Métodos Numéricos II. 2º curso del Grado en Matemáticas
Segunda prueba escrita. Curso 2013/14

1. Un estudiante del grupo B le cuenta a su amigo del grupo A que la fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio de su examen de Métodos Numéricos II era la fórmula de Newton–Cotes abierta para $n = 4$, esto es,

$$\int_a^b f(t)\,dt = a_0\, f(x_1) + a_1\, f(x_2) + a_2\, f(x_3) + R(f),$$

donde $x_i = a + i\,(b-a)/4$, para $i = 1, 2, 3$, y los coeficientes le salían

$$a_0 = \frac{2}{3}\,(b-a), \quad a_1 = -\frac{2}{3}\,(b-a), \quad a_2 = \frac{2}{3}\,(b-a).$$

Mentalmente, sin hacer operaciones, el estudiante del A le dice al del grupo B que uno de los coeficientes de la fórmula está mal.

1. ¿Por qué sabe el estudiante del grupo A que uno de los coeficientes no es correcto?

2. Determine cuál de los coeficientes está mal calculado, y determine su valor correcto.

3. ¿Cuál es el grado de exactitud de la fórmula correcta? ¿Es la nueva fórmula más exacta de lo esperado?

2. La prueba escrita del grupo B incluía el cálculo explícito de $R(f)$, el error de la fórmula. Ahora sí, el estudiante del A toma papel y bolígrafo, sus apuntes de Métodos I sobre interpolación, y se dispone a calcular $R(f)$. Su amigo lo detiene, y le dice que en el caso de las fórmulas de Newton–Cotes hay otro método para calcular el error sin usar interpolación. El estudiante del A lo mira incrédulo ...

En efecto, el estudiante del B afirma que ha leido en un buen libro de Análisis Numérico (*el Burden y Faires*) que si la función es suficientemente regular, el error de las fórmulas de Newton–Cotes viene dado por la expresión

$$R(f) = K\, f^{(m)}(\xi),$$

donde $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es una constante independiente de la función que se integra, $m \geqslant 0$ es un número entero positivo, y ξ es un punto intermedio *no recuerda dónde.*

Sin utilizar el error de interpolación:

1. Determine el valor de m. Justifique la respuesta.

2. Determine el valor de K. Explique su método.

3. Determine el intervalo en el que está contenido ξ. Justifique la respuesta.

Granada, a 15 de mayo de 2014

Soluciones

1.

1. Una fórmula con tres datos debería ser exacta al menos en $\mathcal{P}_2$, pero puede comprobarse fácilmente que para la función $f(x) = 1$ no lo es.

2. El enunciado del ejercicio afirma que sólo uno de los coeficientes está mal. Se trata de una fórmula de Newton–Cotes con un número impar de nodos, así que por simetría debe ser $a_0 = a_2$, luego el coeficiente erróneo es a_1. Usando la exactitud para $f(x) = 1$ se deduce que

$$a_1 = -\frac{1}{3}(b-a).$$

3. Un vez arraglado el coeficiente a_2, la fórmula es exacta en $\mathcal{P}_2$, pero al tener un número impar de nodos, aumenta su grado de exactitud en una unidad, luego es exacta en $\mathcal{P}_3$. Para demostrar que no es exacta en $\mathcal{P}_4$, basta poner un contraejemplo: tomando $a = 0$ y $b = 1$, puede comprobarse que la fórmula no es exacta para $f(x) = x^4$.

2. Efectivamente, si $f(x)$ es suficientemente regular, el error viene dado por la expresión del enunciado.

1. Ya hemos visto que la fórmula es exacta en $\mathcal{P}_3$ pero no en $\mathcal{P}_4$, así que $m = 4$ que es el orden de derivación que anula los polinomios de grado menor o igual a 3, y no los de grado exacto 4.

2. Observemos que para toda función $f(x)$ se verifica

$$R(f) = \int_a^b f(t)\,dt - (a_0\,f(x_1) + a_1\,f(x_2) + a_2\,f(x_3)) = K\,f^{(iv)}(\xi).$$

   Puesto que K es independiente de la función considerada $f(x)$, tomaremos la función $f(x) = x^4$, pues la fórmula no es exacta y $f^{(iv)}(\xi) = 4!$, esto es, la derivada cuarta es independiente de ξ. De este modo,

$$K = \frac{1}{4!}\left[\int_a^b t^4\,dt - \left(a_0\left(\frac{3a+b}{4}\right)^4 + a_1\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + a_2\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4\right)\right]$$

   Sacando factor común $b-a$, las constantes, y usando el binomio de Newton, se deduce que

$$K = \frac{7\,(b-a)^5}{4!\,5\,4^3\,3}$$

3. El punto ξ es intermedio entre el valor mínimo y el valor máximo de los nodos, y por tanto en el intervalo $[a,b]$.