Cálculo
1ºG Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial
Curso 2016/2017

1. **(1 punto)** Calcula los números reales que satisfacen la siguiente inecuación:

$$|x+2| < |x-1|$$

Solución: Elevamos al cuadrado los dos miembros de la inecuación:

$$|x+2| < |x-1| \Leftrightarrow \ |x+2|^2 < |x-1|^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 < (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+4 < x^2-2x+1 \Leftrightarrow 6x < -3 \Leftrightarrow x < -1/2$$

El intervalo solución es $]-\infty, -1/2[$.

2. **(4 puntos)** Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x+\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$,

b) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x^2 \left(\log(2x^2)-\log(2x^2+4)\right)$.

Solución:

a) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que, evidentemente, tiende a 1, cuando la variable tiende a cero. Mientras que la expresión que aparece en el exponente tiende a ∞. En consecuencia, el límite pedido presenta una indeterminación del tipo "1^∞".

Aplicamos ahora la regla del número e. Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x+\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}} = e^L \iff \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{e^x+\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}-1\right] = L.$$

Para resolver este límite, vamos a descomponer la expresión de la siguiente forma:

$$\frac{1}{x}\left[\frac{e^x+\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}-1\right] = \frac{1}{1+x^2}\left[\frac{e^x+\operatorname{sen}(x)-1-x^2}{x}\right]$$

La primera fracción que aparece, sabemos que tienden a 1 cuando x tiende a cero; por tanto, nos ocupamos de la última fracción que presenta una indeterminación del tipo "0/0". Aplicamos la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\operatorname{sen}(x)-1-x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos(x)-2x}{1}=2$$

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2\ .$$

b) Observamos una indeterminación del tipo "$\infty-\infty$", por lo que arreglamos la expresión haciendo uso de las propiedades del logaritmo:

$$x^2\left(\log(2x^2)-\log(2x^2+4)\right)=x^2\log\left(\frac{2x^2}{2x^2+4}\right)=\log\left[\left(\frac{2x^2}{2x^2+4}\right)^{x^2}\right]$$

De esta forma, dentro de la función logaritmo se presenta una indeterminación del tipo "1^∞". Nos ocupamos entonces de calcular:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{2x^2+4}\right)^{x^2}=e^L\iff\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{2x^2}{2x^2+4}-1\right]=L$$

usando la regla del número e:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{2x^2}{2x^2+4}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\frac{2x^2-2x^2-4}{2x^2+4}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2}{2x^2+4}=-2$$

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\log(2x^2)-\log(2x^2+4)\right)=\log(e^{-2})=-2\ .$$

3. **(1 punto)** Determina el número de soluciones reales de la ecuación:

$$x=4\log(x)\ .$$

Solución: Se considera la función $f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=x-4\log(x)$. Se trata, entonces, de determinar el número de ceros de f, que es una función continua y derivable en todo el dominio al ser suma de funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}^+$.

Calculamos su derivada:

$$f'(x)=1-\frac{4}{x}=\frac{x-4}{x}.$$

La función f tiene un único punto crítico en $x = 4$. Estudiamos los cambios de signo de la derivada en torno a dicho punto.

$$\begin{aligned} 0 < x < 4 &\Rightarrow f'(x) < 0 \quad (f \text{ es estricatmente decreciente}),\\ x > 4 &\Rightarrow f'(x) > 0 \quad (f \text{ es estricatmente dcreciente}) \end{aligned}$$

Por tanto, en el punto 4 la función alcanza un mínimo relativo que, al ser el único punto crítico de f, se convierte en el mínimo absoluto y vale $f(4) = 4 - 4\log(4) = 4(1-\log(4) < 0$. Estudiamos su comportamiento en 0 y en más infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= +\infty,\\ \lim_{x\to +\infty} f(x) &= +\infty \quad \text{(utilizando la escala de infinitos)} \end{aligned}$$

Por tanto, por el teorema de Bolzano, f tiene dos ceros, uno antes de 4 y otro, después de 4.

