# Problemas resueltos

## *Resolución Numérica de Ecuaciones no lineales*

**1** *Aplique los métodos de bisección, y secante, para hallar la raíz de* $x^5+2x^3-1=0$ *en* $[0,1]$*, con tres cifras decimales exactas.*

**Solución** Definamos la función

$$f(x)=x^5+2x^3-1,$$

que es una función polinómica. Se verifica

$$\begin{aligned} f(0) &= -1, \\ f(1) &= 2, \\ f'(x) &= 5x^4+6x^2, \end{aligned}$$

lo que indica que $f(x)$ posee una única raíz real situada en el intervalo $[0,1]$. Utilizando los métodos de bisección y secante, podemos obtener la tabla:

| Bisección | | | | Secante |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | $a_n$ | $b_n$ | $x_n$ | $y_n$ |
| 0 | 0 | 1 | 0,5 | 0 |
| 1 | 0,5 | 1 | 0,75 | 1 |
| 2 | 0,5 | 0,75 | 0,625 | 0,33333333333333337 |
| 3 | 0,625 | 0,75 | 0,6875 | 0,543661971830986 |
| 4 | 0,6875 | 0,75 | 0,71875 | 1,0003231281288834 |
| 5 | 0,71875 | 0,75 | 0,734375 | 0,6530531623524412 |
| 6 | 0,71875 | 0,734375 | 0,7265625 | 0,7014186801691832 |
| 7 | 0,7265625 | 0,734375 | 0,73046875 | 0,7381985303553759 |
| 8 | 0,73046875 | 0,734375 | 0,732421875 | 0,7328641652392519 |
| 9 | 0,732421875 | 0,734375 | 0,7333984375 | 0,7331542323205931 |
| 10 | 0,732421875 | 0,7333984375 | 0,73291015625 | 0,7331568578330309 |

La solución exacta es $s=0{,}7331568564609662$.

**2** *Demuestre que mediante el método de Newton–Raphson se puede calcular el inverso de un número sin efectuar divisiones. Halle* $\pi^{-1}=0{,}3183098\ldots$, *siendo* $x_0=10$ *y* $x_0=0{,}3$.

**Solución** Observemos que la función

$$f(x)=\alpha-\frac{1}{x},$$

proporciona el inverso de un número real $\alpha$ no nulo. Además, esta función es de clase infinito en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tomemos, en particular, $\alpha>1$. En cualquier otro caso, el desarrollo del ejercicio es análogo. Tomando el intervalo $[10^{-n},1]$, para $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande, la sucesión determinada por el método de Newton–Raphson

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

converge a $\alpha^{-1}$ tomando $x_0$ suficientemente cercano a $s$. Sustituyendo la expresión de $f(x)$, observemos que

$$x_{n+1}=2x_n-\alpha\, x_n^2,$$

lo que permite calcular el inverso de un número sin hacer divisiones. La siguiente tabla muestra las sucesivas iteraciones para el cálculo de

$$\pi^{-1}=0{,}318309886183790671537,$$

partiendo de dos puntos iniciales diferentes:

| $n$ | $x_n$ | $y_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,3 | 10 |
| 1 | 0,31725666117691860726111 | −294,1592653589793238462 |
| 2 | 0,31830640126873383863444 | −272429,3047907946432225 |
| 3 | 0,31830988614563718187100 | $-2{,}3316240796814149775 32 \times 10^{11}$ |
| 4 | 0,31830988618379067153311 | $-1{,}7079176880563664214 92 \times 10^{23}$ |
| 5 | 0,31830988618379067153777 | $-9{,}1639718267862758888 94 \times 10^{46}$ |
| 6 | 0,31830988618379067153777 | $-2{,}6382586054409840850 74 \times 10^{94}$ |

