UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES I
GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE. 15 de septiembre de 2015

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.

[3] Ejercicio 1.- Sea $A \in M_N(\mathbb{R})$ y denotemos A^* su matriz traspuesta. Demuestra que:

1. $\left(e^{At}\right)^* = e^{A^*t}$.
2. Si A es antisimétrica, es decir, $A^* = -A$, entonces e^{At} es ortogonal para todo $t \in \mathbb{R}$. [1]
3. Si A es antisimétrica y $x(t)$ es una solución del sistema $x' = Ax$, entonces
$$|x(t)| = |x(0)|, \quad t \in \mathbb{R}.$$ [2]

[4] Ejercicio 2.- Se considera el sistema lineal

$$x' = Ax, \tag{1}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R}.$$

1. Discute cúal es la forma canónica real de Jordan de la matriz asociada al sistema (1) en función del valor de a.
2. Calcula la solución de (1) cuando $a = 1$.
3. ¿Tiene (1) alguna solución periódica para algún valor de a? En caso afirmativo, pon un ejemplo de término independiente $b \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para el cual el sistema $x' = -A^*x + b(t)$ con ese valor de a NO admite solución 2π-periódica.

[3] Ejercicio 3.- Sabiendo que la ecuación de Riccati

$$x' = \frac{x}{t} + tx^2 - t^3$$

admite una solución que es un polinomio de grado uno, halla la solución que cumple $x(1) = 0$ y determina el mayor intervalo en el que está definida.

[1] Se dice que $B \in M_N(\mathbb{R})$ es ortogonal si $B^{-1} = B^*$

[2] Recuerda que dada $B \in M_N(\mathbb{R})$, $< x, By >=< B^*x, y >, \; x, y \in \mathbb{R}^N$.