)$.

3. Dado que $(A, \leq_{\mathrm{lex}})$ es un conjunto totalmente ordenado, es un retículo distributivo. No es complementado.

4. Se tiene que:

   a) Cotas inferiores de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$
   b) Elementos maximales de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: $\{(5,7),(4,8)\}$
   c) Elementos minimales de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: $\{(1,2)\}$
   d) Máximo de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: No existe.
   e) Mínimo de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: $(1,2)$.
   f) Supremo de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: $(5,8)$.
   g) Ínfimo de $(A, \leq_{\mathrm{prod}})$: $(1,2)$.

Ejercicio 6. Dada la función booleana $f(x,y,z) = (x \uparrow y) + (x+z')(x'+y)$ calcula su forma normal disyuntiva ($x \uparrow y = x$ NAND y).

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= (x \uparrow y) + (x+z')(x'+y) \\
&= (xy)' + (x+z')(x'+y) \\
&= x' + y' + xx' + xy + z'x' + z'y \\
&= x'(y+y') + (x+x')y' + xy + x'z' + yz' \\
&= x'y + x'y' + xy' + x'y' + xy + x'z' + yz' \\
&= xy + xy' + x'y + x'y' + x'z' + yz' \\
&= xy(z+z') + xy'(z+z') + x'y(z+z') + x'y'(z+z') + x'(y+y')z' + (x+x')yz' \\
&= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + x'yz' + x'y'z' + xyz' + x'yz' \\
&= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z'
\end{aligned}$$

Ejercicio 7. Se quiere formar un comité de 10 personas. Hay 13 candidatos: 6 hombre y 7 mujeres.

1. ¿De cuántas formas puede hacerse?

2. ¿Y si queremos que haya igual número de hombres que de mujeres?

3. ¿Y si queremos que haya más mujeres que hombres?

Solución:

1. Tenemos que elegir, de un conjunto de 13 personas, un total de 10. Esto podemos hacerlo de

$$\binom{13}{10} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286$$

formas diferentes.

2. Si queremos que haya igual número de hombres que de mujeres, tendremos que elegir, por una parte, 5 hombres de entre 6 candidatos (tenemos $\binom{6}{5} = 6$ formas distintas de hacerlo, y por otra parte, 5 mujeres de entre 7 candidatas (lo que podemos hacer de $\binom{7}{5} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$ formas distintas). El principio del producto nos dice que la elección podemos hacerla de $6 \cdot 21 = 126$ formas diferentes.

3. Para que haya más mujeres que hombres, podemos elegir 6 mujeres ($\binom{7}{6} = 7$ formas) y 4 hombres ($\binom{6}{4} = 15$), o elegir 7 mujeres (una única forma de elegirlas) y 3 hombres ($\binom{6}{3} = 20$ formas distintas).

   En resumen:

6 mujeres y 4 hombres	$7 \cdot 15 = 105$	formas distintas.
7 mujeres y 3 hombres	$1 \cdot 20 = 20$	formas distintas.

   Por el principio de la suma, hay $105 + 20 = 25$ formas distintas de elegir un comité con más mujeres que hombres.

Ejercicio 8. La siguiente es la matriz de adyacencia de un grafo G (sin vértices ni lados paralelos).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & 0 & 1 \\ 0 & 1 & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & 0 & * & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 1 \\ 0 & * & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Completa los elementos que faltan de la matriz, y contesta razonadamente a las siguientes cuestiones sobre el grafo G:

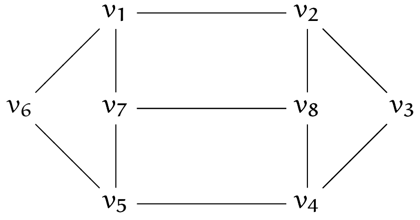
1. ¿Es G un grafo de Euler?.
2. ¿Es G un grafo de Hamilton?.
3. ¿Es G bipartido?.
4. Da, si es posible, un camino de longitud 3 de v_3 a v_7.

Solución:

Al ser un grafo no dirigido, la matriz de adyacencia es simétrica, y al no tener lados paralelos, todos los elementos de la diagonal son cero. la matriz de adyacencia del grafo es entonces:

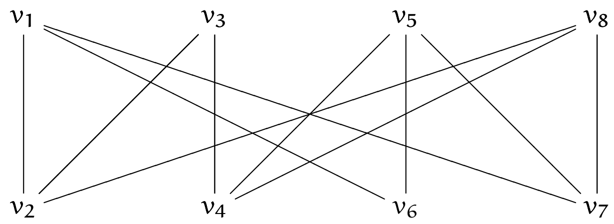
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una representación del grafo podría ser:



1. Claramente no es un grafo de Euler, pues hay vértices de grado impar ($v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8$).
2. Sí es un grafo de Hamilton. Un circuito de Hamilton es $v_1v_2v_3v_4v_8v_7v_5v_6v_1$.

