GEOMETRÍA I. Examen del Tema 1
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2011/12

Nombre:

Razonar todas las respuestas

1. Responder de forma razonada si son ciertas las siguientes afirmaciones:
   (a) Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial V y $\{a_1, \ldots, a_n\}$ números no nulos. Entonces $\{a_1e_1, \ldots, a_ne_n\}$ es base de V.
   (b) Sean $\{v_1, \ldots, v_n\}$ vectores de un espacio vectorial V tal que v_n no es combinación lineal de $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son linealmente independientes.
   (c) Sea V un espacio de dimensión 3 y $\{v_1, v_2\}$ vectores de V. Entonces existe una base de V que contiene a $\{v_1, v_2\}$.
2. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de un espacio vectorial V. Probar que los vectores $\{e_1 + 2e_2, 2e_1 - e_2 + e_4\}$ son linealmente independientes. Ampliar a una base de V. Respecto de esa base, hallar las coordenadas del vector $e_1 + e_2$.
3. En $\mathbb{R}^3$ se considera $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -y + 2z = 0\}$.
   (a) Probar que U es un subespacio vectorial y hallar una base de U.
   (b) Hallar las ecuaciones cartesianas de un subespacio W tal que $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.
4. En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio vectorial $U =< (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0) >$.
   (a) Hallar las ecuaciones cartesianas de U.
   (b) Hallar una base de un subespacio W tal que $\dim(W) = 2$ y $\dim(U \cap W) = 1$.
   (c) Hallar las ecuaciones cartesianas de un subespacio Q tal que $\dim(Q) = 3$ y $\dim(U \cap Q) = 1$.

Soluciones (puede haber diferentes maneras correctas de responder a las preguntas)

1. Responder de forma razonada si son ciertas las siguientes afirmaciones:

   (a) Verdadera. Como el espacio es de dimensión n, basta con probar que son linealmente independientes. Tomamos una combinación lineal de los vectores igualada a 0: $\lambda_1(a_1e_1) + \ldots + \lambda_n(a_na_n) = 0$. Por tanto $(\lambda_1a_1)e_1 + \ldots + (\lambda_na_n)e_n = 0$. Como B es linealmente independiente, los escalares deben ser cero, es decir, $\lambda_ia_i = 0$, para todo i. Como $a_i \neq 0$, entonces $\lambda_i = 0$ para todo i.

   (b) Falsa. En $\mathbb{R}^2$, tomo $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (2,0)$ y $v_3 = (0,1)$. Entonces v_3 no es combinación lineal de v_1 y v_2 ya que una combinación lineal de ambos sería $\lambda(1,0) + \mu(2,0) = (\lambda + 2\mu, 0)$ que nunca puede ser $(0,1)$. Sin embargo $\{v_1, v_2, v_3\}$ no son linealmente independientes ya que v_2 es combinación de los demás, a saber, $v_2 = 2v_1 + 0v_3$.

   (c) Falsa. En $\mathbb{R}^3$, sean $v_1 = (1,0,0)$ y $v_2 = (2,0,0)$, que son linealmente dependientes (de la misma forma que en el apartado anterior). Por tanto nunca pueden pertenecer a una base de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Tomamos una combinación lineal igualada al vector 0: $\lambda(e_1 + 2e_2) + \mu(2e_1 - e_2 + e_4) = 0$. Desarrollando, $(\lambda + 2\mu)e_1 + (2\lambda - \mu)e_2 + \mu e_4 = 0$. Ya que B es linealmente independiente, los escalares son cero, es decir, $\lambda + 2\mu = 0$, $2\lambda - \mu = 0$ y $\mu = 0$. Resolviendo queda $\lambda = \mu = 0$.

   (b) Añadimos al conjunto la base B: $\{e_1 + 2e_2, 2e_1 - e_2 + e_4, e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sabemos que sólo hay que añadir dos vectores más porque el espacio es de dimensión 4.

   Los vectores $\{e_1 + 2e_2, 2e_1 - e_2 + e_4, e_1\}$ son linealmente independientes:

   $$\lambda(e_1 + 2e_2) + \mu(2e_1 - e_2 + e_4) + \delta e_1 = 0.$$

   $$(\lambda + 2\mu + \delta)e_1 + (2\lambda - \mu)e_2 + \mu e_4 = 0.$$

   Luego $\lambda + 2\mu + \delta = 0$, $2\lambda - \mu = 0$ y $\mu = 0$. Resolviendo el sistema, queda $\lambda = \mu = \delta = 0$.

No añadimos el vector e_2 porque evidentemente $e_2 = 1(e_1+2e_2)+0(2e_1-e_2+e_4)-1e_1$. Tomamos ahora e_3 y veamos que $\{e_1+2e_2, 2e_1-e_2+e_4, e_1, e_3\}$ son linealmente independientes:

$$\lambda(e_1 + 2e_2) + \mu(2e_1 - e_2 + e_4) + \delta e_1 + \alpha e_3 = 0.$$

$$(\lambda + 2\mu + \delta)e_1 + (2\lambda - \mu)e_2 + \mu e_4 + \alpha e_3 = 0.$$

Luego $\lambda+2\mu+\delta = 0$, $2\lambda-\mu = 0$, $\mu = 0$ y $\alpha = 0$. Resolviendo el sistema, queda $\lambda = \mu = \delta = \alpha = 0$.

