

Doble Grado en Informática y Matemáticas

1. **Tema teórico:** Derivabilidad de la función suma de una serie de potencias. (Antecedentes (1 punto), Enunciado (0.5 puntos) Demostración, incluido lema precedente, (1.5 puntos). Aplicaciones (1 punto).)
2. **Ejercicio 1** (3 puntos) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función definida para todo $x \in [0, 1]$ por:

$$f_n(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n.$$

¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0, 1]$? ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho, 1]$, donde $\rho \in]0, 1[$?

3. Ejercicio 2 (3 puntos)

- Estudia la derivabilidad de la función de Riemann $\xi :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida para todo $x > 1$ por: $\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Justifica también que $\lim_{x \rightarrow 1} \xi(x) = +\infty$.