4. **(2 puntos)** Se considera la función $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \frac{e^{-1/x^2}}{x}$. Calcula el conjunto imagen de f.

   Solución: Se trata de una función continua y derivable en su dominio por ser cociente de funciones continuas y derivables (el numerador es composición de funciones continuas y derivables, y el denominador es un polinomio, que no se anula en el dominio). Además, f es impar ($f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}^*$), por lo que para calcular el conjunto imagen, sólo calculamos la imagen en los positivos, ya que la imagen de los negativos será el intervalo opuesto.

$$f(\mathbb{R}^*) = f(\mathbb{R}^-) \cup f(\mathbb{R}^+) = -f(]0,+\infty[) \cup f(]0,+\infty[)\ .$$

   Derivamos la función:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x^3}\, x e^{-1/x^2} - e^{-1/x^2}}{x^2} = \frac{\frac{2}{x^2}\, e^{-1/x^2} - e^{-1/x^2}}{x^2} = \frac{e^{-1/x^2}(2-x^2)}{x^4}$$

   Factorizamos el numerador:

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x^2}\,(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{x^4}$$

   Obtenemos sólo un punto crítico en $\mathbb{R}^+$ ($x = \sqrt{2}$). Analizando el cambio de signo de la derivada en torno a dicho punto crítico obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 < x < \sqrt{2} \;&\Rightarrow\; f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; \quad f \text{ es estrictamente creciente}\\ \sqrt{2} < x \;&\Rightarrow\; f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; \quad f \text{ es estrictamente decreciente} \end{aligned}$$

Deducimos que f alcanza en $x = \sqrt{2}$ un punto de máximo relativo y vale $f(\sqrt{2}) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$. Además:

$$(*)\ \lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} y e^{-y^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0 \quad , \text{y}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

De todo lo anterior:

$$f(]0,+\infty[) = f(]0,\sqrt{2}]) \cup f([\sqrt{2},+\infty[) = \left]0, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right] \quad \text{y, entonces,}$$

$$f(\mathbb{R}^*) = -f(]0,+\infty[) \cup f(]0,+\infty[) = \left[-\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}, 0\right[\cup \left]0, \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}\right] .$$

(*) En el cálculo del límite en el punto cero, hemos hecho un cambio de variable ($y = 1/x$) y hemos aplicado la regla de L'Hôpital.

5. **(2 puntos)**

   a) Calcula el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \log(1+x)$ en el punto $a = 0$ y de orden 2.

   b) Acota el error que se comete cuando aproximamos $\log(3/2)$ utilizando el polinomio de Taylor de f centrado en el cero y de orden 1.

Solución:

a) Se trata de una función derivable en cero dos veces (y n veces, con $n \in \mathbb{N}$). Calculamos los coeficientes del polinomio de Taylor, $P_2(x)$ que nos piden:

$$f(x) = \log(1+x) \;\Rightarrow\; f(0) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \;\Rightarrow\; f'(0) = 1$$
$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \;\Rightarrow\; f''(0) = -1$$

Por tanto:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = x - \frac{x^2}{2} .$$

b) Para aproximar el valor que nos piden utilizando el polinomio de Taylor de f centrado en cero y de orden 1, tendremos que considerar $x = 1/2$, para que así $f(1/2) = \log(3/2)$. De esta forma, el error que se comete, y según el teorema de Taylor, será:

$$\text{error} = |R_1(1/2)| = \left| \frac{f''(c)\,(1/2)^2}{2} \right| = \left| \frac{-1}{(1+c)^2} \frac{1}{2^3} \right| = \frac{1}{8} \frac{1}{(1+c)^2} < \frac{1}{8} = 0{,}125\ ,$$

donde hemos utilizado que $0 < c < 1/2$ y, por tanto, $\frac{1}{(1+c)^2} < 1$.

Granada, 30 de noviembre de 2016