CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. GRUPO C.

1. Calcula los números reales x que verifican que

$$\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| \geq 3.$$

Solución. La inecuación es equivalente a $|2x-1| \geq 3|x+3|$ (recordando que $x=-3$ no es solución posible ya que estaríamos dividiendo por 0). Si ahora tenemos en cuenta que la definición de valor absoluto depende de que a lo que afecta el valor absoluto sea mayor o menor que 0 tendremos entonces que diferenciar los siguientes casos.

- Si $x < -3$ entonces $x < 1/2$ y la inecuación quedaría

$$-(2x-1) \geq -3(x+3) \Leftrightarrow -2x+1 \geq -3x-9 \Leftrightarrow x \geq -10$$

así que en este caso tenemos la solución $[-10,-3[$.

- Si $-3 < x \leq 1/2$ entonces la inecuación queda

$$-(2x-1) \geq 3(x+3) \Leftrightarrow -2x+1 \geq 3x+9 \Leftrightarrow 5x \leq -8 \Leftrightarrow x \leq \frac{-8}{5}$$

y nos queda como solución $]-3,-8/5]$.

- Finalmente si $x \geq 1/2$ tenemos que la inecuación queda

$$2x-1 \geq 3x+9 \Leftrightarrow x \leq -10$$

que no tiene solución cuando $x \geq 1/2$.

Uniendo los dos conjuntos que nos han salido como soluciones nos queda que el conjunto solución es $[-10,-8/5] \setminus \{-3\}$.

2. Demuestra que para todo natural n se verifica que

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Como consecuencia comprueba que, también para todo natural n, se verifica que

$$(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3.$$

Solución. La primera igualdad la hemos ya en clase. Se puede hacer por inducción pero en este caso también es fácil hacerlo directamente. Si llamamos $S_n = 1+2+\cdots+n = n+\cdots+2+1$, entonces

$$2S_n = \overbrace{(n+1)+\cdots+(n+1)}^{n} = n(n+1)$$

de donde $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

La segunda igualdad sí la vamos a demostrar por inducción. Es evidente que la igualdad es cierta para $n = 1$, ya que en este caso la igualdad queda $1^2 = 1^3$.

Supongamos que, para cierto natural n, se verifica que $(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$ entonces tendremos que

$$(1+2+\cdots+n+(n+1))^2 = ((1+2+\cdots+n)+(n+1))^2 =$$

$$(1+2+\cdots+n)^2+(n+1)^2+2(1+2+\cdots+n)(n+1).$$

El primer sumando, utilizando la hipótesis de inducción, queda $(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$. El tercer sumando, utilizando lo que hemos demostrado antes, nos quedará $2(1+2+\cdots+n)(n+1) = 2\frac{n(n+1)}{2}(n+1) = n(n+1)^2$ y entonces tenemos que

$$(1+2+\cdots+n+(n+1))^2 = 1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^2+n(n+1)^2 =$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^2(1+n) = 1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3,$$

que era lo que queríamos demostrar.

3. Demuestra que, si n es un número impar, entonces el número 7^n+1 es divisible por 8.

   Solución Otra propiedad relativa a los naturales. En este caso lo que ocurre es que se pide demostrar una propiedad para los impares, pero se puede hacer también una demostración por inducción. Se me ocurre hacerlo de dos formas, ambas muy parecidas. Veamos,

   (a) El problema es equivalente a demostrar que si $n \in \mathbb{N}$ entonces el número $7^{2n-1}+1$ es divisible por 8.

   (b) También se puede razonar de la siguiente forma: demostrar la propiedad que se pide en el enunciado para $n = 1$ y, supuesto que se verifica para cierto natural n, demostrar que se verifica también para $n+2$.

   En cualquier caso los cálculos son muy parecidos. Veamos la primera forma propuesta.

