

Ejemplo de cálculo de capacidad usando el Teorema de Gauss

Isabel M. Tienda Luna

En este documento analizaremos cómo solucionar ejercicios usando el teorema de Gauss utilizando el ejemplo del problema 28 de la relación de problemas.

1. Teorema de Gauss

El Teorema de Gauss establece que el flujo del campo eléctrico a través de una **superficie cerrada** es igual a la suma de las cargas contenidas en esa superficie cerrada dividido por la constante dieléctrica.

$$\phi = \frac{\sum Q}{\epsilon_0} \quad (1)$$

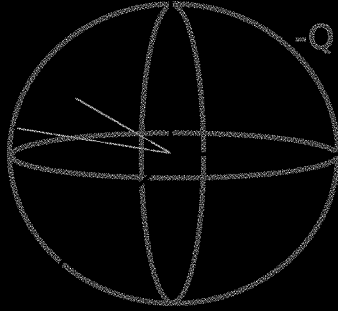
2. Condensador esférico

En el problema 28 de la relación de problemas se pide calcular la capacidad de un condensador esférico que es aquel que está formado por dos conductores esféricos concéntricos de distintos radios (R_A y R_B). Además se pide expresar el campo eléctrico en función de la carga una de las esferas. El condensador en cuestión se muestra en la figura 1.

2.1. Analizando el problema

Como puede verse, al establecer una diferencia de potencial entre los dos conductores, cada uno de ellos se carga con una carga Q . El conductor que ponemos a potencial positivo (el de radio R_A) se carga con una carga $+Q$ y el que ponemos a menor potencial (el de radio R_B) se carga con una carga $-Q$. Llamaremos a esa diferencia de potencial que se establece entre los dos conductores $V_A - V_B$. Esta diferencia es positiva porque V_A es mayor que V_B .

Además, cada una de las esferas que forman el condensador son conductoras y según hemos visto en clase, la carga se distribuye uniformemente en su superficie. Por tanto, **sólo hay carga en la superficie de cada una de las esferas conductoras y no en su interior.**



porque la expresión anterior **sólo se puede usar para cargas puntuales**, cargas que están en un punto concreto. En nuestro caso, la carga no está concentrada en un punto concreto sino que se encuentra distribuída sobre la superficie del conductor.

2.4.1. ¿Pero no existe ninguna forma de que yo pueda usar la fórmula 3?

Si, existe una posibilidad y es que yo consiga calcular cuanta carga hay en cada punto concreto de la superficie de la esfera (esto son muuuuuchos puntos). Si soy capaz de hacer esto, entonces sabría la carga que hay en cada punto y para cada una de esas cargas podría usar la expresión 3. Pero las cosas no son tan fáciles porque para cada una de esas cargas puntuales de la superficie, además de calcular el valor de la carga, tendría que calcular la distancia entre el punto donde se encuentra esta carga y el punto donde queremos calcular el potencial (r). Con esos dos datos ya sí que podríamos calcular el potencial de cada carga de la superficie usando la fórmula 3 y una vez que tuviéramos todos los potenciales podríamos sumarlos para calcular el potencial total. Este procedimiento no es nada sencillo.

2.4.2. ¿Existe alguna alternativa más sencilla?

La otra alternativa que tenemos es usar el Teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico creado por la distribución de carga y luego usar la relación:

$$V_A - V_B = - \int_{R_B}^{R_A} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (4)$$

para calcular el potencial.

2.4.3. ¿Y no puedo calcular el campo con la fórmula $\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}$ y evitar usar el Teorema de Gauss?

Claro que sí. Pero entonces de nuevo tendríamos que saber cuánta carga hay en cada uno de los puntos de la superficie de la esfera y para cada uno de esos puntos tendríamos que calcular el vector \vec{r} que va desde el punto donde está la carga al punto donde queremos calcular el campo. Una vez que hayamos hecho esto para todos los puntos de la superficie de la esfera, el campo total será la contribución de todos los campos creados por las cargas situadas en todos los puntos de la superficie de la esfera (sólo tenemos que sumar, o lo que es lo mismo, integrar). Este procedimiento es muy complicado ya que cada carga de la superficie está en un punto distinto y, por tanto, tiene un \vec{r} distinto.

2.4.4. Vale, veo claro que tengo que usar el Teorema de Gauss porque va a simplificar los cálculos.

¡Enhorabuena! Ya podemos empezar a usar el Teorema de Gauss.

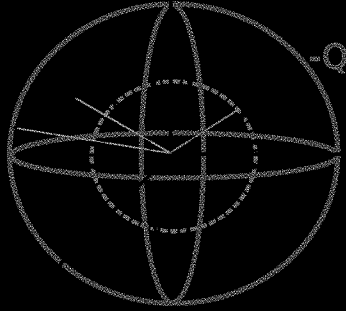
3. Aplicamos el Teorema de Gauss

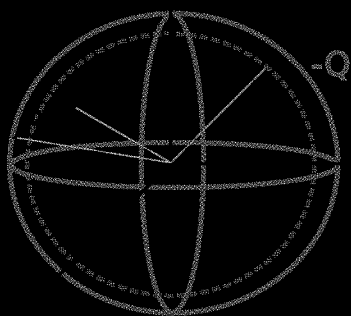
Para aplicar el Teorema de Gauss, seguimos una serie de pasos:

