

---

# Series de números reales

---

## 1 Convergencia de series numéricas

**Ejercicio 1.** Aplicar el criterio de la raíz para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

- a)  $\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$  d)  $\sum \frac{n^n}{e^{(n^2+1)}}$   
b)  $\sum \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$  e)  $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$   
c)  $\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$

**Solución 1.**

a) Aplicamos el criterio de la raíz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1$ . Por tanto, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio de la raíz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

En consecuencia, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{\frac{n^2+1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} \frac{1}{e^{1/n}} = 0 < 1$$

de lo que se deduce que la serie es convergente.

e) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

**Ejercicio 2.** Aplicar el criterio del cociente para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

- a)  $\sum \frac{1}{n2^n}$  d)  $\sum \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$   
b)  $\sum \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$  e)  $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$   
c)  $\sum \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$

**Solución 2.**

a) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio del cociente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)^{(n+1)}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{(n+1)^n}{3^n n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{e}{3} < 1,$$

y, por tanto, la serie es convergente. Observa que en el último paso hemos utilizado la regla del número  $e$ .

d) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)(4n+1)}}{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

e) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1$$

de lo que se deduce la convergencia de la serie.

**Ejercicio 3.** Aplicar el criterio de comparación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

- a)  $\sum \frac{\log(n)}{n}$
- b)  $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
- c)  $\sum \frac{1}{2n-1}$
- d)  $\sum \frac{1}{2^n - n}$

- e)  $\sum \frac{1}{(2n-1)2n}$
- f)  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
- g)  $\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

**Solución 3.**

a) Comparamos con la serie  $\sum \frac{1}{n}$  que no es convergente. Como  $\frac{\log(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$ , la serie no es convergente.

b) Comparamos con la serie armónica  $\sum \frac{1}{n}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}} = 1.$$

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter y, en consecuencia, la serie  $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$  no es convergente.

- c) No es convergente. La serie se comporta igual que la serie armónica  $\sum \frac{1}{n}$ .  
d) Comparamos con la serie convergente  $\sum \frac{1}{2^n}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - n}{2^n} = 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

- e) Comparamos con la serie convergente  $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(2n-1)2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)2n}{n^2} = 4.$$

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter y, en consecuencia, la serie es convergente.

- f) No es convergente porque  $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ .  
g) Comparamos con la serie convergente  $\sum \frac{1}{n^{7/6}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{7/6} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

**Ejercicio 4.** Aplicar el criterio de condensación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

- a)  $\sum \frac{1}{n \log(n)}$   
b)  $\sum \frac{1}{n(\log(n))^2}$   
c)  $\sum \frac{1}{n(\log(n)) \log(\log(n))}$

**Solución 4.**

- a) Aplicando el criterio de condensación, la serie tiene el mismo carácter que la serie  $\sum 2^n \frac{1}{2^n \log(2^n)} = \sum \frac{1}{\log(2^n)} = \sum \frac{1}{n \log(2)}$  y esta última serie no es convergente comparando con  $\sum \frac{1}{n}$ .  
b) Aplicando el criterio de condensación  $\sum 2^n \frac{1}{2^n (\log(2^n))^2} = \sum \frac{1}{n^2 (\log(2))^2}$  y esta última serie es convergente (compárase con  $\sum \frac{1}{n^2}$ ).  
c) El término general es decreciente y converge a cero. Estamos en condiciones de aplicar el criterio de condensación. La serie tiene el mismo carácter de convergencia que la serie

$$\sum \frac{2^n}{2^n \log(2^n) \log(\log(2^n))} = \sum \frac{1}{n \log(2) \log(n \log(2))}$$

que, a su vez y por el criterio de comparación por paso al límite, se comporta igual que  $\sum \frac{1}{n \log(n)}$ . Esta última serie ya sabemos que no es convergente (véase el Ejercicio ??).

