GEOMETRÍA II. Examen del Tema 1
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2014/15

Nombre:

1. En cada caso, probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa
   (a) Si el polinomio característico de una matriz A de orden 3 es $(1-\lambda)^3$, entonces A es diagonalizable.
   (b) Si una matriz A es diagonalizable, entonces A^t también es diagonalizable.
   (c) Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ con $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$ y $dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. Entonces f es diagonalizable.

2. (a) Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, $f(x,y,z) = (3x - y + z, -2x + 4y - 2z, -2x + 2y)$. Hallar bases de los subespacios propios y estudiar si es diagonalizable, hallando en tal caso, una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada sea diagonal.
   (b) Estudiar si la siguiente matriz puede ser la expresión matricial de f para alguna base:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Para qué valores del parámetro a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.
   Para dichos valores hallar la expresión A^n para cualquier número $n \in \mathbb{N}$.

4. Sea $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de un espacio vectorial V y $f \in \mathrm{End}(V)$ del cual se sabe que $e_1 \in V_1$, $dim(V_{-1}) = 2$ y $f(e_4) = ae_1 + e_4$ con $a \in \mathbb{R}$. Estudiar y razonar para qué valores de a, f es diagonalizable.

Importante: razonar todas las respuestas

Soluciones

1. (a) Falsa. La matriz triangular superior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene polinomio característico $(1-\lambda)^3$, pero no es diagonalizable porque la dimensión de V_1 es 2 (menor que la multiplicidad aritmética de $\lambda = 1$) ya que

$$rg(A - 1I_3) = r\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

(b) Verdadera. Decir que A es diagonalizables es decir que es semejante a una matriz diagonal D: $A = P^{-1}DP$, donde P es regular. Tomando traspuestas, $A^t = P^tD^t(P^{-1})^t$. Ahora bien, $D^t = D$, ya que D es diagonal y $(P^{-1})^t = (P^t)^{-1}$. Por tanto $A^t = QDQ^{-1}$, donde $Q = P^t$, que es regular porque P lo es.

(c) Sea $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base donde los dos primeros vectores generan el núcleo. Entonces

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Además $Im(f) =< f(e_3) >=< (a,b,c) >$. El número c no es cero: en caso contrario, $(a,b,0) \in Im(f)\cap < e_1, e_2 >= Im(f) \cap Ker(f)$. Como a, b no pueden ser simultáneamente 0 (entonces $f = 0$ y $Ker(F) = V$), entonces habría un vector no nulo en la intersección. Esta contradicción prueba que $c \neq 0$. Finalmente la matriz $M(f,b)$ es triangular superior y el valor propio $\lambda = c$ tiene multiplicidad aritmética y geométrica 1. Como $\lambda = 0$ es valor propio con multiplicidad aritmética 2 y geométrica $dim(V_0) = dim(Ker(f)) = 2$, entonce f es diagonalizable.

2. (a) La expresión matricial de f respecto de la base usual es

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico es

$$P_f(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = (3-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

Por tanto, hay tres valores propios. Para estudiar si es diagonalizable, y como $dim(V_3) = 1$, sólo hay que probar que $dim(V_2) = 2$, o dicho de otro modo, que $rg(M(f, b) - 2I_2) = 1$. Pero

$$M(f, B) - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

tiene rango 1, pues la segunda y tercera filas son múltiplos de la primera. Esto prueba que es diagonalizable.

Para hallar la base que nos piden, hallamos las bases de los subespacios propios.

$$\begin{aligned} V_3 &= \{(x,y,z) : -y + z = 0, -2x + y - 2z = 0\} = \{(x,y,z) : y = z, x = -z/2\} \\ &= \{(-z/2, z, z) = z(-1/2, 1, 1); z \in \mathbb{R}\} =< (-1, 2, 2)) > . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x,y,z) : x - y + z = 0\} = \{(x,y,z) : x = y - z\} \\ &= \{(y - z, y, z) = y(1,1,0) + z(-1,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= < (1,1,0), (-1,0,1) > . \end{aligned}$$

Llamamos $B = \{(-1,2,2), (1,1,0), (-1,0,1)\}$ la base de vectores propios. Entonces

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) La matriz que se da es una matriz triangular superior con valores propios $\lambda = 2$ (doble) y $\lambda = 3$. La dimensión de V_2 es

$$3 - r(A - 2I) = 3 - rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1,$$

que no coincide con la multiplicidad aritmética. Esto prueba que dicha matriz no es diagonalizable, y por tanto, no puede ser la expresión matricial de f que ya se ha probado que es diagonalizable.

3. (a) El polinomio característico de A es $P_A(\lambda) = -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 = (2-\lambda)(-1+\lambda)^2$. Ya que hay tres valores propios, para usar el teorema de diagonalización, hay que estudiar si las multiplicidades aritméticas y geométricas son iguales. Para $\lambda = 2$, se tiene la igualdad ya que la multiplicidad aritmética es 1. Para $\lambda = 1$,

$$A - 1I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La tercera fila es proporciona a la segunda, luego se quita para estudiar el rango de la matriz. De la matriz que queda, el único menor de orden 2 es $-a$. Por tanto, $a = 0$, el rango de la matriz es 1, y si $a \neq 0$, el rango es 2. Por tanto, la matriz es diagonalizable si $a = 0$.

(b) Hallamos una base de vectores propios para $a = 0$.

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y,z) : x+z=0\} = \{(x,y,z) : x = -z\} \\ &= \{(-z,y,z) = z(-1,0,1) + y(0,1,0) : z \in \mathbb{R}\} =< (-1,0,1),(0,1,0) > . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x,y,z) : x = 0, -x-y-z=0\} = \{(0,-z,z) = z(0,-1,1) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= < (0,-1,1) > . \end{aligned}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^n &= P^{-1}D^nP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+2^n & 1 & -1+2^n \\ -1+2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Sea $V_{-1} =< v_1, v_2 >$, los cuales son linealmente independientes con e_1 porque pertenecen a diferentes subespacios propios. Probamos que $B = \{e_1, v_1, v_2, e_4\}$ es una base de V. Si e_4 es combinación de los tres anteriores, entonces $e_4 = xe_1 + yv_1 + zv_2$ y aplicando f, tenemos $ae_1 + e_4 = xe_1 - yv_1 - zv_2$. Sustituyendo por el valor de e_4:

$$(a+x)e_1 + 2yv_1 + 2zv_2 = 0.$$

Por tanto $a + x = y = z = 0$. Entonces $e_4 = xe_1$, lo cual es falso ya que eran linealmente independientes.

Una vez probado que B es base, se tiene

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como es una matriz triangular superior, el polinomio característico es $(1-\lambda)^2(-1-\lambda)^2$. Por tanto, f es diagonalizables si probamos que $dim(V_1) = 2$ (ya se tenía que $dim(V_{-1}) = 2$). Pero

$$rg(M(f, b) - 1I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

si y sólo si $a = 0$.