CÁLCULO

GRUPOS A, D Y E

1. **(2 ptos.)** Estudia la convergencia y, en su caso, el límite de la sucesión definida por recurrencia como

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{4x_n + 5},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución: Vamos a comprobar que la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que será convergente. Comenzamos con la monotonía. Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3 > x_1 = 1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 < x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n < x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} x_n < x_{n+1} &\Rightarrow\ 4x_n < 4x_{n+1}\ \Rightarrow\ 4x_n + 5 < 4x_{n+1} + 5 \\ &\Rightarrow \sqrt{4x_n + 5} < \sqrt{4x_{n+1} + 5} \end{aligned}$$

Observemos que, en todos los pasos de la anterior cadena de implicaciones, se ha conservado la monotonía por el tipo de operaciones que hemos efectuado. Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por $x_1 = 1$. Veamos que está acotada superiormente por 5. Esto es, que $x_n \leq 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 1 \leq 5$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 5$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 5$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \leq 5\ \Rightarrow\ 4x_n \leq 20\ \Rightarrow\ 4x_n + 5 \leq 25\ \Rightarrow\ \sqrt{4x_n + 5} \leq 5\ \Rightarrow\ x_{n+1} \leq 5$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim x_n = x$ con lo que nos queda: $x = \sqrt{4x+5}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{4x+5} \Rightarrow x^2 = 4x+5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 5$ y $x = -1$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que 1. El motivo es que $1 \leq x_n \leq 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim x_n = 5$.

2. (a) **(1.5 ptos.)** Estudia la convergencia de la serie $\sum \frac{3^n(n+1)!}{n^n}$.

   (b) **(1.5 ptos.)** Calcula la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 3^{n+2}}{5^n}$.

   Solución:

   (a) Aplicamos el criterio del cociente, ya que aparecen factoriales en la expresión del término general de la serie. Así, si llamamos $a_n = \frac{3^n(n+1)!}{n^n}$ tenemos que estudiar el límite del cociente siguiente:

   $$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3^{n+1}(n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{3^n(n+1)!} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \frac{(n+2)!}{(n+1)!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 3 \frac{(n+2)\,n^n}{(n+1)\,(n+1)^n} = 3 \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 3\,e^{-1} = \frac{3}{e} > 1 \end{aligned}$$

   Por tanto, la serie dada es divergente.

   Obsérvese que hemos utilizado que la sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ tiende a $1/e$, resultado que hemos visto en clase aplicando la Regla del número e.

   (b) La serie planteada es suma de dos series geométricas:

   $$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} + 3^{n+2}}{5^n} = (-1) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{-1}{5}\right)^n + 3^2 \sum_{n\geq 1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{5}| < 1$ y $|\frac{3}{5}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$, nos queda entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 3^{n+2}}{5^n} &= -1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^n + 3^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \\
&= -1 \left[\left(\frac{1}{1-\frac{-1}{5}}\right) - 1\right] + 3^2 \left[\frac{1}{1-\frac{3}{5}} - 1\right] \\
&= -1 \left(\frac{5}{6} - 1\right) + 9 \left(\frac{5}{2} - 1\right) = \frac{1}{6} + \frac{27}{2} = \frac{41}{3}
\end{aligned}$$

3. **(2 ptos.)** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\cos(x)-1} e^{-t^2}\, dt}{x^2}.$$

Solución:

Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que la función numerador, $F(x) = \int_0^{\cos(x)-1} e^{-t^2}\, dt$ es continua y derivable ya que el integrando, $f(t) = e^{-t^2}$, es una función continua, al ser composición de funciones continuas. Además,

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \int_0^0 e^{-t^2}\, dt = 0 \quad \text{y} \quad , \quad F'(x) = e^{-(\cos(x)-1)^2} (-\text{sen}(x)) \, .$$

Estamos ante una indeterminación del tipo "0/0" . Por tanto, aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-(\cos(x)-1)^2} (-\text{sen}(x))}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-(\cos(x)-1)^2}}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \frac{-1}{2}$$

ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^{-(\cos(x)-1)^2}}{2} = \frac{-1}{2}$$

y

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

Este último límite se puede resolver aplicando la regla de L'Hôpital.

Concluimos entonces que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\cos(x)-1} e^{-t^2}\, dt}{x^2} = \frac{-1}{2}$$

4. Calcula

   (a) **(1.5 ptos.)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)+1}$,

   (b) **(1.5 ptos.)** $\displaystyle\int x\arctan(x)\, dx$.

Solución:

(a) Se trata de una integral cuyo integrando es una función racional en seno y coseno, por tanto, aplicamos el cambio de variable estándar; esto es

$$t = \tan(x/2) \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}$$
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Aplicamos entonces el cambio de variable:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)+1} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2}{2t^2+2t}\, dt$$
$$\int \frac{1}{t^2+t}\, dt = \int \frac{1}{t(t+1)}\, dt$$

Aplicamos ahora la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)}$$

Dando a la variable t los valores 0 y 1, obtenemos que $A = 1$ y $B = -1$. Por tanto:

$$\int \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt = \log(t) - \log(t+1) + C$$

Deshaciendo el cambio de variable nos queda:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)+1} &= \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) + C \\ &= \log\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right) + C\end{aligned}$$

(b) Para calcular la integral planteada aplicamos el método de integración por partes:

$$\begin{aligned}\int x\arctan(x)\,dx &= \begin{bmatrix} u = \arctan(x) & \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = x\,dx & \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.\end{aligned}$$

La integral que nos queda es de tipo racional. En efecto:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx &= \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x - \arctan(x)\,.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int x\arctan(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\left(x - \arctan(x)\right)\,.$$

Granada, a 23 de enero de 2015.