## 3 *Halle un intervalo para el cero más próximo al origen en las siguientes ecuaciones:*

a) $4\cos x - e^x = 0$

b) $2\cos x - \cosh x = 0$

**Solución**

*a*) Definamos la función $f_1(x) = 4\cos x - e^x$, que es de clase infinito en $\mathbb{R}$. Observemos que

$$f_1(-\pi/2) = -e^{-\pi/2}, \quad f_1(0) = 3, \quad f_1(\pi/2) = -e^{\pi/2},$$

con lo que $f_1$ posee, al menos, una raíz en $(-\pi/2, 0)$ y otra en $(0, \pi/2)$. Para delimitar cuál de ellas es la más cercana a 0, calculemos los valores de $f_1$ en ciertos puntos de los intervalos:

$$f_1(-1) > 0, \quad f_1(1) < 0.$$

De este modo, existe, al menos una raíz en $(-\pi/2, -1)$, y otra en $(0, 1)$. Además, $f_1(x) > 0$, $x \in (-1, 0)$, luego la raíz más cercana está en el el intervalo $(0, 1)$.
Por otro lado, $f_1'(x) = -4\operatorname{sen} x - e^x$, que es negativa en todo el intervalo $[0, 1]$, luego existe una única raíz en este intervalo.

*b*) Recordemos que el coseno hiperbólico se define en la forma

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Sea $f_2(x) = 2\cos x - \cosh x$, que es una función infinitas veces derivable con derivadas continuas en todo número real. Observemos que $f_2(x)$ es una función simétrica, esto es, $f_2(-x) = f_2(x)$, luego si $s$ es raíz de $f_2(x)$, $-s$ también será raíz. De este modo, sólo localizaremos la raíz positiva más cercana a 0.
Busquemos un intervalo:

$$f_2(0) = 1, \quad f_2(\pi/2) = -2{,}50918, \quad f_2'(x) = -2\operatorname{sen} x - \operatorname{senh} x < 0, \forall x \in [0, \pi/2].$$

De este modo, la raíz es única en dicho intervalo.

## 4 *Estudie para que valores de $K$ será convergente el método de Whittaker:*

$$x_{n+1} = x_n + K \cdot f(x_n).$$

**Solución** El método de Whittaker es un método iterativo de la forma $x_{n+1} = F(x_n)$, en el cual $F(x) = x + K \cdot f(x)$, $K$ una constante fija. Si $f(x)$ es suficientemente regular, esto es, es de clase adecuada, entonces $F(x)$ es de la misma clase. Supongamos que la función $f(x)$ posee una única raíz $s \in [a, b]$. Utilizando el teorema de convergencia local para métodos iterativos, para que el método de Whittaker sea convergente a $s$ es necesario que $F \in C^1[a,b]$ y que $|F'(s)| < 1$. De este modo, impondremos que $f \in C^1[a,b]$, y calculemos

$$|F'(s)| = |1 + Kf'(s)| < 1.$$

Si $f'(s) = 0$, entonces el método nunca sería convergente. Supondremos que $f'(s) \neq 0$. De este modo, se obtiene la desigualdad

$$-2 < K\,f'(s) < 0,$$

que nos conduce a

$$\frac{-2}{f'(s)} < K < 0, \text{ para } f'(s) > 0, \text{ y } \frac{-2}{f'(s)} > K > 0, \text{ para } f'(s) < 0.$$

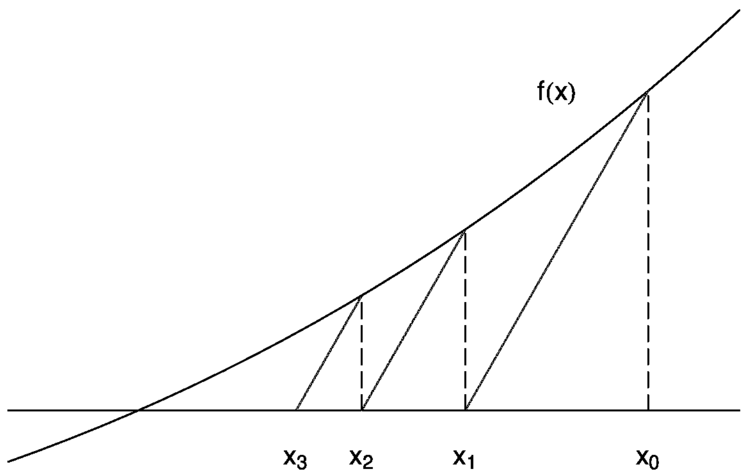


Figura 1: Interpretación gráfica del método de Whittaker

La interpretación gráfica del método de Whittaker es la siguiente: dado un punto inicial $x_0$, el siguiente se obtiene al intersecar la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$, y con pendiente $-1/K$ con el eje de abcisas. De este modo, los términos de la sucesión se calculan utilizando rectas paralelas (véase la Figura 1).

