

Cálculo I

5 de diciembre de 2011

1. Desarrollar uno de los temas siguientes:

- a) Densidad de \mathbb{Q} y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en \mathbb{R} .
- b) Sucesiones de Cauchy, completitud de \mathbb{R} .

2. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, explicando las respuestas:

- a) Todo subconjunto de \mathbb{R} es numerable o denso en \mathbb{R} .
- b) Si A es un conjunto de números reales no vacío y mayorado, existe una sucesión creciente de elementos de A que converge a $\sup A$.
- c) Toda sucesión divergente, o bien diverge negativamente, o bien admite una sucesión parcial que diverge positivamente.

3. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos. Supongamos que A está mayorado y que $\inf B > 0$. Se considera el conjunto

$$C = \left\{ \frac{a}{b} : a \in A, b \in B \right\}$$

Probar que C está mayorado y calcular su supremo.

4. Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1 + 2x_n}{2 + x_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiar la convergencia de las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{\sqrt{n + x_n}\}$.

b) mayorado $x=1$
un n.º de a $x = \frac{a}{c}$, $x < 1$