Prueba de clase 27 de Marzo de 2015

Alumno:______________________________________ **D.N.I.:**______________

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS TEST[1]

	$a)$	$b)$	$c)$	$d)$
Pregunta 1	V	F	V	F
Pregunta 2	F	V	F	V
Pregunta 3	F	F	V	V
Pregunta 4	F	V	F	F
Pregunta 5	F	V	F	F

PREGUNTAS TEST.

Ejercicio 1. *En un álgebra de Boole B se definen las operaciones $a \uparrow b = \overline{ab}$ y $a \downarrow b = \overline{a+b}$. Entonces:*

a) $(x \downarrow y) \uparrow z = \overline{x} \uparrow (y \downarrow \overline{z})$

b) $(x \downarrow y) \uparrow z = (x \uparrow y) \downarrow (y \uparrow z)$

c) $(x \downarrow z) \uparrow (y \downarrow z) = x + y + z$

d) $\overline{x \downarrow y} = \overline{x \uparrow y}$

Ejercicio 2. *Denotamos por $D(m)$ al conjunto de los divisores del número natural m dotados con las operaciones $\vee =$m.c.m. y $\wedge =$m.c.d. Entonces:*

a) $D(132)$ *es un álgebra de Boole con 3 coátomos: 33,22 y 6.*

b) $D(165)$ *es un álgebra de Boole con 3 coátomos: 33,55 y 15.*

c) $D(24)$ *es un álgebra de Boole con 3 átomos: 2,4 y 8.*

d) $D(110)$ *es un álgebra de Boole con 3 átomos: 2,5 y 11.*

Ejercicio 3. *Dadas las funciones booleanas $f, g : \mathbb{B}^5 \to \mathbb{B}$ dadas por*

$$f = m_0 + m_5 + m_{15} + m_{21} + m_{23} + m_{24} + m_{27} + m_{31}$$
$$g = M_0 \cdot M_1 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_{10} \cdot M_{15} \cdot M_{22} \cdot M_{23} \cdot M_{28} \cdot M_{30}$$

se tiene:

a) $f + g = m_5 + m_{21} + m_{24} + m_{27} + m_{31}$

b) $fg = m_1 + m_4 + m_6 + m_{10} + m_{22} + m_{28} + m_{30}$

c) $\overline{f} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{14} + m_{16} + m_{17} + m_{18} + m_{19} + m_{20} + m_{22} + m_{25} + m_{26} + m_{28} + m_{29} + m_{30}$

d) $\overline{g} = m_0 + m_1 + m_4 + m_6 + m_{10} + m_{15} + m_{22} + m_{23} + m_{28} + m_{30}$

Ejercicio 4. *Señala si cada una de las siguientes afirmaciones es equivalentes a*

$$\Gamma \vDash \alpha \to (\beta \to \neg\gamma)$$

[1] Cada casilla del cuadro debe ser rellenada con V (verdadero) o F (falso).

a) $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \vDash \gamma$

b) $\Gamma \cup \{\beta\} \vDash \alpha \to \neg\gamma$

c) $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \neg\gamma\}$ *es satisfacible.*

d) $\Gamma \cup \{\alpha \to \beta, \gamma\}$ *es insatisfacible.*

Ejercicio 5. *Indica en cada caso si el siguiente conjunto de fórmulas es insatisfacible*

a) $\{a \to b,\ a \to (b \to c),\ \neg c\}$

b) $\{a \to b,\ (a \to b) \to c,\ \neg c\}$

c) $\{a \to b,\ c \to (a \to b),\ \neg c\}$

d) $\{\neg(a \to b),\ a \to (b \to c),\ c\}$

FIN DE LAS PREGUNTAS TEST

Ejercicio 6. *Sea* $f : \mathbb{B}^5 \to \mathbb{B}$ *la función dada por*

$$f(x,y,z,t,u) = \overline{x}yztu + xy\overline{z}\overline{t}\overline{u} + xyzt\overline{u} + xz(\overline{y}u \oplus ut) + (x \downarrow u)yzt + xy\overline{t}(z \oplus u)$$

Calcula una expresión reducida de f como suma de productos, y expresa $\overline{f}$ usando únicamente los operadores **producto** *y* **complemento**.

