Densidad de carga

FFT

Definiciones:

Densidad de carga (ρ):
= carga por unidad de volumen

$$\rho = \frac{q}{v} \qquad (C/\,m^3)$$

Densidad superficial de carga (σ):
= carga por unidad de superficie

$$\sigma = \frac{q}{s} \qquad (C/\,m^2)$$

Densidad lineal de carga (λ):
= carga por unidad de longitud

$$\lambda = \frac{q}{l} \qquad (C/\,m)$$

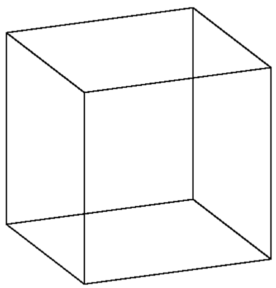
1º Cálculo de la densidad de carga en varias figuras

2º Cálculo de la carga en una figura, sabida la densidad de carga

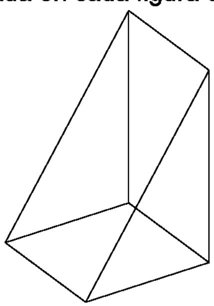
1. Cálculo de la densidad de carga en varias figuras

Calcular la densidad de carga ρ

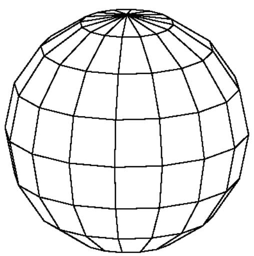
La carga total almacenada en cada figura es q



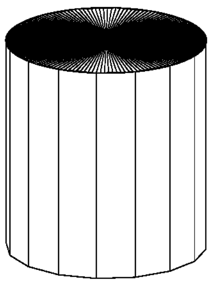
Cubo:
Lado = a



Cuña:
Ancho = a
Largo = b
Altura = h



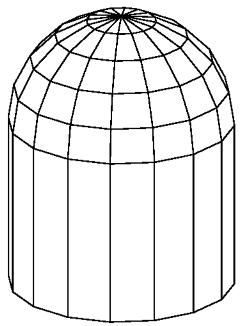
Esfera:
Radio = R



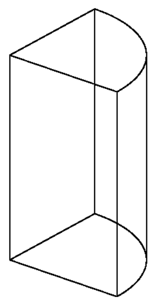
Cilindro:
Radio = R
Altura = h

Calcular la densidad de carga ρ

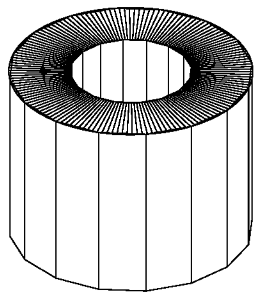
La carga total almacenada en cada figura es q



Radio = R
Altura = h+R



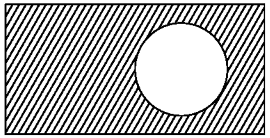
Arco = 90°
Radio = R
Altura = h



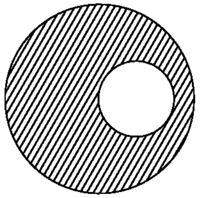
Radio interior = R1
Radio exterior = R2
Altura = h

Calcular la densidad superficial de carga σ

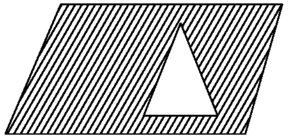
La carga total almacenada en cada figura es q

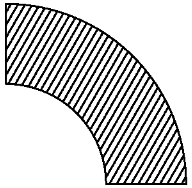


Radio = R
Base = b
Altura = h



Radio interior = R1
Radio exterior =R2

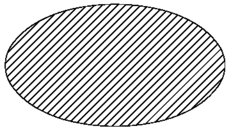




Radio interior = R1
Radio exterior =R2

Paralelogramo: Base = a, Altura = d

Triángulo: Base = b, Altura = h

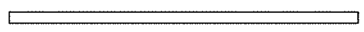


Semieje menor = a
Semieje mayor = b

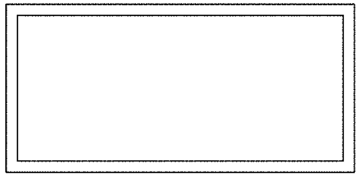
Calcular σ en las figuras de las páginas 3 y 4

