

## TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 1

– Grado en Matemáticas –  
Curso 2011/12

### Nombre:

Razonar todas las respuestas

1. Sea  $X$  un conjunto y  $A \subset X$ . Se define una topología mediante

$$\tau = \{O \subset X; A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$

- (a) Probar que  $\beta = \{\{x\} \cup A; x \in X\}$  es una base de  $\tau$ .
  - (b) Si  $B \subset X$ , hallar el interior y la adherencia de  $B$ .
  - (c) ¿Qué topología conocida es  $\tau|_A$ ?
2. Para  $X = [-1, 1]$ , probar que  $\tau = \{O \subset X; 0 \notin O\} \cup \{O \subset X; (-1, 1) \subset O\}$  es una topología en  $X$ . Hallar una base de entornos para  $x \in X$  con el menor número de entornos. Hallad el interior y adherencia del conjunto  $A = [0, 1]$ .
3. Sea  $A = [0, 1) \cup (2, 3) \cup \{5\}$  con la topología usual.
- (a) Estudiar si  $\{5\}$  y  $(2, 3)$  son abiertos o cerrados en  $A$ .
  - (b) Hallar el interior y la adherencia en  $A$  de  $(0, 1)$ .
  - (c) Probar que  $\{\{5\}\}$  es una base de entornos de  $x = 5$  en  $A$ .

## Soluciones

1. Sea  $X$  un conjunto y  $A \subset X$ . Se define una topología mediante

$$\tau = \{O \subset X; A \subset O\} \cup \{\emptyset\}.$$

- (a) Probar que  $\beta = \{\{x\} \cup A; x \in X\}$  es una base de  $\tau$ .

Los conjuntos son abiertos ya que contienen a  $O$ . Por otro lado, si  $O \in \tau$  y  $x \in O$ , entonces  $\{x\} \cup A \subset O$  ya que  $A \subset O$ . Por tanto,  $x \in \{x\} \cup A \subset O$ .

- (b) Si  $B \subset X$ , hallar el interior y la adherencia de  $B$ .

El interior de  $B$  es el mayor conjunto abierto dentro de  $B$ . En particular,  $\text{int}(B) \subset A$ . Si  $B \supset A$ , entonces  $B$  es abierto y coincide con su interior. En caso contrario,  $\text{int}(B) = \emptyset$  ya que si no,  $A \subset \text{int}(B) \subset B$ , lo cual no es posible.

Los conjuntos cerrados  $F$  son aquéllos tales que  $A \subset X - F$  o  $F = X$ , es decir,  $F \subset X - A$  o  $F = X$ . Ya que  $\overline{B}$  es el menor cerrado que contiene a  $B$ , si  $B \subset X - A$ , entonces  $\overline{B} = B$ . En caso contrario, es decir, si  $B \not\subset X - A$ , entonces  $\overline{B} = X$ .

- (c) ¿Qué topología conocida es  $\tau|_A$ ?

$$\tau|_A = \{O \cap A; O \in \tau\} \cup \{\emptyset\} = \{A\} \cup \{\emptyset\}.$$

Por tanto,  $\tau|_A$  es la topología trivial de  $A$ .

2. Para  $X = [-1, 1]$ , probar que  $\tau = \{O \subset X; 0 \notin O\} \cup \{O \subset X; (-1, 1) \subset O\}$  es una topología en  $X$ . Hallar una base de entornos para  $x \in X$  con el menor número de entornos. Hallad el interior y adherencia del conjunto  $A = [0, 1]$ .

A los abiertos de la primera familia los llamaremos del primer tipo y los de la segunda, del segundo tipo. El conjunto vacío está en  $\tau$  por definición y por otro lado,  $X$  pertenece al del segundo tipo.

Sea  $\{O_i\}_{i \in I} \subset \tau$ . Si alguno de los abiertos, llamado  $O_{i_0}$ , es del segundo tipo, entonces

$$(-1, 1) \subset O_{i_0} \subset \cup_{i \in I} O_i,$$

luego la unión es del segundo tipo. En caso contrario, es decir, si todos son del primer tipo, entonces ningún abierto contiene a  $x = 0$  y menos aún, la unión de todos.

