

Prueba de clase 27 de Marzo de 2015

Alumno: _____ D.N.I.: _____

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS TEST¹

	a)	b)	c)	d)
Pregunta 1	V	F	F	F
Pregunta 2	V	F	F	F
Pregunta 3	F	V	F	V
Pregunta 4	F	F	V	F
Pregunta 5	F	F	V	V

PREGUNTAS TEST.

Ejercicio 1. En un álgebra de Boole B se definen las operaciones $a \uparrow b = \overline{ab}$ y $a \downarrow b = \overline{a + b}$. Entonces:

- a) $\overline{x \uparrow y} = \overline{x} \downarrow \overline{y}$
- b) $(x \downarrow y) \uparrow z = xy\overline{z}$
- c) $(x \uparrow y) \uparrow z = x \uparrow (y \uparrow z)$
- d) $(x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y) = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$

Ejercicio 2. Denotamos por $D(m)$ al conjunto de los divisores del número natural m dotados con las operaciones $\vee = \text{m.c.m.}$ y $\wedge = \text{m.c.d.}$ Entonces:

- a) $D(105)$ es un álgebra de Boole con 3 coátomos: 35, 21 y 15.
- b) $D(90)$ es un álgebra de Boole con 3 átomos: 2, 5 y 9.
- c) $D(27)$ es un álgebra de Boole con 3 átomos: 1, 3 y 9.
- d) $D(154)$ es un álgebra de Boole con 3 coátomos: 7, 14 y 77.

Ejercicio 3. Dadas las funciones booleanas $f, g : \mathbb{B}^5 \rightarrow \mathbb{B}$ dadas por

$$f = M_0 \cdot M_1 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_{10} \cdot M_{15} \cdot M_{22} \cdot M_{23} \cdot M_{28} \cdot M_{30}$$

$$g = m_0 + m_5 + m_{15} + m_{21} + m_{23} + m_{24} + m_{27} + m_{31}$$

se tiene:

- a) $f + g = M_1 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_{10} \cdot M_{22} \cdot M_{28} \cdot M_{30}$
- b) $fg = m_5 + m_{21} + m_{24} + m_{27} + m_{31}$
- c) $\overline{g} = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_7 \cdot M_8 \cdot M_9 \cdot M_{10} \cdot M_{11} \cdot M_{12} \cdot M_{13} \cdot M_{14} \cdot M_{16} \cdot M_{17} \cdot M_{18} \cdot M_{19} \cdot M_{20} \cdot M_{22} \cdot M_{25} \cdot M_{26} \cdot M_{28} \cdot M_{29} \cdot M_{30}$
- d) $\overline{f} = m_0 + m_1 + m_4 + m_6 + m_{10} + m_{15} + m_{22} + m_{23} + m_{28} + m_{30}$

Ejercicio 4. Señala si cada una de las siguientes afirmaciones es equivalentes a

$$\Gamma \models \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg \gamma)$$

¹Cada casilla del cuadro debe ser rellenada con V (verdadero) o F (falso).

- a) $\Gamma \cup \{\gamma\} \models \alpha \rightarrow \beta$
 b) $\Gamma \cup \{\alpha \rightarrow \beta\} \models \neg\gamma$
 c) $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ es insatisfacible.
 d) $\Gamma \cup \{\alpha, \beta \rightarrow \neg\gamma\}$ es satisfacible.

Ejercicio 5. Indica en cada caso si el siguiente conjunto de fórmulas es insatisfacible

- a) $\{a \rightarrow (b \rightarrow c), \neg b \rightarrow \neg a, \neg c\}$
 b) $\{a \rightarrow (b \rightarrow c), \neg b \rightarrow \neg a, c\}$
 c) $\{a \vee b \rightarrow c, \neg b \rightarrow a, \neg c\}$
 d) $\{\neg b \rightarrow \neg a, (\neg b \rightarrow \neg a) \rightarrow c, \neg c\}$

FIN DE LAS PREGUNTAS TEST

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{B}^5 \rightarrow \mathbb{B}$ la función dada por

$$f(x, y, z, t, u) = xyz\bar{t}\bar{u} + \bar{x}y\bar{z}tu + \bar{x}yz\bar{t}u + zu(x\bar{y} \oplus x\bar{t}) + (x \downarrow u)y\bar{z}\bar{t} + ytu(z \oplus x)$$

Calcula una expresión reducida de f como suma de productos, y expresa \bar{f} usando únicamente los operadores **producto** y **complemento**.