3. El grafo es bipartido, pues no tiene ciclos de longitud impar. Para verlo más claro, podemos representar el grafo como sigue:



4. Caminos de longitud 3 de v_3 a v_7 hay cuatro, que son $v_3v_4v_5v_7$, $v_3v_4v_8v_7$, $v_3v_2v_8v_7$ y $v_3v_2v_1v_7$.

1. El sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rl} x + az = & -a \\ y + bz = & b \\ x + y + (a+b)z = & b - a \end{array}\right.$$

   ***a*) es siempre compatible indeterminado.**

   b) es compatible determinado para algunos valores de a y b.

   c) es incompatible para algunos valores de a y b.

   d) nunca es compatible indeterminado.

2. Se considera la aplicación $f : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ dada por $f(a, b) = (b, 2a)$. Entonces $f^*(\{(0, 0)\})$ es

   a) $\{(0, 0)\}$

   ***b*)** $\{(\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{3})\}$

   c) $\emptyset$

   d) $\{(0, 0), (0, 3), (0, 4), (0, 5)\}$

3. Para la aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_3)^4 \to (\mathbb{Z}_3)^4$ que tiene asociada, respecto de la base canónica, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   se verifica

   a) $\dim N(f) = 3$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$

   b) $\dim N(f) = 0$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = 4$

   c) $\dim N(f) = 0$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = 3$

   ***d*)** $\mathbf{dim\, N(f) = 1}$ **y** $\mathbf{dim\, Im(f) = 3}$

4. La aplicación $f : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ dada por $f(a, b) = (b, 2a)$

   a) es biyectiva.

   ***b*) no es ni inyectiva ni sobreyectiva.**

   c) es inyectiva.

   d) es sobreyectiva.

5. El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$ de la matriz en $\mathbb{Z}_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   tiene como base

   ***a*)** $\{(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})\}$

   b) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

   c) $\{(0, 0, 1)\}$

   d) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 2)\}$

6. Se considera $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación de equivalencia en $X \times X$ dada por

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d$$

entonces el conjunto cociente tiene

a) 6 elementos.

b) 36 elementos.

c) 12 elementos.

***d*) 11 elementos.**

7. Dada la permutación $\sigma = (2\ 3\ 5\ 7)(4\ 1\ 6)$, el resultado de calcular σ^{2525} es

***a*)** $(\mathbf{2\ 3\ 5\ 7})(\mathbf{6\ 1\ 4})$

b) $(7\ 5\ 3\ 2)(4\ 1\ 6)$

c) $(2\ 5\ 7\ 3)(6\ 1\ 4)$

d) $(2\ 3\ 5\ 7)(4\ 1\ 6)$

8. Dadas $\sigma = (2\ 3\ 5\ 7)(2\ 5\ 6)$ y $\tau = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)$ la permutación γ que verifica

$$\sigma^2\gamma\tau = \sigma$$

es

a) $(1\ 7\ 2\ 6\ 5\ 3\ 4)$

b) $(1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2\ 7)$

***c*)** $(\mathbf{1\ 4\ 6\ 5\ 3\ 7\ 2})$

d) $(1\ 5\ 6\ 3\ 4\ 2\ 7)$

9. Para la aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_3)^3 \to (\mathbb{Z}_3)^3$ dada por

$$\begin{array}{c} f(1,0,1) = (2,1,1) \\ f(0,1,0) = (1,1,0) \\ f(1,1,0) = (0,1,2) \end{array}$$

una base de $\mathrm{Im}(f)$ es

a) $\{(2,1,1),(1,1,0),(0,1,2)\}$

b) $\{(1,0,2),(0,1,2)\}$

c) $\{(2,1,0),(1,1,1),(1,0,2)\}$

***d*)** $\{(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2})\}$

10. El valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

en $\mathbb{R}$ es

a) 5

b) 1

c) no puede calcularse.

***d*) 0**

11. Dados los conjuntos $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, se considera

$$D = \{(a, b) \in X \times Y / a = b\}$$

El cardinal de $\mathcal{P}(X \times Y \setminus D)$ es

a) 35^2

***b*) $\mathbf{2^{35}}$**

c) $2^{40} - 2^5$

d) $40^2 - 5^2$

12. En $\mathbb{R}$ el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 1 & b & b \\ 1 & 1 & (a+b) & b-a \end{pmatrix}$$

es

a) depende de los valores de a y b.

b) 3

***c*) 2**

d) 4

13. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$ tal que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

***c*)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) los datos del enunciado no permiten calcular A.

14. En el espacio vectorial $(\mathbb{Z}_5)^4$ se consideran los vectores

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1,2,0) \\ v_2 &= (1,2,2,0) \\ v_3 &= (1,1,2,1) \\ v_4 &= (1,1,2,0) \end{aligned}$$

¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) Generan un subespacio vectorial de dimensión 3.

b) v_4 es combinación lineal de los otros tres.

c) Son linealmente dependientes.

