Cálculo

1ºA Grado en Ingeniería Informática

Primer Parcial (II) Curso 2013/2014

1. (2 puntos) Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$x_1 = 1$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{5x_n + 2} , \forall n \in \mathbb{N}$$

- a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.
- b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

Solución:

- a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{5+2} = \sqrt{7/3} > x_1 = 1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:
 - Para n = 1, acabamos de ver que $x_1 < x_2$.
 - Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n < x_{n+1}$.
 - Comprobamos que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n < x_{n+1} \implies 5x_n < 5x_{n+1} \implies 5x_n + 2 < 5x_{n+1} + 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{5x_n + 2} < \sqrt{5x_{n+1} + 2} \implies \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{5x_n + 2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{5x_{n+1} + 2} \implies x_{n+1} < x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por $x_1 = 1$. Veamos que está acotada superiormente por 2. Esto es, que $x_n \le 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para n = 1, es evidente que $x_1 = 1 \le 2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \le 2$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \le 2$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \le 2 \implies 5x_n \le 10 \implies 5x_n + 2 \le 12 \implies \sqrt{5x_n + 2} \le \sqrt{12}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{5x_n + 2} \le \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{12} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow x_{n+1} \le 2$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

b) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que lím $\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{5x+2}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{5x+2} \Rightarrow 3x^2 = 5x+2 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Obtenemos dos soluciones: x = 2 y x = -1/3, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que 1. El motivo es que $1 \le x_n \le 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim \{x_n\} = 2$.

2. (2 puntos) Calcula el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\log((n+1)!)} \right\}$$

Solución: Observamos que tenemos un cociente donde el denominador, claramente, crece a infinito. Aplicamos el criterio de Stolz y, si llamamos a_n al numerador y b_n al denominador, tendremos que estudiar el límite del siguiente cociente:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+1}} + \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - \left[\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right]}{\log((n+2)!) - \log((n+1)!)}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}{\log\left(\frac{(n+2)!}{(n+1)!}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}{\log(n+2)} \to 0$$

ya que se trata de un cociente donde el numerador tiende a 1 y el denominador tiende a $+\infty$.

Como lím $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=0$, aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim \left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\log((n+1)!)} \right\} = 0$$

3. (3 puntos) Calcula el límite de la sigiente sucesión:

$$\left\{n^2\log\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right)\right\}$$

Como consecuencia del límite anterior deduce el carácter de la serie:

$$\sum \log \left(\frac{n^3 + 7n}{n^3 + 4} \right)$$

Solución: Por las propiedades del logaritmo, la sucesión dada se puede reescribir como sigue:

$$\left\{ \log \left[\left(\frac{n^3 + 7n}{n^3 + 4} \right)^{n^2} \right] \right\}$$

Como la sucesión $\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right)^{n^2}$ presenta una indeterminación del tipo "1°", aplicamos la regla del número e:

$$n^{2} \left[\frac{n^{3} + 7n}{n^{3} + 4} - 1 \right] = n^{2} \left[\frac{n^{3} + 7n - n^{3} - 4}{n^{3} + 4} \right] = \frac{7n^{3} - 4n^{2}}{n^{3} + 4} \to 7$$

Por tanto, $\left(\frac{n^3+7n}{n^3+4}\right)^{n^2} \to e^7$ y de aquí se tiene que:

$$\left\{ n^2 \log \left(\frac{n^3 + 7n}{n^3 + 4} \right) \right\} = \left\{ \log \left[\left(\frac{n^3 + 7n}{n^3 + 4} \right)^{n^2} \right] \right\} \to \log(e^7) = 7$$

Vamos ahora a deducir el carácter de la serie $\sum \log \left(\frac{n^3 + 7n}{n^3 + 4} \right)$. Basta con escribir la sucesión que acabamos de estudiar de la siguiente forma:

$$n^{2} \log \left(\frac{n^{3} + 7n}{n^{3} + 4} \right) = \frac{\log \left(\frac{n^{3} + 7n}{n^{3} + 4} \right)}{\frac{1}{n^{2}}} \to 7 \neq 0$$

Haciendo uso del criterio de comparación por paso al límite, ambas series, la del numerador y la del denominador $(\sum \frac{1}{n^2})$ tienen el mismo carácter. Como es conocido que la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente, la serie que nos proponen también es convergente.

3

4. (3 puntos) Estudia la posible convergencia de las siguientes series:

a)
$$\sum_{n>1} \left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2/2}$$

b)
$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2^{n+1}}{3^n} - \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)$$
. Si es convergente, calcula su suma.

Solución:

a) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2/2}} = \left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2/2n} = \left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n/2}$$

Como la sucesión anterior presenta una indeterminación del tipo " 1^{∞} ", aplicamos la regla del número e:

$$\frac{n}{2} \left[\frac{3n+1}{3n+4} - 1 \right] = \frac{n}{2} \left[\frac{3n+1-3n-4}{3n+4} \right] = \frac{-3n}{6n+8} \to \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, $\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n/2} \to e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$ y de aquí se tiene que la serie propuesta es convergente.

b) La serie planteada es suma de dos series geométricas multiplicadas por un escalar:

$$\sum_{n \ge 0} \left(\frac{2^{n+1}}{3^n} - \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n \ge 0} 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n - \sum_{n \ge 0} \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right)^n$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{2}{3}| < 1$ y $|\frac{-1}{2}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$, nos queda entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{3^n} - \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2} \right)^n$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \right) = 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 6 - \frac{1}{3} = \frac{17}{3}$$

Granada, 27 de noviembre de 2013