**Ejercicio 5.** Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

- a)  $\sum \frac{2^n}{n}$   
b)  $\sum \frac{n+1}{2n+1}$   
c)  $\sum \frac{1}{n^2 \log(n)}$   
d)  $\sum \frac{n^2}{(3n-1)^2}$   
e)  $\sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$

**Solución 5.**

- a) No es convergente porque  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$ .  
 b) No es convergente porque el término general no tiende a cero:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$ .  
 c) Como  $\log(n) \geq 1$  para  $n \geq 3$ , se tiene que  $\frac{1}{n^2 \log(n)} \leq \frac{1}{n^2}$ , para cualquier  $n \geq 3$ . La serie  $\sum \frac{1}{n^2}$  es convergente y, el criterio de comparación nos dice que  $\sum \frac{1}{n^2 \log(n)}$  también lo es.  
 d) El término general no converge a cero y, por tanto, la serie no es convergente.  
 e) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3(n+1)-1}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{\frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n+2}{3n-1} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

**Ejercicio 6.** Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

- a)  $\sum \frac{1}{n!}$  d)  $\sum \left( \frac{3n}{3n+1} \right)^n$   
 b)  $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$  e)  $\sum \frac{n^2}{4^{(n-1)}}$   
 c)  $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

**Solución 6.**

- a) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

- b) Comparamos con la serie  $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-2)(3n+1)}{n^2} = 9$$

y, por tanto la serie es convergente.

- c) Comparamos con la serie  $\sum \frac{1}{n^3}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}}{\frac{1}{n^3}} = 2.$$

En consecuencia, las dos series tienen el mismo carácter de convergencia. Puesto que la serie  $\sum \frac{1}{n^3}$  es convergente, ambas lo son.

- d) No es convergente porque el término general no converge a cero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{3n+1} \right)^n = e^L \iff \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{3n}{3n+1} - 1 \right) = L$$

y el segundo límite vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{3n}{3n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{3n - 3n - 1}{3n+1} \right) = -1/3.$$

Por tanto el término general de la serie converge a  $e^{-1/3} \neq 0$ .

- e) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{4^{(n-1)}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{4^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

**Ejercicio 7.** Estudiar la convergencia de las series

- a)  $\sum \frac{n^3}{e^n}$  e)  $\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$   
 b)  $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$  f)  $\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}$   
 c)  $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$  g)  $\sum \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)}$   
 d)  $\sum \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$

**Solución 7.**

- a) Aplicamos el criterio de la raíz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{1}{e} < 1$  y, en consecuencia, la serie es convergente.

- b) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

- c) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

- d) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)(2n+3)}}{\frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)(2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n+3} = 0 < 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

- e) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

- f) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)(2n+4)}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+4} = 1$$

pero, como  $\frac{2n+1}{2n+4} \leq 1$ , el criterio del cociente no decide. Ya que hemos calculado  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ , aplicamos el criterio de Raabe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{2n+1}{2n+4}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+4} = \frac{3}{2} > 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

g) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \cdot (2n+2)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3) \cdot (2n+5)}}{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n+5} = 1,$$

pero  $\frac{2n+2}{2n+5} \leq 1$  por lo que el criterio del cociente no decide. Aplicamos el criterio de Raabe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{2n+2}{2n+5} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+5} = \frac{3}{2} > 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

**Ejercicio 8.** Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\sum (-1)^n \frac{20^n}{n+1}$  | d) $\sum \log \left( \frac{n^2+3}{n^2+2} \right)$ |
| b) $\sum \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right)^2$ | e) $\sum \frac{\sqrt[3]{n} \log(n)}{n^2+1}$       |
| c) $\sum \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  | f) $\sum (-1)^n e^{-n}$                           |

**Solución 8.**

- a) No es convergente porque el término general no converge a cero.  
 b) Aplicamos el criterio de Raabe y llegamos a  $n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \frac{4n^2+3n}{4n^2+8n+4} \leq 1$ , de lo que se deduce la no convergencia de la serie.  
 c) Comparamos con la serie armónica  $\sum \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \log(e) = 1$$

y, por tanto, la serie no es convergente.

d) Podemos escribir el término general de la forma:

$$a_n = \log \left( \frac{n^2+3}{n^2+2} \right) = \log \left( 1 + \frac{1}{n^2+2} \right).$$

Comparando con la serie  $\sum \frac{1}{n^2}$  se obtiene la convergencia de la serie dada.

e) Comparamos con la serie  $\sum \frac{\log(n)}{n^{5/3}}$  ya que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{\log(n)}{n^{5/3}}} = 1$$

Y aplicando el criterio de condensación a la serie  $\sum \frac{\log(n)}{n^{5/3}}$  se obtiene que es convergente, luego la de partida también lo es.

f) No hay más que aplicar el criterio de Laeibnitz para series alternadas.

