Examen de Cálculo II (16/06/14)
Soluciones

1. *Probar que, para todo* $x \in \mathbb{R}$ *con* $0 < x \leq 1$, *se tiene*

$$\operatorname{arc\,tg} x \,<\, x \,<\, \operatorname{arc\,sen} x$$

Abreviando la notación, sea $I = [0,1]$. Para la primera desigualdad podemos considerar la función $f : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \,=\, x \,-\, \operatorname{arc\,tg} x \quad \forall x \in I$$

Es claro que $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$ con

$$f'(x) \,=\, 1 - \frac{1}{1+x^2} \,=\, \frac{x^2}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in I^\circ$$

luego f es estrictamente creciente en I. Por tanto, para $0 < x \leq 1$ será $0 = f(0) < f(x)$, es decir, $\operatorname{arc\,tg} x < x$.

Para la segunda desigualdad podemos considerar la función $g : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) \,=\, \operatorname{arc\,sen} x \,-\, x \quad \forall x \in I$$

De nuevo $g \in C(I) \cap D(I^\circ)$ con

$$g'(x) \,=\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,-\, 1 \,>\, 0 \quad \forall x \in I^\circ$$

luego g es estrictamente creciente en I. Por tanto, para $0 < x \leq 1$ será $0 = g(0) < g(x)$, es decir, $x <\, \operatorname{arc\,sen} x$.

Alternativamente, fijado $x \in]0,1]$, podemos aplicar directamente el teorema del valor medio, tanto al arco-tangente como al arco-seno, pues ambas son funciones continuas en $[0,x]$ y derivables en $]0,x[$, obteniendo dos puntos $c, d \in]0,x[$ tales que

$$\operatorname{arc\,tg} x \,=\, \operatorname{arc\,tg} x \,-\, \operatorname{arc\,tg} 0 \,=\, x \operatorname{arc\,tg}'(c) \,=\, \frac{x}{1+c^2}$$
$$\operatorname{arc\,sen} x \,=\, \operatorname{arc\,sen} x \,-\, \operatorname{arc\,sen} 0 \,=\, x \operatorname{arc\,sen}'(d) \,=\, \frac{x}{\sqrt{1-d^2}}$$

Puesto que c, d y x son positivos tenemos claramente

$$\frac{x}{1+c^2} \,<\, x \,<\, \frac{x}{\sqrt{1-d^2}}$$

es decir, $\operatorname{arc\,tg} x \,<\, x \,<\, \operatorname{arc\,sen} x$.

2. *Sea* $A = \{x \in \mathbb{R}^* \,:\, -\pi/2 < x < \pi/2\}$ *y* $f : A \to \mathbb{R}$ *la función definida por*

$$f(x) \,=\, \frac{6\,(x \,-\, \operatorname{sen} x)\operatorname{tg} x \,-\, x^4}{x^6} \qquad \forall x \in A$$

Estudiar el comportamiento de f *en* $-\pi/2$, 0 *y* $\pi/2$.

Para el comportamiento en $\pm\pi/2$, escribimos $f \,=\, f_1\,f_2 \,-\, f_3$ donde $f_1, f_2, f_3 : A \to \mathbb{R}$ son las funciones definidas, para $x \in A$, por

$$f_1(x) \,=\, \frac{6\,(x \,-\, \operatorname{sen} x)}{x^6}\,, \qquad f_2(x) \,=\, \operatorname{tg} x\,, \qquad f_3(x) \,=\, \frac{1}{x^2}$$

Usando que $\operatorname{sen}(-\pi/2) = -1$ y $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$, tenemos claramente

$$\lim_{x \to -\pi/2} f_1(x) \,=\, \frac{6 - 3\pi}{(\pi/2)^6} < 0 \quad \text{ y } \quad \lim_{x \to \pi/2} f_1(x) \,=\, \frac{3\pi - 6}{(\pi/2)^6} > 0$$

Además, sabemos que

$$f_2(x) \to -\infty \;\; (x \to -\pi/2) \quad \text{ y } \quad f_2(x) \to +\infty \;\; (x \to \pi/2)$$

luego el producto $f_1\,f_2$ diverge positivamente tanto en $-\pi/2$ como en $\pi/2$. Como por otra parte, también es claro que f_3 tiene límite en ambos puntos, concluimos finalmente que f diverge positivamente, tanto en $-\pi/2$ como en $\pi/2$.