Calcular la densidad lineal de carga λ

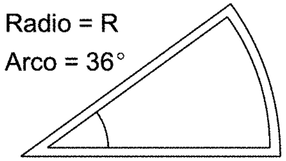
La carga total almacenada en cada figura es q



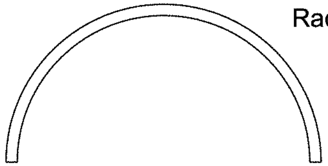
Longitud = l



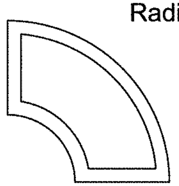
Base = b
Altura = h



Radio = R
Arco = 36°



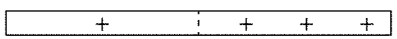
Radio = R



Radio interior = R1
Radio exterior = R2
Arco = 90°

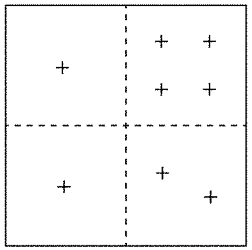
La carga puede no estar distribuida de forma homogénea

Cada "+" equivale a una carga +q



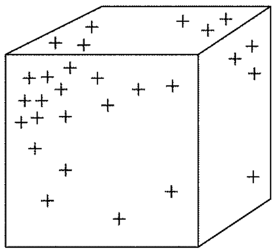
(longitud = l)

Calcular λ:
- en el hilo completo.
- en cada mitad del hilo.



(lado = l)

Calcular σ:
- en la superficie completa.
- en cada cuadrante de la superficie.



En general, distribución de carga no homogénea.

$\rho = q/v$ sólo es una media $\Rightarrow$

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta v} \longrightarrow \rho = \frac{dq}{dv}$$

ρ = carga infinitesimal Δq / volumen infinitesimal Δv

ρ depende de la posición: $\rho = \rho(x,y,z)$

$$q = \int dq =$$

$$\rho = \frac{dq}{dv} \longrightarrow dq = \rho\, dv \longrightarrow = \int_{vol} \rho\, dv$$

$$\sigma = \frac{dq}{ds} \longrightarrow dq = \sigma\, ds \longrightarrow = \int_{sup} \sigma\, ds$$

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \longrightarrow dq = \lambda\, dl \longrightarrow = \int_{lin} \lambda\, dl$$

$$\int_{lin} = \int \qquad \int_{sup} = \iint \qquad \int_{vol} = \iiint$$

Apéndice: Integral

$$\int[\alpha\, f(x)+\beta\, g(x)]\,dx \;=\; \alpha\int f(x)\,dx + \;\beta\int g(x)\,dx$$

$$\int_a^b 1\,dx \;=\; x\Big|_a^b \;=\; (b-a)$$

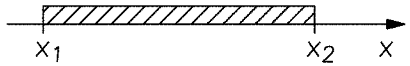
$$\int_a^b x\,dx \;=\; \frac{x^2}{2}\Big|_a^b \;=\; \left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\int_a^b \cos(x)\,dx \;=\; \mathrm{sen}(x)\Big|_a^b \;=\; \left[\mathrm{sen}(b)-\mathrm{sen}(a)\right]$$

2. Cálculo de la carga en una figura, sabida la densidad de carga

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad lineal de carga λ



$$\lambda(x) \;=\; 2 \;+\; 4\,x$$

$x_1 = 0$

$x_2 = 3$

$$q \;=\; \int_{x=0}^{x=3} (2+4\,x)\,dx$$

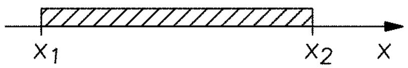
$$= \left(2\,x + \;4\,\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3$$

$$= \;2(3-0)\;+2(3^2-0)$$

$$q \;=\; 6+18 \;=24$$

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad lineal de carga λ



$$\lambda(x) \;=\; 5\;\cos(x)$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

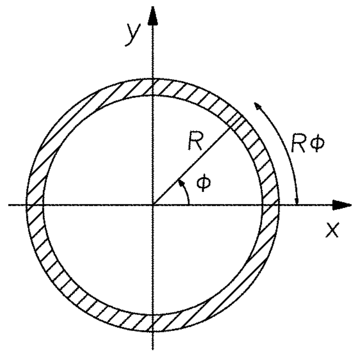
$$q \;=\; \int_{x=1}^{x=3} 5\cos(x)\,dx$$

