UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES I
CONVOCATORIA DE FEBRERO. 6 de febrero de 2014

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.

[6] Ejercicio 1.- Resuelve las siguientes cuestiones

1. Forma la sucesión de aproximaciones sucesivas o iterantes de Picard del p.v.i.

$$x' = 2tx + 2t, \ \ x(0) = 0,$$

   y calcula su límite.

2. Se considera el sistema lineal

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Calcula la matriz fundamental principal en $t_0 = 0$ del sistema homogéneo asociado en función del parámetro α. Encuentra la solución de la ecuación que cumple $x(0) = (0,1)^t$ para $\alpha = 0$.

3. Se considera la ecuación de Ricatti

$$x' + a(t)x + r(t)x^2 = b(t), \tag{1}$$

   con $a, b \in C(I)$ y $r \in C^1(I)$, $r(t) \neq 0$, $t \in I$. Justifica que el cambio de variable $x = \frac{u'}{r(t)u}$ transforma (1) en la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$u'' + \left(a(t) - \frac{r'(t)}{r(t)}\right) u' - b(t)r(t)u = 0.$$

   Aplicación: resuelve la ecuación $t^2x' + tx + t^2x^2 = 1$, determina cuántas de sus soluciones cumplen $x(1) = 0$ y encuéntralas.

4. Sean $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, con $a, b \in C(I)$. Demuestra que φ_1 y φ_2 no pueden tener ni ceros ni puntos críticos comunes en el intervalo abierto I.

   Las funciones $\varphi_1(t) = t$ y $\varphi_2(t) = t^2$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Euler $t^2x'' - 2tx' + 2x = 0$. ¿Hay alguna contradicción con la afirmación del apartado anterior?

[4] Ejercicio 2.- Se considera el sistema periódico

$$x' = A(t)x, \tag{2}$$

siendo

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cos t \\ -1 & 1 & \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifica que el cambio de variable $x = P(t)y$, con

$$P(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & \sin t \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   trasforma el sistema anterior en $y' = y$.

2. Encuentra una matriz de monodromía y los multiplicadores característicos del sistema (2).

3. Determina el número de soluciones $2\pi-$periódicas del sistema $x' = A(t)x + b(t)$ con $b \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.