Sea  $O_1, O_2 \in \tau$ . Es evidente que si los dos son del primer tipo, la intersección no contiene a  $x = 0$ ; que si los dos son del segundo tipo, ambos contienen a  $(-1, 1)$ , y por tanto, también la intersección. Finalmente, si  $O_1$  es del primer tipo y  $O_2$  del segundo, entonces  $0 \notin O_1$  y por tanto,  $0 \notin O_1 \cap O_2$ .

Una base de entornos de  $x$  es:

$$\beta_x = \begin{cases} \{(-1, 1)\} & \text{si } x = 0 \\ \{\{x\}\} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Es evidente que en ambos casos, los conjuntos son abiertos, luego entornos de todos sus puntos. Por otro lado, si  $U$  es un entorno de 0, existe  $O \in \tau$  tal que  $0 \in O \subset U$ . Entonces  $O$  contiene al 0, luego tiene que ser del segundo tipo, en particular,  $(-1, 1) \subset O$ , probando que  $0 \in (-1, 1) \subset U$ . Si  $x \neq 0$  y  $U$  es un entorno suyo, entonces  $x \in \{x\} \subset U$ .

El conjunto  $(0, 1]$  es abierto porque no tiene a  $x = 0$ . Veamos si 0 es interior a  $A$ . En tal caso,  $(-1, 1) \subset A$ , ya que  $(-1, 1)$  es el elemento de la base de entornos de  $x = 0$ . Como esto no es posible,  $\text{int}(A) = (0, 1]$ . Para la adherencia, si  $x \notin A$ , entonces  $x \neq 0$ , luego  $\{x\} \cap A = \emptyset$  y así no es adherente. Esto dice que  $\overline{A} = A$  (también  $A$  es cerrado ya que su complementario, que es  $[-1, 0)$ , es abierto (del primer tipo)).

3. Sea  $A = [0, 1) \cup (2, 3) \cup \{5\}$  con la topología usual.

(a) Estudiar si  $\{5\}$  y  $(2, 3)$  son abiertos o cerrados en  $A$ .

El conjunto  $\{5\}$  es abierto y cerrado en  $A$  ya que  $\{5\} = (4, 6) \cap A = [4, 6] \cap A$  y  $(4, 6)$  y  $[4, 6]$  son abiertos y cerrados de  $\mathbb{R}$ , respectivamente.

El conjunto  $(2, 3)$  es abierto y cerrado en  $A$  ya que  $(2, 3) = (2, 3) \cap A = [2, 3] \cap A$  y  $(2, 3)$  y  $[2, 3]$  son abiertos y cerrados de  $\mathbb{R}$ , respectivamente.

(b) Hallar el interior y la adherencia en  $A$  de  $(0, 1)$ .

El conjunto  $(0, 1)$  es abierto en  $A$ :  $(0, 1) = (0, 1) \cap A$ , luego coincide con su interior. Por otro lado,  $[0, 1)$  es cerrado en  $A$  ya que  $[0, 1) = [0, 1] \cap A$  y  $[0, 1]$  es cerrado de  $\mathbb{R}$ . En particular, la adherencia de  $(0, 1)$  en  $A$  está

contenida en  $[0, 1)$ . Finalmente,  $x = 0$  es adherente a  $A$  ya que una base de entornos de 0 en  $A$  es  $\{[0, \epsilon); 0 < \epsilon < 1\}$  pues  $[0, \epsilon) = (-\epsilon, \epsilon) \cap A$  y  $\{(-\epsilon, \epsilon); 0 < \epsilon < 1\}$  es una base de entornos de  $x = 0$  en  $\mathbb{R}$ . Por tanto la adherencia del conjunto es  $[0, 1)$ .

- (c) Probar que  $\{\{5\}\}$  es una base de entornos de  $x = 5$  en  $A$ .

Ya se ha visto que  $\{5\}$  es un abierto en  $A$ , luego un entorno de  $x = 5$  en  $A$ . Como todo entorno de 5 en  $A$  debe contener a  $x = 5$ , en particular,  $\{5\}$  está contenido en dicho entorno. Otra forma es: una base de entornos de  $x = 5$  en la topología usual de  $\mathbb{R}$  es  $\{(5 - \epsilon, 5 + \epsilon); 0 < \epsilon < 1\}$ . Por tanto, una base de entornos de 5 en  $A$  es

$$\{(5 - \epsilon, 5 + \epsilon) \cap A; 0 < \epsilon < 1\} = \{\{5\}\}.$$