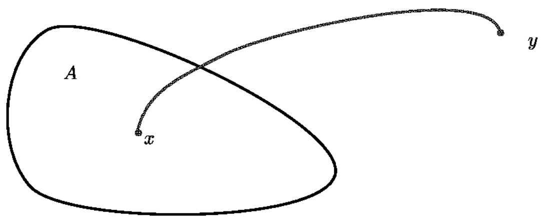
Análisis Matemático I. Curso 2014-15. PRIMERA PARTE.
Doble Grado Matemáticas-Informática. 6 de febrero de 2015

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^N$.

   (a) (**0.5 pto**) Probad que $\mathbb{R}^N$ puede escribirse como la siguiente unión **disjunta**:
   $$\mathbb{R}^N = \operatorname{int}(A) \cup \partial A \cup \operatorname{int}(\mathbb{R}^N \setminus A).$$

   (b) (**1 pto**) Sean $x \in A$ e $y \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{A}$. Probad que todo camino *uniendo* x con y corta la frontera ∂A de A.



   (c) (**0.5 pto**) Probad que una consecuencia del apartado anterior es el teorema de Bolzano: "Toda función continua en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con $f(a)f(b) < 0$ posee un cero".

2. (**1 pto**) Sea
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{aligned}$$
una función de clase C^1. Supongamos que f verifica (las ecuaciones de Cauchy-Riemann)
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$
Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Probad que existe un entorno de (x_0, y_0) en el que f es invertible si y sólo si la derivada $Df(x_0, y_0) \neq 0$.

3. Sea $c > 0$ y supongamos que $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 y satisface la ecuación
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
Se define la función v mediante $v(s, t) = u\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2c}\right)$.

   (a) (**0.75 pto**) Calculad la ecuación verificada por v.

   (b) (**0.25 pto**) Determinad u.

4. (a) (**0.5 pto**) Estudiad la derivabilidad direccional en el punto $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$$f(x, y) = \begin{cases} \left[\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right]^2, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

   (b) (**0.5 pto**) ¿Es la función f derivable en $(0, 0)$?

Análisis Matemático I. Curso 2014-15. SEGUNDA PARTE.
Doble Grado Matemáticas-Informática. 6 de febrero de 2015

1. Sean $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 10\}$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) (**0.75 pto**) Estudiad los extremos relativos de f en el interior $\operatorname{int}\Omega$ de Ω.

   (b) (**0.75 pto**) Hallad los valores extremos de la función en el círculo Ω.

2. Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^2$ y $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ una función verificando

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \operatorname{sen}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) - u^3(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega. \qquad (1)$$

   (a) (**0.5 pto**) Probad que u alcanza su máximo absoluto y su mínimo absoluto en $\overline{\Omega}$.

   (b) (**0.75 pto**) Probad que si u alcanza su máximo (absoluto) en un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, entonces $u \leq 0$.

   (c) (**0.25 pto**) Probad que si además de (1), $u(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \partial\Omega$, entonces $u \equiv 0$.

3. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\Sigma \subset \mathbb{R}^M$. Supongamos que Σ es conexo y que $f : \Omega \longrightarrow \Sigma$ es una función continua, propia[1] y localmente invertible[2]

   (a) (**1 pto**) Si $y \in \Sigma$, probad que el cardinal $[y]$ del conjunto $f^{-1}(\{y\})$ es finito.

   (b) (**1 pto**) Probad que la aplicación

$$\begin{aligned} \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto [y] \end{aligned}$$

   es constante.

---

[1] f se dice propia si $f^{-1}(K)$ es compacto para todo compacto $K \subset \Sigma$

[2] f es localmente invertible si para cada $x \in \Omega$ existe un entorno U_x de x en Ω y un entorno V_y de $y = f(x)$ en Σ tal que $f|_{U_x} : U_x \longrightarrow V_y$ es un homeomorfismo.

