LÓGICA Y MÉTODOS DISCRETOS

19 de Mayo de 2014

APELLIDOS Y NOMBRE: ______________________________

DNI: ______________________ GRUPO: __________

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS TEST

	1	2	3	4
Pregunta 1	V	V	V	F
Pregunta 2	V	F	F	V
Pregunta 3	V	F	F	V
Pregunta 4	F	F	V	F
Pregunta 5	V	F	F	V
Pregunta 6	F	F	F	V

Nota Importante: Todas las casillas hay que marcarlas con S/N (Sí/No) o con V/F (Verdadero/Falso). Una casilla no marcada se contará como una respuesta incorrecta.

EJERCICIO PARA DESARROLLAR

Ejercicio

Sean

- $\alpha_1 = \exists x \neg P(x) \to P(f(a))$,
- $\alpha_2 = \forall y(P(y) \to \forall x R(x,y))$,
- $\alpha_3 = \forall x(\forall y R(y,x) \to Q(x,f(a)))$,
- $\beta = \exists y(\exists x Q(x,y) \wedge P(y))$.

Estudia si

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\} \models \beta$$

Si en el desarrollo del ejercicio se emplea el método de resolución hay que indicar claramente las sustituciones realizadas en cada paso.

Solución:

Sabemos que lo que nos piden es equivalente a demostrar que $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \neg\beta\}$ es insatisfacible.

Vamos a calcular la forma clausular de cada una de estas fórmulas:

- $\alpha_1 = \exists x \neg P(x) \to P(f(a))$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & \exists x \neg P(x) \to P(f(a)) \\ & \equiv & \neg \exists x \neg P(x) \vee P(f(a)) \\ & \equiv & \forall x P(x) \vee P(f(a)) \\ & \equiv & \forall x (P(x) \vee P(f(a))) \end{array}$$

- $\alpha_2 = \forall y(P(y) \to \forall x R(x,y))$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha_2 & = & \forall y(P(y) \to \forall x R(x,y)) \\ & \equiv & \forall y(\neg P(y) \vee \forall x R(x,y)) \\ & \equiv & \forall y \forall x(\neg P(y) \vee R(x,y)). \end{array}$$

- $\alpha_3 = \forall x(\forall y R(y,x) \to Q(x,f(a)))$.

$$\begin{array}{rcl} \alpha_3 & = & \forall x(\forall y R(y,x) \to Q(x,f(a))) \\ & \equiv & \forall x(\neg \forall y R(y,x) \vee Q(x,f(a))) \\ & \equiv & \forall x(\exists y \neg R(y,x) \vee Q(x,f(a))) \\ & \equiv & \forall x \exists y(\neg R(y,x) \vee Q(x,f(a))) \\ & & \forall x(\neg R(g(x),x) \vee Q(x,f(a))). \end{array}$$

  Al pasar a la forma de Skolem no se ha podido sustituir la variable y por $f(x)$ pues el símbolo f ya aparece en la fórmula.

- $\neg\beta = \neg\exists y(\exists x Q(x,y) \wedge P(y))$.

$$\begin{array}{rcl} \neg\beta & = & \neg\exists y(\exists x Q(x,y) \wedge P(y)) \\ & \equiv & \forall y \neg(\exists x Q(x,y) \wedge P(y)) \\ & \equiv & \forall y(\neg\exists x Q(x,y) \vee \neg P(y)) \\ & \equiv & \forall y(\forall x \neg Q(x,y) \vee \neg P(y)) \\ & \equiv & \forall y \forall x(\neg Q(x,y) \vee \neg P(y)). \end{array}$$

Entonces lo que hemos de probar es que el conjunto de cláusulas

$$\{P(x) \vee P(f(a));\ \neg P(y) \vee R(x,y);\ \neg R(g(x),x) \vee Q(x,f(a));\ \neg Q(x,y) \vee \neg P(y)\}$$

es insatisfacible. Para ello vamos a hacer una deducción (por resolución) de la cláusula vacía. Puesto que para hacer resolventes las cláusulas no deben tener variables comunes realizaremos los oportunos cambios de variable para evitar esta situación.