Solución 1. *En primer lugar calculamos los mintérminos que describen a esta función; algunos vienen ya determinados:*

$\overline{x}yztu$	01111	(15)
$xy\overline{z}\overline{t}\overline{u}$	11000	(24)
$xyzt\overline{u}$	11110	(30)

calculamos el resto:

$$xz(\overline{y}u \oplus ut) = xz(\overline{y}u\overline{ut} + \overline{\overline{y}u}ut) = xz(\overline{y}u(\overline{u}+\overline{t}) + (y+\overline{u})ut) =$$

$$= x\overline{y}z\overline{t}u + xyztu$$

lo que nos proporciona los mintérminos 10101, (21) *y* 11111, (31). *Ahora*

$$(x \downarrow u)yzt = (\overline{x+u})yzt = \overline{x}\overline{u}yzt$$

que da el mintérmino 01110, (14). *Por último*

$$xy\overline{t}(z \oplus u) = xy\overline{t}(z\overline{u} + \overline{z}u) = xyz\overline{t}\overline{u} + xy\overline{z}\overline{t}u$$

que son los mintérminos 11100, (28) *y* 11001, (25). *Así que*

$$f(x,y,z,t,u) = \Sigma_5 m(14,15,21,24,25,28,30,31)$$

Usando el algoritmo de Quine-McClusky, por ejemplo, realizamos la minimización.

Procedemos a obtener las agrupaciones

nº de unos	minterm-binario	minterm-decimal
2	11000	24
3	01110	14
	10101	21
	11001	25
	11100	28
3	01111	15
	11110	30
5	11111	31

Agrupación	minterm implicados
1100_	24,25
11_00	24,28
0111_	14,15
_1110	14,30
111_0	28,30
_1111	15,31
1111_	30,31

con lo que en la primera tabla el mintérmino 21 es un implicante primo. Calculando las agrupaciones en la tabla anterior aparece

$$\_111\_,\ (14, 30, 15, 31)$$

y nos quedan 3 implicantes primos en la segunda tabla: 1100_, 11_00, 111_0.

Procedemos ahora a seleccionar qué implicantes primos son esenciales. Con los tres i.p. esenciales solo queda por cubrir el mintérmino 28, y podemos optar por cualquiera de los dos i.p. restantes. Así que tenemos dos posibles soluciones:

$$f(x, y, z, t, u) = x\overline{y}z\overline{t}u + xy\overline{z}\overline{t} + yzt + xy\overline{t}\overline{u}$$

o bien

$$f(x, y, z, t, u) = x\overline{y}z\overline{t}u + xy\overline{z}\overline{t} + yzt + xyz\overline{u}$$

Para dar una expresión de $\overline{f}$ usamos una reducida de f y complementamos:

$$\overline{f}(x, y, z, t, u) = \overline{x\overline{y}z\overline{t}u + xy\overline{z}\overline{t} + yzt + xy\overline{t}\overline{u}} =$$

$$= \overline{(x\overline{y}z\overline{t}u)}\,\overline{(xy\overline{z}\overline{t})}\,\overline{(yzt)}\,\overline{(xy\overline{t}\overline{u})}$$

que es una expresión en la que solo se usan productos y complementos.

Tabla de i.p.

