Cálculo I. Prueba de Control

Doble Grado en Informática y Matemáticas, curso 2013-2014.

18 Diciembre 2013.

- **Ejercicio 1. (2 puntos)**
  Sea $A \subseteq \mathbb{R}^+$ no vacio y mayorado y sea $B \subseteq \mathbb{R}$ no vacio, minorado y verificando $\text{ínf} B > 0$. *Probar que el conjunto C dado por $C = \{\frac{\sqrt{a}}{b} : a \in A, b \in B\}$ está acotado y calcular su supremo.*

  Solución:
  Veamos en primer lugar que C está acotado.

  Dado que $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$ se tiene que $0 < \frac{\sqrt{a}}{b}$ $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, luego C está minorado.
  Como A es no vacío y mayorado, tiene supremo y $0 < a \leqslant \sup A$ para todo a en A, de lo que se deduce que

  $$\sqrt{a} \leqslant \sqrt{\sup A}, \qquad \forall a \in A$$

  Por otro lado, por hipótesis $0 < \text{ínf} \leqslant b$ para todo b en B, de donde se tiene

  $$\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{\text{ínf} B}, \qquad \forall b \in B$$

  Estas desigualdades implican que

  $$0 < \frac{\sqrt{a}}{b} \leqslant \frac{\sqrt{\sup A}}{\text{ínf} B}, \qquad \forall a \in A, \forall b \in B,$$

  luego C está mayorado y $\sup C \leqslant \frac{\sqrt{\sup A}}{\text{ínf} B}$

  Calculamos ahora el supremo de C.

  Veamos que $\sup C = \frac{\sqrt{\sup A}}{\text{ínf} B}$ y para ello basta probar que $\sup C \geqslant \frac{\sqrt{\sup A}}{\text{ínf} B}$.
  En efecto, dado que $\frac{\sqrt{a}}{b} \leqslant \sup C$ $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$ se tiene que, dado a en A, $\frac{\sqrt{a}}{\sup C} \leqslant b$ $\forall b \in B$ de donde se deduce que $\frac{\sqrt{a}}{\sup C} \leqslant \text{ínf} B$ (para cualquier

a en A). Por tanto, $\sqrt{a} \leqslant \sup C \operatorname{ínf} B$ para todo a en A, o equivalentemente $a \leqslant (\sup C \operatorname{ínf} B)^2$ para todo a en A luego $\sup A \leqslant (\sup C \operatorname{ínf} B)^2$. Así pues es ya claro que $\sqrt{\sup A} \leqslant \sup C \operatorname{ínf} B$.

- **Ejercicio 2. (2 puntos)**

  Estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{\sqrt{x_n} + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución:

Veamos en primer lugar que $x_n \geqslant 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (por inducción, claro).

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant 1\}$ y veamos que A es un conjunto inductivo
$1 \in A$ ya que por hipótesis $x_1 = 2 \geqslant 1$.
Supongamos ahora que para cierto n natural se tiene $x_n \geqslant 1$ (es decir $n \in A$), entonces $x_n^2 \geqslant x_n$, o equivalentemente, $x_n \geqslant \sqrt{x_n}$. Por tanto $x_n + 1 \geqslant \sqrt{x_n} + 1$ y en consecuencia $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{\sqrt{x_n}+1} \geqslant 1$, es decir $n+1 \in A$.

Probaremos a continuación que $\{x_n\}$ es decreciente.

Para ello basta probar que para cada natural n se tiene $x_n \geqslant x_{n+1}$. Sea pues $n \in \mathbb{N}$. Como $x_n \geqslant 1$ tenemos que $\sqrt{x_n} \geqslant 1$ y por tanto $x_n\sqrt{x_n} \geqslant 1$. Deducimos ahora que $x_n\sqrt{x_n} + x_n \geqslant 1 + x_n$ lo que implica que $x_n \geqslant \frac{x_n+1}{\sqrt{x_n}+1} = x_{n+1}$.

En conclusión $\{x_n\}$ es una sucesión decreciente y minorada luego convergente. Terminamos calculando explícitamente el límite de $\{x_n\}$.