**5** *Se considera la ecuación $f(x) = 0$, donde $f$ es una función suficientemente regular que posee un cero simple, $s$. Para obtener dicha raíz se usa el método:*

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{aproximación inicial} \\ x_n &= x_{n-1} - f(x_{n-1}) \cdot f'(x_{n-1}) \end{aligned}$$

a*) Determine qué condiciones ha de cumplir $f$ para que el método converja localmente a $s$, con convergencia, al menos, cuadrática.*

b*) A partir del resultado obtenido en (a), ¿ cree que el método es útil desde el punto de vista práctico ?*

**Solución** Recordemos, en primer lugar, que una función se dice *suficientemente regular* si es de la clase adecuada para resolver un cierto problema. Por otro lado, un cero $s$ de una función $f(x)$ se dice simple si $f(s) = 0$, pero $f'(s) \neq 0$. En otro caso, diremos que $s$ es un cero múltiple de la función.

*a*) Utilizando las notaciones habituales, observemos que estamos ante un método iterativo o de punto fijo de la forma $x_{n+1} = F(x_n)$, donde $F(x) = x - f(x)f'(x)$. Si $f(x)$ es de clase 2 en un entorno de $s$, entonces $F(x)$ es de clase uno en este entorno, y además

$$F'(s) = 1 - f'(s)^2.$$

El orden de convergencia será al menos dos si $F'(s) = 0$, de donde se deduce que $f'(s) = \pm 1$.

*b*) Observemos que este método converge con orden de convergencia cuadrático si $f(x)$ es de clase 2 en un entorno de la solución y $f'(s) = \pm 1$. Encontrar funciones para las cuales se pueda comprobar esta segunda condición no es tarea fácil, teniendo en cuenta que, a priori, $s$ es desconocido.

**6** *Usando la ecuación $x^2 - 2x - 2 = 0$, pruebe que una ecuación puede transformarse en otra del tipo $x = F(x)$ que dé lugar a un método iterativo convergente y en otra en que esto no ocurra.*

**Solución** Observemos que estamos ante una ecuación polinómica de segundo grado, cuyas dos raíces son reales, y están contenidas en los intervalos $(-1, 0)$ y $(2, 3)$, pues $f(-1) > 0$, $f(0) < 0$, $f(2) < 0$ y $f(3) > 0$, donde $f(x) = x^2 - 2x - 2$. Además, $f'(x) = 2x - 2$, que es negativo para $x < 1$, y positivo para $x > 1$, lo que demuestra que sólo hay dos raíces reales, como ya sabíamos. Trataremos de aproximar la raíz $s \in [-1, 0]$.

Definamos los métodos iterativos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= F_1(x_n), \qquad F_1(x) = \frac{x^2 - 2}{2}, \\ x_{n+1} &= F_2(x_n), \qquad F_2(x) = -\sqrt{2x + 2}, \end{aligned}$$

que se deducen a partir de la ecuación original. La primera función es de clase infinito, y además

$$|F_1'(s)| = |s| < 1,$$

luego el primer método es convergente.

La segunda función está bien definida y es continua en $[-1, 0]$, pero no es derivable en $x = -1$, lo que nos obliga a reducir el intervalo. Observemos que $f(-3/4) > 0$, luego la raíz está en $[-3/4, 0]$, intervalo en el que la función no presenta problemas de derivación. Calculemos

$$|F_2'(s)| = \frac{1}{\sqrt{2s + 2}} > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

por lo que no podemos asegurar la convergencia del método.

**7** *Estudie qué valores hay que tomar de $a$ y $b$ en*

$$F(x) = \frac{x^3 + ax}{bx^2 + 3}$$

*para que el método $x_{n+1} = F(x_n)$ proporcione la raíz cuadrada positiva de 3 con convergencia al menos cuadrática. Aplíquelo para hallar $x_2$ partiendo de $x_0 = 1$.*

**Solución** La función $F$ es una función racional que es de la clase adecuada si el denominador no se anula. El método iterativo debe proporcionar $\sqrt{3}$ con convergencia, al menos, cuadrática, por lo que debe verificarse que

$$F(\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \qquad F'(\sqrt{3}) = 0.$$

