Cuestiones

1. Si la mejor aproximación mínimos cuadrados de $f(x) = cos(x) + x - 1$ en $\mathbb{P}_2$ es $u(x) = -\frac{2}{5}x^2 + x$, ¿cuál es la m.a.m.c. de $g(x) = cos(x)$ en $\mathbb{P}_2$?

2. Se sabe que la matriz de Gram para cierto problema de interpolación lineal, respecto de la base de $\mathbb{P}_2$, $\{1, x, x^2\}$ es:
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Calcula, si es posible, la base de Lagrange para dicho problema.

3. De una función, $f(x)$, se sabe que: $f(0) = A$ y $f^{iv)}(0) = B$ con $A, B \in \mathbb{R}$. Indica, en cada caso, si el problema de interpolación asociado, en el espacio H que se da, tiene o no solución única (independientemente de los valores de A y de B).
   a) $H = \mathbb{P}_1$
   b) $H = gen\{x,\ x^3\}$
   c) $H = gen\{1,\ x^4\}$
   d) $H = gen\{x+1,\ x^4\}$

4. Razona si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. «*Los valores propios, de una matriz simétrica real con valores diagonales positivos, son siempre positivos*».

5. Para el sistema lineal, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ haz una reordenación adecuada que permita asegurar la convergencia de los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-seidel.

6. Si una matriz $\mathbf{A}$ real admite una descomposición $\mathbf{A} = \mathbf{L}.\mathbf{U}$ con $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, entonces la matriz será definida positiva.

Ejercicios

1. Se pretende obtener una estimación de la función, $f(x) = cos(\pi x)+x^2$, en $x = 0.25$ mediante interpolación. Para ello,

   a) con el método a trozos, calcula el interpolante spline cúbico clase uno con nodos $x_i := \{-1, 0, 1\}$ y derivadas exactas. ¿Cuál es el valor aproximado conseguido?

   b) con el método global, calcula el spline natural para los nodos $x_i := \{-1, 0, 1\}$. ¿Cuál es el valor aproximado conseguido?

   ¿Cuál de los dos interpolantes calculados proporciona mejor aproximación?

2. Considera el sistema lineal, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   a) Comprueba que la matriz A es definida positiva.

   b) Resuelve el sistema mediante una descomposición de Cholesky.

   c) Da una estimación de la solución del sistema mediante el método w-relajación con $w = 1.2$ tras tres iteraciones tomando como aproximación inicial, $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^t$. ¿Es convergente dicho método? Razona tu respuesta.

3. Usando el método de las potencias con cocientes de Rayleigh da una estimación, con 1 decimal de precisión, del valor propio dominante para la matriz, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (el vector inicial es $\mathbf{x} = (1, 1, -1)^t$) .

   Comprueba que el entero más próximo al valor obtenido es valor propio de dicha matriz.