Geometría I

Grado en Matemáticas. Grupo A

Segunda prueba intermedia

22 de enero de 2015

Ejercicio 1.- Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) **[0.5 puntos]** Sea V un espacio vectorial sobre K con $\dim_K(V) = 1$ ¿Es cierto que para cada $f \in \mathrm{End}_K(V)$ existe un único $a \in K$ de manera que $f(v) = a\,v$, para todo $v \in V$?

(b) **[0.5 puntos]** Para $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ se sabe que $g(1,3) = (0,2)$ y $g(4,2) = (1,1)$ ¿Puede ocurrir que $g(2,5) = g(1,2)$?

(c) Se sabe que $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tiene $\mathrm{rango}(h) = 1$.

[1 punto] ¿Es posible encontrar bases ordenadas B y B' de $\mathbb{R}^2$ de manera que

$M(h, B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

[1 punto] ¿Es posible encontrar siempre una base ordenada $\widetilde{B}$ de manera que

$M(h, \widetilde{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

(d) **[1 punto]** Considera dos formas lineales $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}^2)^*$, ambas no nulas y tales que $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$ ¿Existe $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, tal que $\beta = c\,\alpha$?

Ejercicio 2.- **[3 puntos]** Considera los subespacios $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y - z = 0\}$ y $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - 3y + 2z = 0,\ x + y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$. Construye, si es posible, un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que cumpla $\mathrm{Im}(f) = U$ y $\mathrm{Ker}(f) = W$, dando su matriz respecto de la base ordenada usual de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3.- Sea $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices antisimétricas reales de orden 3. Considera la forma lineal $\varphi \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$ dada por $\varphi(A) = b - c$, para cada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(a) **[1 punto]** Encuentra una base $\widetilde{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$ que contenga a φ.

(b) **[1 punto]** Calcula la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ cuya dual es $\widetilde{\mathcal{B}}$.

(c) **[1 punto]** En una base ordenada $\widetilde{B}$ obtenida de $\widetilde{\mathcal{B}}$, calcula las coordenadas de la forma lineal ψ, dada por $\psi(A) = 2a + 3c$.

Duración: 2 horas.

Una resolución

1(a) Como $\dim_K V = 1$, tomo $\mathcal{B}=\{v_1\}$ base de V. Existe $a \in K$ de manera que $f(v_1) = a v_1$. Dado $v \in V$ cualquiera escribimos $v = b v_1 \Rightarrow f(v) = b\, f(v_1) = b(a v_1) = (ba) v_1 = (ab) v_1 = a(b v_1) = a v$ (donde $ab = ba$ pues K es conmutativo).

1(b) Como $\{(1,3),(4,2)\}$ son independientes (compruébese) entonces forman una base de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$. Como $\{(0,2),(1,1)\}$ también es base (compruébese) g lleva base en base. Por tanto g es biyectiva. Si ocurriera $g(2,5) = g(1,2)$ ya no sería inyectiva.

1(c) Primera parte: Como $\text{rango}(f) = 1 \Rightarrow \text{nulidad}(f) = 2-1 = 1$. Tomo $\{v_2\}$ base de $\text{Ker}(f)$. Amplío a una base $B = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Como $f(v_1) \neq 0$, llamo $v_1' = f(v_1)$ y amplío $\{v_1'\}$ a una base $B' = (v_1', v_2')$ de $\mathbb{R}^2$.

1(c) Segunda parte: Si fuese $M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$\underline{M(f\circ f, B)} = M(f,B) . M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{M(f,B)}$

$\Rightarrow f \circ f = f$. Luego la respuesta es NO y un contraejemplo es $f \in \text{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ dado por $M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde $B_u = (e_1, e_2)$ es la base usual.

1(d) Se cumple $2 = \text{nulidad}(\alpha) + \text{rango}(\alpha)$ con $\text{rango}(\alpha) \leq 1$. Como α no es la forma lineal nula $\Rightarrow \text{rango}(\alpha) = 1$. Así, tanto $\text{rango}(\alpha)$ como $\text{nulidad}(\alpha)$ son iguals a 1. Lo mismo para β.

