Cálculo

1ºE Grado en Ingeniería Informática

Primer Parcial

Curso 2012/2013

1. **(2.5 puntos)** Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

   a) $\left\{\dfrac{1}{n+1}\sqrt[n]{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right\}$

   b) $\left\{\dfrac{1+2+3\cdots+(n-1)}{n}-\dfrac{n}{3}\right\}$

   Solución:

   a) Introducimos dentro de la raíz n-sima el factor $\frac{1}{n+1}$, con lo que la sucesión a estudiar es:

   $$\left\{\sqrt[n]{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{(n+1)^n}}\right\}$$

   Aplicamos el criterio de la raíz; esto es, si llamamos a_n a la sucesión radicando, tenemos que calcular el límite de la sucesión siguiente:

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)(2n+2)}{(n+2)^{n+1}}\,\frac{(n+1)^n}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$$

   $$=\frac{(2n+2)}{(n+2)}\,\frac{(n+1)^n}{(n+2)^n}=\frac{(2n+2)}{(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

   La primera fracción es una sucesión de tipo racional que converge a 2 y la segunda fracción es de tipo exponencial: $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$. Esta última presenta una indeterminación del tipo "1^∞", por lo que, aplicando el criterio del número e, nos queda que

   $$n\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)=\frac{-n}{n+2}\to-1\ \Rightarrow\ \lim\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

   Como consecuencia de todo lo anterior:

   $$\lim\left\{\frac{1}{n+1}\sqrt[n]{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right\}=\lim\left\{\sqrt[n]{\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{(n+1)^n}}\right\}=\frac{2}{e}$$

b) Observamos que tenemos una diferencia de sucesiones donde, claramente, el segundo sumando tiende a $-\infty$, pero el primer sumando hay que estudiarlo. Podríamos aplicar el criterio de Stolz a este primer sumando, pero correríamos el riesgo de que finalmente tuviéramos indeterminación del tipo "$\infty - \infty$". Arreglamos entonces el término general para obtener una única fracción:

$$\frac{1+2+3\cdots+(n-1)}{n} - \frac{n}{3} = \frac{3\,(1+2+3\cdots+(n-1))-n^2}{3n}$$

y aplicamos el criterio de Stolz (el numerador no sabemos a dónde converge o diverge, pero el denominador diverge positivamente y es creciente). Si llamamos a_n al numerador y b_n al denominador, tenemos que analizar el límite del siguiente cociente:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{3\,(1+2+3\cdots+(n-1)+n)-(n+1)^2-\left[3\,(1+2+3\cdots+(n-1))-n^2\right]}{3(n+1)-3n}$$
$$= \frac{3n-(n+1)^2+n^2}{3n+3-3n} = \frac{3n-n^2-2n-1+n^2}{3} = \frac{n-1}{3} \longrightarrow +\infty$$

Por tanto $\lim \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = +\infty$, y aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim \left\{ \frac{1+2+3\cdots+(n-1)}{n} - \frac{n}{3} \right\} = +\infty$$

2. **(2.5 puntos)** Estudia el carácter de las siguientes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

   b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left[1+\log\left(1+\frac{7}{n}\right)\right]^{-n^2}$

Solución:

a) Arreglamos, en primer lugar, el término general de la serie, a_n, multiplicando numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$:

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n(n+1-n)} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n}$$

Utilizamos el criterio de comparación por paso al límite comparando con la serie armónica de exponente $\alpha = 1/2$; esto es, comparamos con la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$
$$= \sqrt{\frac{n+1}{n}}+1 = \sqrt{1+\frac{1}{n}}+1 \to 2 \neq 0$$

El criterio de comparación por paso al límite es entonces concluyente y nos asegura que, como la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente, la serie que estamos estudiando, $\sum \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$, tiene el mismo carácter; es decir, es también divergente.

b) Aplicamos el criterio de la raíz (ya que el término general presenta una potencia n-sima). Por tanto, estudiamos el límite de $\sqrt[n]{a_n}$, siendo $a_n = \left[1+\log\left(1+\frac{7}{n}\right)\right]^{-n^2}$.

$$\sqrt[n]{\left[1+\log\left(1+\frac{7}{n}\right)\right]^{-n^2}} = \left[1+\log\left(1+\frac{7}{n}\right)\right]^{-n^2/n} = \left[1+\log\left(1+\frac{7}{n}\right)\right]^{-n}$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo "1^∞", por lo que aplicamos el criterio del número e:

$$(-n)\left[1+\log\left(1+\frac{7}{n}\right)-1\right] = (-n)\left[\log\left(1+\frac{7}{n}\right)\right] = \log\left[\left(1+\frac{7}{n}\right)^{-n}\right]$$