Para trabajar en el origen, usamos los polinomios de Taylor, de orden 5 para el seno, y de orden 3 para la tangente. Las sucesivas derivadas del seno en el origen son bien conocidas y nos permiten escribir:

$$\operatorname{sen} x \,=\, x \,-\, \frac{x^3}{3\,!} \,+\, \frac{x^5}{5\,!} \,+\, \alpha(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde, por la fórmula infinitesimal del resto, tenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{x^5} \,=\, 0 \tag{1}$$

Anotamos para uso posterior que

$$6\,(x \,-\, \operatorname{sen} x) \,=\, x^3 \,-\, \frac{x^5}{20} \,-\, 6\,\alpha(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Con respecto a la tangente, para $x \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}'(x) \,&=\, 1 \,+\, \operatorname{tg}^2 x \\ \operatorname{tg}''(x) \,&=\, 2\operatorname{tg} x\,(1 \,+\, \operatorname{tg}^2 x) \,=\, 2\operatorname{tg} x \,+\, 2\operatorname{tg}^3 x \\ \operatorname{tg}'''(x) \,&=\, (2 \,+\, 6\operatorname{tg}^2 x)\,(1 \,+\, \operatorname{tg}^2 x) \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$\operatorname{tg}^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{para } \ k = 0, 2 \\ 1 & \text{para } \ k = 1 \\ 2 & \text{para } \ k = 3 \end{cases}$$

luego podemos escribir

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \beta(x) \qquad \forall\, x \in \,] - \pi/2, \pi/2[\tag{3}$$

y la fórmula infinitesimal del resto nos dice que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\beta(x)}{x^3} = 0 \tag{4}$$

Usando (2) y (3), para $x \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^6} \left[\left(x^3 - \frac{x^5}{20} - 6\,\alpha(x) \right) \left(x + \frac{x^3}{3} + \beta(x) \right) - x^4 \right] \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{20} - \frac{x^2}{60} - 6\,\frac{\alpha(x)}{x^6} \left(x + \frac{x^3}{3} \right) + \frac{\beta(x)}{x^6} \left(x^3 - \frac{x^5}{20} \right) - 6\,\frac{\alpha(x)\,\beta(x)}{x^6} \\ &= \frac{17}{60} - \frac{x^2}{60} - \frac{\alpha(x)}{x^5} \left(6 + 2\,x^2 \right) + \frac{\beta(x)}{x^3} \left(1 - \frac{x^2}{20} \right) - 6\,x^2\, \frac{\alpha(x)}{x^5}\, \frac{\beta(x)}{x^3} \\ &= \frac{17}{60} + \rho(x) \end{aligned}$$

En virtud de (2) y (4) vemos claramente que $\lim\limits_{x \to 0} \rho(x) = 0$, y concluimos que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{17}{60}$$

3. *Se considera la función* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$H(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^{\sqrt{t}}\, dt}{\sqrt[4]{1 + t^2}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

a) *Estudiar los posibles extremos absolutos y relativos de* H

b) *Probar que* $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}\, H(x) = 2$

c) *Calcular la imagen de* H.

Consideramos la función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt[4]{1+t^2}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$$

que está bien definida y es continua, como cociente de funciones continuas: la composición de la raíz cuadrada con la exponencial y la composición de un polinomio con la raíz cuarta. Podemos por tanto considerar la integral indefinida de f con origen en 0, es decir la función $F : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(y) = \int_0^y f(t)\, dt \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}_0^+$$

El teorema fundamental del cálculo nos dice que F es derivable en $\mathbb{R}_0^+$ con $F' = f$. Puesto que $H(x) = F(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la regla de la cadena nos dice que H es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$H'(x) = 2\,x\, F'(x^2) = 2\,x\, f(x^2) = \frac{2\,x\, e^{|x|}}{\sqrt[4]{1+x^4}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

a) Puesto que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^\circ$, los extremos absolutos de H, si los tiene, han de ser también extremos relativos y, por ser $H \in D(\mathbb{R})$, dichos extremos han de ser ceros de H'. Ahora bien, es claro que, para $x \in \mathbb{R}$ se tiene $H'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = 0$, luego el origen es el único posible extremo de H.

Tenemos claramente $H'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^-$, luego H es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}_0^-$, y $H'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, luego H es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$. Por tanto, H tiene un mínimo absoluto y relativo en 0, luego $\min H(\mathbb{R}) = H(0) = 0$. Por lo dicho anteriormente, H no tiene más extremos.

b) Para calcular este límite usaremos la segunda regla de l'Hôpital. Es claro que tanto H como la exponencial son funciones derivables en $\mathbb{R}$ con $\exp'(x) = e^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y también sabemos que la exponencial diverge en $+\infty$, luego se cumplen las hipótesis de dicha regla. Bastará por tanto comprobar que $\lim\limits_{x\to+\infty} H'(x)/e^x = 2$, pero esto es inmediato:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{H'(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,x}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[4]{(1/x^4)+1}} = 2$$

c) Del apartado anterior, por ser $H(x) = e^x\big(e^{-x}H(x)\big)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, deducimos que H diverge positivamente en $+\infty$. Al ser H continua, su imagen será un intervalo no mayorado, pero también sabemos que $\min H(\mathbb{R}) = 0$, luego $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$.