(c) Para calcular las coordenadas, escribimos el vector e_1+e_2 en combinación lineal de la nueva base. Del apartado anterior, usando que B es base y que las coordenadas son únicas, obtenemos el sistema:

$$\lambda + 2\mu + \delta = 1, 2\lambda - \mu = 1, \mu = 0, \alpha = 0.$$

La solución es $\lambda = 1/2$, $\mu = 0$, $\delta = 1/2$ y $\alpha = 0$. Por tanto las coordenadas buscadas son $(1/2, 0, 1/2, 0)$.

(a) i. Sean $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in U$. Hay que probar que $u+v \in U$ y que $\lambda u \in U$. Como ambos vectores están en U, entonces $-y+2z = 0$ y $-y' + 2z' = 0$. Sumando, tenemos $u + v = (x + x', y + y', z + z')$ que estará en U si $-(y + y') + 2(z + z') = 0$. Pero desarrollando, y usando que $u, v \in U$, tenemos

$$-(y + y') + 2(z + z') = (-y + 2z) + (-y' + 2z') = 0 + 0 = 0.$$

Del mismo modo $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ estará en U si $-(\lambda y)+2(\lambda z) = 0$. Ahora,

$$-(\lambda y) + 2(\lambda z) = \lambda(-y + 2z) = \lambda 0 = 0,$$

usando que $u \in U$.

ii. Para hallar una base, sea $(x, y, z) \in U$. Entonces es equivalente a que $y = 2z$, es decir,

$$(x, y, z) = (x, 2z, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 2, 1).$$

Como los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 2, 1)$ están en U (porque satisfacen la propiedad '$-y+2z = 0$'), se ha probado que $U =< (1, 0, 0), (0, 2, 1) >$.

Veamos que son linealmente independientes: $a(1,0,0)+b(0,2,1) = (0,0,0)$. Entonces $a=0$, $2b=0$ y $b=0$, cuya solución es evidentemente $a=b=0$.

(b) Sabemos de teoría que si ampliamos la base de U hasta obtener una base de $\mathbb{R}^3$, que en este caso, dicha base sería de la forma $\{(1,0,0),(0,2,1),v\}$, entonces $W =< v >$ es el subespacio pedido. Luego hay que añadir sólo un vector de forma que los tres sean linealmente independientes. Probamos con $(0,0,1)$: $a(1,0,0)+b(0,2,1)+c(0,0,1) = (0,0,0)$. De aquí se obtiene el sistema $a=0$, $2b=0$ y $b+c=0$, del que se concluye que los tres escalares son 0. Calculamos pues las coordenadas cartesianas de W: $(x,y,z) \in W$ si y sólo si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(x,y,z) = a(0,0,1)$, obteniendo $x=0$, $y=0$ y $z=a$. Substituyendo $a=z$ en las dos primeras ecuaciones, obtenemos $x=0$ e $y=0$. Por tanto, $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, y=0\}$.

3. (a) Un vector $(x,y,z) \in U$ si y sólo si existen $a,b \in \mathbb{R}$ tales que $(x,y,z,t) = a(1,1,0,0)+b(1,1,1,0)$. Igualando, $x=a+b$, $y=a+b$, $z=b$ y $t=0$. Poniendo $b=z$ en las otras tres ecuaciones, tenemos, $x=a+z$, $y=a+z$ y $t=0$. De la primera, $a=x-z$ y sustituyendo en el resto, tenemos, $y=x-z+z$, $t=0$. Por tanto, $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; -x+y=0, t=0\}$.

(b) Tomamos un tercer vector que junto a los de la base de U, sean linealmente independientes, por ejemplo, $(0,0,1,1)$:

$$a(1,1,0,0)+b(1,1,1,0)+c(0,0,1,1) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow a+b=0, a+b=0, b+c=0, c=0.$$

Resolviendo, $a=b=c=0$. Se define $W =< (1,0,0,0),(0,0,1,1) >$, que tiene dimensión 2. Veamos que $\dim(U \cap W) = 1$. Es claro que $< (1,0,0,0) > \subset U \cap W$. Si $dim(U \cap W) = 2$, y usando que $U \cap W \subset U$ y $U \cap W \subset W$, entonces $U \cap W = U = W$. Pero no es cierto que $U = W$, porque $(0,0,1,1) \notin U$. Por tanto, $< (1,0,0,0) >= U \cap W$.

(c) Tomamos otro vector que, junto a $\{(1,0,0,0),(0,0,1,1)\}$ sean linealmente independientes. Basta considerar $(0,0,0,1)$. Entonces los tres son linealmente independientes:

$$a(1,0,0,0)+b(0,0,1,1)+c(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow a = 0, b = 0, b + c = 0.$$

Por tanto, $a = b = c = 0$. Se considera $Q =< (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1) >$, que tiene dimensión 3. De nuevo, $< (1, 0, 0, 0) >\subset U \cap Q$. Usando que $U \cap W \subset U$, entonces $dim(U \cap Q) \leq 2$. Si es 2, entonces $U \cap Q = U$, es decir, $U \subset Q$. Sin embargo el vector $(1, 1, 1, 0)(\in U)$ no se pone en combinación lineal de la base de Q: si fuera así, existirían números a, b, c tales que

$$a = 1, 0 = 1, b = 1, b + c = 1,$$

que no tiene solución.

Finalmente, calculamos las ecuaciones cartesianas de Q: $(x, y, z, t) \in Q$ si existen a, b, c tales que

$$x = a, y = 0, z = b, t = b + c \Rightarrow a = x, b = z.$$

Sustituyendo en las demás, $y = 0$, $t = z + c$. De la última, despejando c y sustituyendo en las demás, queda $y = 0$. Por tanto, $Q = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y = 0\}$.