

Cálculo
1ºE Grado en Ingeniería Informática
Segundo Parcial
Curso 2015/2016

1. (3 puntos) Se considera la función $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} dt$.

a) Estudia los intervalos de monotonía de f , así como la existencia de extremos relativos.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

Solución:

a) Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que la función ($f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} dt$) es continua y derivable en \mathbb{R}^+ ya que el integrando, $f(t) = \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}$, es una función continua. Además, gracias también al Teorema Fundamental del Cálculo, podemos calcular la derivada de f en \mathbb{R}^+ :

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}$$

Observamos que la derivada de f es positiva en todo el dominio; por tanto, f es estrictamente creciente en \mathbb{R}_0^+ .

b) Si calculamos el límite en cero del numerador:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \int_0^0 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} dt = 0$$

Estamos ante una indeterminación del tipo “0/0”. Por tanto, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 0$$

Concluimos entonces que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

2. (1 punto) Calcula $\int x^2 \arctan(x) dx$.

Solución: Aplicamos el método de integración por partes:

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan(x) dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx.\end{aligned}$$

La integral que nos queda es de tipo racional. Comenzamos por escribir el integrando haciendo uso del algoritmo de división de polinomios:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan(x) dx &= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \log(x^2+1) .\end{aligned}$$

3. (2 puntos) Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1/2 \\ x_{n+1} &= \sqrt{2+x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

- Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.
- Calcula el límite de $\{x_n\}$.

Solución:

- Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \sqrt{2+1/2} = \sqrt{5/2} > x_1 = 1/2$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 < x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n < x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}x_n < x_{n+1} &\Rightarrow 2+x_n < 2+x_{n+1} \Rightarrow \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+x_{n+1}} \\ &\Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}\end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

- b) Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por el $x_1 = 1/2$. Veamos que está acotada superiormente por 2. Esto es, que $x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nuevamente lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 1 \leq 2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 2$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 2$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} x_n \leq 2 &\Rightarrow 2 + x_n \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{4} \\ &\Rightarrow x_{n+1} \leq 2 \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

- c) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \sqrt{2+x}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{2+x} \Rightarrow x^2 = 2+x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 2$ y $x = -1$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que $1/2$. El motivo es que $1/2 \leq x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 2$.

4. (4 puntos) Estudia la posible convergencia de las siguientes series:

- a) $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{-n^3}$
- b) $\sum \frac{n(n+2)}{(n+1)^n}$.
- c) $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n}{4^n} - \frac{2^n}{3^{n+1}} \right)$. Si es convergente, calcula su suma.

Solución:

- a) Aplicamos el criterio de la raíz.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{-n^3}} = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{-n^2}$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo “ 1^∞ ”; por tanto, aplicamos la regla del número e :

$$\begin{aligned} -n^2 \left[\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} - 1 \right] &= -n^2 \left[\frac{n^2 - 1 - n^2 - 1}{n^2 + 1} \right] \\ &= -n^2 \frac{-2}{n^2 + 1} = \frac{2n^2}{n^2 + 1} \rightarrow 2 \end{aligned}$$

Con lo que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{-n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{-n^2} = e^2 > 1,$$

de lo que se deduce que la serie dada no es convergente.

- b) Aplicamos el criterio del cociente. Así, si llamamos $a_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^n}$ tenemos que estudiar el límite del cociente siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^{n+1}} \frac{(n+1)^n}{n(n+2)} = \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)^2} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n \rightarrow 0 \cdot (1/e) = 0 < 1$$

de lo que se deduce que la serie es convergente.

- c) La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n}{4^n} - \frac{2^n}{3 \cdot 3^n} \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{-1}{4} \right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{4}| < 1$ y $|\frac{2}{3}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \right)$, nos queda entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n} - \frac{2^n}{3 \cdot 3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{4} \right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{5/4} - \frac{1}{3} \frac{1}{1/3} = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Granada, 21 de enero de 2016