***d*) $\mathbf{v_1}$ no es combinación lineal de los otros tres.**

15. El número de subespacios vectoriales de $(\mathbb{Z}_3)^2$ es

***a*) 6**

b) 11

c) 10

d) infinito.

16. Dados los vectores $\{(6,1,3,2),(1,4,2,6),(3,3,4,5)\}$ del espacio vectorial $(\mathbb{Z}_7)^4$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

***a*) Generan un subespacio de dimensión 2.**

b) Son linealmente independientes, pero no son base de $(\mathbb{Z}_7)^4$.

c) Son una base de $(\mathbb{Z}_7)^4$.

d) Son un sistema de generadores de $(\mathbb{Z}_7)^4$.

17. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x+y+z = & 0 \\ y+z = & 0 \end{array} \right. \qquad W \equiv \left\{ \begin{array}{rl} x-y+z = & 0 \\ y+z = & 0 \end{array} \right.$$

¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

***b*) La suma de U y W es directa.**

c) $\mathbb{R}^3 = U + W$

d) $U \cap W$ tiene dimensión 1.

18. En el espacio vectorial $(\mathbb{Z}_3)^4$ se conocen las dimensiones de dos subespacios: $\dim U = 2$ y $\dim W = 3$; ¿cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente falsa?

***a*) $(\mathbb{Z}_3)^4 = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$**

b) $U + W$ tiene dimensión 4.

c) $U \cap W$ tiene dimensión 2.

d) $U \cap W$ tiene dimensión 1.

19. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ la aplicación lineal dada por

$$\begin{gathered} f(1,1,1) = (0,2,3) \\ f(0,2,1) = (3,1,1) \\ (3,2,1) \in N(f) \end{gathered}$$

Las coordenadas del vector $f(4,0,3)$ en la base $\{(1,0,0),(1,1,1),(1,1,0)\}$ son

***a*) $(\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{4})$**

b) $(3,3,4)$

c) $(0,0,0)$

d) $(0,2,4)$

20. En $\mathbb{Z}_3$ la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) tiene valores propios $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 2.

***b*) tiene un único valor propio $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 1.**

c) tiene un único valor propio $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 3.

d) tiene valores propios $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 2 y $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 1.

ÁLGEBRA Y ESTRUCTURAS DISCRETAS \ FINITAS

Convocatoria Febrero 2009

Ejercicio 1. Sea el conjunto $X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Sobre $X \times X$ definimos la relación $(x, y)\ R\ (x', y') \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$. La afirmación correcta es

a) R no es antisimétrica y por lo tanto no es de equivalencia.

b) R es relación de equivalencia y $X \times X/R$ tiene 15 elementos.

c) R es relación de equivalencia y $[(1, 1)]$ tiene 4 elementos.

d) el elemento $(-5, 0)$ pertenece a dos clases de equivalencia distintas, la del $(0, 5)$ y la del $(3, 4)$.

Solución:

El que la relación no sea antisimétrica no significa que no sea de equivalencia. Por tanto, la opción a), la descartamos.

Por tanto, R es de equivalencia. La opción d) tampoco puede ser la correcta, pues en una relación de equivalencia todo elemento está en una sola clase de equivalencia (las clases de equivalencia determinan una partición de $X \times X$. De hecho, las clases del $(0, 5)$ y del $(3, 4)$ son la misma, y el elemento $(-5, 0)$ es un elemento de esta clase.

Los elementos de la clase del $(1, 1)$ son aquellas parejas (x, y) para las que $x^2 + y^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Como x e y son enteros, las únicas posibilidades son $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, lo que nos da cuatro elementos: $(1, 1)$; $(1, -1)$; $(-1, 1)$; $(-1, -1)$.

La opción correcta es entonces la c)

En cuanto a la opción b), decir que el conjunto cociente tiene 20 elementos.

Ejercicio 2. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A = \{1, 2, 3\}$. Entonces el cardinal de $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(\overline{A})$ es

a) 2^4

b) $2^6 - 1$

c) $2^4 - 1$

d) $2^3 \cdot 2^3$

Solución:

El cardinal de $\mathcal{P}(A)$ es $2^3 = 8$ (pues A tiene tres elementos). De la misma forma, el cardinal de $\mathcal{P}(\overline{A})$ es también 8.

Si contamos los elementos de $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(\overline{A})$ nos salen 16, pero en ambos casos hemos contado el conjunto vacío. Por tanto, hemos de quitarlo y nos quedan $15 = 2^4 - 1$, es decir, la opción c).

Podemos verlo más claro si enumeramos los elementos tanto de $\mathcal{P}(A)$ como los de $\mathcal{P}(\overline{A})$:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$\mathcal{P}(\overline{A}) = \{\emptyset, \{0\}, \{4\}, \{5\}, \{0, 4\}, \{0, 5\}, \{4, 5\}, \{0, 4, 5\}\}$$

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{Q}$ la aplicación dada por $f(z, n) = \frac{z}{n}$. Entonces

a) f es una aplicación biyectiva.

b) f no es una aplicación inyectiva.

c) f no es una aplicación sobreyectiva.

d) f no es una aplicación.