$$\neg R(g(x),x) \vee Q(x,f(a)) \qquad \neg Q(z,y) \vee \neg P(y)$$

$$(y|f(a);\ z|x)$$

$$\neg R(g(x),x) \vee \neg P(f(a)) \qquad \neg P(y) \vee R(z,y)$$

$$(y|x;\ z|g(x))$$

$$\neg P(f(a)) \vee \neg P(x) \qquad P(y) \vee P(f(a))$$

$$(x|f(a)) \qquad (y|f(a))$$

$$\square$$

Para la última resolvente necesitamos sustituir x por $f(a)$ en la primera cláusula (y así $\neg P(f(a)) \vee \neg P(x)$ se queda como $\neg P(f(a))$) y en la segunda cláusula y por $f(a)$ (y así tenemos $P(f(a))$). Es decir, necesitamos hacer un factor de cada una de las cláusulas. De no hacerlo no podríamos obtener la cláusula vacía a partir de $\neg P(f(a)) \vee \neg P(x)$ y $P(y) \vee P(f(a))$ (la sustitución $(y|x)$ no nos serviría para deducir la cláusula vacía, pues no podemos "resolver a la doble").

Al haber llegado a la cláusula vacía, el conjunto de cláusulas es insatisfacible, luego

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \vDash \beta.$$

PREGUNTAS TEST

Pregunta Test 1: Señala las fórmulas que sean verdaderas bajo la siguiente interpretación:

$$D = \mathbb{Z}_5$$
$$P = \{(0,0),(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,4)\}$$
$$a = 0; \qquad f(x) = x+1; \qquad v(x) = 1.$$

(1) $\exists x \neg P(x, f(x))$
(2) $\exists x \neg P(x, x)$
(3) $\exists x \forall y[P(x,y) \rightarrow P(y,x)]$
(4) $\exists x[P(x,a) \wedge \neg P(a,x)]$

Solución:

(1) $\exists x \neg P(x, f(x))$
Esta fórmula es verdadera en esta estructura.
Para $x = 4$ tenemos que $f(x) = 0$, y como $P(4,0) = P(4, f(4)) = 0$ hay un valor de x ($x = 4$) que hace cierta a la fórmula $\neg P(x, f(x))$. Por tanto $I(\exists x \neg P(x, f(x))) = 1$.

(2) $\exists x \neg P(x, x)$
Esta también es cierta, ya que $I(\neg P(1,1)) = 1$ (también $I(\neg P(2,2)) = 1$ e $I(\neg P(3,3)) = 1$).
Luego hay un valor de x para el que la fórmula $\neg P(x,x)$ es verdadera.

(3) $\exists x \forall y(P(x,y) \rightarrow P(y,x))$
Vamos a interpretar la fórmula $\forall y(P(x,y) \rightarrow P(y,x))$ cuando $x = 4$. Es decir, vamos a interpretar $\forall y(P(4,y) \rightarrow P(y,4))$.
El único valor de y para el que $P(4,y)$ es verdadera es $y = 4$, y para ese valor de y también es cierta $P(y,4)$, luego en ese caso la implicación $P(4,y) \rightarrow P(y,4)$ es cierta.
Para el resto de valores de y, puesto que $P(4,y)$ es falsa, la implicación es cierta.
Por tanto, existe un valor de x ($x = 4$) para el que la fórmula $\forall y(P(x,y) \rightarrow P(y,x))$ es verdadera.
Concluimos entonces que $I(\exists x \forall y(P(x,y) \rightarrow P(y,x))) = 1$.

(4) $\exists x[P(x,a) \wedge \neg P(a,x)]$
Esta es falsa. El único valor de x para el que es verdadera la fórmula $P(x,a)$ es $x = 0$. Pero para $x = 0$, la fórmula $\neg P(a,x)$ es falsa. Luego no hay ningún valor de x para el que la fórmula $I(P(x,a) \wedge \neg P(a,x))$ valga 1.

Vamos a hacerlo ahora por medio de una tabla en la que analizamos todos los casos.