**E** **Ejercicio 9.** Estudia el carácter de las siguientes series:

- a)  $\sum \left( \frac{2n+1}{2n+5} \right)^{n^2}$ .  
 b)  $\sum \frac{1+\log(n)}{n^n}$ .

**Solución 9.**

- a) Aplicamos el criterio de la raíz, considerando como  $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$ . Tendremos entonces que estudiar el límite de  $\{\sqrt[n]{a_n}\}$  y compararlo con 1; esto es

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}} = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2/n} = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^n$$

sucesión que presenta una indeterminación del tipo “ $1^\infty$ ” por lo que aplicamos la regla del número  $e$ :

$$\lim n \left( \frac{2n+1}{2n+5} - 1 \right) = \lim \frac{-4n}{2n+5} = -2 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = e^{-2} < 1$$

Por tanto la serie dada es convergente.

- b) Aplicamos el criterio del cociente, considerando como  $a_n = \frac{1+\log(n)}{n^n}$ ; de esta forma, habrá que estudiar el límite de la siguiente sucesión y compararlo con el valor 1:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1+\log(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{1+\log(n)} = \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)} \frac{n^n}{(n+1)^n (n+1)} \\ &= \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Finalmente, si calculamos el límite de cada uno de los tres factores que tenemos, el primer factor es claro que converge a 1 (no hay más que dividir el numerador y denominador por  $\log(n+1)$ ), el segundo factor converge a  $e^{-1}$  (basta aplicar la regla del número  $e$ ) y el tercero converge a cero. Por tanto:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ es convergente.}$$

**E Ejercicio 10.** Estudiar, según los valores de  $a > 0$  la convergencia de las siguientes series:

- a)  $\sum \frac{a^n}{n^a}$   
b)  $\sum a^n n^a$

**Solución 10.**

- a) Sólo tenemos en cuenta  $0 < a < 1$  puesto que en para  $a = 1$  es la serie armónica que no converge, y para  $a > 1$  el término general no converge a cero. Entonces, para  $0 < a < 1$  aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos que la serie es convergente.  
b) Sólo tenemos en cuenta  $0 < a < 1$  puesto que para  $a \geq 1$  el término general no converge a cero. Entonces, para  $0 < a < 1$  aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos que la serie es convergente.

## 2 Suma de series

**Ejercicio 11.** Suma, si es posible, las siguientes series

- a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n}$   
b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$   
c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

**Solución 11.**

a) Usando la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n} = 15 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 15 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{150}{9}.$$

b) La suma es  $\frac{1}{2}$  puesto que la serie es la mitad de la del Ejemplo ??.

c) De nuevo utilizamos la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} - \sum_{n=0}^1 \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

**Ejercicio 12.** Suma, si es posible, las siguientes series

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$

**Solución 12.**

a) Calculamos las sumas parciales usando la descomposición en fracciones simples del término general:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(n+3)} - \frac{1}{(n+4)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{n+4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b) Aprovechamos que estamos sumando una progresión geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

c) Dividimos en dos progresiones geométricas y sumamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{13}{6}.$$

**Ejercicio 13.** Suma la serie de números reales  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!}$ 

**Solución 13.** Esta serie se suma haciendo uso de que  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ , y para ello descomponemos el numerador del término general de la forma siguiente:



$$n^2 + n + 1 = \alpha n(n-1) + \beta n + \gamma$$

e igualando coeficientes obtenemos que  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  y  $\gamma = 1$ . Por tanto la suma de la serie (que existe por el criterio del cociente) es:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= e + 2e + (e - 1) = 4e - 1. \end{aligned}$$