Solución:

f es una aplicación, pues si z es un número entero, y n es un número natural distinto de cero entonces $\frac{z}{n}$ es un número racional.

f no es inyectiva, pues hay parejas diferentes cuya imagen es la misma. Por ejemplo, $(1, 2)$ y $(2, 4)$. Es claro que $f(1, 2) = f(2, 4)$.

Esto nos dice que la opción correcta es la b).

Que f es sobreyectiva es claro, pues cada número racional podemos ponerlo con el denominador positivo, en cuyo caso el numerador es entero y el denominador un número natural distinto de cero.

Ejercicio 4. Sean los conjuntos $X_1 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y $X_2 = \{0,1,2,3,4,5\}$ y $f : X_1 \to X_2$ la aplicación dada por $f(x) = x^2 + x + 1$ mod(6). Sean $A = \{2,4,6,8,10\} \subseteq X_1$ y $B = \{1,5\} \subseteq X_2$. Entonces

a) $f^*(f_*(A) \cap \overline{B}) = \{0,2,4,6,8,10\}$.

b) $B \subseteq f_*(f^*(B))$.

c) $f^*(f_*(A) \cup B) = X_1$.

d) $f^*(f_*(A)) = A$.

Solución:
Escribamos en primer lugar la imagen de cada uno de los elementos de X_1:

$$\begin{array}{ll} 0 \mapsto 1 & 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 & \\ 3 \mapsto 1 & 4 \mapsto 3 \\ 5 \mapsto 1 & \\ 6 \mapsto 1 & 7 \mapsto 3 \\ 8 \mapsto 1 & \\ 9 \mapsto 1 & 10 \mapsto 3 \end{array}$$

Puesto que aparece en varias de las opciones, calculemos $f_*(A)$. Para esto, hay que calcular las imágenes de los elementos de A. Como $f(2) = f(6) = f(8) = 1$ y $f(4) = f(10) = 3$ tenemos que $f_*(A) = \{1,3\}$.

- $f_*(A) \cap \overline{B} = \{1,3\} \cap \{0,2,3,4\} = \{3\}$, luego $f^*(f_*(A) \cap \overline{B}) = f^*(\{3\}) = \{1,4,7,10\}$ (los elementos cuya imagen pertenece al conjunto $\{3\}$). Por tanto, la opción a) descartada.

- $f^*(B) = f^*(\{1,5\} = \{0,2,3,5,6,8,9\}$ y al hacer la imagen de todos estos elementos nos sale 1. Por tanto, $f_*(f^*(B)) = \{1\}$, y claramente, B no está contenido en ese conjunto. Descartamos también la opción b).

- $f^*(f_*(A)) = f^*(\{1,3\}) = X_1$, que es distinto de A. Por tanto, la opción d) tampoco es la correcta.

- $f_*(A) \cup B = \{1,3\} \cup \{1,5\} = \{1,3,5\}$ y $f^*(f_*(A) \cup B) = f^*(\{1,3,5\}) = X_1$, lo que nos dice que la opción correcta es la c), como ya sabíamos.

Ejercicio 5. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$. Entonces $(A \cdot B)^{-1}$ es

a) no existe

b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:
Multiplicamos A por B.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 6 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 6 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 23 \\ 20 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Y esta matriz no tiene inversa (su determinante es $5 - 12 = -7 = 0$). Por tanto, la respuesta es la a).
Directamente podría haberse deducido de que la matriz B no tiene inversa, lo que implica que $A \cdot B$ tampoco la tiene.

Ejercicio 6. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + ay + 2z & = & 6 \\ 4x + 5y + az & = & 1 \end{array}\right.$$

la respuesta correcta es

a) el sistema es compatible indeterminado y tiene exactamente 7 soluciones.

b) es siempre compatible, pero depende de a que sea compatible determinado o compatible indeterminado.

c) dependiendo del valor de a puede ser compatible o incompatible.

d) es compatible indeterminado, y el número de soluciones depende del valor de a.

Solución:
Escribimos la matriz de coeficientes del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 4 & 5 & a \end{pmatrix}$$

y calculamos su rango.
Tomamos las dos primeras columnas y hallamos su determinante, y tenemos:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 4a = 5 + 3a$$

que si $a \neq 3$ es distinto de cero, mientras que para $a = 3$ vale cero.

Por tanto, si $a \neq 3$, la matriz de coeficientes del sistema tiene rango 2, mientras que si $a = 3$, la matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es también 2.

Es decir, el rango de la matriz de coeficientes es 2 independietemente del valor de a. El de la matriz ampliada es también 2. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado, sea cual sea el valor de a.

Esto descarta las opciones b) y c).