(1) $\exists x \neg P(x, f(x))$

x	$f(x)$	$P(x, f(x))$	$\neg P(x, f(x))$	$\exists x \neg P(x, f(x))$
0	1	1	0	
1	2	1	0	
2	3	1	0	1
3	4	1	0	
4	0	0	1	

(2) $\exists x \neg P(x, x)$

x	$P(x,x)$	$\neg P(x,x)$	$\exists x \neg P(x,x)$
0	1	0	
1	0	1	
2	0	1	1
3	0	1	
4	1	0	

(3) $\exists x \forall y [P(x,y) \to P(y,x)]$

x	y	$P(x,y)$	$P(y,x)$	$P(x,y) \to P(y,x)$	$\forall y(P(x,y) \to P(y,x))$	$\exists x \forall y(P(x,y) \to P(y,x))$
	0	1	1	1		
	1	1	0	0		
0	2	0	0	1	0	
	3	0	0	1		
	4	0	0	1		
	0	0	1	1		
	1	0	0	1		
1	2	1	0	0	0	
	3	0	0	1		
	4	0	0	1		
	0	0	0	1		
	1	0	1	1		
2	2	0	0	1	0	1
	3	1	0	0		
	4	0	0	1		
	0	0	0	1		
	1	0	0	1		
3	2	0	1	1	0	
	3	0	0	1		
	4	1	0	0		
	0	0	0	1		
	1	0	0	1		
4	2	0	0	1	1	
	3	0	1	1		
	4	1	1	1		

(4) $\exists x [P(x,a) \wedge \neg P(a,x)]$

x	$P(x,a)$	$P(a,x)$	$\neg P(a,x)$	$P(x,a) \wedge \neg P(a,x)$	$\exists x(P(x,a) \wedge \neg P(a,x))$
0	1	1	0	0	
1	0	1	0	0	
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	
4	0	0	1	0	

Pregunta Test 2: De entre las siguientes fórmulas señala las que sean universalmente válidas.
(1) $\exists xQ(x) \lor \exists x \neg Q(x)$
(2) $\forall xQ(x) \land \forall x \neg Q(x)$
(3) $\neg\forall xQ(x) \to \forall x \neg Q(x)$
(4) $\exists x[Q(x) \to Q(a)]$

Solución:

La primera fórmula, $\exists xQ(x) \lor \exists x \neg Q(x)$, es claramente universalmente válida. Pues sea cual sea el predicado Q, siempre habrá un elemento del dominio para el que el predicado Q sea verdadero o sea falso. De hecho, esa fórmula es equivalente a $\exists x(Q(x) \lor \neg Q(x))$.

La segunda fórmula no es universalmente válida. De hecho, en cualquier estructura se interpreta como falsa (es una contradicción). Si tomamos como dominio los números naturales, y al predicado Q le damos el significado *ser par* comprobamos que no es universalmente válida.

La tercera fórmula, $\neg\forall xQ(x) \to \forall x \neg Q(x)$ tampoco es universalmente válida. Notemos que esa fórmula es equivalente a $\exists x \neg Q(x) \to \forall x \neg Q(x)$. Y el que exista un elemento del dominio para el que el predicado Q sea falso no significa que tenga que ser falso para todos. La estructura que hemos dado con la fórmula anterior nos sirve para mostrar que no es universalmente válida.

La cuarta sí es universalmente válida. Siempre hay un elemento del dominio ($x = a$) para el que la fórmula $Q(x) \to Q(a)$ es verdadera.

Puesto que una fórmula α es universalmente válida si, y sólo si, $\models \alpha$, y esto es equivalente a comprobar si $\{\neg\alpha\}$ es insatisfacible, vamos a intentar resolver este ejercicio calculando la forma clausular de $\neg\alpha$ en cada uno de los casos, y viendo si podemos obtener por resolución la cláusula vacía.

