# Cálculo
# 1ºE Grado en Ingeniería Informática
# Primer Parcial (Tipo II)
# Curso 2015/2016

1. **(3 puntos)** Calcula:

   *a*) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ,

   *b*) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\frac{4e^{x}+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$ .

   **Solución:**

   *a*) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo "0/0". Parta resolver dicha indeterminación aplicamos la regla de L'Hôpital.

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2+1}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+1}=1\ .$$

   Por lo tanto, el límite pedido presenta una indeterminación del tipo "$1^\infty$".

   Aplicamos ahora la regla del número $e$. Esto es, estudiamos el siguiente límite:

   $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan(x)}{x}\right)^{1/x^2}=e^{L}\iff \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\arctan(x)}{x}-1\right]=L.$$

   Para resolver el límite

   $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\arctan(x)}{x}-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)-x}{x^3}$$

   aplicamos la regla de L'Hôpital, ya que que presenta una indeterminación del tipo "0/0". Nos queda entonces:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-(1+x^2)}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3(1+x^2)}=-\frac{1}{3}$$

   Por tanto, el límite que nos pedían es:

   $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan(x)}{x}\right)^{1/x^2}=e^{-1/3}\ .$$

*b*) En este límite se presenta una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". La regla de L'Hôpital, en este caso, complica aún más los cálculos (podéis comprobarlo); así que para resolverlo dividimos numerador y denominador por la función $e^{2x}$ y nos queda:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4e^x+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\frac{e^x}{e^{2x}}+\frac{e^{-x}}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x}}{e^{2x}}+\frac{e^{-2x}}{e^{2x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{3x}}}{1+\frac{1}{e^{4x}}} = \frac{0}{1} = 0$$

2. **(2 puntos)** Calcula el número de soluciones de la ecuación: $\log(x+1)+5 = x$.

**Solución:** Para calcular el número de soluciones de la ecuación planteada, lo que vamos a hacer es determinar el número de ceros de la función $f\colon ]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$, definida como

$$f(x) = \log(x+1)+5-x\,.$$

Esta función es continua y derivable en todo su dominio. Vamos a calcular los límites en los extremos del dominio para ver si de esa forma el teorema de Bolzano nos puede garantizar al menos un cero:

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \log(x+1)+5-x = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(x+1)+5-x = -\infty$$

Por ahora, al no haber cambio de signo, no tenemos garantizado ningún cero. Comenzamos, entonces, el análisis de la función. Vamos a buscar posibles extremos relativos calculando sus puntos críticos. Para ello, derivamos $f$.

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}-1 = \frac{1-x-1}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Calculemos los intervalos de monotonía para decidir si el punto $x = 0$ es punto de extremo relativo o no:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow x+1 > 0 \text{ y}, -x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente}$$
$$x > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \text{ y}, -x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente}$$

Se deduce entonces que en el punto $x = 0$ se alcanza un máximo relativo y, al ser el único punto crítico de la función, es el punto de máximo absoluto, con valor $f(0) = 5 > 0$.

Por tanto, la función tiene dos ceros, uno negativo (la función pasa de ser negativa a positiva en $]-\infty,0]$), y otro positivo (la función pasa de ser positiva a negativa en $[0,+\infty[$). En consecuencia, la ecuación planteada tiene dos soluciones.

3. **(2 puntos)** Calcula la imagen de la función $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \frac{e^{|x|}}{x}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}^*\ .$$

**Solución:** Para calcular la imagen de esta función nos vamos a apoyar en que es impar ($f(-x) = -f(x)$), así que calcularemos la imagen de $f$ sobre los positivos. De todas formas, la función dada se puede escribir así: $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^{|x|}}{x} = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & ,\ \text{si x} > 0 \\ \frac{e^{-x}}{x} & ,\ \text{si x} < 0 \end{cases}$$

Esta función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}^*$, y al usar su simetría impar y ya que:

$$f(\mathbb{R}^*) = f(]-\infty, 0[) \cup f(]0, +\infty[)\ ,$$

si calculamos solo $f(]0, +\infty[)$, podremos calcular toda la imagen.

Comenzamos el estudio de la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x x - e^x}{x^2} & ,\ \text{si x} > 0 \\ \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} & ,\ \text{si x} < 0 \end{cases}$$

Vamos a calcular los posibles puntos críticos, pero solamente en $\mathbb{R}^+$.