Hacer ...

$$q \;=\; 5\;[\mathrm{sen}(3)\;-\;\mathrm{sen}(1)]$$

Calcular la carga q total almacenada en las figura

Conocida la densidad lineal de carga λ



$$\lambda(\phi) \;=\; 3$$

Desde $\phi = 0$ a $\phi = 2\,\pi$

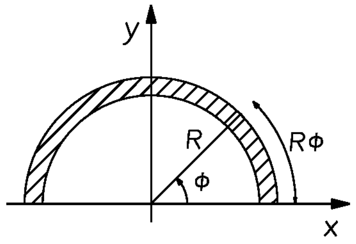
$$q \;=\; \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 3\;R\,d\,\phi$$

$$= \;3\,R\,\phi\Big|_0^{2\pi} \;=\; 3\,R(2\pi-0)$$

$$q \;=\; 6\;\pi\;R$$

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad lineal de carga λ



$$q = \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} 5\,R\,d\phi$$

$$\lambda(\phi) = 5$$

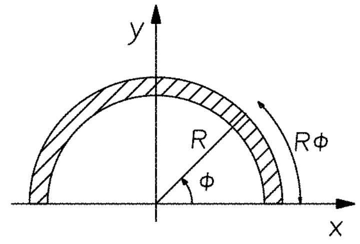
Hacer ...

Desde $\phi = 0$ a $\phi = \pi$

$$q = 5\,\pi\,R$$

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad lineal de carga λ



$$q = \int_{\phi=0}^{\phi=\pi} (3 + 2\phi)\,R\,d\phi$$

$$\lambda(\phi) = 3 + 2\phi$$

$$= 3R\phi\Big|_0^\pi + 2R\frac{\phi^2}{2}\Big|_0^\pi$$

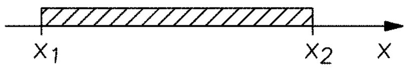
Desde $\phi = 0$ a $\phi = \pi$

$$= 3R(\pi - 0) + R(\pi^2 - 0)$$

$$q = \pi R(3 + \pi)$$

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad lineal de carga λ



$x_1 = 1$
$x_2 = 7$

$$\lambda(x) = 3 + 3x$$

$x_1 = -\pi/2$
$x_2 = +\pi/2$

$$\lambda(x) = 3\cos(x)$$

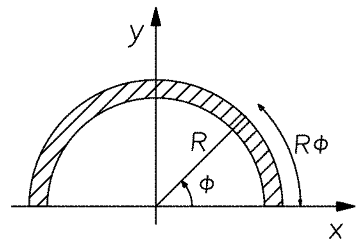
Soluciones:

$q = 90$

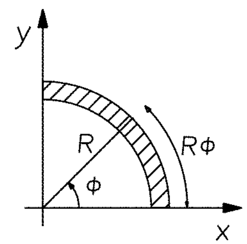
$q = 6$

Calcular la carga q total almacenada en las figuras

Conocida la densidad lineal de carga λ



$$\lambda(\phi) = 5 + \cos(\phi)$$



$$\lambda(\phi) = 3 + 4\phi$$

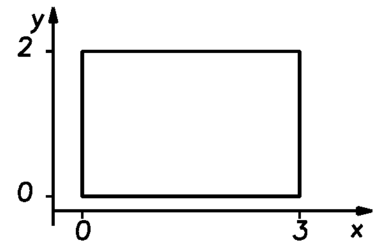
$$\lambda(\phi) = 7 + \cos(\phi)$$

Soluciones:

$q = 5\pi R$ $\qquad q = \frac{3\pi R}{2} + \frac{\pi^2 R}{2}$ $\qquad q = \frac{7\pi R}{2} + R$

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad superficial de carga σ



$$\sigma(x,y) = 2x + 2y$$

$$q = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=3} (2x + 2y)\, dxdy$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \left[2\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + 2yx \Big|_{x=0}^{x=3} \right] dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \left[(9-0) + 2y(3-0) \right] dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} (9 + 6y)\, dy \quad \rightarrow$$

17

$$\rightarrow \quad = \int_{y=0}^{y=2} (9 + 6y)\, dy$$

$$= \left[9y\Big|_0^2 + 6\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 \right]$$

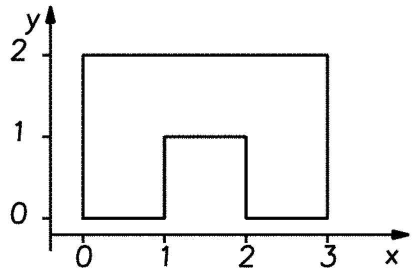
$$= \left[9(2-0) + 3(4-0) \right]$$

$$q = 18 + 12 = 30$$

18

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad superficial de carga σ



$$\sigma(x,y) = 2x + 2y$$

$$q_{hueco} = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=1}^{x=2} (2x + 2y)\, dxdy$$

Hacer ...

