Cálculo

1^{o}E Grado en Ingeniería Informática

Primer Parcial (Tipo II)

Curso 2014/2015

1. **(3 puntos)** Se considera la función $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

   a) ¿Existe algún $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?

   b) ¿Es estrictamente monónota la función f?

   c) Calcula la imagen de f.

Solución:

a) Para responder a la pregunta vamos a ver si hay algún punto en el que la recta tangente tenga pendiente cero (así sería horizontal). Es decir, vamos a buscar algún punto en el que la función derivada se anule (la función dada es derivable por ser composición de derivables). Calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2}\,\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{\frac{(1-x)^2+1}{(1-x)^2}}\,\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2+1}\ .$$

Es evidente que la derivada no se anula nunca; por tanto, no existe ningún punto del dominio donde la recta tangente sea horizontal.

b) La derivada de f es positiva (todos sus factores lo son). En consecuencia, la función es estrictamente creciente en $]-\infty,1[$ y también en $]1,+\infty[$.

c) Para calcular la imagen descomponemos el dominio en la unión de $]-\infty,1[$ y $]1,+\infty[$.

$$f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = f(]-\infty,1[)\cup f(]1,+\infty[) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to 1_-} f(x)\right[\cup\left]\lim_{x\to 1_+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$$

Hemos aplicado en cada subintervalo la continuidad y monotonía creciente de la función f. Para terminar, calculamos los límites planteados:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to 1_+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\ .$$

Por tanto, la imagen es $]0,\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2},0[=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$.

2. **(2 puntos)** De todos los rectángulos de perímetro 20, halla las dimensiones de aquél cuya diagonal es mínima.

Solución: Llamemos x e y a los lados del rectángulo dado. Sabemos que su perímetro es 20; esto es: $2x+2y=20 \Leftrightarrow y=10-x$. La diagonal que hay que minimizar se puede interpretar como la hipotenusa del triángulo rectángulo que divide por la mitad al rectángulo. Es claro que esta hipotenusa es $\sqrt{x^2+y^2}$. Por tanto, la función a minimizar es:

$$f(x)=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(10-x)^2}=\sqrt{2x^2-20x+100}$$

Esta función se podría definir en todo $\mathbb{R}$, pero como x e y representan dimensiones, consideramos como dominio de f el intervalo $[0,10]$. Al ser un intervalo compacto, vamos a calcular los puntos críticos en el interior. Para ello calculamos la derivada de f:

$$f'(x)=\frac{4x-20}{2\sqrt{2x^2-20x+100}}=\frac{2x-10}{\sqrt{2x^2-20x+100}}$$

Por tanto, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=5 \in]0,10[$. Para finalizar, evaluamos f en los extremos del intervalo y comparamos con $f(5)$:

$$f(0)=10=f(10)>f(5)=\sqrt{50}$$

Concluimos entonces que el mínimo absoluto de f se alcanza en $x=5$. Así que la solución del problema es que los lados del rectángulo (cuadrado, más bien) sean iguales a 5.

3. **(2.5 puntos)** Prueba que, para todo $x>0$, se verifica la desigualdad:

$$\frac{3}{2}x^2-6\log(x)>\frac{1}{2}\,.$$

Solución: Para comprobar la desigualdad planteada, estudiamos la función siguiente:

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2-6\log(x)-\frac{1}{2}\,,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$$

Tendremos que probar que $f(x)>0\,,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$.

Se trata de una función continua y derivable en su dominio. Calculamos su derivada y puntos críticos:

$$f'(x)=\frac{6}{2}x-\frac{6}{x}=3x-\frac{6}{x}=\frac{3x^2-6}{x}=3\frac{(x^2-2)}{x}=3\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x}$$

Por tanto, $f'(x)=0 \Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Nos quedamos con la solución positiva ($x=\sqrt{2}$).

Estudiamos los intervalos de monotonía determinados por el punto crítico. Esto es:

$$0 < x < \sqrt{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente}$$
$$x > \sqrt{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente}$$

Por tanto, en el punto $x = \sqrt{2}$ se alcanza un mínimo relativo, que, al ser el único punto crítico de f en $\mathbb{R}^+$, se convierte en el mínimo absoluto. Además, $f(\sqrt{2}) = \frac{5}{2} - 3\log(2)$ que es positivo. Por tanto, la imagen de la función verifica:

$$f(x) \geq f(\sqrt{2}) > 0 \,, \ \forall x > 0 \,.$$

Y en consecuencia la desigualdad planteada es cierta.

4. **(2.5 puntos)** Calcula:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 1}{1 + x^2} \right)^{1/\operatorname{sen}^2(x)} .$$

Solución: El límite pedido presenta una indeterminación del tipo "1^∞".

Aplicamos la regla del número e. Esto es,

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 1}{1 + x^2} \right)^{1/\operatorname{sen}^2(x)} = e^L \iff \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 1}{1 + x^2} - 1 \right) = L.$$

Para resolver el límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 1}{1 + x^2} - 1 \right) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 1 - 1 - x^2}{(1 + x^2)\operatorname{sen}^2(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + x^2} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{\operatorname{sen}^2(x)} \end{aligned}$$

Hemos apartado el factor $1/(1 + x^2)$ que no tiende a cero (tiende a 1). Así que nos dedicamos al segundo límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

que presenta una indeterminación del tipo "$0/0$". Aplicamos entonces la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 - x^2}{\operatorname{sen}^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2\cos^2(x) - 2\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

Obsérvese que hemos aplicado la regla de L'Hôpital dos veces consecutivas.

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 1}{1 + x^2} \right)^{1/\operatorname{sen}^2(x)} = e^0 = 1 \,.$$

Granada, 28 de noviembre de 2014