Parcial 1 16-17

Análisis Funcional

15 de diciembre de 2016

2

Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión acotada de escalares. Se define $T : l_1 \to l_1$ mediante $T(\{x_n\}) = \{\alpha_n x_n\}$.

a) *Probar que T es lineal y continua y calcular su norma.*

b) *Probar que T es un isomorfismo topológico sobre l_1 si, y solo si,* $\inf\{|\alpha_n| : n \in \mathbb{N}\} > 0$.

Solución

a)

T es lineal:

$$T(\beta\{x_n\}+\gamma\{y_n\}) = T(\{\beta x_n+\gamma y_n\}) = \{\alpha_n(\beta x_n+\gamma y_n)\} = \beta\{\alpha_n x_n\}+\gamma\{\alpha_n y_n\} = \beta T(\{x_n\})+\gamma T(\{y_n\})$$

T es continua. Llamamos $A = \sup\{|\alpha_n| : n \in \mathbb{N}\}, x = \{x_n\} \in l_1$. Se tiene entonces:

$$\|T(x)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n| \leq A \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = A\|x\|_1$$

Utilizando la caracterización de continuidad para aplicaciones lineales esto prueba que T es continua. Además, si $\|x\|_1 = 1$, se tiene que $\|T(x)\|_1 \leq A$, luego $\|T\| \leq A$.

Por otra parte, podemos considerar las sucesiones $\{x_n^{(j)}\} = \begin{cases} \frac{|a_j|}{a_j} & , n = j \text{ y } a_j \neq 0 \\ 0 & , \text{ en caso contrario} \end{cases}$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Es claro que $\|\{x_n^{(j)}\}\|_1 \leq 1$ y se tiene que $\|T(\{x_n^{(j)}\})\|_1 = |a_j|$, de donde se obtiene que $\|T\| \geq |a_j| \ \forall j \in \mathbb{N}$, y en consecuencia $\|T\| \geq \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\} = A$. Hemos probado por tanto que $\|T\| = A$.

b)

$\Leftarrow)$

Puesto que l_1 es un espacio de Banach, como ya sabemos que T es lineal y continua, aplicando el teorema de los isomorfismos de Banach basta ver que T es biyectiva si $\inf\{|\alpha_n| : n \in \mathbb{N}\} > 0$.

Supongamos $\inf\{|\alpha_n| : n \in \mathbb{N}\} > 0$.

Sean $x = \{x_n\}, y = \{y_n\}$ dos sucesiones en l_1 tales que $T(x) = T(y)$. Entonces:

$$T(x) = T(y) \Rightarrow \alpha_n x_n = \alpha_n y_n \ \forall n \in \mathbb{N} \xRightarrow{a_n \neq 0 \forall n} x_n = y_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = y$$

Por tanto, T es inyectiva.

Por otra parte, la sucesión $\{\beta_n\} = \{\frac{1}{\alpha_n}\}$ está bien definida y verifica $\sup\{\beta_n\} = \frac{1}{\inf\{\alpha_n\}} < \infty$, luego dado $y = \{y_n\} \in l_1$ podemos tomar la sucesión $x = \{x_n\} = \{\beta_n y_n\}$, que pertenece a l_1 y verifica $T(x) = y$, luego T es sobreyectiva.

$\Rightarrow)$

Si T es un isomorfismo topológico, existen $m, M > 0$ tales que $m\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\|\ \forall x \in X$. En particular, para las series $e^{(n)} = (0, \ldots, 0, \overset{(n)}{1}, \ldots) \in l_1$ se tiene que $T(e^{(n)}) = (0, \ldots, 0, \overset{(n)}{\alpha_n}, \ldots)$ y $0 < m = m\|e^{(n)}\| \leq \|T(e^{(n)})\| = |\alpha_n| \Rightarrow 0 < m \leq |\alpha_n|$. Como esta desigualdad es válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\inf\{|\alpha_n| : n \in \mathbb{N}\} \geq m > 0$

3

Sea $X = \mathcal{C}[0,1]$. Se define $T : X \to X$ mediante $T(f)(x) = \int_0^x f(t^2)dt$.

a) *Probar que T es lineal, continua e inyectiva.*
b) *Probar que $T^{-1} : T(X) \to X$ no es continua.*
c) *Deducir del apartado anterior que $T(X)$ no es cerrado en X.*

Solución

a)

T es lineal:

$$
\begin{aligned}
&T(\alpha f + \beta g)(x) = \int_0^x (\alpha f + \beta g)(t^2)dt = \\
&\int_0^x (\alpha f(t^2) + \beta g(t^2))dt = \alpha \int_0^x f(t^2)dt + \beta \int_0^x g(t^2)dt = \\
&\alpha T(f)(x) + \beta T(g)(x)\ \forall x \in [0,1]
\end{aligned}
$$

Recordemos varias cosas. Por un lado, dada $f \in \mathcal{C}[0,1]$ el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la función $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ es derivable con $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [0,1]$ (de hecho, es de clase $\mathcal{C}^1$). Por otra parte, como consecuencia del Teorema del Valor Medio (o la propiedad de las medias), se tiene que $\int_0^x f(t)dt = F(x) - F(0) = F'(\xi)(x-0) = f(\xi)x$, con $\xi \in]0, x[$.

Por otra parte, la aplicación $h(t) = t^2$ es una biyección continua en $[0,1]$ con inversa continua $h^{-1}(t) = \sqrt{t}$.

Veamos que T es continua:

$$
\|T(f)\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^x f(t^2)dt \right| \leq \max_{t\in[0,1]} \int_0^x |f(t^2)dt| \overset{(*)}{=} \int_0^1 |f(t^2)dt| \overset{\text{TVM}}{=} |f(\xi)| \leq \|f\|_\infty
$$

Donde en (*) se ha utilizado que la integral de una función positiva es creciente.

