

## Cálculo I

5 de septiembre de 2012

1. Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos de números reales positivos y sea

$$C = \left\{ \frac{a}{b} : a \in A, b \in B \right\}$$

Supongamos que  $A$  está mayorado y que  $\inf B > 0$ . Probar que el conjunto  $C$  está mayorado y calcular su supremo.

2. Probar que la sucesión  $\{x_n\}$  definida por

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{5x_n + 3}{x_n + 5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es convergente y calcular su límite.

3. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la siguiente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \sqrt[3]{n}}$$

4. Sea  $I$  un intervalo abierto y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función creciente. Suponiendo que  $f$  es continua en un punto  $a \in I$ , probar que

$$\sup \{f(x) : x \in I, x < a\} = f(a) = \inf \{f(x) : x \in I, x > a\}$$