Prueba Final (04-07-2013):

ALUMNO:	**D.N.I.:**

Parte de Teoría

1. Ejercicios

1. **2 puntos** Considera el problema de interpolación siguiente:

   Hallar $p(x) \in \mathbb{P}_2$ tal que $p(1) = z_1,\ p'(-1) = z_2,\ p'(2) = z_3$ donde $z_i \in \mathbb{R}$.

   Se pide,

   a) Deduce la matriz de Gram, G, asociada al problema y base canónica de $\mathbb{P}_2$ y prueba que única el problema admite solución.

   b) Para $z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ z_3 = 2$; calcula el interpolante a partir de la descomposición de Doolittle para G.

   c) Considera como base de $\mathbb{P}_2$ los polinomios formados por las componentes del producto,

   $$(1, x, x^2) \cdot U^{-1}$$

   siendo U la matriz (triangular superior) de la descomposición calculada en b). ¿Se puede decir que ésta sería una base tipo Newton para el problema aquí tratado?. Justifica tu respuesta.

2. **2 puntos** Los datos medidos por distintos controles radar sobre tiempos, distancias y velocidades de una motocicleta que se dirige al circuito de Jerez por la A-92 son los siguientes:

$t_i(horas)$	0	0.1	0.2
$e_i(km)$	0	10	20
$v_i(km/hora$	90	60	60

   Con el método a trozos, calcula el spline cúbico clase 1 que interpola los datos de la tabla y determina si se ha sobrepasado la velocidad máxima permitida en el segundo tramo medido.

3. **2 puntos** Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

   a) ¿Es definida positiva la matriz de coeficientes?. En caso afirmativo, realiza la descomposición de Choleski a partir de la de Crout.

   b) Escribe las ecuaciones del método iterativo de Gauss–Seidel para aproximar la solución del sistema y calcula 2 iteraciones desde la inicial: $x = 0,\ y = -1,\ z = 0$.

   c) Justifica, razonadamente, que el método es convergente.

4. **2 puntos** Calcula el spline lineal, $s(x) \in S_1(-2, 0, 2)$, mejor aproximación m.c. continua para la función $f(x) = x^3$ (**nota:** el intervalo de trabajo es: $[-2, 2]$)

2. Cuestiones

$\boxed{\text{2 puntos}}$ En cada una de las cuestiones siguientes, marca con una X la o las opciones correctas (no es necesario justificación). (**Nota: responde sólo a 5**)

1. Sea u_1 la m.a. de f en H_1 y u_2 la m.a. de f en H_2 (con $H_2 \subset H_1$). Sean $E_i = \|f - u_i\|$ $i = 1, 2$ los errores cometidos; entonces,

   - ☐ E_1 y E_2 no están relacionados;
   - ☐ E_2 no es menor que E_1;
   - ☐ E_1 y E_2 son iguales;
   - ☐ ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta.

2. la función a trozos, $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & -1 \leq x < 0 \\ \alpha x^3 + 3x - 1 & 0 \leq x < 1 \\ 3x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

   - ☐ es un spline cúbico si $\alpha = 1$
   - ☐ es un spline cúbico natural si $\alpha = 0$
   - ☐ es una función continua cualquiera que sea el valor de α
   - ☐ ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.

3. Si calculamos el valor de $\sqrt{e}$ usando el interpolante de Lagrange en los nodos $x_i := \{0, 1\}$; entonces, el error cometido en valor absoluto

   - ☐ es mayor que 0.5
   - ☐ es menor que 0.4
   - ☐ está entre 0.4 y 0.5

4. La m.a.m.c. continua y la m.a.m.c. continua con peso $w(x) = 3$ para $f(x)$ son iguales.

   - ☐ Verdadero
   - ☐ Falso

5. Si una matriz invertible, $\mathbf{A}$, admite descomposición del tipo $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{L}$ siendo U triangular superior (con $u_{ii} = 1 \quad \forall i$)y L triangular inferior; entonces, dicha descomposición puede calcularse a partir de,

   - ☐ la descomposición de Doolittle para A^t
   - ☐ la descomposición de Crout para A^t
   - ☐ la descomposición de Crout para A^{-1}
   - ☐ la descomposición de Doolittle para A^{-1}

6. Toda matriz real de orden 3×3, A, con valores propios $\lambda_i := -1, 2, 1$ cumple,

   - ☐ su traza y determinante son iguales
   - ☐ la matriz A^2 sólo tiene dos valores propios distintos.
   - ☐ tiene discos de Gershgorin disjuntos
   - ☐ las matrices $A + I$ y $A - I$ no tienen inversa

Prueba Final (04-07-2013):

ALUMNO:	**D.N.I.:**

Cuestiones de los trabajos $\boxed{\textbf{0.25 puntos sobre nota final}}$

Responde a una de las cuestiones que no sea del tema correspondiente a tu grupo.

1. **(Tema 1)** Completa la tabla que permite obtener el valor del interpolante en x=2 para los datos

x_i	-1	0	1
y_i	2	-1	3

$x - x_i$	x_i	y_i	*grado* 1	*grado* 2
3	-1	2		
2	0	-1		
1	1	3		

2. **(Tema 2)** Si $s(x)$ es un spline cuadrático que pasa por los puntos, $(x_i, y_i) := \{(-1, 2);\ (0, 3);\ (1, 5)\}$ cuyo primer trozo es, $s_1(x) = 3 + x$, ¿cuál es el segundo trozo de spline?

3. **(Tema 3)** A partir de la red de control formada por los puntos $P_0, P_1, P2$ de la figura, traza el punto de la curva Bézier asociada que corresponde al valor del parámetro $t = 1/3$ (recuerda que para $t = 0$ se obtiene el punto P_0 y para $t = 1$ se consigue el punto P_2)

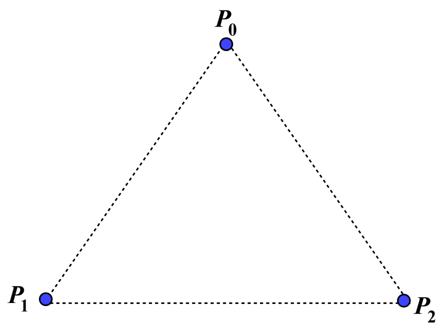

Figura 1: Red de control de la curva Bézier

4. **(Tema 4)** Calcula la primera iteración del método w-relajación, con $w = 0.8$, para el sistema: $\boxed{\begin{array}{l} 3x - y = 5 \\ 2x + 5y = -1 \end{array}}$

   Toma como aproximación inicial, $x = y = 0.5$ ¿Convergerá el método a la solución del sistema?

5. **(Tema 5)** Escribe una condición suficiente que permita asegurar que la matriz, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ admite descomposición de Doolittle.

6. **(Tema 6)** Calcula el polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, usando el método de Souriau