Soluciones 1ª Parte

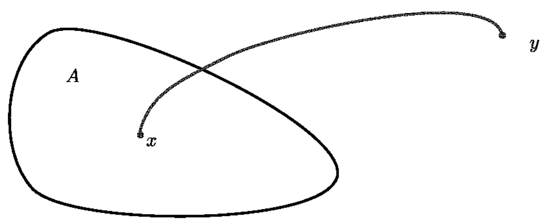
Problema 1

Sea $A \subset \mathbb{R}^N$.

1. (**0.5 pto**) Probad que $\mathbb{R}^N$ puede escribirse como la siguiente unión **disjunta**:

$$\mathbb{R}^N = \text{int}\,(A) \cup \partial A \cup \text{int}\,(\mathbb{R}^N \setminus A).$$

2. (**1 pto**) Sean $x \in A$ e $y \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{A}$. Probad que todo camino *uniendo* x con y corta la frontera ∂A de A.



3. (**0.5 pto**) Probad que una consecuencia del apartado anterior es el teorema de Bolzano: "Toda función continua en un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $f(a)f(b) < 0$ posee un cero".

Solución. 1. A todo $x \in \mathbb{R}^N$ le pueden pasar tres cosas excluyentes entre si:

- o existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_0) \subset A$ (es decir, $x \in \text{int}\,A$).
- o existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}^N \setminus A$ (es decir, $x \in \text{int}\,(\mathbb{R}^N \setminus A)$).
- o para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^N \setminus A) \neq \emptyset$ (es decir, $x \in \partial A$).

2. Este apartado está **hecho en clase**. Una posible solución sería: Sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ un camino uniendo x e y, es decir, una función continua tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Puesto que γ es continuo y $[0,1]$ es conexo, la imagen $\gamma([0,1])$ es conexo.

Demostramos que $\gamma([0,1]) \cap \partial A \neq \emptyset$ por reducción al absurdo: si fuera ésta intersección vacía, por el apartado anterior,

$$\gamma([0,1]) \subset \text{int}\,(A) \cup \text{int}\,(\mathbb{R}^N \setminus A)$$

lo cual significa que $\gamma([0,1])$ no sería conexo, un absurdo.

3. Aplicad el apartado 2. a:

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(x) = (x, f(x)), \ \forall x \in [a,b]$$

$$A = \{(x,y) \,/\, y > 0\}.$$

Problema 2

(**1 pto**) Sea

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$$

una función de clase C^1. Supongamos que f verifica (las ecuaciones de Cauchy-Riemann)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Probad que existe un entorno de (x_0, y_0) en el que f es invertible si y sólo si la derivada $Df(x_0, y_0) \neq 0$.

Solución. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ -\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

y

$$\det Df(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2 \neq 0 \Longleftrightarrow \nabla f_1(x_0,y_0) \neq (0,0) \Longleftrightarrow \nabla f_2(x_0,y_0) \neq (0,0).$$

Así, si $Df(x_0,y_0) \neq 0$, tenemos $\det Df(x_0,y_0) \neq 0$ y, por el teorema de la función inversa, existen entornos U de (x_0,y_0) en $\mathbb{R}^2$ y V de $f(x_0,y_0)$ en $\mathbb{R}^2$ tales que f es un difeomorfismo de U en V.

Recíprocamente, si existen entornos U de (x_0,y_0) en $\mathbb{R}^2$ y V de $f(x_0,y_0)$ en $\mathbb{R}^2$ tales que f es un difeomorfismo de U en V, entonces por la regla de la cadena aplicada a $f^{-1} \circ f =$ Identidad, nos queda que

$$Df^{-1}(f(x_0,y_0) \circ Df(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que implica que $Df(x_0,y_0) \neq 0$.

Problema 3

Sea $c > 0$ y supongamos que $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 y satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Se define la función v mediante $v(s,t) = u\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2c}\right)$.

(a) (**0.75 pto**) Calculad la ecuación verificada por v.

(b) (**0.25 pto**) Determinad u.

