TOPOLOGÍA I

26 de enero de 2015

1. Se considera $(\mathbb{R} \times \{2,6\}, \mathcal{T})$, donde $\mathcal{T}$ es la topología con base
$$\mathcal{B} = \{]a,b[\times\{2,6\} : a < b \in \mathbb{R}\}.$$
   (a) Estudiar si los conjuntos
$$A = [2,6] \times \{2\} \cup]2,6[\times\{6\}, \qquad B =]2,6[\times\{2\} \cup [2,6] \times \{6\}$$
   y $A \cap B$ son compactos.

   (b) Calcular las componentes conexas de $\mathbb{R} \times \{2,6\} - \{(2,6),(6,2)\}$.

2. En $\mathbb{R}^2$ y $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ se define la relación de equivalencia
$$xRy \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 / x = \lambda y.$$
   (a) Probar que $(X/R, \mathcal{T}_{uX}/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1})$.

   (b) Estudiar si $(\mathbb{R}^2/R, \mathcal{T}_u/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1 \cup \{(0,0)\}, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1\cup\{(0,0)\}})$.

3. Sea $Y' = Y \cup \{p\}$ con $(Y,\mathcal{T})$ espacio topológico Hausdorff, no compacto, $p \notin Y$ y la topología
$$\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \{O' \subset Y' : Y' - O' \textit{ es compacto en } (Y,\mathcal{T})\}.$$
   (a) Comparar $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'_Y$.

   (b) Probar que $(Y',\mathcal{T}')$ es compacto.

   (c) Razonar si $(Y',\mathcal{T}')$ es conexo.

   (d) Calcular la adherencia de Y en $(Y',\mathcal{T}')$.

Puntuación: 1º) y 2º) 3 puntos, 3º) 4 puntos.