

---

---

## ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

---

**Convocatoria Febrero 2012**

---

**Alumno:**\_\_\_\_\_ **DNI:**\_\_\_\_\_

**(07/02/2012)**

**Ejercicio 1.** ¿Para que valor de  $m$  no es verdad que  $3^6 \equiv 9 \pmod{m}$ ?

- (a)  $m = 8$ .
- (b)  $m = 14$ .
- (c)  $m = 10$ .
- (d)  $m = 12$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{a, b, c, d\}$ . El cardinal del conjunto  $\mathcal{P}(A \times B)$  es:

- (a)  $2^7$ .
- (b)  $7^2$ .
- (c)  $2^{12}$ .
- (d)  $12^2$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $V = (\mathbb{Z}_{11})_2[x]$ , es decir, el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes en  $\mathbb{Z}_{11}$ , y sea  $D : V \rightarrow V$  la aplicación derivada. Entonces:

- (a)  $\{0\}$  es una base del núcleo de  $D$  y  $\{1, x, x^2\}$  una base de la imagen.
- (b)  $\{7\}$  es una base del núcleo de  $D$  y  $\{6 + 3x, 9 + 10x\}$  una base de la imagen.
- (c)  $\{x\}$  es una base del núcleo de  $D$  y  $\{1, x^2\}$  una base de la imagen.
- (d)  $\{1\}$  es una base del núcleo de  $D$  y  $\{1, x\}$  una base de la imagen.

**Ejercicio 4.** Dado el conjunto  $S = \{u_1, u_2, u_3\}$  donde  $u_1 = (3, 1, 5, 2)$ ,  $u_2 = (4, 2, 1, 6)$  y  $u_3 = (6, 1, 1, 6)$  son tres vectores de  $(\mathbb{Z}_7)^4$ .

- (a) Los vectores  $\{u_1, u_2, u_3, u_1 + u_2 + u_3\}$  forman una base de  $(\mathbb{Z}_7)^4$ .
- (b)  $S$  no puede ser ampliado a una base pues los vectores de  $S$  son linealmente dependientes.
- (c)  $S$  puede ser ampliado a una base añadiéndole el vector  $(1, 1, 1, 1)$ .
- (d) Los vectores de  $S$  son linealmente independientes.

**Ejercicio 5.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_5)$ . Entonces  $A^{105}$  vale

- (a)  $A$ .
- (b) La matriz identidad.
- (c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(d)  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 6.** Sea  $U$  el subespacio vectorial de  $(\mathbb{Z}_5)^4$  generado por los vectores  $(1, 0, 1, 2)$ ;  $(0, 4, 1, 1)$ . Las ecuaciones cartesianas de  $U$  son:

(a)  $\{ 4x + 2y + 3z + 4t = 0 \}.$

(b)  $\begin{cases} x + 4y + 4z = 0 \\ 3x + 3y + 4z + 4t = 0 \end{cases}.$

(c)  $\begin{cases} x + z + 4t = 0 \\ 2x + 4y + 4t = 0 \\ 3x + 4y + 2z + 3t = 0 \end{cases}.$

(d)  $\begin{cases} 3x + y + z + t = 1 \\ x + 4y + 4z = 0 \end{cases}.$

**Ejercicio 7.** Dada la aplicación lineal  $f : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^2$  definida por  $f(x, y, z) = (2x + 3y, 7x + z)$

- (a)  $f$  es inyectiva.
- (b) El núcleo de  $f$  tiene dimensión 2.
- (c)  $f$  no es sobreyectiva.
- (d) Una base de la imagen es  $\{(1, 0); (0, 1)\}$ .

**Ejercicio 8.** ¿Cuál de las siguientes reglas define una aplicación  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ?

- (a)  $f(n) = n^2 - 60n + 800$ .
- (b)  $f(n) = \frac{n^3 + 6n^2 + 8n}{3}$ .
- (c)  $f(n) = n^2 - 1$ .
- (d)  $f(n) = \frac{n^3 + 5n^2 + 6n}{6}$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$ .

Entonces:

- (a)  $A$  tiene un único valor propio.
- (b)  $A$  tiene tres valores propios distintos, y por tanto es diagonalizable.
- (c)  $A$  tiene dos valores propios distintos, y no es diagonalizable.
- (d)  $A$  tiene dos valores propios distintos, y es diagonalizable.

**Ejercicio 10.** Disponemos de 45 billetes de 20 euros, y 18 billetes de 50 euros. ¿De cuántas formas distintas podemos conseguir 1110 euros?

