Cálculo

1ºA Grado en Ingeniería Informática

Primer Parcial (I)
Curso 2013/2014

1. **(2.5 puntos)** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$x_1 = 0$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x_n}\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.

b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \sqrt{2+1/2} = \sqrt{5/2} > x_1 = 1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 < x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n < x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n < x_{n+1} \ \Rightarrow\ 2+x_n < 2+x_{n+1} \ \Rightarrow\ \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+x_{n+1}}$$
$$\Rightarrow\ x_{n+1} < x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

b) Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por el $x_1 = 1/2$. Veamos que está acotada superiormente por 2. Esto es, que $x_n \leq 2\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 1 \leq 2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 2$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 2$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \leq 2 \ \Rightarrow\ 2+x_n \leq 4 \ \Rightarrow\ \sqrt{2+x_n} \leq \sqrt{4}$$
$$\Rightarrow\ x_{n+1} \leq 2$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

c) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \sqrt{2+x}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{2+x} \Rightarrow x^2 = 2+x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 2$ y $x = -1$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que $1/2$. El motivo es que $1/2 \leq x_n \leq 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 2$.

d) Observamos que en el cálculo de $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n^2 - 3\right)^{\frac{1}{2x_n-4}}$ tenemos una indeterminación del tipo "1^∞", ya que la base tiende a 1 y el exponente a infinito. Entonces, aplicando el criterio del número e:

$$\frac{1}{2x_n - 4}\left[x_n^2 - 3 - 1\right] = \frac{x_n^2 - 4}{2x_n - 4} = \frac{(x_n-2)(x_n+2)}{2(x_n-2)} = \frac{x_n+2}{2} \to \frac{4}{2} = 2$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n^2 - 3\right)^{\frac{1}{2x_n-4}} = e^2$.

2. **(2.5 puntos)** Calcula el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{\frac{1! + 3! + 5! \cdots (2n-1)!}{(2n-1)!}\right\}$$

3. **(2.5 puntos)** Calcula el límite de la sigiente sucesión:

$$\left\{n^2 \log\left(\frac{n^3 + 7n}{n^3 + 4}\right)\right\}$$

Como consecuencia, analiza el carácter de la serie

$$\sum \log\left(\frac{n^3 + 7n}{n^3 + 4}\right)$$

4. **(2.5 puntos)** Estudia la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n} - \frac{2^n}{3^{n+1}}$. Si es convergente, calcula su suma.

Granada, 27 de noviembre de 2013