Al ser el rango de la matriz de coeficientes igual a 2, significa que al resolver el sistema vamos a tener dos incógnitas principales y una incógnita libre (que podrá ser z si $a \neq 3$ e y si $a = 3$). Por tanto, la solución vendrá dada en función de un parámetro, que tomará sus valores en $\mathbb{Z}_7$. Como podemos hacer 7 elecciones distintas para ese parámetro, el sistema tiene 7 soluciones. La opción correcta es entonces la a).

Ejercicio 7. Señala la afirmación verdadera. La matriz en $\mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) no tiene inversa para ningún valor de a.

b) tiene inversa para todo valor de a.

c) sólo tiene inversa para $a = 1$.

d) tiene inversa sólo cuando $a \neq 0$.

Solución:
Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a$$

donde en la primera igualdad, a la cuarta columna se le ha sumado la segunda; en la segunda igualdad se ha desarrollado por la fila segunda; en la tercera igualdad, a la primera columna se le ha restado la tercera; en la cuarta igualdad se ha desarrollado por la tercera fila; y en la quinta se ha calculado el determinante de la matriz 2×2 que quedaba.

A partir del valor del determiante es claro que la respuesta es la d).

Ejercicio 8. En el espacio vectorial $\mathbb{Z}_3^4$ se considera la base

$$B = \{(1,0,0,0),(1,2,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,2)\}$$

las coordenadas del vector $(1,2,1,2)$ respecto de esta base B son:

a) $(0,1,2,1)$

b) $(1,2,0,1)$

c) $(1,2,1,2)$

d) $(1,2,1,0)$

Solución:
Vamos a calcular las coordenadas del vector en la base, es decir, vamos a buscar números $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$ tales que

$$(1,2,1,2) = a \cdot (1,0,0,0) + b \cdot (1,2,0,0) + c \cdot (1,1,1,0) + d \cdot (1,1,1,2)$$

es decir, tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1 & = & a & + & b & + & c & + & d \\ 2 & = & & & 2b & + & c & + & d \\ 1 & = & & & & & c & + & d \\ 2 & = & & & & & & & 2d \end{array}$$

De la última ecuación sacamos que $d = 1$ (lo que nos descarta las opciones c) y d)). Sustituyendo en la tercera, obtenemos $c = 0$. Por tanto, la opción correcta es la b). Podríamos seguir calculando las coordenadas. De la segunda ecuación:

$$2 = 2b + 0 + 1 \Longrightarrow 2b = 1 \Longrightarrow b = 2$$

y sustituyendo en la primera: $1 = a + 2 + 0 + 1 = a$.

Ejercicio 9. Sean los subespacios vectoriales $V_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{rcl} 4x+3y-2z & = & 0 \\ 2x-2y+4z & = & 0 \end{array}\right\}$ y V_2 el subespacio generado por $\langle(1,2,-1),(-5,8,8),(-3,12,6)\rangle$. Una base de V_1+V_2 es

a) $\{(1,2,-1),(-4,10,7)\}$

b) $\{(-5,8,8),(1,1,1),(0,0,0)\}$

c) $\{(4,3,2)\}$

d) $\{(2,-2,4),(1,2,-1)\}$

Solución:

En primer lugar, descartamos la opción b), pues el vector $(0,0,0)$ no puede formar parte de ninguna base.

La opción c) también podemos descartarla, ya que la dimensión de V_2 es mayor o igual que 2 (los vectores $(1,2,-1)$ y $(-5,8,8)$ son linealmente independientes), y por tanto la dimensión de la suma es también mayor o igual que 2.

Nos quedan entonces las opciones a) y d). Por tanto, la dimensión de V_1+V_2 es 2.

Vamos a calcular una base de V_1, que tendrá un vector (pues es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por dos ecuaciones). Para ello, resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones cartesianas:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim_f} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftarrow \frac{1}{2}F_1}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \overset{F_2 \leftarrow F_2 - 4F_1}{\sim_f} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -10 \end{pmatrix} \sim_f$$
$$\overset{F_1 \leftarrow 7F_1}{\sim_f} \begin{pmatrix} 7 & -7 & 14 \\ 0 & 7 & -10 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftarrow F_1 + F_2}{\sim_f} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -10 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-10}{7} \end{pmatrix}$$

lo que nos da las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x & & + \frac{4z}{7} & = & 0 \\ & y & - \frac{10z}{7} & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x & = & \frac{-4z}{7} \\ y & = & \frac{10z}{7} \end{array}\right\}$$

dándole a z el valor 7 obtenemos el vector $(-4,10,7)$, que forma una base de V_1.

Ahora ya podemos ver que la opción correcta es la a), pues los vectores $(1,2,-1)$ y $(-4,10,7)$ son linealmente independientes, y pertenecen ambos a V_1+V_2 (el primero porque sabemos que pertenece a V_2 y el segundo sabemos que pertenece a V_1).

Dos vectores linealmente independientes, en un espacio vectorial de dimensión 2 forman una base.