Como suponemos $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ tomamos una base suya $\{w_1\}$. Ampliamos a una base de $\mathbb{R}^2$, $\{w_1, w_2\}$. Necesariamente $\alpha(w_2) \neq 0$ y $\beta(w_2) \neq 0$. Se cumple $\beta(w_2) = a\, \alpha(w_2)$ siendo $a = \frac{\beta(w_2)}{\alpha(w_2)}$. Como esta misma igualdad se cumple para w_1, tenemos que $\beta(v) = a\, \alpha(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

2.- Consideramos bases de U y de W, respectivamente $\{v_1' = (1,0,1), v_2' = (0,1,2)\}$ y $\{v_3 = (-5,1,4)\}$ (compruébese). Amplío a una base de $\mathbb{R}^3$ la base de W:

$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (0,1,0), \quad v_3 = (-5,1,4)$$

Construyo f como el único endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que cumple (según el teorema de existencia y unicidad conocidas las imágenes de los vectores de una base)

$$f(v_1) = v_1'$$

$$f(v_2) = v_2'$$

$$f(v_3) = 0'$$

es decir $f(\underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3}_{\text{vector cualquiera de } \mathbb{R}^3}) = a_1 v_1' + a_2 v_2'$

Sabemos $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$ y está claro que $\text{rango}(f) = 2$. Pero $\text{Im}(f)$ que está generada por v_1', v_2' coincide con U. $\text{Ker}(f)$ con dimensión 1 contiene a W, que también tiene dimensión 1, así $\text{Ker}(f) = W$.

Tengo que calcular $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ expresados en función de e_1, e_2, e_3. $e_1 = v_1 \Rightarrow f(e_1) = f(v_1) = v_1' = e_1 + e_3$.

$e_2 = v_2 \Rightarrow f(e_2) = f(v_2) = v_2' = e_2 + 2e_3$

$e_3 = \frac{5}{4} v_1 + (-\frac{1}{4}) v_2 + \frac{1}{4} v_3 \Rightarrow f(e_3) = \frac{5}{4} f(v_1) - \frac{1}{4} f(v_2) + \frac{1}{4} f(v_3)$

$\Rightarrow f(e_3) = \frac{5}{4}(e_1 + e_3) - \frac{1}{4}(e_2 + 2e_3) =$

$= \frac{5}{4} e_1 - \frac{1}{4} e_2 + \frac{3}{4} e_3$. De manera que

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 1 & 2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

3(a) Llamamos $\varphi_3 = \varphi$ y tomamos $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$ definidas por $\varphi_1(A) = a$, $\varphi_2(A) = b$. Veamos que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es indep.

Si $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 = \varphi_0$ (la forma lineal nula sobre $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$) tenemos $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3)(A) = 0$, $\forall A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$; es decir $a_1 a + a_2 b + a_3(b-c) = 0$ para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tomando $a=1, b=c=0$ resulta $\boxed{a_1 = 0}$.

Así, $a_2 b + a_3(b-c) = 0$, $\forall b, c \in \mathbb{R}$. Tomando $b=c=1$ resulta $\boxed{a_2 = 0}$ y para $b=1, c=0$, resulta $\boxed{a_3 = 0}$. Como $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}_3(\mathbb{R})^* = 3$, tenemos que $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es una base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})^*$.

3(b) Ponemos $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & b_3 \\ -a_3 & 0 & c_3 \\ -b_3 & -c_3 & 0 \end{pmatrix}$

$1 = \varphi_1(A_1) = a_1$	$0 = \varphi_1(A_2) = a_2$	$0 = \varphi_1(A_3) = a_3$
$0 = \varphi_2(A_1) = b_1$	$1 = \varphi_2(A_2) = b_2$	$0 = \varphi_2(A_3) = b_3$
$0 = \varphi_3(A_1) = b_1 - c_1$	$0 = \varphi_3(A_2) = b_2 - c_2$	$1 = \varphi_3(A_3) = b_3 - c_3$
por tanto $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = 0$	por tanto $a_2 = 0$, $b_2 = c_2 = 1$	por tanto $a_3 = b_3 = 0$, $c_3 = -1$

$\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_3\}$ base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ y $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

3(c) Ponemos $B = (A_1, A_2, A_3)$ y $B^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) (= \tilde{B})$

$\psi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3$ donde $c_1 = \psi(A_1) = 2$, $c_2 = \psi(A_2) = 3$ y $c_3 = \psi(A_3) = -3$. Las coordenadas pedidas son $(2, 3, -3)$.