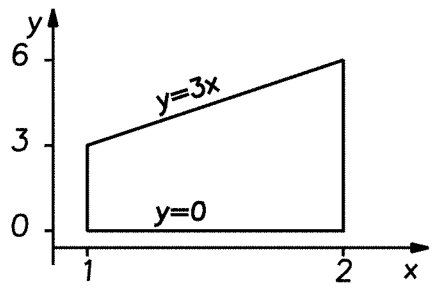
$$q_{total} = q_{rectangulo} - q_{cuadrado\text{-}hueco}$$

$$q_{total} = 30 - 4 = 26$$

19

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad superficial de carga σ



$$\sigma(x,y) = 2y - x$$

$$q = \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=3x} (2y - x)\, dydx$$

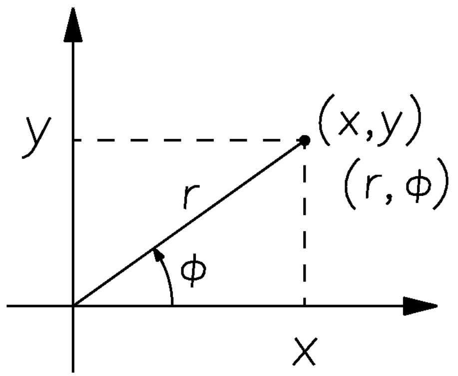
$$= \int_{x=1}^{x=2} \left[2\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=3x} - xy\Big|_{y=0}^{y=3x} \right] dx$$

Hacer ...

$$= \int_{x=1}^{x=2} 6x^2\, dx = \ldots = 14$$

20

Apéndice: Coordenadas polares



$$\begin{cases} x = r\cos(\phi) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\phi) \end{cases}$$

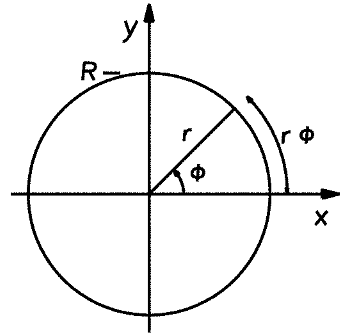
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\int_{sup} f\,ds = \int_y\int_x f(x,y)\,dxdy = \int_\phi\int_r f(r,\phi)\,r\,dr\,d\phi$$

$$ds = dxdy = r\,dr\,d\phi$$

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad superficial de carga σ



$$\sigma(r,\phi) = 3$$

Desde $r = 0$ a $r = R$
Desde $\phi = 0$ a $\phi = 2\pi$

$$q = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\int_{r=0}^{r=R} 3\ r\,dr\,d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} 3\ \frac{r^2}{2}\Big|_0^R d\phi$$

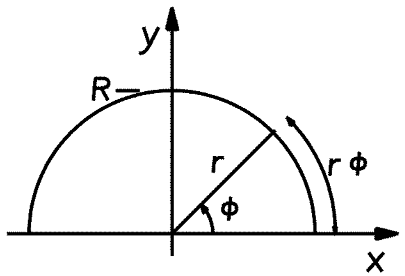
$$= \int_0^{2\pi} 3\ \frac{R^2}{2}\,d\phi$$

$$= 3\ \frac{R^2}{2}\phi\Big|_0^{2\pi}$$

$$q = 3\ \frac{R^2}{2}(2\pi - 0) = 3\pi R^2$$

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad superficial de carga σ



$$q = \int_{\phi=0}^{\phi=\pi}\int_{r=0}^{r=R} 3\ r\,drd\,\phi$$

$$\sigma(r,\phi) = 3$$

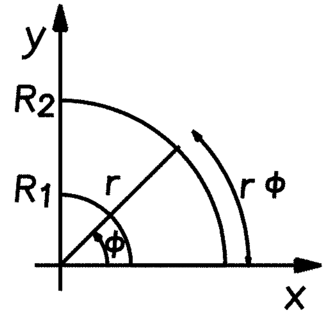
Hacer ...