		14	15	21	24	25	28	30	31
⋆	10101			✓					
⋆	1100_				✓	✓			
	11_00				✓		✓		
	111_0						✓	✓	
⋆	_111_	✓	✓					✓	✓
		✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓

Ejercicio 7. *Dadas las fórmulas:*

- $\alpha_1 = a \wedge b \rightarrow c \vee d$.
- $\alpha_2 = c \rightarrow ((b \rightarrow a) \wedge (b \rightarrow \neg a))$.
- $\alpha_3 = e \rightarrow (a \leftrightarrow \neg c)$.
- $\alpha_4 = a \vee (c \wedge (\neg b \rightarrow d))$.
- $\beta = (c \rightarrow b) \rightarrow (a \wedge d)$.

estudia si es cierto que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vDash \beta$. *Caso de no ser cierto, da una interpretación que lo muestre.*

Solución 2. *Se trata de estudiar si es cierta la consecuencia lógica*

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \vDash (c \rightarrow b) \rightarrow (a \wedge d)$$

Así que usando el Teorema de la Deducción es equivalente a

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, c \rightarrow b\} \vDash (a \wedge d)$$

y transformando en un problema de insatisfacibilidad de un conjunto de fórmulas queda

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, c \rightarrow b, \neg(a \wedge d)\} \vDash \square$$

Calculamos la forma clausular de cada una de las fórmulas del conjunto:

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 \equiv \neg(a \wedge b) \vee (c \vee d) \equiv \neg a \vee \neg b \vee c \vee d \\
\alpha_2 \equiv \neg c \vee ((\neg b \vee a) \wedge (\neg b \vee \neg a)) \equiv (\neg c \vee \neg b \vee a) \wedge (\neg c \vee \neg b \vee \neg a) \\
\alpha_3 \equiv \neg e \vee ((\neg a \vee \neg c) \wedge (c \vee a)) \equiv (\neg e \vee \neg a \vee \neg c) \wedge (\neg e \vee c \vee a) \\
\alpha_4 \equiv a \vee (c \wedge (b \vee d)) \equiv (a \vee c) \wedge (a \vee b \vee d) \\
c \rightarrow b \equiv \neg c \vee b \\
\neg(a \wedge d) \equiv \neg a \vee \neg d
\end{array}$$

Ahora sustituyendo cada fórmula por las cláusulas a las que da lugar, el problema original es equivalente a

$$\{\neg a \vee \neg b \vee c \vee d,\ \neg c \vee \neg b \vee a,\ \neg c \vee \neg b \vee \neg a,\ \neg e \vee \neg a \vee \neg c,\ \neg e \vee c \vee a,\ a \vee c,\ a \vee b \vee d,\ \neg c \vee b,\ \neg a \vee \neg d\} \vDash \square$$

Para el que podemos usar el algoritmo de Davis-Putnam. Hay un literal puro (paso 2), $\lambda = \neg e$, *así que eliminamos las cláusulas donde aparece:*

$$\{\neg a \vee \neg b \vee c \vee d,\ \neg c \vee \neg b \vee a,\ \neg c \vee \neg b \vee \neg a,\ a \vee b \vee d,\ \neg c \vee b,\ \neg a \vee \neg d\}$$

Ahora, como no hay cláusulas unit ni literales puros, usamos el Paso 3, y eligiendo un literal cualquiera, por ejemplo a, *obtenemos dos conjuntos que deben ser ambos insatisfacibles para que lo sea el inicial. Cuando* $\lambda = a$ *queda*

$$\{\neg b \vee c \vee d,\ \neg c \vee \neg b,\ \neg c \vee b,\ \neg d\}$$

donde aparece la cláusula unit $\lambda = \neg d$ *y aplicamos el Paso 1:*

$$\{\neg b \vee c,\ \neg c \vee \neg b,\ \neg c \vee b\}$$

y este conjunto es satisfacible para la interpretación $I(b) = 0, I(c) = 0$. *No hace falta entonces examinar el conjunto de cláusulas para* $\lambda = \neg a$.

Así que la consecuencia lógica no ocurre, y la interpretación que lo prueba se ha obtenido en el algoritmo

$$I(\neg e) = 1,\ I(a) = 1,\ I(\neg d) = 1,\ I(b) = 0,\ I(c) = 0$$