Solución (a) Empezamos calculando la inversa del cambio:

$$(s,t) \overset{H}{\mapsto} \left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2c}\right)$$

Ésta es:

$$(x,y) \overset{H^{-1}}{\mapsto} (x+cy, x-cy)\,.$$

Entonces $u(x,y) = v\,(x+cy, x-cy)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial s}\,(x+cy, x-cy) + \frac{\partial v}{\partial t}\,(x+cy, x-cy)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial s}\,(x+cy, x-cy)\,c + \frac{\partial v}{\partial t}\,(x+cy, x-cy)\,(-c).$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2c\frac{\partial v}{\partial s}\,(x+cy, x-cy)$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial s}\,(x+cy, x-cy) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial s}\,(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

(b) Por el apartado anterior $\frac{\partial v}{\partial s} = 0$, lo que significa que v es independiente de s: $\exists f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $v(s,t) = f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por el cambio H,

$$u(x,y) = f(x+cy), \quad \forall (x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Problema 4

(a) (**0.5 pto**) Estudiad la derivabilidad direccional en el punto $(0,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \left[\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\right]^2, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

(b) (**0.5 pto**) ¿Es la función f derivable en $(0,0)$?

Solución. (a) Sea $v=(x,y) \in \mathbb{R}^2$ una dirección cualquiera. Calculamos los cocientes incrementales:

$$\frac{f(tx,ty)-f(0,0)}{t} = \begin{cases} t^2\left[\dfrac{x^2 y}{t^2 x^4+y^2}\right]^2, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Usando que

$$\lim_{t\to 0} \frac{x^2 y}{t^2 x^4 + y^2} = \frac{x^2 y}{y^2}, \quad \forall y \neq 0$$

nos queda que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tx,ty)-f(0,0)}{t} = 0,$$

es decir,

$$D_v(0,0) = 0.$$

(b) La función f no es continua en $(0,0)$ porque no existe el límite doble:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right]^2.$$

En efecto, si me aproximo a $(0,0)$ por rectas $y=\lambda x$, $\lambda \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{x^3\lambda}{x^4+\lambda^2 x^2}\right]^2 = \lim_{x\to 0} \left[\frac{x\lambda}{x^2+\lambda^2}\right]^2 = 0,$$

mientras que si lo hago por parábolas $y=\lambda x^2$, $\lambda \neq 0$, me queda

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{x^4\lambda^2}{x^4+\lambda^2 x^4}\right]^2 = \left[\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right]^2 \neq 0.$$

Por tanto, la función no puede ser continua (y así tampoco derivable) en $(0,0)$.

Soluciones 2ª Parte

Problema 1

Sean $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 10\}$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) (**0.75 pto**) Estudiad los extremos relativos de f en el interior $\operatorname{int}\Omega$ de Ω.

(b) (**0.75 pto**) Hallad los valores extremos de la función en el círculo Ω.

Solución. La función f es clase C^∞ en todo $\mathbb{R}^2$ por ser polinómica.En particular, será continua en todo Ω y de clase C^2 en $\operatorname{int}\Omega$.

(a) Los posibles extremos relativos de f en $\operatorname{int}\Omega$ se encuentran entre los puntos críticos de f en $\operatorname{int}\Omega$. Calculo éstos:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x-2=0 \\ 4y=0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow (x,y) = (1,0) \in \operatorname{int}\Omega.$$

Calculo la matriz hessiana $Hf(1,0)$ de f en $(1,0)$ para saber si es máximo o mínimo relativo. Como

$$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es definida positiva, nos queda que $(1,0)$ es un mínimo relativo de f en $\operatorname{int}\Omega$.

