GEOMETRÍA I. Examen del Tema 2

– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –

Curso 2013/14

<u>**Nombre**</u>:

1. En cada caso, probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa.
   (a) Sean $U, W \subset V$ dos subespacios vectoriales. Si B es base de U y B' es base de W, entonces $B \cup B'$ es base de $U + W$.
   (b) Si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es base de V, entonces $\{e_1, e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n\}$ es base de V.
   (c) Si $U, W \subset \mathbb{R}^7$ son subespacios vectoriales de dimensiones 3 y 4 respectivamente, entonces $\mathbb{R}^7 = U \oplus W$.

2. En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se considera los vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Probar que son linealmente independientes y extender a una base B del espacio. Respecto de dicha base, hallar las ecuaciones cartesianas (o implícitas) del subespacio
$$U = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a_{12} - a_{21} = 0, a_{11} - a_{22} = 0\}.$$

3. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales:
$$U = \{(x, y, z, t) \ : \ x + t = 0, y + z = 0\} \quad W =< (1, 1, 1, 1), (0, k, 0, 1) >,$$
   donde k es un parámetro real.
   (a) Determinar para que valores de k se tiene $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
   (b) Para $k = 1$, determinar una base y unas ecuaciones cartesianas de $U + W$ y $U \cap W$.

4. En $\mathbb{R}_2[x]$, se considera los vectores
$$u_1 = 1 - x + x^2, \ u_2 = 1 + x^2, \ u_3 = 1 + x.$$
   Probar que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$ y encontrar la matriz del cambio de base de la base usual B_u a B. Hallar las coordenadas de $u = 1 - 2x + 2x^2$ en la base B.

1. (a) Falso. En general, $B \cup B'$ es un sistema de generadores. Así, en $\mathbb{R}^3$, $U =< (1,0,0),(0,1,0) >$, $W =< (0,1,0),(0,0,1) >$, $B \cup B'$ es un sistema de generadores, pero al contener a la base usual, $U + W = \mathbb{R}^3$. Sin embargo, $B \cup B'$ tiene 4 elementos, luego no puede ser base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Verdadero. Escribiendo los vectores en coordenadas respecto de B, aquéllos se escriben como $\{(1,0,\ldots,0),(1,-1,0,\ldots,0),\ldots,(1,0,\ldots,0,-1)\}$, que al colocarlos en una matriz, ésta tiene rango n.

   (c) Falso. Sea U cualquier subespacio de dimensión 3, y una base suya $B = \{e_1,e_2,e_3\}$, y la ampliamos a 4 vectores linealmente independientes: $B' = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$. Entonces $W =< B' >$ tiene dimensión 4, y como $U \subset W$, $U + W = W$, que no es $\mathbb{R}^7$. (O usando que $B \cup B'$ es un sistema de generadores de $U + W$, como $B \subset B'$, $B \cup B' = B'$, luego $U + W = W$.)

2. (a) Fijamos la base usual de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Entonces las coordenadas de los vectores son $\{(1,1,1,1),(0,1,1,0)\}$ que son linealmente independientes ya que al colocarlos en las filas de una matriz, la matriz es reducida con dos pivotes, luego su rango es 2. Para ampliarlos, tomamos dos vectores más que al ponerlos en una matriz, ésta sea de rango 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Luego la base es $\underline{B = \{(1,1,1,1),(0,1,1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}}$.

   (b) Hallamos una base de U, resolviendo el sistema. Las incógnitas son $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$. Tomando como parámetros $a_{21} = \lambda$ y $a_{22} = \mu$, tenemos $a_{11} = \mu$, $a_{12} = \lambda$. Luego $A \in U$ si

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} : \lambda,\mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \lambda,\mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Por tanto $U =< (0,1,1,0),(1,0,0,1) >$. Trivialmente, las coordenadas estos vectores respecto de la base B son $\{(0,1,0,0),(1,-1,0,0)\}$. Respecto de B, $(x,y,z,t) \in U$ si

$$rango \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = 2.$$

   Tomando como menor de orden 2 no nulo el de la esquina arriba izquierda, y ampliando con la tercera y luego con la cuarta fila, tenemos que las ecuaciones cartesianas son $\underline{z = 0,\ t = 0}$.

