
ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Convocatoria Febrero 2013

(29/01/2013)

Ejercicio 1. Sea $V = \mathbb{Q}^3$, y $v = (x_1, x_2, x_3)$ un vector de V para el que $x_1 \neq x_2$. ¿Existe alguna base B de V en la que el vector v tuviera coordenadas $(1, 0, 0)$?

- a) Sí, pues v no es el vector nulo.
- b) Los datos del enunciado no permiten afirmar si es posible o no.
- c) Depende de lo que valga x_3 .
- d) No, pues v podría ser el vector nulo.

Ejercicio 2. Sea $A \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$ una matriz que verifica la ecuación $A^2 + 2A + \text{Id}_3 = 0$. Entonces, podemos asegurar que:

- a) El determinante de A vale 0.
- b) A es regular.
- c) A es diagonalizable.
- d) A es simétrica.

Ejercicio 3. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ definida por $f(x, y, z, t) = (x + y, x + z, x + t)$, se tiene que:

- a) $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ y $\dim(\text{N}(f)) = 2$.
- b) $\dim(\text{Im}(f)) = 3$ y $\dim(\text{N}(f)) = 0$.
- c) $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ y $\dim(\text{N}(f)) = 1$.
- d) $\dim(\text{Im}(f)) = 3$ y $\dim(\text{N}(f)) = 1$.

Ejercicio 4. El resto de dividir $x^{137} + x + 1$ entre $x + 5$ en $\mathbb{Z}_7[x]$ es:

- a) 6.
- b) $x + 4$.
- c) 3.
- d) 0.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x, y, z) = \left(2x + y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2z, x + y + 5z \right)$$

Sean $B_1 = \{(1, -1, 1), (2, -2, 1), (1, 1, -1)\}$ y $B_2 = \{(-1, 0, 0), (6, 1, 2), (8, 0, -1)\}$. Entonces la matriz de f en las bases B_1 y B_2 es:

- a) No tiene sentido la pregunta, pues B_2 no es una base de \mathbb{Q}^3 .

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

c) $\begin{pmatrix} 9 & 12 & 11 \\ \frac{7}{4} & \frac{11}{4} & \frac{7}{2} \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal cuyo núcleo es el subespacio de \mathbb{R}^3 de ecuación $x + y = 0$, y tal que $f(1, 0, 1) = (1, 1)$. Entonces:

- a) $f(x, y, z) = (x + y, z)$.
- b) $f(x, y, z) = (x + y, x + y)$.
- c) Los datos que nos dan no son suficientes para determinar la aplicación lineal f .
- d) $f(x, y, z) = (x + y, -x - y)$.

Ejercicio 7. ¿Cuál de los siguientes objetos es un cuerpo con 16 elementos?

- a) \mathbb{Q} .
- b) \mathbb{Z}_{16} .
- c) $\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x^2+1}$.
- d) $\mathbb{Z}_2[x]_{x^4+x+1}$.

Ejercicio 8. Sea $q(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Entonces:

- a) $q(x)$ tiene raíces, y por tanto es reducible.
- b) $q(x)$ es irreducible por el criterio de Eisenstein ($p = 2$).
- c) $q(x)$ no tiene raíces pero es reducible.
- d) $q(x)$ no tiene raíces, luego es irreducible.

Ejercicio 9. Dada la ecuación en $\mathbb{Z}_7[x]$

$$(x^2 + 2x + 1) \cdot a(x) + (x^2 + 3x + 2) \cdot b(x) = x^3$$

- a) Tiene una única solución.
- b) No tiene solución.
- c) Tiene infinitas soluciones.
- d) Tiene siete soluciones.

Ejercicio 10. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. En X definimos la relación

$$xRy \text{ si, y sólo si, } x + 2y \text{ es múltiplo de 3.}$$

Entonces:

- a) R es una relación de equivalencia.
- b) R no es reflexiva.
- c) R no es simétrica.
- d) R no es transitiva.

Ejercicio 11. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_5)$. El determinante de A vale:

- a) 1.
- b) 4.
- c) 0.
- d) 3.

Ejercicio 12. Sean:

$$U = \left\{ (x, y, z, t) \in (\mathbb{Z}_5)^4 : \begin{matrix} 2x + 3y + 4z + t = 0 \\ x + 4y + 2z + 3t = 0 \end{matrix} \right\}; \quad W = \{(x, y, z, t) \in (\mathbb{Z}_5)^4 : x + y + z + t = 0\}.$$

Entonces una base de $U \cap W$ es:

- a) $\{(2, 3, 4, 1)\}$.
- b) $\{(1, 3, 1, 0), (3, 1, 0, 1)\}$.
- c) $\{(2, 3, 4, 1), (1, 4, 2, 3)\}$.
- d) $\{(1, 3, 0, 1)\}$.

Ejercicio 13. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$. Entonces:

- a) A tiene tres valores propios distintos y no es diagonalizable.
- b) A tiene dos valores propios distintos y no es diagonalizable.
- c) A tiene dos valores propios distintos y es diagonalizable.
- d) A tiene tres valores propios distintos y es diagonalizable.

Ejercicio 14. ¿Cuál de las siguientes matrices, con coeficientes en \mathbb{Z}_2 , es diagonalizable?

- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ la aplicación dada por $f(m, n) = m - n$. Entonces:

- a) f es biyectiva.
- b) f es inyectiva pero no sobreyectiva.
- c) f es sobreyectiva pero no inyectiva.
- d) f no define una aplicación.

Ejercicio 16. En \mathbb{Z}_{430} la ecuación $9x = 83^{-1}$

- a) $x = 57$ es solución.

- b) Tiene a $x = 123$ como solución.
- c) No tiene solución, pues \mathbb{Z}_{430} no es un cuerpo.
- d) $x = 293$ es la solución.

Ejercicio 17. El sistema de congruencias

$$\begin{array}{rcll} x - 2 & \equiv & 1 & \text{mód } 2 \\ 2x & \equiv & 10 & \text{mód } 12 \\ 15x & \equiv & 3 & \text{mód } 36 \\ x & \equiv & 2 & \text{mód } 5 \end{array}$$

- a) Tiene 3 soluciones entre 10 y 140.
- b) Tiene 2 soluciones entre 0 y 60.
- c) No tiene solución.
- d) Tiene 5 soluciones entre 10 y 140.

Ejercicio 18. Sea $V = (\mathbb{Z}_5)^3$, y sea U el subespacio de V generado por los vectores $(1, 3, 2)$ y $(3, 4, 1)$. ¿Para cuál de los siguientes subespacios $W \subseteq V$ se verifica que $V = U \oplus W$?

- a) Para W el subespacio de ecuación $2x + 3y + z = 0$.
- b) Para W el subespacio generado por $(1, 1, 1)$.
- c) Para W el subespacio de ecuación $x + y + 3z = 0$.
- d) Para W el subespacio generado por $(2, 1, 1)$.

Ejercicio 19. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $18x + 28y = 66$ en las que x e y sean ambos números naturales?

- a) 2.
- b) Infinitas.
- c) 1.
- d) 0.

Ejercicio 20. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en \mathbb{Z}_5

$$\begin{cases} 2x + y + 3z + 4t = 3 \\ 4x + 3y + z + 2t = 1 \\ 4x + 4y + z + t = 1 \end{cases}$$

- a) Tiene una única solución.
- b) Tiene 5 soluciones distintas.
- c) Tiene 25 soluciones distintas.
- d) Tiene cero soluciones.