Finalmente veamos que es inyectiva. Consideramos la h anterior, $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$ y F, G las primitivas de $f \circ h$ y $g \circ h$ con $F(0) = 0 = G(0)$, respectivamente. Entonces:

$$
T(f) = T(g) \iff F = G \iff F' = G' \iff f \circ h = g \circ h \iff f \circ h \circ h^{-1} = g \circ h \circ h^{-1} \iff f = g
$$

Luego T es inyectiva. Notemos que ha sido esencial que h sea biyectiva para poder probar la inyectividad de T.

b)

Por una parte, como ya hemos visto, dada $f \in \mathcal{C}[0,1]$, por el Teorema Fundamental del Cálculo $x \mapsto \int_0^x f(t^2)dt$ está en $\mathcal{C}^1[0,1]$, luego $T(X) \subset \mathcal{C}^1[0,1]$.

Por otra parte, dada $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$, es fácil comprobar que la función $x \mapsto f'(\sqrt{x})$ es continua en $[0,1]$ y se aplica en f por T. Por tanto, $\mathcal{C}^1[0,1] \subset T(X)$.

Tenemos por tanto que $T(X) = \mathcal{C}^1[0,1]$ y además conocemos la inversa, $T^{-1} : \mathcal{C}^1[0,1] \to X$, dada por $T^{-1}(f)(x) = f'(\sqrt{x})$. Veamos que no es continua.

Consideramos la sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{C}^1[0,1]$ dadas por $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$. Tenemos que $\|f_n\|_\infty = \text{máx}_{x\in[0,1]}\{|\frac{x^n}{n}|\} \leq \frac{1}{n} \to 0$, luego $\{f_n\} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0$. Sin embargo, $\|T^{-1}(f_n)\|_\infty = \text{máx}_{x\in[0,1]}\{|\sqrt{x}^{n-1}|\} = 1 \to 1$, por lo que no es posible que $\{T^{-1}(f_n)\} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} T(0) = 0$. Por tanto, T^{-1} no es continua.

c)

Veámoslo por contrarrecíproco. Supongamos que $T(X)$ es cerrado. Entonces $T(X)$ es un espacio de Banach, por ser un subespacio cerrado de X, que es Banach. Como X también lo es y $T : X \to T(X)$ es lineal, continua y sobreyectiva, por el teorema de la aplicación abierta, T es abierta (sobre $T(X)$). En consecuencia, $T^{-1} : T(X) \to X$ es continua.

(Hay que destacar que para obtener la continuidad de T^{-1} es necesario que T sea abierta sobre $T(X)$, no sobre X, donde estaba definido inicialmente su codominio. Esto es importante porque cambia la topología según consideremos los espacios X o $T(X)$. Y como el dominio de T^{-1} es $T(X)$, necesitamos que sea la topología de $T(X)$ y no la de X la que haga abierta a T, para que así se haga continua a T^{-1}.)

4

Probar que existe un polinomio P_0 de grado menor o igual que seis tal que:

$$\int_0^1 |t^8 - P_0(t)|dt \leq \int_0^1 |t^8 - P(t)|dt$$

para cualquier polinomio P de grado menor o igual que seis.

Solución

Consideramos el espacio vectorial $X = \mathbb{P}[X]$ de todos los polinomios sobre el que definimos la norma $\|P\| = \int_0^1 |P(t)|dt$. Ahora consideramos $M = \mathbb{P}_6[X]$, el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 6, que es un subespacio de X de dimensión 7. Por ser de dimensión finita, M es topológicamente isomorfo a $l_2^7 \equiv \mathbb{K}^7$, donde, entre otras muchas cosas, podemos aplicar el Teorema de Bolzano-Weierstrass cuando sea necesario.

Consideramos el polinomio $Q(t) = t^8$. Queremos ver que $\exists P_0 \in M$ tal que $\|Q - P_0\| \leq \|Q - P\|\ \forall P \in M$, o equivalentemente, en términos de distancias, que existe $P_0 \in M$ tal que $d(Q, P_0) = d(Q, M) := \text{ínf}\{d(Q,m) | m \in M\}$. Probaremos esto último.

Por la propia definición de $d(Q, M)$ a partir de un ínfimo, tenemos que existe una sucesión $\{m_n\} \subset M$ verificando que $\|Q - m_n\| \to d(Q, M)$. Por otra parte, tenemos que $\|m_n\| \leq \|m_n - Q\| + \|Q\|$. El primer sumando de la desigualdad derecha converge, luego está acotado. El segundo sumando es constante, luego también está acotado. En consecuencia, tenemos que $\{m_n\}$ está acotado en M. Podemos aplicar por tanto el Teorema de Bolzano-Weierstrass, obteniendo que existe una parcial convergente, $\{m_{\sigma(n)}\} \to m \in M$. Llamamos P_0 al m que acabamos de encontrar. Juntando todos los resultados que acabamos de obtener tenemos (usando la continuidad de las aplicaciones $\|\cdot\|$ y $-$):

$$d(Q, M) = \text{lím} \|Q - m_n\| = \text{lím} \|Q - m_{\sigma(n)}\| = \|Q - P_0\| = d(Q, P_0)$$

Por tanto, $d(Q, P_0) = d(Q, M) = \text{ínf}\{d(Q, m) | m \in M\} \leq d(Q, P)\ \forall P \in M$, como queríamos.

Nota. Este ejercicio es un “caso particular” del ejercicio 22 de la relación 1.