Nos quedamos ahora con la sucesión que está dentro del logaritmo: $\left(1+\frac{7}{n}\right)^{-n}$. Esta sucesión vuelve a presentar una indeterminación del tipo "1^∞", por lo que volvemos a aplicar el criterio del número e:

$$-n\left[1+\frac{7}{n}-1\right] = -7 \to -7 \Rightarrow \left(1+\frac{7}{n}\right)^{-n} \to e^{-7}$$
$$\Rightarrow \log\left[\left(1+\frac{7}{n}\right)^{-n}\right] \to \log(e^{-7}) = -7$$
$$\Rightarrow (-n)\left[1+\log\left(1+\frac{7}{n}\right)-1\right] \to -7$$
$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \left[1+\log\left(1+\frac{7}{n}\right)\right]^{-n} \to e^{-7} < 1$$

Aplicando el criterio del cociente, tenemos que la serie dada es convergente.

3. **(2.5 puntos)** Estudia la posible convergencia de las siguientes series y calcula su suma cuando sea posible:

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^n + 3^{n-1}}{5^n}$

b) $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

Solución:

a) La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^n + 3^{n-1}}{5^n} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{-2}{5}\right)^n + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{-2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-2}{5}| < 1$ y $|\frac{3}{5}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$, nos queda entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n + 3^{n-1}}{5^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{1-\frac{-2}{5}} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{5}} - 1\right) \\
&= \frac{5}{7} - 1 + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{3}{14}
\end{aligned}$$

b) Comparamos con la serie armónica $\sum \frac{1}{n^2}$ que es convergente.

$$\frac{\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2n^2}{(2n+1)(2n+3)} \to 1/2 \neq 0$$

Por tanto, la serie es convergente. Para calcular su suma, descomponemos el término general:

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$$

Se trata de una serie telescópica, por tanto su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

y así, las sumas parciales de la serie se pueden calcular de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \lim S_n = \lim \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

4. **(2.5 puntos)** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$x_1 = 1/3$$
$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n+1} - 1\ ,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.

b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

c) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n+2}{3}\right)^{\frac{x_n}{x_n-1}}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \sqrt{1+1} - 1 = \sqrt{2} - 1 > x_1 = \frac{1}{3}$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 < x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n < x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n < x_{n+1} \Rightarrow 3x_n < 3x_{n+1} \Rightarrow 3x_n + 1 < 3x_{n+1} + 1$$
$$\Rightarrow \sqrt{3x_n+1} < \sqrt{3x_{n+1}+1} \Rightarrow \sqrt{3x_n+1} - 1 < \sqrt{3x_{n+1}+1} - 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente, ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por $x_1 = 1/3$. Veamos que está acotada superiormente por 1. Esto es, que $x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 1/3 \leq 1$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 1$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 1$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \leq 1 \Rightarrow 3x_n \leq 3 \Rightarrow 3x_n + 1 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{3x_n+1} \leq \sqrt{4} = 2$$
$$\Rightarrow \sqrt{3x_n+1} - 1 \leq 2 - 1 \Rightarrow x_{n+1} \leq 1$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

b) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\text{lím}\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \sqrt{3x+1} - 1$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{3x+1} - 1 \Rightarrow x+1 = \sqrt{3x+1} \Rightarrow (x+1)^2 = 3x+1$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 3x + 1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 1$ y $x = 0$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que $1/3$. El motivo es que $1/3 \leq x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\text{lím}\{x_n\} = 1$.

c) Observamos que en el cálculo de $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n+2}{3}\right)^{\frac{x_n}{x_n-1}}$ tenemos una indeterminación del tipo "1^∞", ya que la base tiende a 1 y el exponente a infinito. Entonces, aplicando el criterio del número e:

$$\frac{x_n}{x_n-1}\left[\frac{x_n+2}{3} - 1\right] = \frac{x_n}{(x_n-1)}\frac{(x_n-1)}{3} = \frac{x_n}{3} \to \frac{1}{3}$$

Por tanto, $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n+2}{3}\right)^{\frac{x_n}{x_n-1}} = e^{1/3}$.

Granada, 28 de noviembre de 2012