- (a) 5.
- (b) 11.
- (c) 9.
- (d) 7.

**Ejercicio 11.** Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en  $\mathbb{Q}$

$$\begin{array}{rrcr} ax & + & y & + & z & = & b \\ & & x & + & by & + & z & = & a \end{array}$$

- (a) El sistema es compatible indeterminado si, y sólo si,  $a \cdot b = 1$ .
- (b) El sistema es siempre compatible indeterminado.
- (c) Existen valores de  $a$  y  $b$  para los que el sistema es compatible determinado.
- (d) Si  $a = b = 1$  el sistema es incompatible.

**Ejercicio 12.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$ . Entonces el determinante de  $A$  vale:

- (a) 1.
- (b) 0.
- (c) 3.
- (d) 4.

**Ejercicio 13.** Sea  $A = \mathbb{Z}_5[x]_{x^4+3x^3+3x^2+x+2}$ , y sea  $p(x) = x^2 + 1 \in A$ . Entonces:

- (a)  $p(x)$  no tiene inverso en  $A$  pues  $x^2 + 1$  no es irreducible.
- (b)  $p(x)$  no tiene inverso en  $A$  pues  $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 2$  tiene a  $x = 1$  como raíz.
- (c)  $p(x)$  tiene inverso en  $A$  y vale  $x^3 + x^2 + 4x + 2$ .
- (d)  $p(x)$  tiene inverso en  $A$  y vale  $2x^3 + x^2 + 4x + 1$ .

**Ejercicio 14.** El resto de dividir  $5514^{1838}$  entre 7 es:

- (a) 3.
- (b) 1.
- (c) 4.
- (d) 6.

**Ejercicio 15.** ¿Para cuál de los siguientes cuerpos el polinomio  $p(x) = x^6 - 1$  verifica que  $\text{mcd}(p(x), p'(x)) \neq 1$ ?

- (a)  $K = \mathbb{Z}_3$ .
- (b)  $K = \mathbb{Z}_5$ .
- (c)  $K = \mathbb{Q}$ .
- (d)  $K = \mathbb{Z}_7$ .

**Ejercicio 16.** En  $\mathbb{Z}_{12}$  definimos la relación de equivalencia  $xRy$  si  $x^2 = y^2$ . Entonces el cardinal del conjunto cociente vale:

- (a) 4
- (b) 6
- (c) 1
- (d) 12

**Ejercicio 17.** Dado el sistema de congruencias

$$\begin{aligned} 22x &\equiv 26 \pmod{36} \\ 13x &\equiv 38 \pmod{51} \end{aligned}$$

- (a) No tiene solución pues 22 no tiene inverso módulo 36.
- (b) Tiene una única solución comprendida entre 1000 y 2000.

- (c) No tiene solución pues 51 y 36 no son primos relativos.  
 (d) Tiene cuatro soluciones comprendidas entre 1000 y 2000.

**Ejercicio 18.** Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas  $2 \times 2$  con coeficientes reales tales que

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

- (a)  $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$ .  
 (b) No existen matrices con las condiciones que nos da el enunciado.  
 (c)  $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$ .  
 (d)  $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 19.** De los siguientes anillos, indica cuál es un cuerpo con 125 elementos:

- (a)  $\mathbb{Z}_5[x]_{x^3+x+1}$ .  
 (b)  $\{a(x) \in \mathbb{Z}_5[x] : \text{gr}(a(x)) \leq 124\}$ .  
 (c)  $\mathbb{Z}_3[x]_{x^5+x^2+2}$ .  
 (d)  $\mathbb{Z}_5[x]_{x^3+x^2+4}$ .

**Ejercicio 20.** Sea  $\mathcal{U}_1$  el subespacio de  $(\mathbb{Z}_7)^4$  generado por  $\{(1, 2, 0, 2); (0, 1, 4, 0)\}$  y  $\mathcal{U}_2$  el subespacio de  $(\mathbb{Z}_7)^4$  de ecuaciones  $\begin{cases} x + 2y + 3z + 5t = 0 \\ 3x + t = 0 \end{cases}$ . Una base de  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$  es

- (a)  $\{(1, 2, 3, 1); (2, 0, 2, 5)\}$ .  
 (b)  $\{(1, 0, 0, 4); (0, 1, 0, 6); (1, 1, 0, 3)\}$ .  
 (c)  $\{(1, 2, 3, 1); (2, 0, 2, 5); (1, 0, 0, 4)\}$ .  
 (d)  $\{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}$ .