   La propiedad es claramente cierta para $n = 1$ ya que en ese caso $7^{2n-1}+1 = 7^{2-1}+1 = 8$ que es divisible por 8. Supongamos ahora que, para cierto natural n, se verifica que $7^{2n-1}+1$ es divisible por 8 y veamos si la propiedad es también cierta para $n+1$. En este caso habría que comprobar que el número $7^{2(n+1)-1}+1$ es divisible por 8. Veamos que

$$7^{2(n+1)-1}+1 = 7^{2n+1}+1 = 7^{(2n-1)+2}+1 = 7^{2n-1}7^2-1 = 49\cdot 7^{2n-1}+1 =$$

$$49\cdot 7^{2n-1}+49-49+1 = 49(7^{2n-1}+1)-48.$$

   Si ahora nos damos cuenta que el primer sumando es divisible por 8 según habíamos supuesto y el segundo sumando también lo es, entonces la suma es divisible por 8 y hemos acabado.

4. Sea $a > 0$. Se define la sucesión $x_1 = a$ y $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula su límite.

   Solución. Al ser una sucesión definida por recurrencia parece oportuno, para demostrar que es convergente, demostrar que es monótona y acotada. Para la monotonía vamos a ver qué relación de orden existe entre los dos primeros términos de la sucesión. Tenemos que $x_1 = a$ y $x_2 = \sqrt{a+a} = \sqrt{2a}$. La relación de orden entre x_1 y x_2 depende entonces del valor de a. Esta claro que $x_1 = x_2 \Leftrightarrow a = 2$ ya que $a = 0$ no está permitido. Así que vamos a estudiar los tres casos separadamente.

   - El primer caso en tratar, por trivial, es si $a = 2$, entonces se tiene que $x_n = 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$ y la sucesión es, claramente, convergente a 2.
   - Si $a < 2$ entonces $a^2 < 2a \Rightarrow a < \sqrt{2a}$, es decir, $x_1 < x_2$. Supongamos ahora que, para cierto natural n, se verifica que $x_n < x_{n+1}$ entonces $a+x_n < a+x_{n+1}$ y también $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} < \sqrt{a+x_{n+1}} = x_{n+2}$ y la sucesión es creciente. Al ser creciente, para ver que está acotada, solamente tendremos que demostrar que está mayorada ya que minorada lo está claramente. Para encontrar una cota superior vamos a suponer, por un momento, que efectivamente la sucesión está mayorada. Entonces sabemos que es convergente pero además sabemos que el límite, al que llamaremos L, es el supremo de los términos de la sucesión y, por tanto, un mayorante de ésta (de hecho, el mínimo de los mayorantes). Si esto ocurre se tiene que la sucesión $\{x_{n+1}\}$ también converge a L pero, por otro lado, $\{x_{n+1}\} = \{\sqrt{a+x_n}\}$ debe converger a $\sqrt{a+L}$. Así $L = \sqrt{a+L}$ y, elevando al cuadrado, nos queda $L^2 = a+L$, ecuación que tiene como soluciones $L = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ y $L = \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$. Al ser la sucesión de términos positivos $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$, que es un número negativo, no puede ser el límite por lo que $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ es el límite.

     Bueno, veamos que efectivamente la sucesión está mayorada por $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Lo haremos por inducción. Se tiene que $x_1 = a$. Si $a < 1/2$ entonces $a < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. En otro caso se tiene que

     $$x_1 = a < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} = x_2 \Leftrightarrow 2a-1 < \sqrt{1+4a} \Leftrightarrow$$

     $$4a^2+1-4a < 1+4a \Leftrightarrow 4a^2 < 8a \Leftrightarrow a < 2$$

     como efectivamente ocurre.

     Supongamos ahora que, para cierto natural n, se tiene que $x_n < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, entonces $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} < \sqrt{a+\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}$. Si ahora demostráramos que $\sqrt{a+\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}} \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ ya habríamos terminado la demostración de la acotación ya que habríamos demostrado que $x_{n+1} < \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ que era lo que queríamos. El caso es que al intentar comprobar que

     $$\sqrt{a+\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}} \leq \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

realmente lo que ocurre es que los dos números son iguales. Veámoslo.

$$\sqrt{a+\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\Leftrightarrow$$

$$a+\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}=\frac{1+1+4a+2\sqrt{1+4a}}{4},$$

igualdad que es facílmente comprobable.

Ya hemos visto que está mayorada y entonces es convergente. El límite es, ya lo hemos hecho antes, el número $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Hay que notar que los cálculos se simplifican si lo que demostramos es que $x_n<2\ \ \forall n\in\mathbb{N}$, pero hay que caer en probar con 2.