- $\alpha = \exists xQ(x) \lor \exists x \neg Q(x)$
  Calculamos la forma clausular de $\neg\alpha$.

$$\begin{array}{rcl} \neg\alpha & = & \neg(\exists xQ(x) \lor \exists x \neg Q(x)) \\ & \equiv & \neg\exists xQ(x) \land \neg\exists x \neg Q(x) \\ & \equiv & \forall x \neg Q(x) \land \forall xQ(x) \end{array}$$

  Y ahora tenemos que probar que el conjunto de cláusulas $\{\neg Q(x);\ Q(x)\}$ es insatisfacible, lo cual es obvio.
- $\alpha = \forall xQ(x) \land \forall x \neg Q(x)$
  Al igual que antes, calculamos la forma clausular de $\neg\alpha$.

$$\begin{array}{rcl} \neg\alpha & = & \neg(\forall xQ(x) \land \forall x \neg Q(x)) \\ & \equiv & \neg\forall xQ(x) \lor \neg\forall x \neg Q(x) \\ & \equiv & \exists x \neg Q(x) \lor \exists xQ(x) \\ & \equiv & \exists x(\neg Q(x) \lor Q(x)) \\ & & \neg Q(a) \lor Q(a) \end{array}$$

  Y puesto que el conjunto $\{\neg Q(a) \lor Q(a)\}$ es satisfacible (de hecho, esa fórmula es universalmente válida) ya que no podemos hacer ninguna resolvente, la fórmula α no es universalmente válida.
- $\alpha = \neg\forall xQ(x) \to \forall x \neg Q(x)$
  Hacemos igual que con las dos fórmulas anteriores.

$$\begin{array}{rcl} \neg\alpha & = & \neg(\neg\forall xQ(x) \to \forall x \neg Q(x)) \\ & \equiv & \neg(\forall xQ(x) \lor \forall x \neg Q(x)) \\ & \equiv & \neg\forall xQ(x) \land \neg\forall x \neg Q(x) \\ & \equiv & \exists x \neg Q(x) \land \exists xQ(x) \\ & \equiv & \exists x \neg Q(x) \land \exists yQ(y) \\ & \equiv & \exists x\exists y(\neg Q(x) \land Q(y)) \\ & & \neg Q(a) \land Q(b) \end{array}$$

  Y el conjunto de cláusulas $\{\neg Q(a);\ Q(b)\}$ es satisfacible, ya que no podemos hacer ninguna resolvente (los literales $Q(a)$ y $Q(b)$ no son unificables).

Si aquí, en el momento en que tenemos $\exists x \neg Q(x) \wedge \exists x Q(x)$ hubiéramos agrupado los dos cuantificadores en uno habríamos obtenido como conjunto de cláusulas $\{\neg Q(a);\ Q(a)\}$, que es insatisfacible y habríamos llegado a la conclusión (errónea) de que α es universalmente válida.

- $\alpha = \exists x[Q(x) \to Q(a)]$
  Repetimos el proceso.

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\alpha & = & \neg\exists x(Q(x) \to Q(a)) \\
 & \equiv & \neg\exists x(\neg Q(x) \vee Q(a)) \\
 & \equiv & \forall x \neg(\neg Q(x) \vee Q(a)) \\
 & \equiv & \forall x(Q(x) \wedge \neg Q(a))
\end{array}
$$

  Y el conjunto de cláusulas $\{Q(x);\ \neg Q(a)\}$ es insatisfacible.

Pregunta Test 3: Sean $\alpha = \forall y(Q(b, f(y)) \vee R(a, y))$ y $\beta = \exists x \forall y(Q(x, f(y)) \vee R(a, y))$. Entonces:
(1) $\alpha \vDash \beta$.
(2) $\beta \vDash \alpha$.
(3) $\neg\alpha \vDash \neg\beta$.
(4) $\beta \to \alpha$ es satisfacible y refutable.

Solución:
Vamos a hacer los cuatro casos:

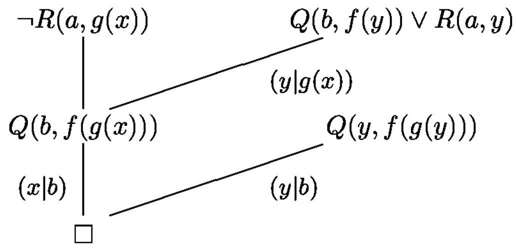
(1) $\alpha \vDash \beta$.
Para esto comprobamos si $\{\alpha, \neg\beta\}$ es insatisfacible. Calculamos la forma clausular de cada una de estas fórmulas.
La primera ya está en forma clausular, así que lo hacemos con $\neg\beta$.