Desde $r = 0$ a $r = R$
Desde $\phi = 0$ a $\phi = \pi$

$$q = \frac{3}{2}\pi R^2$$

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad superficial de carga σ



$$q = \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2}\int_{r=2}^{r=3} \frac{1}{r}\ r\,drd\,\phi$$

$$\sigma(r,\phi) = \frac{1}{r}$$

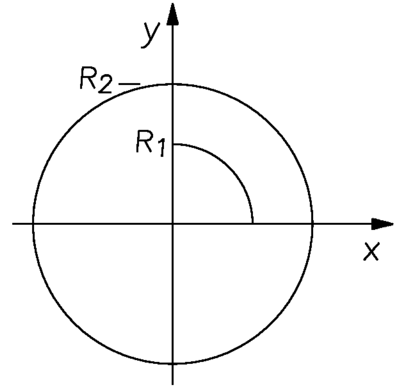
Hacer ...

Desde $r = R_1=2$ a $r = R_2=3$
Desde $\phi = 0$ a $\phi = \pi/2$

$$q = \frac{\pi}{2}$$

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad superficial de carga σ



$$\sigma(r,\phi) = \cos\phi$$

$$q_{total} = q_{circulo} - q_{sector\text{-}hueco}$$

$$q_{circulo} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\int_{r=0}^{r=R_2} \cos(\phi)\ r\,dr\,d\phi$$

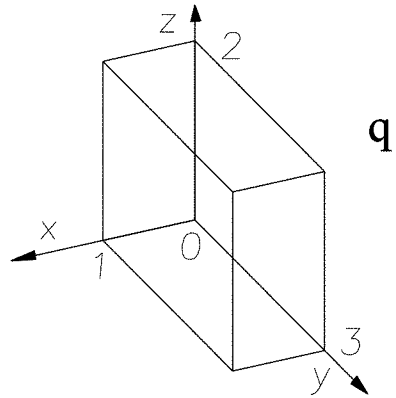
$$q_{circulo} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\int_{r=0}^{r=R_2} \cos(\phi)\ r\,dr\,d\phi$$

$$q_{sector} = \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2}\int_{r=0}^{r=R_2} \cos(\phi)\ r\,dr\,d\phi$$

$$q_{total} = 0 - \frac{R_1^2}{2}$$

Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad de carga ρ



$$\rho(x,y,z) = (1 + 2x)\,y$$

$$q = \int_{z=0}^{z=2}\int_{y=0}^{y=3}\int_{x=0}^{x=1} (1 + 2x)\,y\,dx\,dy\,dz$$

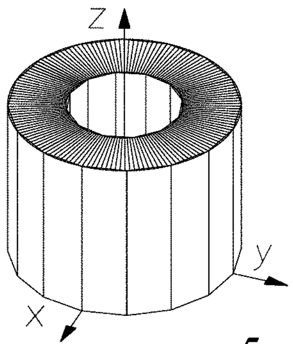
$$\int_{z=0}^{z=2}\int_{y=0}^{y=3} 2y\,dy\,dz$$

$$\int_{z=0}^{z=2} 9\ dz$$

$$q = 18$$

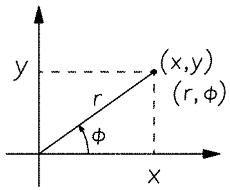
Calcular la carga q total almacenada en la figura

Conocida la densidad de carga ρ



$$\rho(r,\phi,z) = \frac{5}{r}$$

Radio interior = R1
Radio exterior = R2
Altura = 3

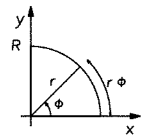


$$q = \int_{z=0}^{z=3}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{5}{r}\ r\,dr\,d\phi\,dz$$

$$\int_{z=0}^{z=3}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} 5(R_2 - R_1)\ d\phi\,dz$$

$$\int_{z=0}^{z=3} 5(R_2 - R_1)2\pi\ dz$$

$$q = 3\cdot 2\pi \cdot 5(R_2 - R_1)$$



Densidad de carga

FFT Granada granada.net78.net

27-IX-2011
S.O.: Win95
Res.: 800x600
Col.: 16bit

FIN