CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. GRUPO B.

1. Demuestra que $n^3 - n + 1$ no es divisible por 3 para ningún $n \in \mathbb{N}$.

   Solución.

   Evidentemente al tratarse de demostrar una propiedad de los naturales es recomendable intentar hacerlo por inducción.

   Para $n = 1$ se tiene que $1^3 - 1 + 1 = 1$ no es divisible por 3 así que la propiedad se verifica para 1.

   Supongamos que para un natural n se verifica que $n^3 - n + 1$ no es divisible por 3 y vamos a ver qué ocurre con $n + 1$.

   Se tiene que $(n+1)^3 - (n+1) + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 + 1 = (n^3 - n + 1) + 3n(n+1)$. Por la hipótesis de inducción hemos asumido que $n^3 - n + 1$ no es divisible por 3 y, por otro lado, claramente $3n(n+1)$ sí es divisible por 3. La suma de dos números, uno de ellos no divisible por 3 y el otro divisible por 3, no es divisible por 3 como queríamos demostrar.

2. Estudia la convergencia de la sucesión definida de forma recurrente por $x_1 = a > 0$, y $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Solución.

   Para demostrar que una sucesión definida de forma recurrente es convergente (o que no lo es) parece una buena idea (ya lo hemos hecho en clase) intentar demostrar que es monótona y acotada.

   Veamos la acotación. Tenemos que $x_1 = a > 0$ y $x_2 = \sqrt{a+a} = \sqrt{2a}$. Se tiene que $a = \sqrt{2a} \Leftrightarrow a^2 = 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a = a(a-2) = 0$. Como $a \neq 0$ para que se dé la igualdad tendrá que ser $a = 2$. Es fácil ver que si $0 < a < 2$ entonces $x_1 = a < \sqrt{2a} = x_2$ y si $a > 2$ se tiene que $x_1 = a > \sqrt{2a} = x_2$, por lo que habrá que distinguir casos. Un primer caso trivial es si $a = 2$ porque entonces se tiene que $x_n = 2 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ que evidentemente converge a 2.

   - Si $0 < a < 2$ hemos visto que $x_1 < x_2$ supongamos ahora que para un natural n se tiene que $x_n < x_{n+1}$; entonces $a + x_n < a + x_{n+1}$. Claramente los dos miembros de la desigualdad son positivos. Extrayendo raíces cuadradas se mantiene la desigualdad, es decir $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + x_{n+1}} = x_{n+2}$ y la sucesión es creciente. Para demostrar que es convergente nos faltaría ver que está mayorada. Como no tenemos un candidato claro a mayorante de la sucesión (bueno, podríamos intentarlo con 2, no parece mala idea) supongamos que la sucesión es convergente a un número L. En tal caso sabemos que L sería mayorante de la sucesión.
     Tenemos que $L = \lim\{x_{n+1}\} = \lim\{\sqrt{a + x_n}\} = \sqrt{a + \lim\{x_n\}} = \sqrt{a + L}$, es decir, que $L = \sqrt{a + L}$, de donde $L^2 = a + L \Rightarrow L^2 - L + a = 0$. Resolviendo la ecuación tenemos que $L = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$. Como $\sqrt{1+4a} > 1$ descartamos el signo negativo de la raiz ya que el límite nos saldría negativo y eso no es posible ($x_1 = a > 0$ y la sucesión es creciente). Por tanto debería ser $L = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$.

Veamos que $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ es un mayorante de los términos de la sucesión. Lo haremos, como no, por inducción. Para x_1 se tiene que

$$x_1 = a < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \Leftrightarrow 2a < 1+\sqrt{1+4a} \Leftrightarrow 2a-1 < \sqrt{1+4a}$$

Si $a < 1/2$ el primer miembro de la desigualdad es negativo y el segundo positivo con lo que se da la desigualdad. En otro caso, como los dos miembros son positivos, la desigualdad se verifica si, y sólo si,

$$(2a-1)^2 = 4a^2+1-4a < 1+4a \Leftrightarrow 4a^2-8a = 4a(a-2) < 0$$

que es cierto ya que $0 < a < 2$.