(b) Puesto que Ω es cerrado (al ser imagen inversa por la función continua $g(x,y) := x^2+y^2$ del intervalo cerrado $[0,10]$) y acotado (Ω es una bola), resulta que Ω es compacto. Al ser f continua en Ω, por el teorema de Weierstrass, f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en Ω, es decir, existen $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \Omega$ tales

$$f(x_1,y_1) \leq f(x,y) \leq f(x_2,y_2), \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Al punto (x_1,y_1) le pueden pasar dos cosas:

1. $(x_1,y_1) \in \operatorname{int}\Omega$, en cuyo caso (x_1,y_1) es un mínimo relativo y por tanto $(x_1,y_1) = (1,0)$
2. o $(x_1,y_1) \in \partial\Omega$, en cuyo caso es un extremo condicionado de f por la condición $g(x,y) := x^2+y^2-10 = 0$.

En cambio, al punto (x_2,y_2) sólo le cabe la posibilidad de estar en $\partial\Omega$ (ya que f no posee másimos relativos en $\operatorname{int}\Omega$. Así (x_2,y_2) debe ser un extremo condicionado de f por la condición $g(x,y) = x^2+y^2-10 = 0$.

Cáculo de los extremos condicionados Puesto que g y f son de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$, el teorema de los multiplicadores de Lagrange nos da que los posibles extremos condicionados de f en $\partial\Omega$ se encuentran entre las soluciones del sistema:

$$\left. \begin{array}{c} \nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = (0,0) \\ g(x,y) = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(1+\lambda)x - 2 = 0 \\ (2+\lambda)y = 0 \\ x^2+y^2-10 = 0 \end{array} \right.$$

cuyas soluciones son:

$$\lambda = -2, \quad (x,y) = (-1, \pm 3)$$

y

$$\lambda = \frac{\pm\sqrt{10} - 10}{10} \quad (x, y) = (\pm\sqrt{10}, 0).$$

Evaluando

$$f(1,0) = 2, \quad f(-1,3) = 24, \quad f(-1,-3) = 24, \quad f(\sqrt{10},0) = 13 - 2\sqrt{10}, \quad f(-\sqrt{10},0) = 13 + 2\sqrt{10}$$

y por tanto,

$$(x_1, y_1) = (1, 0) \quad (x_2, y_2) = (-1, \pm 3).$$

Problema 2

Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^2$ y $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ una función verificando

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \operatorname{sen}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) - u^3(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega. \tag{2}$$

(a) (**0.5 pto**) Probad que u alcanza su máximo absoluto y su mínimo absoluto en $\overline{\Omega}$.

(b) (**0.75 pto**) Probad que si u alcanza su máximo (absoluto) en un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, entonces $u \leq 0$.

(c) (**0.25 pto**) Probad que si además de (2), $u(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \partial\Omega$, entonces $u \equiv 0$.

Solución. (a) Como Ω es acotado, existe $R > 0$ tal que $\Omega \subset B(0,R)$ y así $\overline{\Omega} \subset \overline{B((0,R)}$ y $\overline{\Omega}$ está acotado. Además, por definición de la clausura, $\overline{\Omega}$ es cerrado. Por tanto, $\overline{\Omega}$ es compacto. Al ser la función u continua en el compacto $\overline{\Omega}$, aplicando el teorema de Weierstrass, la función u alcanza su máximo y mínimo absolutos en $\overline{\Omega}$.

(b) Si la función u alcanzará su máximo absoluto en un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, entonces (x_0, y_0) sería un máximo relativo de u y por tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0 \text{ y } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$$

lo que unido a (2) nos da

$$u^3(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$$

y así $u(x_0, y_0) \leq 0$. Puesto que $u(x_0, y_0)$ es el máximo absoluto de u, nos queda

$$u(x,y) \leq 0\,, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(c) Por (a), la función u alcanza su máximo absoluto en $\overline{\Omega}$. Al máximo absoluto de u le pueden pasar dos cosas:

- o está en $\partial\Omega$, y en este caso como $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$, el valor máximo de u es cero y en consecuencia, $u \leq 0$
- o está en el interior de Ω, en cuyo caso, por el apartado (b), $u \leq 0$.

En ambos casos, deducimos $u \leq 0$.