Solución 1. En primer lugar calculamos los minterminos que describen a esta función; algunos vienen ya determinados:

$$\begin{array}{lll} xyz\bar{t}\bar{u} & 11100 & (28) \\ \bar{x}y\bar{z}tu & 01011 & (11) \\ \bar{x}yz\bar{t}u & 01101 & (13) \end{array}$$

calculamos el resto:

$$zu(x\bar{y} \oplus x\bar{t}) = zu(x\bar{y}\bar{x}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}x\bar{t}) = zu(x\bar{y}(\bar{x} + t) + (\bar{x} + y)x\bar{t}) = \bar{x}y\bar{z}tu + xyz\bar{t}u$$

lo que nos proporciona los minterminos 10111, (23) y 11101, (29). Ahora

$$(x \downarrow u)y\bar{z}\bar{t} = (\bar{x} + \bar{u})y\bar{z}\bar{t} = \bar{x}y\bar{z}\bar{t}\bar{u}$$

que da el mintermino 01100, (12). Por último

$$ytu(z \oplus x) = ytu(z\bar{x} + \bar{z}x) = \bar{x}y\bar{z}tu + xy\bar{z}tu$$

que son los minterminos 01111, (15) y 11011, (27). Así que

$$f(x, y, z, t, u) = \Sigma_5 m(11, 12, 13, 15, 23, 27, 28, 29)$$

Usando el algoritmo de Quine-McClusky, por ejemplo, realizamos la minimización.

Procedemos a obtener las agrupaciones

con lo que en la primera tabla el mintermino 23 es un implicante primo. Calculando las agrupaciones en la tabla anterior aparece

$$_110_, (12, 13, 28, 29)$$

n° de unos	minterm-binario	minterm-decimal
2	01100	12
3	01011	11
	01101	13
	11100	28
3	01111	15
	10111	23
	11011	27
	11101	29

Agrupación	minterm implicados
0110_	12,13
_1100	12,28
01_11	11,15
_1011	11,27
011_1	13,15
_1101	13,29
1110_	28,29

y nos quedan 3 implicantes primos en la segunda tabla: 01_11, _1011, 011_1.

Procedemos ahora a seleccionar qué implicantes primos son esenciales. Con los tres i.p. esenciales solo queda por cubrir el mintermino 15, y podemos optar por cualquiera de los dos i.p. restantes. Así que tenemos dos posibles soluciones:

$$f(x, y, z, t, u) = x\bar{y}ztu + y\bar{z}tu + yz\bar{t} + \bar{x}ytu$$

o bien

$$f(x, y, z, t, u) = x\bar{y}ztu + y\bar{z}tu + yz\bar{t} + \bar{x}yzu$$

Para dar una expresión de \bar{f} usamos una reducida de f y complementamos:

$$\begin{aligned}\bar{f}(x, y, z, t, u) &= \overline{x\bar{y}ztu + y\bar{z}tu + yz\bar{t} + \bar{x}ytu} = \\ &= (\overline{x\bar{y}ztu}) (\overline{y\bar{z}tu}) (\overline{yz\bar{t}}) (\overline{\bar{x}ytu})\end{aligned}$$

que es una expresión en la que solo se usan productos y complementos.

Tabla de i.p.

