Cálculo

1ºA Grado en Ingeniería Informática

Primer Parcial (I)

Curso 2013/2014

1. **(2 puntos)** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$x_1 = 0$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x_n}\ ,\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.

b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1} = \sqrt{1/2} > x_1 = 0$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 < x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n < x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n < x_{n+1} \Rightarrow 1+x_n < 1+x_{n+1} \Rightarrow \sqrt{1+x_n} < \sqrt{1+x_{n+1}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x_n} < \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por $x_1 = 0$. Veamos que está acotada superiormente por 1. Esto es, que $x_n \leq 1\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 0 \leq 1$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 1$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 1$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \leq 1 \Rightarrow 1+x_n \leq 2 \Rightarrow \sqrt{1+x_n} \leq \sqrt{2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 1 \Rightarrow x_{n+1} \leq 1$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

b) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(1+x) \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 1$ y $x = -1/2$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que 0. El motivo es que $0 \leq x_n \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 1$.

2. **(2 puntos)** Calcula el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{\frac{1! + 3! + 5! \cdots (2n-1)!}{(2n-1)!}\right\}$$

Solución: Observamos que tenemos un cociente donde el denominador, claramente, crece a infinito. Aplicamos el criterio de Stolz y, si llamamos a_n al numerador y b_n al denominador, tendremos que estudiar el límite del siguiente cociente:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \frac{1! + 3! + 5! \cdots (2n-1)! + (2n+1)! - [1! + 3! + 5! \cdots (2n-1)!]}{(2n+1)! - (2n-1)!} \\ &= \frac{(2n+1)!}{(2n+1)! - (2n-1)!} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)![(2n+1)(2n) - 1]} \\ &= \frac{(2n+1)(2n)}{(2n+1)(2n) - 1} = \frac{4n^2 + 2n}{4n^2 + 2n - 1} \to 1\end{aligned}$$

ya que se trata de un cociente de polinomios del mismo grado y con el mismo coeficiente principal.

Como $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 1$, aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim\left\{\frac{1! + 3! + 5! \cdots (2n-1)!}{(2n-1)!}\right\} = 1$$

3. **(3 puntos)** Calcula el límite de la sigiente sucesión:

$$\left\{\log(n)\log\left(1 + \frac{1}{\log(n^2+1)}\right)\right\}$$

Como consecuencia del límite anterior deduce el carácter de la serie:

$$\sum \log\left(1+\frac{1}{\log(n^2+1)}\right)$$

Solución: Por las propiedades del logaritmo, la sucesión dada se puede reescribir como sigue:

$$\left\{\log\left[\left(1+\frac{1}{\log(n^2+1)}\right)^{\log(n)}\right]\right\}$$

Como la sucesión $\left(1+\frac{1}{\log(n^2+1)}\right)^{\log(n)}$ presenta una indeterminación del tipo "1^∞", aplicamos la regla del número e:

$$\log(n)\left[1+\frac{1}{\log(n^2+1)}-1\right]=\log(n)\left[\frac{1}{\log(n^2+1)}\right]=\frac{\log(n)}{\log(n^2+1)}$$

$$\frac{\log(n)}{\log\left(n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\frac{\log(n)}{2\log(n)+\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=$$

$$\frac{\frac{\log(n)}{\log(n)}}{\frac{2\log(n)}{\log(n)}+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\log(n)}}=\frac{1}{2+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\log(n)}}\to 1/2$$

Por tanto, $\left\{\left(1+\frac{1}{\log(n^2+1)}\right)^{\log(n)}\right\}\to e^{1/2}$ y de aquí se tiene que:

$$\left\{\log(n)\log\left(1+\frac{1}{\log(n^2+1)}\right)\right\}=\left\{\log\left[\left(1+\frac{1}{\log(n^2+1)}\right)^{\log(n)}\right]\right\}\to\log(e^{1/2})=\frac{1}{2}$$

Vamos ahora a deducir el carácter de la serie $\sum\log\left(1+\frac{1}{\log(n^2+1)}\right)$. Basta con escribir la sucesión que acabamos de estudiar de la siguiente forma:

$$\log(n)\log\left(1+\frac{1}{\log(n^2+1)}\right)=\frac{\log\left(1+\frac{1}{\log(n^2+1)}\right)}{\frac{1}{\log(n)}}\to\frac{1}{2}\neq 0$$

Haciendo uso del criterio de comparación por paso al límite, ambas series, la del numerador y la del denominador ($\sum\frac{1}{\log(n)}$) tienen el mismo carácter. Como es conocido que la serie $\sum\frac{1}{\log(n)}$ es divergente, la serie que nos proponen también es divergente.

4. **(3 puntos)** Estudia la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{3^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

b) $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(-1)^n}{4^n}-\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)$. Si es convergente, calcula su suma.

Solución:

a) Aplicamos el criterio del cociente, ya que aparecen factores en la expresión del término general de la serie. Así, si llamamos $a_n = \frac{3^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$ tenemos que estudiar el límite del cociente siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3^n}=\frac{3}{2n+1}\to 0<1$$

Por tanto, la serie dada es convergente.

b) La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(-1)^n}{4^n}-\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-1}{4}\right)^n-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{4}|<1$ y $|\frac{2}{3}|<1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\right)$, nos queda entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{4^n}-\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\\&=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}}\right)-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{4}{5}-\frac{1}{3}3=\frac{4}{5}-1=-\frac{1}{5}\end{aligned}$$

Granada, 27 de noviembre de 2013