

## LMD, Grupo F

### Curso 2014–2015

Nombre, Apellidos:

DNI:

*El valor total del examen es de 5 puntos. La puntuación de cada pregunta está indicada entre paréntesis antes de su enunciado.*

1. (1.0) Consideramos la función booleana  $f(x, y, z, t) = \sum m(2, 3, 6, 8, 9, 10, 11)$ . Se sabe que el precio de una puerta lógica NOT es de 0.3 euros, el de una puerta OR es de 0.5 euros, y el de una puerta AND es de 0.6 euros. A partir de estos datos, decida si es preferible implementar  $f$  como una suma de productos de literales, ó bien, como un producto de sumas de literales.
2. Utilice los axiomas y propiedades usuales de las álgebras de Boole para probar que:
  - a) (0.3) Si  $a \wedge b = a$ , entonces  $\bar{a} \vee b = 1$ .
  - b) (0.3) Si  $\bar{a} \vee b = 1$ , entonces  $a \wedge b = a$ .
3. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $f(n) = (4 + \sqrt{3})^n + (4 - \sqrt{3})^n + (-1)^n$ .
  - a) (0.8) Obtenga una recurrencia lineal homogénea para  $f(n)$ .
  - b) (0.9) Demuestre que  $f(n)$  es un número natural impar para cada  $n \in \mathbb{N}$ .
4. (0.5+0.3) Se dispone de ocho listas de números  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8$ , ordenadas ascendentemente, cuyas longitudes son 4, 7, 8, 11, 17, 19, 19, 20, respectivamente, las cuales queremos mezclar en una sola lista. Si las listas, tanto las iniciales como las intermedias que se van obteniendo, se van mezclando de dos en dos, aplique el Algoritmo de Huffman para ver de qué forma podemos organizar la mezcla de las listas de modo que el número total de comparaciones, en el peor caso, sea lo más pequeño posible. Indique además cuál es el número total de comparaciones en el peor caso.
5. Se define el producto cartesiano de los grafos  $G_1 = (V_1, L_1)$  y  $G_2 = (V_2, L_2)$ , como un nuevo grafo  $G$ , el cual también se denota por  $G_1 \times G_2$ , de forma que  $V(G) = V_1 \times V_2$  y para  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V(G)$ , éstos son adyacentes en  $G$ , si y sólo si  $u_1 = u_2$  y  $v_1$  es adyacente con  $v_2$  en  $G_2$ , ó bien,  $u_1$  es adyacente con  $u_2$  en  $G_1$ , y  $v_1 = v_2$ . Responda a las siguientes cuestiones, dando una argumentación si la respuesta es afirmativa, ó bien un contraejemplo, si es negativa.
  - a) (0.3) ¿Es el producto cartesiano de dos grafos bipartidos de nuevo un grafo bipartido?
  - b) (0.3) ¿Es el producto cartesiano de dos grafos conexos de nuevo un grafo conexo?
  - c) (0.3) ¿Es el producto cartesiano de dos grafos, cada uno con un camino abierto de Euler, de nuevo un grafo con un camino abierto ó cerrado de Euler?