$$\begin{array}{rcl} \neg\beta & = & \neg\exists x \forall y(Q(x, f(y)) \vee R(a, y)) \\ & \equiv & \forall x \exists y \neg(Q(x, f(y)) \vee R(a, y)) \\ & \equiv & \forall x \exists y(\neg Q(x, f(y)) \wedge \neg R(a, y)) \\ & & \forall x(\neg Q(x, f(g(x))) \wedge \neg R(a, g(x))) \end{array}$$

Y ahora tenemos que comprobar si el conjunto de cláusulas

$$\{Q(b, f(y)) \vee R(a, y);\ Q(x, f(g(x)));\ \neg R(a, g(x))\}$$

es o no insatisfacible.
Buscamos una deducción de la cláusula vacía.



Y por tanto $\alpha \vDash \beta$.

(2) $\beta \vDash \alpha$.
Tenemos que comprobar si $\{\beta,\ \neg\alpha\}$ es insatisfacible. Calculamos la forma clausular de β y $\neg\alpha$.

$$\begin{array}{ll} \exists x \forall y(Q(x, f(y)) \vee R(a, y)) & \neg\forall y(Q(b, f(y)) \vee R(a, y)) \\ \forall y(Q(c, f(y)) \vee R(a, y)) & \exists y \neg(Q(b, f(y)) \vee R(a, y)) \\ & \exists y(\neg Q(b, f(y)) \wedge \neg R(a, y)) \\ & \neg Q(b, f(d)) \wedge \neg R(a, d) \end{array}$$

Y nos queda ver si el conjunto de cláusulas

$$\{Q(c, f(y)) \vee R(a, y);\ \neg Q(b, f(d));\ \neg R(a, d)\}$$

es insatisfacible.
La única resolvente que podemos hacer es con la primera y tercera cláusulas, sistuyendo y por d. La resolvente que nos queda es $Q(c, f(d))$. Y ya no podemos hacer más resolventes.
Como no podemos llegar a la cláusula vacía, el conjunto $\{\beta,\ \neg\alpha\}$ es satisfacible, luego $\beta \nvDash \alpha$.

(3) $\neg\alpha \vDash \neg\beta$.
Esto es lo mismo que comprobar si $\{\neg\alpha,\ \beta\}$ es insatisfacible. Pero esto ya lo hemos hecho en el apartado segundo, y hemos visto que no lo es.

(4) $\beta \to \alpha$ es satisfacible y refutable.
Hemos visto en el apartado segundo que $\beta \nvDash \alpha$, es decir, $\nvDash \beta \to \alpha$. Esto nos dice que $\beta \to \alpha$ no es universalmente válida, luego es refutable.
Veamos que es satisfacible, para lo cual nos basta con una estructura en la que la fórmula α se interprete como cierta. Esta estructura podría ser:

- Dominio: $D = \mathbb{N}$.
- Constantes: $a = 0$, $b = 1$.
- Funciones: $f(x) = 2x$.
- Predicados: $Q(x, y) \equiv x + y = 0$, $R(x, y) \equiv x \leq y$.

Puesto que para cualquier $y \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 \leq y$, entonces para cualquier $y \in \mathbb{N}$ es cierta la fórmula $R(a, y)$. De aquí vemos que $I(\alpha) = 1$ luego $I(\beta \to \alpha) = 1$.

Pregunta Test 4: Dada la fórmula

$$\forall y \exists x R(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$$

¿Cuáles de las siguientes son lógicamente equivalentes con ella?

(1) $\exists y \forall x(\neg R(x,y) \vee P(x,y))$
(2) $\exists y \exists z \forall x(\neg R(x,y) \vee P(x,z))$
(3) $\exists y \forall x \forall z(\neg R(x,y) \vee P(z,y))$
(4) $\forall x \forall z(\neg R(x,a) \vee P(z,b))$

Solución:
Vamos a tomar la fórmula y transformarla en otras equivalentes a ella.

$$\begin{array}{l}\forall y \exists x R(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)\\ \neg \forall y \exists x R(x,y) \vee \exists y \forall x P(x,y)\\ \exists y \forall x \neg R(x,y) \vee \exists y \forall x P(x,y)\end{array}$$

Y vemos que tenemos la disyunción de dos fórmulas. En cada una de estas subfórmulas hay un cuantificador $\forall$. Pero al estar separados por la conectiva $\vee$ no podemos agruparlos en 1. Por tanto, podemos descartar las fórmulas primera y segunda.