3. (a) Hallamos una base de U resolviendo el sistema de las ecuaciones cartesianas. Hacemos $z = \lambda$ y $t = \mu$. Entonces $x + \mu = 0$, $y + \lambda = 0$. Así,

$$(x,y,z,t) = (-\mu,-\lambda,\lambda,\mu) = \lambda(-1,0,0,1) + \mu(0,-1,1,0) \in < (-1,0,0,1),(0,-1,1,0) > .$$

   Por tanto, $U =< (-1,0,0,1),(0,-1,1,0) >$. Observemos que el sistema de generadores de U es base, al no ser los vectores proporcionales. Entonces $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ si

$\{(-1,0,0,1),(0,-1,1,0),(1,1,1,1),(0,k,0,1)\}$ son linealmente independientes, es decir, al colocarlos en una matriz, su determinante no es cero. Hallando ese determinante, tenemos $2-2k$. Luego el rango es 4 si y sólamente si $\underline{k \neq 1}$.

(b) Hacemos $k=1$. Entonces $\{(-1,0,0,1),(0,-1,1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1)\}$ son linealmente dependientes. Como los tres primeros son independientes (al colocarlos en una matriz, el rango es 3), una base de $U+W$ es $\{(-1,0,0,1),(0,-1,1,0),(1,1,1,1)\}$. Para las ecuaciones cartesianas (sólo 1), se tiene $(x,y,z,t) \in U+W$ si y sólamente si

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 1 & 0 & 1 & t \end{vmatrix} = 0.$$

Entonces $\underline{x-y-z+t=0}$.

Para la intersección, hallamos las ecuaciones cartesianas de W: $(x,y,z,t) \in W$ si

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto, $x-z=0$, $y-t=0$.

Finalmente, las ecuaciones cartesianas de $U \cap W$ se obtienen de sacar las que son linealmente independientes de:

$$x+t=0$$

$$y+z=0$$

$$x-z=0$$

$$y-t=0$$

Por la fórmula de la dimensión de la suma de subespacios vectoriales, se sabe que $dim(U \cap W)=1$, luego las ecuaciones cartesianas son tres. Ya que el rango de los coeficientes de las tres primeras es 3,

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

las ecuacione cartersianas de $U \cap W$ son: <u>x+t=0 y+z=0 x-z=0</u>. Para la base, resolvemos el sistemas tomando como parámetro $t=\lambda$:

$$x=-\lambda, y=\lambda, z=-\lambda, t=\lambda \in \mathbb{R},$$

luego $U=\{\lambda(-1,1,-1,1) : \lambda \in \mathbb{R}\} =< (-1,1,-1,1) >$ y la base es $\underline{\{(-1,1,-1,1)\}}$.

4. (a) Escribiendo las coordenadas de los vectores respecto de B_u y colocándolos en una matriz, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene rango 3, pues su determinante es -1.

Para calcular la matriz de cambio de base, hallamos las coordenadas de los vectores de la base usual respecto de B, y la colocamos como columnas de la matriz:

$$1 = \lambda(1-x-x^2)+\mu(1+x^2)+\delta(1+x) \Rightarrow \left.\begin{array}{lcl} \lambda+\mu+\delta & = & 1 \\ -\lambda+\delta & = & 0 \\ \lambda+\mu & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -\mu = \delta = 1$$

$$x = \lambda(1-x-x^2)+\mu(1+x^2)+\delta(1+x) \Rightarrow \left.\begin{array}{lcl} \lambda+\mu+\delta & = & 0 \\ -\lambda+\delta & = & 1 \\ \lambda+\mu & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -\mu = -1, \delta = 0.$$

$$x^2 = \lambda(1-x-x^2)+\mu(1+x^2)+\delta(1+x) \Rightarrow \left.\begin{array}{lcl} \lambda+\mu+\delta & = & 0 \\ -\lambda+\delta & = & 0 \\ \lambda+\mu & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \delta = -1, \mu = 2.$$

La matriz pedida es

$$\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

(b) Para el cálculo de las coordenadas (a,b,c) del polinomio u, o usamos la definición

$$u = a(1-x+x^2)+b(1+x^2)+c(1+x)$$

y resolvemos, o usamos la matriz anterior (y sabiendo que las coordenadas de u respecto de $B-u$ son $(1,-2,2)$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

es decir, $\underline{(1,1,-1).}$