Ejercicio 10. En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio generado por

$$\{(1,2,0,0),(1,1,1,0)\}$$

¿cuál de estos sistemas de ecuaciones corresponde a unas ecuaciones cartesianas de este subespacio?

a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$

d) $\{\ 2x - y = 0$

Solución:

Las opciones a), c) y d) no pueden ser, ya que el vector $(1,1,1,0)$ no satisface la ecuación $2x - y = 0$. Sólo nos queda la opción b).

Ejercicio 11. En $\mathbb{R}^4$ un complementario del subespacio generado por:

$$\{(1,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,1,-1)\}$$

tiene base:

a) $\{(1,1,1,-1)\}$

b) $\{(0,0,0,1),(0,1,0,0)\}$

c) $\{(1,0,-1,0),(1,-1,0,1)\}$

d) $\{(1,0,1,0)\}$

Solución:

En primer lugar calculamos la dimensión del subespacio generado por esos tres vectores. Para ello, calculamos el rango de la matriz cuyas columnas son dichos vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

luego la matriz tiene rango 2, y una base del subespacio es $\{(1,0,1,-1),(0,1,0,1)\}$.

Por tanto, la dimensión del complementario es $4-2=2$, lo que nos descarta las opciones a) y d).

Para ver cuál de las otras dos es la correcta, hay que ver en cual de ellas, los vectores $\{(,0,1,-1),(0,1,0,1)\}$ junto con los dos que nos dan forman una base de $\mathbb{R}^4$. Puede verse en este caso que la opción b) no puede ser, pues los vectores

$$\{(1,0,1,-1),(0,1,0,1),(0,0,0,1),(0,1,0,0)\}$$

son linealmente dependientes (el segundo es la suma del tercero y el cuarto). Por tanto, nos queda la opción c).

Ejercicio 12. Sea $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ la aplicación dada por $f(x, y, z) = (3x + 2y + 4z, x + 4y + 3z)$. Una base del núcleo de f es

a) $\{(1, 1, 0)\}$.

b) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 0)\}$.

c) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 2)\}$.

d) $\{(0, 1, 2)\}$.

Solución:
La segunda opción no puede ser la correcta, pues el vector $(0, 0, 0)$ no puede estar en ninguna base.
La matriz de f en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 1 (la segunda fila es el doble de la primera). Por tanto, la dimensión de la imagen es 1, luego la dimensión del núcleo es 2 ($\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(N(f)) = \dim(\mathbb{Z}_5^3)$).
Sólo puede ser entonces la opción c).

Ejercicio 13. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ por $f(x, y, z, t) = (x + z + t, y + 2t, x + y + z + t)$ ¿qué afirmación es falsa?

a) Una base del núcleo es $\{(-1, 0, 1, 0)\}$.

b) La imagen tiene dimensión 3.

c) Es inyectiva pero no sobreyectiva.

d) Es sobreyectiva pero no inyectiva.

Solución:
Puesto que el espacio vectorial de partida ($\mathbb{R}^4$) tiene dimensión mayor que el espacio vectorial de llegada ($\mathbb{R}^3$), la aplicación no puede ser inyectiva. Por tanto, la afirmación falsa es la de la respuesta c), y esa es la opción correcta.

Ejercicio 14. Sea $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^4$ la aplicación dada por $f(x, y, z) = (x + 3y + 4z, x + 2z, 2y + 3z, x + y + z)$. Una base de la imagen de f es

a) $\{(1, 1, 1, 5), (1, 1, 4, 3)\}$

b) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

c) $\{(1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 4)\}$

d) $\{(4, 2, 3, 1)\}$

Solución:

La opción b) no puede ser la buena, ya que la imagen es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$, y los vectores que ahí nos dan están en $\mathbb{Z}_5^3$.

La matriz de la aplicación lineal es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es mayor que 1, lo que nos elimina la opción d).

Ya sabemos por tanto que la dimensión de la imagen es 2. Vamos a calcular una base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

y aquí podemos deducir que la opción correcta es la c), ya que los vectores $(1, 1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1, 4)$ están en la imagen (son las columnas primera y segunda de la última matriz que nos ha salido) y son linealmente independientes.

Como la imagen tiene dimensión 2, esos dos vectores forman una base.

Ejercicio 15. Sea $U_1 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \\ 2x+3y+4z & = & 0 \end{array} \right.$ y $U_2 = \langle (2,3,2),(1,0,1) \rangle$ subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^3$.

a) Existe una única aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ tal que $N(f) = U_1$ e $\mathrm{Im}(f) = U_2$.

b) No existe $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ tal que $N(f) = U_2$ e $\mathrm{Im}(f) = U_1$ porque $U_1 \subseteq U_2$.

c) $\mathbb{Z}_5^3 = U_1 \oplus U_2$.

d) Existe al menos una aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ tales que $N(f) = U_2$ e $\mathrm{Im}(f) = U_1$.