- Si $a>2$ entonces lo que ocurre es que la sucesión es decreciente y converge también al número $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. El desarrollo es totalmente análogo, solamente hay que cambiar las desigualdades correspondientes.

Resumiendo la sucesión siempre converge al número $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ (en el caso a=2 también es cierto).

5. Calcula el límite de la sucesión

$$\{x_n\}=\left\{\frac{\frac{n}{1}+\frac{n-1}{2}+\cdots+\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}}{\log(n!)}\right\}.$$

Solución. En este caso estamos ante una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Además el caso de que en el numerador haya una suma con un número de sumandos que depende de n hace que parezca conveniente aplicar el criterio de Stolz. Si llamamos $a_n\frac{n}{1}+\frac{n-1}{2}+\cdots+\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}$ y $b_n=\log(n!)$ tenemos que

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{(\frac{n+1}{1}+\frac{n}{2}+\cdots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1})-(\frac{n}{1}+\frac{n-1}{2}+\cdots+\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n})}{\log((n+1)!)-\log(n!)}=$$

$$\frac{(\frac{n+1}{1}-\frac{n}{1})+(\frac{n}{2}-\frac{n-1}{2})+\cdots+(\frac{2}{n}-\frac{1}{n})+\frac{1}{n+1}}{\log(\frac{(n+1)!}{n!})}=\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{\log(n+1)},$$

y esta sucesión debe sernos familiar. Si aplicamos otra vez Stolz con $a_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$ y $b_n=\log(n+1)$ tenemos que

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})}{\log(n+2)-\log(n+1)}=$$

$$\frac{1}{(n+2)\log(\frac{n+2}{n+1})}=\frac{1}{\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}.$$

Pero la sucesión $\left\{ \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \right\}$ presenta una indeterminación de la forma 1^∞ así que aplicando la regla del número e tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \right\} = e^L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\{ (n+2)\left(\frac{n+2}{n+1}-1\right) \right\} = L$$

y esta última sucesión tiene límite $\lim_{n\to\infty} \left\{ (n+2)\left(\frac{n+2}{n+1}-1\right) \right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n+2}{n+1} \right\} = 1$ y entonces el límite que se busca es 1.

6. Estudia si es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}(n+1)n}$. En caso de que sea convergente calcula su suma.

Solución. Vamos a aplicar el criterio de comparación para ver si es convergente. Para ver con qué sucesión hay que comparar notemos que en el numerador, 3^n+n^2+n, aparece una función exponencial de base 3 sumada con un polinomio. Sabemos que en ese caso la importancia radica en la exponencial. Si ahora la comparamos con el denominador, que es un producto de otra exponencial de base 3 con un polinomio (el mismo que en el numerador, aunque eso ahora no importe) y comparando los exponentes de las exponenciales nos sugiere comparar con la sucesión $\dfrac{1}{3(n^2+n)}$. Veamos qué ocurre.

Aplicando el criterio del cociente al término general de la serie, al que llamaremos x_n, obtenemos

$$\frac{\frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}(n+1)n}}{\frac{1}{3(n^2+n)}} = \frac{(3^n+n^2+n)3(n^2+n)}{3^{n+1}(n^2+n)} = \frac{3^{n+1}+3n^2+3n}{3^{n+1}} = 1+\frac{n^2}{3^n}+\frac{n}{3^n}$$

y el segundo y tercer sumando tienen límite 1 (aplíquese el criterio de Stolz), así que el límite del cociente es 1. Por tanto la serie que estamos estudiando es convergente si, y sólo si, lo es la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3(n^3+n)}$ y esta serie es convergente, para comprobarlo basta con notar que $\dfrac{1}{3(n^2+n)} < \dfrac{1}{3n^2}$ y recordar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3n^2}$ es convergente ya que es un múltiplo de la serie armónica de razón 2, que es convergente.

Para calcular la suma de la serie veamos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+n^2+n}{3^{n+1}(n+1)n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}(n+1)n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n}{3^{n+1}(n+1)n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3(n+1)n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}}.$$

La primera serie es telescópica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3(n+1)n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

La segunda serie es una serie geométrica, que ya hemos estudiado varias veces. En este caso sabemos que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, con lo que nuestra serie suma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n^2 + n}{3^{n+1}(n+1)n} = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6}.$$

Granada, 29 de noviembre de 2012