En cuanto a la cuarta vemos que no hay ningún cuantificador $\exists$. De hecho, la fórmula cuarta es la forma de Skolem de la fórmula inicial. Las variables cuantificadas con el cuantificador existencial han sido sustituidas por símbolos de constante. Cuando calculamos la forma de Skolem sabemos que la fórmula que obtenemos no es equivalente a la de partida.

La única opción posible es la segunda. Vamos a comprobarlo. Continuamos por donde nos hemos quedado.

$$\begin{array}{l}\exists y \forall x \neg R(x,y) \vee \exists y \forall x P(x,y)\\ \exists y(\forall x \neg R(x,y) \vee \forall x P(x,y))\\ \exists y(\forall x \neg R(x,y) \vee \forall z P(z,y))\\ \exists y \forall x(\neg R(x,y) \vee \forall z P(z,y))\\ \exists y \forall x \forall z(\neg R(x,y) \vee P(z,y)).\end{array}$$

Pregunta Test 5: ¿Cuáles de los siguientes pares de literales son unificables?
(1) $\{Q(z, g(x)), Q(h(x), y)\}$,
(2) $\{Q(z, g(x)), Q(h(x), z)\}$,
(3) $\{Q(a, g(f(a))), Q(x, g(a))\}$,
(4) $\{Q(x, g(f(a))), Q(g(z), g(z))\}$.

Solución:
Planteamos en cada caso un sistema de ecuaciones en términos y tratamos de llevarlo a uno en forma resuelta.
(1) $\{Q(z, g(x)), Q(h(x), y)\}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & h(x) \\ g(x) & = & y \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & h(x) \\ y & = & g(x) \end{array}\right.$$

Y ya está en forma resuelta. Los literales son unificables.
(2) $\{Q(z, g(x)), Q(h(x), z)\}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & h(x) \\ g(x) & = & z \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & h(x) \\ z & = & g(x) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} z & = & h(x) \\ h(x) & = & g(x) \end{array}\right.$$

Y vemos que no son unificables, pues hemos llegado a la ecuación $h(x) = g(x)$.
(3) $\{Q(a, g(f(a))), Q(x, g(a))\}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & x \\ g(f(a)) & = & g(a) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a \\ g(a) & = & g(f(a)) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a \\ a & = & f(a) \end{array}\right.$$

Y al haber llegado a la ecuación $a = f(a)$ concluimos que no son unificables.
(4) $\{Q(x, g(f(a))), Q(g(z), g(z))\}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & g(z) \\ g(f(a)) & = & g(z) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & g(z) \\ g(z) & = & g(f(a)) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & g(z) \\ z & = & f(a) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & g(f(a)) \\ z & = & f(a) \end{array}\right.$$

Hemos llegado a un sistema en forma resuelta luego los literales son unificables.

Pregunta Test 6: Señala las consecuencias lógicas que sean ciertas.

(1) $\{\exists x P(x)\} \vDash P(a)$.
(2) $\{\exists x Q(x)\} \vDash \exists x[\neg Q(a) \rightarrow \neg P(x)]$.
(3) $\{\exists x Q(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)\} \vDash P(a) \rightarrow \neg Q(a)$.
(4) $\{Q(a) \rightarrow \forall x P(x)\} \vDash \forall x Q(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

Solución:

Las resolvemos uno a uno.

(1) $\{\exists x P(x)\} \vDash P(a)$.

Tenemos que ver si el conjunto $\{\exists x P(x);\ \neg P(a)\}$ es insatisfacible. Una vez que pasamos las fórmulas a forma clausular nos queda $\{P(b);\ \neg P(a)\}$. Y este conjunto es satisfacible, pues no podemos hacer ninguna resolvente.