Supongamos ahora que para un natural n se verifica $x_n < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, entonces

$$x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} < \sqrt{a+\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}} = \sqrt{\frac{2a+1+\sqrt{1+4a}}{2}}.$$

Si fuera $\sqrt{\dfrac{2a+1+\sqrt{1+4a}}{2}} \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ habríamos terminado. No parece evidente, pero si elevamos al cuadrado los dos miembros de la desigualdad obtenemos

$$\left(\sqrt{\frac{2a+1+\sqrt{1+4a}}{2}}\right)^2 = \frac{2a+1+\sqrt{1+4a}}{2} \leq \left(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+1+4a+2\sqrt{1+4a}}{4} = \frac{2a+1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Realmente lo que ocurre es que $\sqrt{\dfrac{2a+1+\sqrt{1+4a}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, lo que nos viene bien.

Así que $x_{n+1} < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Entonces tenemos que la sucesión está mayorada y, ahora sí, es convergente y su límite es $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Otra forma de ver la mayoración es, como comenté antes, intentar demostrar por inducción que $x_n \leq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Es mucho más fácil. Inténtese.

- El caso de que $a > 2$ es más rápido utilizando lo que ya hemos hecho. Demostrar el decrecimiento en este caso es totalmente análogo a la demostración del crecimiento del caso anterior pero cambiando las desigualdades. Pero ahora la acotación (la minoración) es mucho más fácil que antes ya que es evidente que $x_n > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. En cualquier caso se puede demostrar también que $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ es un minorante de la sucesión (demostración totalmente análoga a la de antes) y también es fácil demostrar que 2 es minorante de la sucesión. El cálculo del límite se hace igual.

Resumiendo: si $a < 2$ la sucesión es creciente y mayorada, si $a = 2$ es constante y si $a > 2$ es decreciente y minorada. En los tres casos es convergente y el límite vale $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ (sí, para $a = 2$ también se cumple).

3. Calcula el límite de la sucesión $\{x_n\} = \left\{ \dfrac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \right\}$.

Solución.

En este caso vamos a utilizar el criterio de Stolz para ver el comportamiento de la sucesión. Si llamamos $a_n = \frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$ y $b_n = n^2$ es claro que $\{b_n\}$ es creciente y no mayorada y entonces

$$\left\{ \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right\} = \left\{ \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} + \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n} - \left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \right)}{(n+1)^2 - n^2} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}}{2n+1} \right\} = \left\{ \frac{n+2}{2n+1} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n \right\}.$$

Se tiene que el límite de $\left\{ \frac{n+2}{2n+1} \right\}$ es $1/2$ y, utilizando la regla del número e, la sucesión $\left\{ \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n \right\}$ tiende a e, con lo que la sucesión converge a $\frac{e}{2}$.

4. Estudia si es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$.

Solución.

En esta serie parece conveniente aplicar el criterio del cociente. Si llamamos $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{3^n n!}$ obtenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \frac{3^n n!}{(n+1)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{3(n+1)(n+1)^n} = \frac{1}{3} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1}.$$

Aplicando la regla del número e a la sucesión $\left\{ \left(\dfrac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \right\}$ obtenemos que esta sucesión converge a e y entonces

$$\lim \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \frac{e}{3} < 1$$

y la serie es convergente.

5. Estudia si es convergente la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n+1}{3^{n+1}}$ y en caso de que lo sea calcular la suma de la serie.

Solución.

Aplicando el criterio del cociente a la serie, si llamamos $a_n = \frac{2^n+1}{3^{n+1}}$, tenemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(n+1)}+1}{3^{n+2}}\frac{3^{n+1}}{2^n+1} = \frac{1}{3}\frac{2^{(n+1)}+1}{2^n+1} = \frac{1}{3}\frac{2+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{2^n}}.$$

La última igualdad se ha obtenido dividiendo denominador y numerador por 2^n. Como $\{\frac{1}{2^n}\}$ tiende a 0, se tiene que

$$\lim\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \frac{2}{3} < 1$$

y la serie es convergente.

Para calcular la suma tendremos en cuenta la suma de las series geométricas de razón menor que 1. Hemos visto que, si $|r| < 1$ entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r},$$

por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} - r^0 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{6}$$

Granada, 10 de diciembre de 2010