Sea $L = \operatorname{lím}\{x_n\}$. Dado que la sucesión $\{x_{n+1}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ se tiene que $\operatorname{lím}\{x_{n+1}\} = L$, pero por otro lado $\{x_{n+1} = \{\frac{x_n+1}{\sqrt{x_n}+1}\}$ es cociente de sumas de sucesiones convergentes se tiene que $\operatorname{lím}\{x_{n+1}\} = \frac{L+1}{\sqrt{L}+1}$. La unicidad del límite implica que $L = \frac{L+1}{\sqrt{L}+1}$, o equivalentemente, $L + \sqrt{L} = L + 1$, igualdad de la que se deduce que $L = 1$.

- **Ejercicio 3. (2 puntos)**

  Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando la respuesta:

  1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ verificando que $|ab| < |a|$. Entonces se tiene que $b < 1$.*

2. *Todo conjunto numerable e infinito es equipotente a* $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.
3. *Toda sucesión de números reales admite una parcial convergente o una parcial divergente.*
4. *Toda sucesión acotada,* $\{x_n\}$, *para la cual se pueden encontrar dos sucesiones parciales* distintas, $\{x_{\sigma(n)}\}$ *y* $\{x_{\tau(n)}\}$, *verificando* $\{x_{\sigma(n)}\} \to \operatorname{lím\,sup}\{x_n\}$ *y* $\{x_{\tau(n)}\} \to \operatorname{lím\,ínf}\{x_n\}$ *es no convergente.*

Solución:

1. CIERTO.
   Sean a, b unos tales números. Por reducción al absurdo, supongamos que b no es menor que 1, es decir, $b \geqslant 1$. Entonces la estabilidad del producto en positivos nos dice que $|a| \leqslant |a||b| = |ab|$ lo que contradice las hipótesis del enunciado.
2. CIERTO
   Como ya sabemos, todo conjunto numerable e infinito es equipotente a $\mathbb{N}$. Además tambien sabemos que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables e infinitos. Dado que el producto cartesiano de conjuntos numerables es numerable, se tiene que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ es numerable. Además $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ es infinito ya que si fuese finito, todo subconjunto suyo también lo sería y sin embargo $\mathbb{Q} \times \{0\}$ es un subconjunto de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ que es claramente equipotente a $\mathbb{Q}$ luego infinito. En resumen, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

   Sea A un conjunto numerable e infinito (luego equipotente a $\mathbb{N}$). La transitividad de la relación de equivalencia, $\sim$, nos dice que A es equipotente a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.
3. CIERTO
   Por el Lema previa al Teorema de Bolzano-Weierstrass, toda sucesión de números reales admite una parcial monótona y ya sabemos que las sucesiones monótonas sólo pueden ser convergentes o divergentes (dependiendo de que sean o no acotadas)
4. FALSO
   Para probar que es falso basta dar un contraejemplo. Por ejemplo, la sucesión convergente $\{x_n\} = \{\frac{(-1)^n}{n}\}$ verifica $0 = \operatorname{lím}\{x_n\} = \operatorname{lím\,sup}\{x_n\} = \operatorname{lím\,ínf}\{x_n\}$ pero las sucesiones parciales (ambas convergentes a cero) $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n-1}\}$ son distintas (como sucesiones) aunque convergen al limite superior e inferior, respectivamente.

- **Ejercicio 4. (2 puntos)**
  Enuncia y demuestra el Teorema de Complitud de $\mathbb{R}$.

- **Ejercicio 5. (2 puntos)**

  Probar que todo subconjunto no vacío de números reales cerrado y acotado tiene máximo y mínimo.

  Solución:

  Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un tal conjunto. Por ser acotado y no vacío tiene supremo e ínfimo.

  Veamos que el supremo de A, $\sup A$, es de hecho el máximo de A, es decir que $\sup A \in A$.

  > Supongamos que $\sup A \notin A$, es decir que $\sup A \in \mathbb{R} \backslash A$. Como A es cerrado tenemos que $\mathbb{R} \backslash A$ es abierto (todos sus elementos son interiores) y por tanto existe un $\varepsilon > 0$ tal que $]\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon[\subseteq \mathbb{R} \backslash A$ (ya que $\sup A$ es punto interior). En consecuencia para este positivo ε no existe ningún elemento a de A verificando $\sup A - \varepsilon < a \leqslant \sup A$ lo que contradice la caracterización de supremo de un conjunto.

  Para ver que A tiene mínimo se razona de manera análoga.