

CÁLCULO (2º parcial)
GRADO EN INFORMÁTICA

1. Determina el número de soluciones de la ecuación $x \log(x) - 1 = 0$.

Solución. Estudiamos la monotonía de la función $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ usando el signo de la derivada. Para ello calculamos sus puntos críticos:

$$f'(x) = \log(x) + 1 = 0 \iff \log(x) = -1 \iff x = e^{-1}.$$

Por tanto, la función es estrictamente monótona en los intervalos $]0, 1/e]$ y $[1/e, +\infty[$. De hecho, si $x < 1/e$, la función es estrictamente decreciente; mientras que si $1/e < x$, cambia a estrictamente creciente. Por tanto, en el punto $x = 1/e$ se alcanza un mínimo relativo que, además, por ser el único punto crítico de f , es el mínimo absoluto. Además, como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \log(x) - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \log(x^x) - 1 = \log(1) - 1 = -1 \\ f(1/e) &= -1/e - 1 < -1 < 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log(x) - 1 = +\infty \end{aligned}$$

hay una única solución entre $1/e$ y $+\infty$.

2. Calcula los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{t^2}{t^6 + 1} dt}{x^6}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \sin(x)}{2 - \sin(x)} \right)^{1/x^2}$$

Solución.

- a) Para resolver la indeterminación “0/0”, aplicamos la regla de L’Hôpital. El límite del cociente de las derivadas es

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{x^{12} + 1} \cdot 2x}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(x^{12} + 1)} = \frac{1}{3},$$

con lo que el límite pedido vale $1/3$.

- b) Estamos ante una indeterminación del tipo “ 1^∞ ”. Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + \sin(x)}{2 - \sin(x)} \right)^{1/x^2} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2 + \sin(x)}{2 - \sin(x)} - 1 \right) = L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2 + \sin(x)}{2 - \sin(x)} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x)}{x^2 (2 - \sin(x))}$$

aplicamos la regla de L'Hôpital. Nos queda

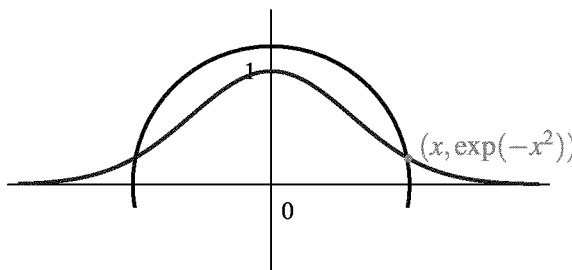
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x)}{2x(2 - \sin(x)) - x^2 \cos(x)} = +\infty,$$

ya que $\cos(0) = 1$ y el denominador tiende a cero y es positivo. Observa que no se puede resolver este límite aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital. Resumiendo, el límite pedido es $+\infty$.

3. De todos los semicírculos centrados en el origen y con diámetro en el eje OX, encuentra el de mínima área que corta a la gráfica de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución.

Un punto del semicírculo que esté en la gráfica de la función $f(x) = \exp(-x^2)$ (recuérdese que la gráfica de dicha función es la campana de Gauss) es de la forma $(x, \exp(-x^2))$ y, por tanto, el radio de dicho círculo es $x^2 + f(x)^2$. El área del semicírculo será $\frac{\pi}{2} (x^2 + \exp(-x^2)^2)$. Por simetría respecto al eje OX, vamos a considerar la función g definida en \mathbb{R}_0^+ .



La función que vamos a optimizar es dicha área, salvo la constante $\pi/2$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + \exp(-x^2)^2 = x^2 + \exp(-2x^2)$. Calculamos sus puntos críticos:

$$g'(x) = 2x + (-4x) \exp(-2x^2) = 2x (1 - 2 \exp(-2x^2)).$$

Como para calcular los puntos críticos de g consideramos $x > 0$, entonces, $g'(x) = 0$ si, y sólo si:

$$\begin{aligned} 0 = 1 - 2 \exp(-2x^2) &\iff \exp(-2x^2) = 1/2 \iff -2x^2 = \log\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff x^2 = \frac{1}{2} \log(2) \iff x = \sqrt{\frac{\log(2)}{2}} \end{aligned}$$

Se comprueba que $f''\left(\sqrt{\frac{\log(2)}{2}}\right) > 0$ y, por tanto, el mínimo se alcanza cuando $x = \sqrt{\frac{\log(2)}{2}}$.

4. Calcula $\int e^{2x} \operatorname{sen}(x) dx$.

Solución. Integramos por partes (dos veces):

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \operatorname{sen}(x) dx &= \left[\begin{array}{l} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} \\ dv = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow v = -\cos(x) \end{array} \right] \\ &= -\cos(x)e^{2x} + 2 \int \cos(x)e^{2x} dx \\ &= \left[\begin{array}{l} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} \\ dv = \cos(x) \Rightarrow v = \operatorname{sen}(x) \end{array} \right] \\ &= -\cos(x)e^{2x} + 2 \operatorname{sen}(x)e^{2x} - 4 \int \operatorname{sen}(x)e^{2x} dx.\end{aligned}$$

$$\text{Despejando } \int e^{2x} \operatorname{sen}(x) dx = \frac{e^{2x}}{5} (2 \operatorname{sen}(x) - \cos(x)).$$

Granada, 27 de enero de 2012