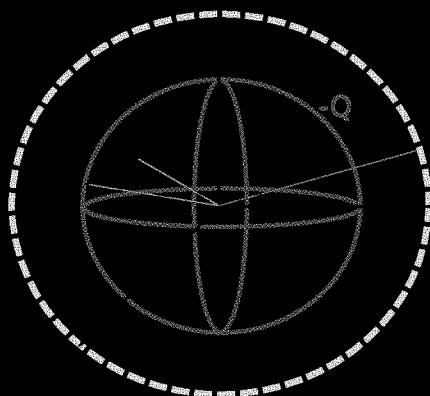
1. Estimo hacia dónde va el campo. Por tratarse de conductores esféricos, el campo va a ir en la dirección radial (dirección del radio) y será saliente o entrante dependiendo del signo de la carga con la que se haya cargado el conductor porque, como hemos visto en clase, las cargas positivas son fuentes de campo y las negativas sumideros.
2. Escojo una superficie cuyo vector/es de superficie sean **siempre** paralelos o perpendiculares a la dirección del campo. De entre las superficies estudiadas en clase (esfera, cilindro y cubo) la única que cumple la condición anterior es la esfera puesto que su vector de superficie tiene la dirección radial y es saliente. Por tanto, este vector de superficie tendrá la misma dirección que el campo creado por la esfera cargada.
3. Aplico el Teorema de Gauss. Antes de aplicar el Teorema de Gauss tengo que elegir el punto en el que voy a calcular el campo y para eso tengo que analizar el problema que estoy tratando. En este caso hay tres zonas diferentes donde tengo que considerar el cálculo del campo:
 - dentro de la esfera de radio R_A
 - entre las dos esferas
 - fuera de la esfera de radio R_B
4. Aplico la definición de flujo: $\Phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{S}$.
5. Igualo el valor del flujo calculado con el Teorema de Gauss con el valor de flujo calculado con su definición.

3.1. Cálculo del campo eléctrico en un punto a una distancia r del centro de las esferas y dentro de la esfera de radio R_A

Esta sería una situación como la que se muestra en la figura 2. Para aplicar el Teorema de Gauss tomamos una esfera de radio r (*Paso 2*). Esto es, una esfera que pasa por el punto donde queremos calcular el campo. Ya tenemos el tipo de superficie de Gauss escogida (*Paso 2*) y también sus







(amarillo) la carga total ($\sum Q_{dentro}$) es $+Q - Q = 0$. Si $\sum Q_{dentro}=0$, entonces el flujo a través de la esfera de Gauss (amarillo) es cero $\Phi = 0$.

Pasamos ahora a aplicar el *Paso 4*, usar la definición de flujo:

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E dS = E \oint dS = E S_{esfera\ de\ Gauss} \quad (13)$$

donde la expresión anterior se obtiene primero quitando el producto escalar porque el campo y la superficie son paralelos y segundo teniendo en cuenta que fijada la superficie, el campo sólo depende de la distancia a la que lo estemos calculando y es independiente del trozo de superficie dS que consideremos y, por tanto, puede salir de la integral.

Finalmente, aplico el Paso 5 donde igualo lo obtenido con el Teorema de Gauss a lo obtenido en los cálculos usando la definición de flujo:

$$0 = E S_{esfera\ de\ Gauss} \quad (14)$$

Para que un producto $E S_{esfera\ de\ Gauss}$ sea cero, o bien $E = 0$ o bien $S_{esfera\ de\ Gauss} = 0$. Pero $S_{esfera\ de\ Gauss}$ no puede ser cero porque $S_{esfera\ de\ Gauss} = 4\pi r^2$ y r no es cero. Por tanto, la única posibilidad es que $E = 0$.

3.4. Expresión final del campo eléctrico

Si unimos en una sola expresión todo lo calculado en esta sección, podremos escribir el campo eléctrico creado por un condensador esférico como:

$$E = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R_A \\ \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2} & \text{si } R_A \leq r \leq R_B \\ 0 & \text{si } r > R_B \end{cases} \quad (15)$$

4. Calculando la diferencia de potencial $V_A - V_B$

Como ya tenemos la expresión del campo eléctrico, para calcular la diferencia de potencial entre los conductores esféricos sólo hay que usar la relación que existe entre ambos:

$$V_A - V_B = - \int_{R_B}^{R_A} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (16)$$

4.1. ¿Qué valor de los tres que he calculado para el campo tengo que usar?

Como tengo que calcular la diferencia de potencial entre el conductor de radio R_A y el de radio R_B , tendré que usar la expresión del campo válida

en el rango de valores de r que estén comprendidos entre R_A y R_B . Esto es:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

Y ahora ya podemos aplicar la relación entre campo eléctrico y potencial:

$$V_A - V_B = - \int_{R_B}^{R_A} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (17)$$

$$= - \int_{R_B}^{R_A} E dr \quad (18)$$

$$= - \int_{R_B}^{R_A} \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} dr \quad (19)$$

$$= - \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi} \int_{R_B}^{R_A} \frac{dr}{r^2} \quad (20)$$

$$= \left. \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r} \right|_{R_B}^{R_A} \quad (21)$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi R_A} - \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi R_B} = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \quad (22)$$

5. Calculando la Capacidad

Una vez que conocemos la expresión para la diferencia de potencial entre los conductores esféricos que forman el condensador, usamos la definición de capacidad para calcular su expresión:

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)} = \frac{\varepsilon_0 4\pi}{\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right)} \quad (23)$$