4. *Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando la respuesta:*

(a) *Si* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *es una función uniformemente continua y* $\{x_n\}$ *es una sucesión convergente de números reales positivos, entonces la sucesión* $\{f(x_n)\}$ *también es convergente.*

Esta afirmación es VERDADERA. Dado $\varepsilon > 0$, por ser f uniformemente continua, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in \mathbb{R}^+, \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad (*)$$

Usamos ahora que $\{x_n\}$ es convergente, luego es una sucesión de Cauchy, para encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que

$$p, q \geq m \implies |x_p - x_q| < \delta$$

Entonces, para $p, q \geq m$, como $x_p, x_q \in \mathbb{R}^+$ y $|x_p - x_q| < \delta$, podemos usar $(*)$ para obtener que $|f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon$. Hemos probado así que

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \implies |f(x_p) - f(x_q)| < \varepsilon$$

es decir, la sucesión $\{f(x_n)\}$ también es de Cauchy. Por el teorema de complitud de $\mathbb{R}$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ es convergente, como queríamos demostrar.

(b) *Si* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *es una función derivable en* $[0,1]$, *verificando que* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ *y* $f'(0) = 1/2$, *entonces existe* $a \in]0,1[$ *tal que* $f'(a) = 2/\pi$.

Esta afirmación también es VERDADERA. El teorema del valor medio, nos proporciona $c \in]0,1[$ tal que

$$1 = f(1) - f(0) = f'(c)(1-0) = f'(c)$$

Aplicamos ahora el teorema del valor intermedio para las derivadas: f' tiene la propiedad del valor intermedio y, en particular, el conjunto $J = f'\big([0,c]\big)$ ha de ser un intervalo. Como $1/2 = f'(0) \in J$ y $1 = f'(c) \in J$, tendremos $[1/2, 1] \subset J$.

Como $2 < \pi < 4$ tenemos $1/2 < 2/\pi < 1$, luego existe $a \in [0,c]$ tal que $f'(a) = 2/\pi$. Claramente $a \neq 0$ y $a \neq c$, luego $a \in]0,c[\subset]0,1[$.

(c) *El conjunto* $\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x = x \cos x\}$ *es finito.*

Esta afirmación es FALSA, llamando C al conjunto dado, probaremos que C es infinito. Para cada $m \in \mathbb{Z}$, consideramos el intervalo $J_m = \big[2m\pi - (\pi/2), 2m\pi + (\pi/2)\big]$ y definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \operatorname{sen} x - x \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Usando que el seno y el coseno son funciones 2π-periódicas, con

$$\operatorname{sen}(-\pi/2) = -1, \qquad \operatorname{sen}(\pi/2) = 1 \qquad \text{y} \qquad \cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$$

deducimos que

$$f\big(2m\pi - (\pi/2)\big) = -1 \qquad \text{y} \qquad f\big(2m\pi + (\pi/2)\big) = 1$$

Como f es continua en J_m, el teorema de los ceros de Bolzano, nos da un $x_m \in J_m$ tal que $f(x_m) = 0$, es decir, $x_m \in C$. Además, para $m, k \in \mathbb{Z}$ con $m < k$ se tiene claramente

$$x_m < 2m\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} < 2k\pi - \frac{\pi}{2} < x_k$$

luego la aplicación $m \mapsto x_m$, de $\mathbb{Z}$ en C, es inyectiva. Por tanto C es infinito, pues contiene al conjunto $\{x_m : m \in \mathbb{Z}\}$, que es equipotente a $\mathbb{Z}$.

(d) *Si I es un intervalo no trivial y $f : I \to$ es una función convexa, entonces la función $g : I \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^{f(x)}$ para todo $x \in I$, también es convexa.*

Esta afirmación es VERDADERA. Fijados $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$, por ser f convexa tenemos

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)\, f(x) + t\, f(y)$$

Usando que la exponencial es una función creciente deducimos que

$$\exp\big[f\big((1-t)x + ty\big)\big] \leq \exp\big[(1-t)\, f(x) + t\, f(y)\big]$$

pero usando que la exponencial también es convexa tenemos que

$$\exp\big[(1-t)\, f(x) + t\, f(y)\big] \leq (1-t)\, \exp\big[f(x)\big] + t\, \exp\big[f(y)\big]$$

Enlazando las dos desigualdades anteriores, concluimos que

$$\exp\big[f\big((1-t)x + ty\big)\big] \leq (1-t)\, \exp\big[f(x)\big] + t\, \exp\big[f(y)\big]$$

es decir,

$$g\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)\, g(x) + t\, g(y)$$

y hemos probado que g es convexa, como queríamos.