
EJERCICIOS PARA ENTREGAR. TEMA 1

Conjuntos, aplicaciones y relaciones

Ejercicio 1. Sea A el conjunto de los números racionales positivos, y sean $f, g, h : A \rightarrow A$ las aplicaciones definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}; \quad g(x) = x + 2; \quad h(x) = \frac{1}{x}$$

1. Estudia cuál de estas aplicaciones es inyectiva y/o sobreyectiva.
2. Para las que sean inyectivas da una inversa por la izquierda, y para las que sean sobreyectivas da una inversa por la derecha.
3. Calcula las aplicaciones $f \circ g, g \circ f, f \circ f, f \circ (g \circ h), f \circ (h \circ g)$.

Ejercicio 2. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $S = \{2, 5\}$. En $\mathcal{P}(X)$ definimos la relación:

$$A R_S B \text{ si, y sólo si, } A \Delta B \subseteq S$$

1. Comprueba que R_S es una relación de equivalencia.
2. Calcula las clases de equivalencia de $\emptyset, \{2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$.
3. Comprueba que para cualquier clase de equivalencia hay una biyección entre dicha clase y el conjunto $\mathcal{P}(S)$.
4. Comprueba que hay una biyección entre el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R_S$ y el conjunto $\mathcal{P}(X \setminus S)$.

Ejercicio 3. Sea $X = D(24) \times D(72)$. Consideramos en X el orden producto (los conjuntos $D(24)$ y $D(72)$ están ordenados por divisibilidad). Calcula (cuando existan) cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo y elementos maximales y minimales de cada uno de los siguientes subconjuntos de X :

1. $\{(2, 1), (12, 9), (8, 6), (6, 12), (6, 3), (4, 3)\}$.
2. $\{(x, x) : x \in D(24)\}$ (es decir, $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (8, 8), (12, 12), (24, 24)\}$).
3. $\{(x, \frac{72}{x}) : x \in D(24)\}$.
4. $\{(x, 3x) : x \in D(24)\}$.

Ejercicio 4. Sea $X = D(10)$ e $Y = \mathcal{P}(\{a, b\})$. Consideramos en X el orden dado por la divisibilidad y en Y el orden dado por la inclusión. Dibuja los diagramas de Hasse del conjunto $X \times Y$ con el orden producto y el orden lexicográfico.