		11	12	13	15	23	27	28	29
★	10111					✓			
	01_11	✓			✓				
★	_1011	✓					✓		
	011_1			✓	✓				
★	_110_		✓	✓				✓	✓
		✓	✓	✓		✓	✓	✓	✓

Ejercicio 7. Dadas las fórmulas:

- $\alpha_1 = a \vee (d \wedge (\neg a \rightarrow e)).$
- $\alpha_2 = a \wedge b \rightarrow e \vee d.$
- $\alpha_3 = (b \leftrightarrow d) \rightarrow c.$
- $\alpha_4 = d \rightarrow ((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow \neg b)).$
- $\beta = (d \rightarrow a) \rightarrow (b \wedge e).$

estudia si es cierto que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \models \beta$. Caso de no ser cierto, da una interpretación que lo muestre.

Solución 2. Se trata de estudiar si es cierta la consecuencia lógica

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \models (d \rightarrow a) \rightarrow (b \wedge e)$$

Así que usando el Teorema de la Deducción es equivalente a

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, d \rightarrow a\} \models b \wedge e$$

y transformando en un problema de insatisfacibilidad de un conjunto de fórmulas queda

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, d \rightarrow a, \neg(b \wedge e)\} \models \square$$

Calculamos la forma clausular de cada una de las fórmulas del conjunto:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\equiv a \vee (d \wedge (a \vee e)) \equiv (a \vee d) \wedge (a \vee e) \\ \alpha_2 &\equiv \neg(a \wedge b) \vee e \vee d \equiv \neg a \vee \neg b \vee e \vee d \\ \alpha_3 &\equiv \neg((\neg b \vee d) \wedge (b \vee \neg d)) \vee c \equiv ((b \wedge \neg d) \vee (\neg b \wedge d)) \vee c \equiv \\ &\equiv ((b \vee d) \wedge (\neg d \vee \neg b)) \vee c \equiv (b \vee d \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg d \vee c) \\ \alpha_4 &\equiv \neg d \vee ((\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)) \equiv (\neg d \vee \neg a \vee b) \wedge (\neg d \vee \neg a \vee \neg b) \\ d \rightarrow a &\equiv \neg d \vee a \\ \neg(b \wedge e) &\equiv \neg b \vee \neg e \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo cada fórmula por las cláusulas a las que da lugar, el problema original es equivalente a

$$\{a \vee d, a \vee e, \neg a \vee \neg b \vee e \vee d, b \vee d \vee c, \neg b \vee \neg d \vee c, \neg d \vee \neg a \vee b, \neg d \vee \neg a \vee \neg b, \neg d \vee a, \neg b \vee \neg e\} \models \square$$

Para el que podemos usar el algoritmo de Davis-Putnam. Hay un literal puro (paso 2), $\lambda = c$, así que eliminamos las cláusulas donde aparece:

$$\{a \vee d, a \vee e, \neg a \vee \neg b \vee e \vee d, \neg d \vee \neg a \vee b, \neg d \vee \neg a \vee \neg b, \neg d \vee a, \neg b \vee \neg e\}$$

Ahora, como no hay cláusulas unit ni literales puros, usamos el Paso 3, y eligiendo un literal cualquiera, por ejemplo a , obtenemos dos conjuntos que deben ser ambos insatisfacibles para que lo sea el inicial. Cuando $\lambda = a$ queda

$$\{\neg b \vee e \vee d, \neg d \vee b, \neg d \vee \neg b, \neg b \vee \neg e\}$$

donde de nuevo debemos aplicar el Paso 3, por ejemplo para $\lambda = \neg b$ y obtendremos:

$$\{\neg d\}$$

que es satisfacible para la interpretación $I(d) = 0$. No hace falta entonces examinar el conjunto de cláusulas para $\lambda = b$ ni $\lambda = \neg a$.

Así que la consecuencia lógica no ocurre, y la interpretación que lo prueba se ha obtenido en el algoritmo

$$I(\neg d) = 1, I(\neg b) = 1, I(a) = 1, I(c) = 0$$

y cualquier valor para $I(e)$.