Solución:
Vamos a calcular una base de U_1, para lo cual resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que nos da ecuaciones

$$\left. \begin{array}{rcrcl} x & & +4z & = & 0 \\ & y & +2z & = & 0 \end{array} \right\} \qquad \left. \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 3z \end{array} \right\}$$

luego una base de U_1 es $\{(1,3,1)\}$.

Como $\mathrm{dim}(U_1) + \mathrm{dim}(U_2) = 3$, hay aplicaciones lineales $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ tales que $N(f) = U_1$ e $\mathrm{Im}(f) = U_2$ o bien $N(f) = U_2$ e $\mathrm{Im}(f) = U_1$.

Esto nos dice que la opción d) es correcta. Aunque no es necesario para resolver el ejercicio, vamos a ver cómo buscar aplicaciones con esas condiciones.

Para dar una aplicación lineal basta dar la imagen de los elementos de una base. Esto lo determina totalmente.

Tomamos una base de U_2 $\{(2,3,2),(1,0,1)\}$. Ampliamos esta base a una base de $\mathbb{Z}_5^3$.

$$\{(2,3,2),(1,0,1),(0,0,1)\}$$

Llamemos a estos vectores u_1, u_2, u_3. Entonces, basta con que definamos cuanto valen $f(u_1)$, $f(u_2)$ y $f(u_3)$ para dar una aplicación lineal.

Como queremos que u_1 y u_2 pertenezcan al núcleo de f, estamos obligados a definir $f(u_1) = (0,0,0)$ y $f(u_2) = (0,0,0)$.

Por otra parte, u_3 no debe pertenecer al núcleo, luego su imagen debe ser distinta de $(0,0,0)$. Como queremos que $(1,3,1)$ pertenezca a la imagen de f, entonces definimos $f(u_3)$ como $(1,3,1)$. De esta forma ya tenemos la aplicación lineal buscada $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$.

Como $\{(2,1,2)\}$ es también una base de U_1, podríamos haber definido $f(u_3)$ como $(2,1,2)$ y así vemos que hay más de una aplicación lineal con las condiciones buscadas.

Ejercicio 16. Sea la matriz $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7)$. Se verifica que

a) tiene valores propios $3, 1, 5$.

b) no es diagonalizable.

c) no tiene valores propios.

d) existe una matriz regular P tal que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Solución:
Vamos a calcular el polinomio característico de la matriz C.

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 5 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (4-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 0 + 0 - \big(6\cdot(2-\lambda) + 0 + 0\big) = \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 26\lambda + 24 - 12 + 6\lambda \\ &= 6\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 5 \end{aligned}$$

Y ahora calculamos las raíces (por Ruffini)

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & & 6 & 1 & 2 \\ \hline & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & & 5 & 5 & \\ \hline & 6 & 6 & 0 & \\ 6 & & 1 & & \\ \hline & 6 & 0 & & \end{array}$$

Vemos que los valores propios son 1, 2 y 6. Al tener tres valores propios distintos, la matriz es diagonalizable. La respuesta es entonces la d) (corrigiendo el error que hay en el enunciado, pues donde dice $P^{-1} \cdot A \cdot P$ debería decir $P^{-1} \cdot C \cdot P$).

Ejercicio 17. Sean $V_1 \equiv \{x + y = 0\}$ y $V_2 = \langle(4, 2, 5)\rangle$ los subespacios propios de una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7)$ de valores propios 3 y 5 respectivamente. Entonces

a) A no es diagonalizable pues tenemos únicamente dos subespacios propios.

b) A no es diganoalizable pues la multiplicidad geométrica del valor propio 5 es menor que la multiplicidad geométrica del valor propio 3.

c) A puede ser la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

La dimensión de V_1 es 2, luego la multiplicidad geométrica del valor propio 3 vale 2. La dimensión de V_2 es 1, luego la multiplicidad geométrica del valor propio 5 es 1. Al ser la suma de las multiplicidades geométricas de los subespacios propios igual al tamaño de la matriz, la matriz es diagonalizable. Por tanto, descartamos las dos primeras opciones.

Tomamos la matriz de la opción c) y calculamos $N(A - 3Id)$, es decir, el subespacio dado por:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 6 & 0 \\ 3 & 6-3 & 0 \\ 4 & 4 & 3-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y nos queda una única ecuación: $x + y = 0$.

Por tanto el subespacio propio de valor propio 3 de la matriz A es V_1.

Multiplicamos ahora la matriz A por el vector $(4, 2, 5)$, y nos queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

lo que nos dice que $(4, 2, 5)$ es un vector propio de valor propio 5.

La opción correcta es por tanto la c).

Ejercicio 18. Dada la matriz en $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

señala la afirmación verdadera:

a) Tiene 3 valores propios son distintos, por tanto es diagonalizable.

b) Cuando $a = 2$ la matriz no es diagonalizable.

c) Cuando $a = 1$ la matriz no es diagonalizable.

d) Cuando $a = 0$ la matriz no es diagonalizable.