Si aquí al hacer la forma de Skolem de $\exists x P(x)$ hubiéramos sustituido la variable x por el símbolo de constante a (que no aparece en la fórmula) habríamos llegado a la conclusión de que la implicación es cierta (pues nuestro conjunto de cláusulas habría sido $\{P(a);\ \neg P(a)\}$. Sin embargo, la implicación es falsa como podemos ver con la estructura:

- Dominio: $D = \mathbb{N}$.
- Constante: $a = 1$.
- Predicado: $P(x) \equiv x$ es par.

(2) $\{\exists x Q(x)\} \vDash \exists x[\neg Q(a) \rightarrow \neg P(x)]$.

Comprobamos si $\{\exists x Q(x);\ \neg\exists x(\neg Q(a) \rightarrow \neg P(x))\}$ es o no insatisfacible. Calculamos la forma clausular de cada una de estas fórmulas.

$$\begin{array}{ll} \exists x Q(x) & \neg\exists x(\neg Q(a) \rightarrow \neg P(x)) \\ Q(b) & \forall x \neg(Q(a) \vee \neg P(x)) \\ & \forall x(\neg Q(a) \wedge P(x)) \end{array}$$

Y puesto que el conjunto de cláusulas $\{Q(b);\ \neg Q(a);\ P(x)\}$ es satisfacible (no es posible hacer ninguna resolvente), la implicación semántica es falsa.

Aquí al calcular la forma de Skolem de $\exists x Q(x)$, al igual que en el ejemplo anterior, no podemos sustituir la variable x por el símbolo de constante a ya que aparece en otra fórmula. De haberlo hecho habríamos llegado a un conjunto de cláusulas insatisfacible y a la conclusión errónea de que la implicación es cierta.

(3) $\{\exists x Q(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)\} \vDash P(a) \rightarrow \neg Q(a)$.

Aplicamos primero el teorema de la deducción. Lo que hay que comprobar entonces es si

$$\{\exists x Q(x) \rightarrow \exists x \neg P(x);\ P(a)\} \vDash \neg Q(a)$$

Y esto es equivalente a comprobar si es insatisfacible el conjunto

$$\{\exists x Q(x) \rightarrow \exists x \neg P(x);\ P(a);\ Q(a)\}$$

Calculamos la forma clausular de la primera fórmula:

$$\begin{array}{l} \exists x Q(x) \rightarrow \exists x \neg P(x) \\ \neg\exists x Q(x) \vee \exists x \neg P(x) \\ \forall x \neg Q(x) \vee \exists y \neg P(y) \\ \exists y(\forall x \neg Q(x) \vee \neg P(y)) \\ \exists y \forall x(\neg Q(x) \vee \neg P(y)) \\ \forall x(\neg Q(x) \vee \neg P(c)) \end{array}$$

Y puesto que el conjunto de cláusulas $\{\neg Q(x) \vee \neg P(c);\ P(a);\ Q(a)\}$ es satisfacible (la única resolvente que podemos hacer en con las cláusulas primera y tercera, y nos da $\neg P(c)$) concluimos que la implicación es falsa.

El mismo comentario que hemos hecho en los dos apartados anteriores vale también ahora.

(4) $\{Q(a) \rightarrow \forall x P(x)\} \vDash \forall x Q(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

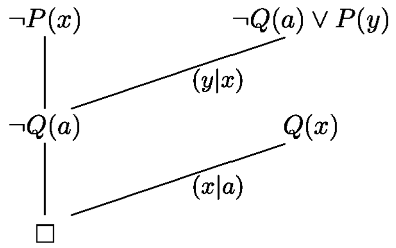
Procediendo igual que en el apartado anterior hemos de ver si el conjunto

$$\{Q(a) \rightarrow \forall x P(x);\ \forall x Q(x);\ \neg\exists x P(x)\}$$

es insatisfacible.
Calculamos la forma clausular:

$$
\begin{array}{lll}
Q(a) \to \forall x P(x) & \forall x Q(x) & \neg \exists x P(x) \\
\neg Q(a) \lor \forall x P(x) & & \forall x \neg P(x) \\
\forall x(\neg Q(a) \lor P(x) & &
\end{array}
$$

Buscamos, a partir del conjunto $\{\neg Q(a) \lor P(x);\ Q(x);\ \neg P(x)\}$ una deducción de la cláusula vacía.



Vemos en este caso que la implicación es cierta.