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \iff x = 1$$

Observemos que si hiciéramos lo mismo en $\mathbb{R}^-$, obtendríamos como punto crítico negativo el punto $x = -1$. Calculemos los intervalos de monotonía para decidir si el punto $x = 1$ es punto de extremo relativo o no:

$$0 < x < 1 \Rightarrow\ x - 1 < 0\ \Rightarrow\ f'(x) < 0 \Rightarrow\ f\ \text{ es estrictamente decreciente}$$
$$x > 1 \Rightarrow\ x - 1 > 0\ \Rightarrow\ f'(x) > 0 \Rightarrow\ f\ \text{ es estrictamente creciente}$$

Se deduce entonces que en el punto $x = 1$ se alcanza un mínimo relativo, con valor $f(1) = e$. Además, los límites de $f$ en los extremos de $\mathbb{R}^+$ son:

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Por tanto,

$$f(]0,+\infty[)) = f(]0,1]) \cup f([1,+\infty[) = [f(1), \lim_{x\to 0_+} f(x)[\cup[f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x)[$$
$$= [e,+\infty[\cup[e,+\infty[= [e,+\infty[$$

Obsérvese que hemos empleado la continuidad y la monotonía de $f$ en cada intervalo para calcular su imagen. Utilizando ahora la simetría impar, concluimos:

$$f(\mathbb{R}^*) = f(]-\infty,0[) \cup f(]0,+\infty[) = ]-\infty,-e] \cup [e,+\infty[\ .$$

4. **(1 punto)** De todos los rectángulos paralelos a los ejes e inscritos en el triángulo rectángulo de vértices (0,0), (1,2) y (1,0), determina el de área máxima.

   **Solución:** Llamemos $(x,y)$ al vértice del rectángulo inscrito en el triángulo dado que se apoya en la hipotenusa. Observemos que dicha hipotenusa es el segmento de la recta $y = 2x$ que empieza en $(0,0)$ y acaba en $(1,2)$. Sabemos entonces que $y = 2x$ y que las dimensiones del rectángulo inscrito y cuya área hay que maximizar son, altura= $y = 2x$, y base= $1-x$. Por tanto, la función a maximizar es: $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (1-x)2x = 2x - 2x^2\ .$$

   Esta función (un polinomio de grado 2) es derivable. Buscamos posibles puntos de extremos en $]0,1[$. Para ello, calculamos puntos críticos:

$$f'(x) = 2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$$

   Para calcular el máximo absoluto, al ser el dominio un intervalo compacto, sólo nos queda evaluar la función:

$$f(0) = 0 = f(1) < f(1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$$

   Por tanto el rectángulo inscrito que tiene área máxima $1/2$ es el definido por los vértices $(1/2,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ y $(1/2,0)$.

5. **(2 puntos)** El polinomio de Taylor de orden 3 centrado en el origen de una función dada f es:

$$4 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Calcula el polinomio de Taylor del mismo orden y centro de la función $g(x) = (f(x)-1)^3$.

**Solución:**

El enunciado del problema nos permite asegurar que:

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 4-x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

Igualando coeficientes deducimos que:

$$f(0)=4\ ,f'(0)=-1\ ,f''(0)=-1\ ,f'''(0)=1$$

Para calcular el polinomio de Taylor de la función g en $a=0$ de orden 3 tenemos que calcular las derivadas sucesivas en el cero hasta la de orden 3. Es decir,

$$\begin{aligned}
g(x) &= (f(x)-1)^3 \Rightarrow g(0) = (4-1)^3 = 27\\
g'(x) &= 3(f(x)-1)^2 f'(x) \Rightarrow g'(0) = -27\\
g''(x) &= 6(f(x)-1)(f'(x))^2+3(f(x)-1)^2 f''(x) \Rightarrow g''(0) = 18-27=-9\\
g'''(x) &= 6f'(x)(f'(x))^2+12(f(x)-1)f'(x)f''(x)+6(f(x)-1)f'(x)f''(x)+3(f(x)-1)^2 f'''(x)\\
&\Rightarrow g'''(0) = -6+36+18+27 = 75
\end{aligned}$$

Entonces, el polinomio de Taylor pedido es:

$$P_3(x) = g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\frac{g'''(0)}{3!}x^3 = 27-27x-\frac{9}{2}x^2+\frac{75}{6}x^3 = 27-27x-\frac{9}{2}x^2+\frac{25}{2}x^3$$

*Granada, 30 de noviembre de 2015*