1. El determinante de la matriz con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   a) es congruente con 4^4 módulo 7.
   b) es congruente con 3^3 módulo 7.
   c) es 0.
   d) es 4!.

2. El sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 0 \\ x + ay + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

   a) siempre es compatible indeterminado.
   b) es incompatible para algunos valores de a.
   c) es siempre compatible determinado.
   d) es compatible, pero es determinado o indeterminado dependiendo de a.

3. El rango de la matriz sobre $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

   a) es 4.
   b) es 3.
   c) es 2.
   d) no puede calcularse.

4. Dados U y W subespacios de $\mathbb{Z}_5^5$ con $\dim U = 2$ y $\dim W = 3$ ¿cuál de las siguientes situaciones no puede ocurrir?

   a) $\dim(U+W) = 4$ y $\dim(U \cap W) = 1$
   b) $\dim(U+W) = 4$ y $\dim(U \cap W) = 2$
   c) $\dim(U+W) = 3$ y $\dim(U \cap W) = 2$
   d) $\dim(U+W) = 5$ y $\dim(U \cap W) = 0$

5. Si B es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $B' = \{(1,2),(1,-3)\}$ es otra base, el vector cuyas coordenadas respecto de B' son $(4,-2)$ es

   a) es $(2,14)$.
   b) es $(2,2)$.
   c) es $(4,-2)$.
   d) es $(2,-1)$.

6. En $\mathbb{Q}^4$ se considera el subespacio generado por

$$\{(1,0,0,-1),(1,-1,1,-1)\}$$

   ¿cuál de estos sistemas de ecuaciones corresponde a unas ecuaciones cartesianas de este subespacio?

a) $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y+z=0 \\ x+t=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0 \end{cases}$

d) $\{ \; x+y+z+t=0$

7. Sea $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$ y $W =< (1,1,1),(1,2,1) >$. Una base de $U \cap W$ es

   a) $\{(1,-2,1)\}$
   b) $\{(1,-2,1),(1,0,-1)\}$
   c) $\{(1,0,-1)\}$
   d) $\{(1,1,1),(1,-2,1)\}$

8. Para una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ ¿cuál de las siguientes situaciones **no** puede ocurrir?

   a) $\dim(N(f)) = 1$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
   b) $\dim(N(f)) = 2$ y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.
   c) f es inyectiva.
   d) f es sobreyectiva.

9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$f(x,y,z) = (x+y, x+z, 2x+y+z, 0)$$

   una base del núcleo de f es

   a) $\{(1,-1,-1)\}$
   b) $\{(1,-1,-1),(0,0,1)\}$
   c) $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$
   d) $\{(2,1,1)\}$

10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$f(x,y,z) = (x+y, x+z, 2x+y+z, 0)$$

   una base de la imagen de f es

   a) $\{(1,1,2,0),(1,0,1,0),(0,1,1,0)\}$
   b) $\{(1,0,1,0),(0,1,1,0)\}$
   c) $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$
   d) $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$

11. Sean A y B dos conjuntos de cardinales 2 y 3 respectivamente. El cardinal del conjunto

$$\{f : \mathcal{P}(A) \to A \times B \,/\, f \text{ es aplicación } \}$$

   es

   a) es 6^4.
   b) es 2^8.

c) es 4^6.

d) es 3^{12}.

12. Dado el conjunto $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y los subconjuntos $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 8, 9\}$ y $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, entonces el conjunto $((A \cap (B \cup A)) \cup C) \cap (A \cup \overline{B})$ es igual a

a) $\{1, 3, 4, 5, 6\}$

b) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

c) $\emptyset$

d) $\{3, 5\}$

13. Sea X un conjunto con 7 elementos y $\emptyset \neq A \neq X$ un subconjunto de X. Entonces el cardinal de $\mathcal{P}(A \times \overline{A})$ **no** puede ser

a) 2^6

b) 2^7

c) 2^{10}

d) 2^{12}

14. Señalar la respuesta correcta. La expresión $f(x) = x^2 - 4x + 4$

a) define una aplicación $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ que no es inyectiva ni sobreyectiva.

b) define una aplicación inyectiva $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$.

c) define una aplicación sobreyectiva $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$.

d) no define una aplicación $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$.

15. En el conjunto $A = \{a, b, c\}$, consideramos la operación binaria dada por la tabla siguiente:

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	a	b	c

Entonces

a) $(A, *)$ no puede ser un grupo puesto que no existe ninguno con 3 elementos.

b) $(A, *)$ no es un grupo ya que no existe el neutro para la operación.

c) $(A, *)$ es un grupo no conmutativo.

d) $(A, *)$ es un grupo isomorfo a $(\mathbb{Z}_3, +)$.

16. Sea $H = \{\sigma \in S_9 \,/\, \sigma(1) = 1 \text{ y } \sigma(9) = 9\}$. Entonces

a) H no es un subgrupo de S_9 pero la composición de dos elementos de H está en H.

b) H es un subgrupo de S_9 con $7!$ elementos.

c) H es un subgrupo de S_9 con 2^7 elementos.

d) H no es subgrupo de S_9 pero el inverso de todo elemento de H está en H.

17. Sea $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)(3\,4\,7)(4\,8\,9)$. Entonces

a) $\sigma^{126} = \sigma$

b) $\sigma^{126} = \sigma^{-1}$

c) $\sigma^{126} = \sigma^{2}$

d) $\sigma^{126} = \sigma^{36}$

18. Los valores propios de la matriz en $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) son $\{0, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$.

b) son $\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

c) son $\{1, 2\}$.

d) no son números reales.

19. De una matriz cuadrada A de orden 4 sobre $\mathbb{Z}_5$ sabemos que tiene dos subespacios propios dados por

$$V_1 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ t=0 \end{array} \right.$$

$$V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x=z \\ y=0 \end{array} \right.$$

señalar la respuesta correcta:

a) No es diagonalizable puesto que sólo tiene dos subespacios propios y A es de orden 4.

b) No podemos asegurar que sea diagonalizable puesto que no conocemos los valores propios.

c) Es diagonalizable y una matriz de paso es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) Es diagonalizable y una matriz de paso es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

20. Consideremos la aplicación f definida del grupo $(\mathbb{Z}, +)$ en sí mismo por

$$f(x) = 2008 \cdot x$$

entonces

a) f es un homomorfismo de grupos.

b) f no es homomorfismo de grupos puesto que $f(1) \neq 1$.

c) f es homomorfismo de grupos y su núcleo es el conjunto formado por todos los enteros múltiplos de 2008.

d) f no es un homomorfismo de grupos ya que su imagen no es todo $\mathbb{Z}$.