Solución:
En este caso, el polinomio característico es muy sencillo de calcular:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(a-\lambda)$$

Si $a = 1$ tenemos dos valores propios: $\lambda = 1$, con multiplicidad algebraica 2, y $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 1.

Si $a = 2$ tenemos entonces los valores propios $\lambda = 1$, con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 2.

Esto descarta la opción a).

Y si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ entonces tenemos tres valores propios distintos.

Por tanto, si $a = 0$ la matriz tiene tres valores propios distintos, y es diagonalizable. Descartamos la opción d).

Nos quedan entonces las b) y la c).

Vamos a analizar la b), que nos sitúa en el caso $a = 2$. Como ya hemos dicho antes tenemos un valor propio con multiplicidad algebraica 1 ($\lambda = 1$) y otro valor propio con multiplicidad algebraica 2 ($\lambda = 2$).

Puesto que la multiplicidad geométrica está comprendida entre 1 y la multiplicidad algebraica, la multiplicidad geométrica del valor propio 1 vale 1, mientras que la multiplicidad geométrica del valor propio 2 puede valer 1 ó 2.

Llamemos d_2 a esta multiplicidad geométrica. Entonces:

$$d_2 = \mathrm{Dim}(N(A - 2Id)) = 3 - \mathrm{rg}(A - 2Id) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

Por tanto, la suma de las multiplicidades geométricas vale 3 y la matriz es diagonalizable.

Esto nos descarta también la opción b).

Luego la opción correcta es la c).

Puede comprobarse fácilmente que en este caso, la multiplicidad geométrica del valor propio 1 vale 1.

Ejercicio 19. Dadas las permutaciones

$$\sigma = (2\ 5\ 3\ 6)(3\ 4\ 1) \text{ y } \tau = (7\ 2\ 1\ 4)(3\ 2\ 1\ 5)$$

la descomposición en ciclos disjuntos de $\sigma \circ \tau$ es

a) $(1\ 6\ 2\ 5\ 3\ 4)$

b) $(1\ 5\ 3)(2\ 4\ 7)$

c) $(1\ 3\ 6\ 2)(4\ 7\ 5)$

d) $(1\ 6\ 2\ 5)(3\ 4)$

Solución:

Tenemos que $\sigma \circ \tau = (2\ 5\ 3\ 6)(3\ 4\ 1)(7\ 2\ 1\ 4)(3\ 2\ 1\ 5)$. Es decir, tenemos $\sigma \circ \tau$ como producto de cuatro ciclos. Vamos a ir viendo las imágenes de cada uno de los elementos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ por la composición $\sigma \circ \tau$. Recordemos que para componer se va de izquierda a derecha:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 2 & \mapsto & 1 & \mapsto & 3 & \mapsto & 6 \\ 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 & \mapsto & 4 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 \end{array}$$

y aquí se cierra el ciclo, que es $(1\ 3\ 6\ 2)$. Esto nos deja sólo la posibilidad de la opción c) (podría haberse visto después de calcular la imagen del 1). Aún así, vamos a continuar calculando el resto de ciclos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 7 & \mapsto & 7 & \mapsto & 7 \\ 7 & \mapsto & 7 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 5 \\ 5 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 \end{array}$$

lo que nos da el otro ciclo $(4\ 7\ 5)$.

Por tanto, $\sigma \circ \tau = (1\ 3\ 6\ 2)(4\ 7\ 5)$.

Ejercicio 20. En S_9 sea σ la permutación $(1\ 2\ 4)(4\ 7\ 6\ 2)^{-1}(9\ 1\ 7\ 4)(3\ 5)$. Entonces σ^{273} es igual a

a) 1.

b) σ^3.

c) σ.

d) σ^2.

Solución:

Vamos a calcular el orden de σ. Para ello, descomponemos σ como producto de ciclos disjuntos. Puesto que $(4\ 7\ 6\ 2)^{-1} = (2\ 6\ 7\ 4)$ se tiene que

$$(1\ 2\ 4)(2\ 6\ 7\ 4)(9\ 1\ 7\ 4)(3\ 5)$$

y por tanto:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 7 & \mapsto & 4 & \mapsto & 1 \\
2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 \\
6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 7 & \mapsto & 7 \\
7 & \mapsto & 7 & \mapsto & 4 & \mapsto & 2 & \mapsto & 4 \\
4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 9 & \mapsto & 9 & \mapsto & 9 \\
9 & \mapsto & 9 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 2 \\
3 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 \\
5 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 \\
8 & \mapsto & 8 & \mapsto & 8 & \mapsto & 8 & \mapsto & 8
\end{array}$$

lo que nos da $\sigma = (2\ 6\ 7\ 4\ 9)(3\ 5)$.

El orden de σ es $\mathrm{mcm}(5, 2) = 10$. Por tanto, $\sigma^{10} = \mathrm{id}$, luego $\sigma^{270} = \mathrm{id}$, y $\sigma^{273} = \sigma^3$.