Las dos condiciones anteriores se traducen en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} b + 1 &\neq 0, \\ a - 3b &= 0, \\ a + 3b - ab + 9 &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es $a = 9$, $b = 3$. De este modo, el método queda

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 9x_n}{3x_n^2 + 3}.$$

Finalmente, si $x_0 = 1$, entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}66666666 \\ x_2 &= 1{,}73202614, \end{aligned}$$

que aproxima con cinco dígitos correctos a $\sqrt{3} = 1{,}732050808\ldots$

**8** *Se desean hallar las raíces reales positivas de la ecuación $x + \ln x = 0$, por iteración, y se presentan los siguientes métodos:*

$$\textit{1)}\ x_{n+1} = -\ln x_n, \quad \textit{2)}\ x_{n+1} = e^{-x_n}, \quad \textit{3)}\ x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}$$

a) *¿ Hay alguno de ellos cuyo uso no sea aconsejable ?*

b) *¿ Cual es el más adecuado de los tres ?*

c) *Dé alguna otra fórmula mejor que éstas.*

**Solución** La función $f(x) = x + \ln x$, posee una única raíz real positiva $s$ localizada en el intervalo $[1/4, 1]$.

Denotemos los métodos iterativos en la forma

$$x_{n+1} = F_i(x_n), \quad i = 1, 2, 3,$$

donde

$$F_1(x) = -\ln x, \quad F_2(x) = e^{-x_n}, \quad F_3(x) = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}.$$

Los tres métodos dados verifican que $s = F_i(s)$, donde $s$ es la única raíz real de la función $f(x)$. Además, las tres funciones que definen los métodos son de clase adecuada en el intervalo $[1/4, 1]$, con lo que la convergencia dependerá de $|F_i'(s)|$. Calculemos:

$$\begin{aligned}
|F_1'(s)| &= \frac{1}{s} > 1, \\
|F_2'(s)| &= e^{-s} < e^{-1/4} = 0{,}778801 < 1, \\
|F_3'(s)| &= \frac{1 - e^{-s}}{2} < \frac{1 - e^{-1}}{2} = 0{,}31606 < 1.
\end{aligned}$$

Podemos concluir entonces que el peor método es el primero, pues no proporciona convergencia. El segundo y tercer método son convergentes, pero el mejor entre ambos es el tercero, pues la cota para la derivada primera es inferior. Además, puede comprobarse fácilmente que el orden de convergencia de $F_2$ y $F_3$ es uno, pues $F_2'(s) \neq 0$ y $F_3'(s) \neq 0$.

Finalmente, el método de Newton–Raphson aplicado a la ecuación original es mejor que éstos, pues la convergencia es cuadrática.

**9** a) *Demuestre que la ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$ posee una única raíz real.*

b) *Para calcular dicha raíz se proponen los siguientes métodos iterativos:*

$$\textit{1)}\ x_{n+1} = \frac{2 - x_n^3}{2}, \quad \textit{2)}\ x_{n+1} = \frac{2}{x_n^2 + 2}, \quad \textit{3)}\ x_{n+1} = \frac{1 - x_n}{1 + x_n^2}$$

*1) ¿ Hay alguno de ellos cuyo uso no sea aconsejable ?*

*2) ¿ Cual es el más adecuado de los tres ?*

*3) Proporcione algún otro método mejor que éstos.*

**Solución**

*a*) La función $f(x) = x^3 + 2x - 2$, es una función de clase $C^\infty$ en toda la recta real por ser polinómica.
Puesto que $f(0) = -2 < 0, f(1) = 1 > 0$ y $f$ es continua en $[0, 1]$, el Teorema de Bolzano nos garantiza que existe un punto $s \in ]0, 1[$ verificando $f(s) = 0$.
La función derivada $f'(x) = 3x^2 + 2$ es siempre positiva, es más $f'(x) = 3x^2 + 2 > 2 > 0$ y por tanto $f$ ser estrictamente creciente. Todo esto prueba que $f$ posee una única raíz real positiva $s$ localizada en el intervalo $]0, 1[$.

