

## ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

Convocatoria Febrero 2011

(01/02/2011)

Alumno: \_\_\_\_\_ Grupo: \_\_\_\_\_ DNI: \_\_\_\_\_

**Ejercicio 1.** Sea  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  y  $P = \{2, 3, 5, 7\}$ . En  $\mathcal{P}(X)$  definimos la relación de equivalencia

$$A \sim B \text{ si, y sólo si, } A \setminus P = B \setminus P$$

Entonces el conjunto cociente  $\mathcal{P}(X)/\sim$  tiene cardinal

- (a) 64.
- (b) 4.
- (c) 16.
- (d) 10.

Justifica la respuesta.

**Ejercicio 2.**

1. Resuelve el siguiente sistema de congruencias en  $\mathbb{Z}$

$$\left. \begin{array}{l} 5x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \\ 4x \equiv 6 \pmod{9} \end{array} \right\}$$

2. Calcula, si existe, el inverso para el producto de 295 en  $\mathbb{Z}_{1274}$ .

**Ejercicio 3.** Resuelve en  $\mathbb{Z}_5[x]$  la ecuación

$$(x^2 + 1) \cdot u(x) + (3x + 2) \cdot v(x) = x + 1$$

**Ejercicio 4.** Sean  $U$  el subespacio de  $(\mathbb{Z}_7)^4$  generado por los vectores  $u_1 = (3, 5, 2, 3)$ ,  $u_2 = (1, 6, 3, 4)$  y  $u_3 = (6, 4, 4, 4)$ ; y sea  $W$  el subespacio dado por las ecuaciones  $\begin{cases} 2x + y + 5z + 3t = 0 \\ x + 4y + 6z + 5t = 0 \end{cases}$ .

Entonces una base de  $U \cap W$  es:

- a)  $\{(5, 2, 1, 6)\}$ .
- b)  $\{(6, 1, 1, 1)\}$ .
- c)  $\{(5, 2, 1, 6), (6, 1, 1, 1)\}$ .
- d)  $\{(1, 2, 1, 4), (1, 1, 1, 2)\}$ .

Justifica la respuesta.

**Ejercicio 5.** Sea el espacio vectorial  $V = (\mathbb{Z}_5)^3$  y sea  $U$  el subespacio vectorial de  $V$  generado por  $(1, 3, 2)$ ,  $(2, 1, 1)$ .

¿Para cuál de los siguientes subespacios vectoriales  $W$  de  $V$  se verifica que  $V = U \oplus W$ ?

a)  $W = \langle (3, 4, 3) \rangle$ .

b)  $W = \langle (2, 1, 3), (3, 4, 2) \rangle$ .

c)  $W = \langle (2, 3, 1), (4, 1, 2) \rangle$ .

d)  $W = \left\{ (x, y, z) \in V : \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ x + 4z = 0 \end{cases} \right\}$ .

Justifica la respuesta.

**Ejercicio 6.** Da una aplicación lineal  $f : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$  que verifique que el vector  $(1, 2, -1)$  pertenezca al núcleo de  $f$ , que  $f(1, -1, 0) = (3, 1, 2)$  y que  $\text{Im}(f)$  sea el subespacio de ecuación  $x - y - z = 0$ .

Calcula la matriz de  $f$  en la base  $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

**Ejercicio 7.** Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en  $\mathbb{Z}_5$ :

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ x + 2y + az = 4 \\ 3x + (a+2)y + 2z = 2 \end{cases}$$

Discútelo según el valor del parámetro  $a$ .

Si para  $a = 4$  es compatible, resuélvelo.

**Ejercicio 8.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$ . Estudia si  $A$  es diagonalizable, y en caso afirmativo, calcula una matriz regular  $P$  y una matriz diagonal  $D$  tal que  $P \cdot D \cdot P^{-1}$  sea igual a  $A$ .