Aplicando el mismo argumento a $-u$ sale que $u \geq 0$ y por consiguiente, $u \equiv 0$.

Problema 3

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\Sigma \subset \mathbb{R}^M$. Supongamos que Σ es conexo y que $f : \Omega \longrightarrow \Sigma$ es una función continua, propia[3] y localmente invertible[4]

(a) (**1 pto**) Si $y \in \Sigma$, probad que el cardinal $[y]$ del conjunto $f^{-1}(\{y\})$ es finito.

(b) (**1 pto**) Probad que la aplicación

$$\begin{aligned} \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto [y] \end{aligned}$$

es constante.

Solución. (a) Sea $y \in \Sigma$. Vamos a empezar probando que $f^{-1}(y)$ está formado sólo por puntos aislados. Para ello usando que f es localmente invertible, para todo $x \in f^{-1}(y)$,

$$\exists \left\{ \begin{array}{l} U_x \text{ entorno abierto de } x \text{ en } \Omega \\ V_x \text{ entorno de } y = f(x) \text{ en } \Sigma \end{array} \right\} \text{ tal que } f|_{U_x} : U_x \longrightarrow V_x \text{ es un homeomorfismo.}$$

En particular,

$$f^{-1}(y) \cap U_x = \{x\}$$

y x es aislado.

De otra parte, como f es propia y el conjunto $\{y\}$ es compacto, $f^{-1}(y)$ es un compacto (formado por puntos aislados). La familia $\{U_x : x \in f^{-1}(y)\}$ es un recubrimiento por abiertos de $f^{-1}(y)$. Por la compacidad de $f^{-1}(y)$, existirán $x_1, \dots, x_n \in f^{-1}(y)$ tales que

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}.$$

Así,

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \cap f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\},$$

i.e. $[y] = n$.

(b) Bastará probar que la función

$$\begin{aligned} g : \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto [y] \end{aligned}$$

es continua. En efecto, si sabemos que g es continua en un conexo Σ y usamos que sólo toma valores enteros positivos por (a), deducimos que es constante.

La continuidad se obtiene probando que g es localmente constante. Para verlo, sea $y \in \Sigma$. Por lo visto en (a), existen un número finito de entornos abiertos U_{x_i}, $i = 1, \dots, n$, de x_i en Ω y entornos V_{x_i} de y en Σ tales que

$$f|_{U_{x_i}} : U_{x_i} \longrightarrow V_{x_i} \text{ es un homeomorfismo}$$

y

$$f^{-1}(y) = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \cap f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

[3] f se dice propia si $f^{-1}(K)$ es compacto para todo compacto $K \subset \Sigma$

[4] f es localmente invertible si para cada $x \in \Omega$ existe un entorno U_x de x en Ω y un entorno V_y de $y = f(x)$ en Σ tal que $f|_{U_x} : U_x \longrightarrow V_y$ es un homeomorfismo.

En particular, para cada $z \in V := \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$, existirá un único $w_i \in U_{x_i}$ tal que $f(w_i) = z$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Así,

$$[z] \geq n.$$

Vamos a probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y, \varepsilon) \subset V$ y

$$[z] = n, \quad \forall z \in B(y, \varepsilon).$$

Razonamos por contradicción suponiendo que existe una sucesión de puntos $z_m \in B(y, \frac{1}{m})$ tal que $[z_m] > n$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Necesariamente, $\{z_m\} \longrightarrow y$ y existirá $a_m \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ tal que $f(a_m) = z_m$. Como f es propia y $\{z_m : m \in \mathbb{N}\}$ es compacto, el conjunto $f^{-1}(\{z_m : m \in \mathbb{N}\})$ es compacto y, en consecuencia, la sucesión $\{a_m\}$ (de puntos del compacto anterior) posee una subsucesión $\{a_{m_k}\}$ convergente hacía un $w \in \Omega \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ con $f(w) = \lim_{k\to\infty} f(a_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} z_{m_k} = y$, es decir, $w \in f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, una contradicción.