*b*) Denotemos los métodos iterativos en la forma

$$x_{n+1} = F_i(x_n), \quad i = 1, 2, 3,$$

donde

$$F_1(x) = \frac{2-x^3}{2}, \quad F_2(x) = \frac{2}{x^2+2}, \quad F_3(x) = \frac{1-x}{1+x^2}.$$

Primero, comprobemos si los tres métodos verifican que $s = F_i(s), \quad i, 1, 2, 3$, donde $s$ es la única raíz real de la ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$,

1) la ecuación $F_1(s) = \frac{2-s^3}{2} = s$ es equivalente a $s^3 + 2s - 2 = 0$,
2) la ecuación $F_2(s) = \frac{2}{s^2+2} = s$ es equivalente a $s^3 + 2s - 2 = 0$,
3) pero la ecuación $F_3(s) = \frac{1-s}{1+s^2} = s$ es equivalente a $s^3 + 2s - 1 = 0$.

Así, el método iterativo asociado a $F_3$ no es adecuado pues aunque converja, no convergerá a la solución de la ecuación.

Además, por ser funciones racionales, las dos funciones $F_1$ y $F_2$ son de clase $C^\infty$ en el intervalo $[0,1]$, con lo que la convergencia dependerá de $|F_i'(s)|$. Calculemos:

$$\begin{aligned} |F_1'(s)| &= \frac{3s^2}{2}, \\ |F_2'(s)| &= \frac{4s}{(s^2+2)^2}. \end{aligned}$$

Para que $|F_1'(s)| = \frac{3s^2}{2} < 1$, bastaría probar que $0 < s < \sqrt{2}/\sqrt{3}$. Para ello basta aplicar de nuevo el Teorema de Bolzano:

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 < 0, \\ f(\sqrt{2}/\sqrt{3}) &= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 2 \approx 0{,}17732 > 0, \end{aligned}$$

y por tanto, concluimos que $s \in [0, \sqrt{2}/\sqrt{3}]$ y en consecuencia

$$|F_1'(s)| = \frac{3s^2}{2} < 1$$

y el primer método será localmente convergente.

Para el segundo método, tenemos

$$|F_2'(s)| = \frac{4s}{(s^2+2)^2} < s < 1$$

ya que en el intervalo $[0,1]$ la función $\frac{4}{(x^2+2)^2}$ es decreciente y por tanto

$$\frac{4}{(s^2+2)^2} < \frac{4}{(0^2+2)^2} = 1.$$

Con esto deducimos que el segundo método es localmente convergente.

Observemos también que puesto que

$$s = F_2(s) = \frac{2}{s^2+2} \quad \Longrightarrow \quad s^2 = \frac{4}{(s^2+2)^2},$$

y sustituyendo tendriamos

$$|F_2'(s)| = \frac{4s}{(s^2+2)^2} = s^2\, s = s^3.$$

Podemos concluir entonces que el primer y el segundo método son convergentes, pero el mejor entre ambos es el segundo, pues el valor absoluto de la derivada primera en el punto $s$ es inferior:

$$|F_1'(s)| = s^3 < |F_2'(s)| = \frac{3s^2}{3}$$

ya que $s < 1 < \frac{3}{2}$.

Además, puede comprobarse fácilmente que el orden de convergencia de los métodos asociadoes a $F_1$ y $F_2$ es uno, pues $F_1'(s) \neq 0$ y $F_2'(s) \neq 0$.

$c$) Finalmente, el método de Newton–Raphson aplicado a la ecuación original es mejor que éstos, puesto que, cuando podamos garantizar la convergencia y la raíz sea simple, la convergencia será cuadrática.

Para estudiar la convergencia deberemos comprobar que se verifican las hipótesis del *Teorema Global de Convergencia del Método de Newton–Raphson*. En nuestro caso:

*i*) La función $f(x) = x^3 + 2x - 2$, es de clase $C^2$ en el intervalo $[0, 1]$ por ser polinómica.

*ii*) $f(0) \cdot f(1) = -2 < 0$

*iii*) $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \quad \forall x \in [0, 1]$

*iv*) $f''(x) = 6x \geq 0, \quad \forall x \in [0, 1]$

y el Método de Newton–Raphson será convergente a la única raíz de la ecuación en $[0, 1]$, si tomamos como $x_0$ un punto que verifique $f(x_0)f''(x_0) > 0$, por ejemplo $x_0 = 1$.

Observemos que la condición $f'(x) > 0$ implica que la raíz $s$ es simple y por tanto la convergencia será cuadrática.