# LMD

## (01/07/2016)

### Preguntas

1. Sea $\mathbf{B}$ un álgebra de Boole, y sean $x, y, z \in B$. Demuestre que se da necesariamente la igualdad $xy + yz + zx = (x + y)(y + z)(z + x)$.
   Sea ahora $f : B^4 \to B$ la función dada por:

$$f(x, y, z, t) = \begin{cases} xy + yz + zx & , \text{si } x = t \\ (y + z)(z + t)(t + y) & , \text{si } x \neq t \end{cases}$$

   Calcule la forma normal canónica disyuntiva de f. Encuentre una expresión óptima como suma de productos, tanto de f como de $\overline{f}$.

2. Sean las siguientes fórmulas del lenguaje proposicional:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (r \vee t) \to (p \vee s), \\ \alpha_2 &= (\neg r \wedge \neg s) \to (\neg p \wedge (p \vee q)), \\ \alpha_3 &= (r \to \neg p) \wedge \neg t \wedge (\neg s \vee t), \\ \beta &= (s \to t \vee r) \to (s \wedge \neg(r \vee \neg t)). \end{aligned}$$

   y sea $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Estudie si $\Gamma \models \beta$ (es decir, si $\beta$ es consecuencia semántica del conjunto $\Gamma$) y, caso de **no** serlo, dé una interpretación que lo muestre.

3. Dado un lenguaje de primer orden con dos símbolos de constante $a, b$ y dos símbolos de predicado binarios $e, r$ consideramos para él la estructura $\mathbf{A}$ siguiente:
   - $A = \mathbb{N}$.
   - $(a)^A = 0$, $(b)^A = 1$.
   - $\langle x, y \rangle \in (e)^A$ sii, por definición, $x = y$ (es decir, $(e)^A = \approx$).
   - $\langle x, y \rangle \in (r)^A$ sii, por definición, $x$ es múltiplo de $y$.

   Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes fórmulas:

   a) $r(a, b)$.
   b) $\forall x r(a, x)$.
   c) $\forall x \forall y (r(x, y) \to \neg e(x, y))$.
   d) $\forall x (\exists y (r(x, y) \wedge \forall z (r(y, z) \to e(z, y) \vee e(z, b))))$.