

Cálculo
1ºE Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial (Tipo II)
Curso 2015/2016

1. (3 puntos) Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}},$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x + e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x}}.$

Solución:

a) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Para resolver dicha indeterminación aplicamos la regla de L’Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2 + 1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} = 1.$$

Por lo tanto, el límite pedido presenta una indeterminación del tipo “1[∞]”.

Aplicamos ahora la regla del número e . Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan(x)}{x} \right)^{1/x^2} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[\frac{\arctan(x)}{x} - 1 \right] = L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[\frac{\arctan(x)}{x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^3}$$

aplicamos la regla de L’Hôpital, ya que que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Nos queda entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1-(1+x^2)}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3(1+x^2)} = -\frac{1}{3}$$

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan(x)}{x} \right)^{1/x^2} = e^{-1/3}.$$

b) En este límite se presenta una indeterminación del tipo “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”. La regla de L’Hôpital, en este caso, complica aún más los cálculos (podéis comprobarlo); así que para resolverlo dividimos numerador y denominador por la función e^{2x} y nos queda:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x + e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x}}{e^{2x}} + \frac{e^{-2x}}{e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{3x}}}{1 + \frac{1}{e^{4x}}} = \frac{0}{1} = 0$$

2. (2 puntos) Calcula el número de soluciones de la ecuación: $\log(x+1) + 5 = x$.

Solución: Para calcular el número de soluciones de la ecuación planteada, lo que vamos a hacer es determinar el número de ceros de la función $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$f(x) = \log(x+1) + 5 - x.$$

Esta función es continua y derivable en todo su dominio. Vamos a calcular los límites en los extremos del dominio para ver si de esa forma el teorema de Bolzano nos puede garantizar al menos un cero:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \log(x+1) + 5 - x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x+1) + 5 - x = -\infty$$

Por ahora, al no haber cambio de signo, no tenemos garantizado ningún cero. Comenzamos, entonces, el análisis de la función. Vamos a buscar posibles extremos relativos calculando sus puntos críticos. Para ello, derivamos f .

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1-x-1}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Calculemos los intervalos de monotonía para decidir si el punto $x = 0$ es punto de extremo relativo o no:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow x+1 > 0 \text{ y } -x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente}$$

$$x > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \text{ y } -x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente}$$

Se deduce entonces que en el punto $x = 0$ se alcanza un máximo relativo y, al ser el único punto crítico de la función, es el punto de máximo absoluto, con valor $f(0) = 5 > 0$.

Por tanto, la función tiene dos ceros, uno negativo (la función pasa de ser negativa a positiva en $] -\infty, 0]$), y otro positivo (la función pasa de ser positiva a negativa en $[0, +\infty[$). En consecuencia, la ecuación planteada tiene dos soluciones.

3. (2 puntos) Calcula la imagen de la función $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \frac{e^{|x|}}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Solución: Para calcular la imagen de esta función nos vamos a apoyar en que es impar ($f(-x) = -f(x)$), así que calcularemos la imagen de f sobre los positivos. De todas formas, la función dada se puede escribir así: $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^{|x|}}{x} = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & , \text{ si } x > 0 \\ \frac{e^{-x}}{x} & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Esta función es continua y derivable en todo \mathbb{R}^* , y al usar su simetría impar y ya que:

$$f(\mathbb{R}^*) = f(]-\infty, 0[) \cup f(]0, +\infty[),$$

si calculamos solo $f(]0, +\infty[)$, podremos calcular toda la imagen.

Comenzamos el estudio de la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x x - e^x}{x^2} & , \text{ si } x > 0 \\ \frac{-e^{-x} x - e^{-x}}{x^2} & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Vamos a calcular los posibles puntos críticos, pero solamente en \mathbb{R}^+ .

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \iff x = 1$$

Observemos que si hiciéramos lo mismo en \mathbb{R}^- , obtendríamos como punto crítico negativo el punto $x = -1$. Calculemos los intervalos de monotonía para decidir si el punto $x = 1$ es punto de extremo relativo o no:

$$0 < x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente}$$

$$x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente}$$

Se deduce entonces que en el punto $x = 1$ se alcanza un mínimo relativo, con valor $f(1) = e$. Además, los límites de f en los extremos de \mathbb{R}^+ son:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f([0, +\infty)) &= f([0, 1]) \cup f([1, +\infty)) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] \cup [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[\\ &= [e, +\infty[\cup [e, +\infty[= [e, +\infty[\end{aligned}$$

Obsérvese que hemos empleado la continuidad y la monotonía de f en cada intervalo para calcular su imagen. Utilizando ahora la simetría impar, concluimos:

$$f(\mathbb{R}^*) = f(]-\infty, 0]) \cup f([0, +\infty[) =]-\infty, -e] \cup [e, +\infty[.$$

4. **(1 punto)** De todos los rectángulos paralelos a los ejes e inscritos en el triángulo rectángulo de vértices $(0,0)$, $(1,2)$ y $(1,0)$, determina el de área máxima.

Solución: Llamemos (x,y) al vértice del rectángulo inscrito en el triángulo dado que se apoya en la hipotenusa. Observemos que dicha hipotenusa es el segmento de la recta $y = 2x$ que empieza en $(0,0)$ y acaba en $(1,2)$. Sabemos entonces que $y = 2x$ y que las dimensiones del rectángulo inscrito y cuya área hay que maximizar son, altura = $y = 2x$, y base = $1 - x$. Por tanto, la función a maximizar es: $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (1 - x)2x = 2x - 2x^2.$$

Esta función (un polinomio de grado 2) es derivable. Buscamos posibles puntos de extremos en $]0, 1[$. Para ello, calculamos puntos críticos:

$$f'(x) = 2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$$

Para calcular el máximo absoluto, al ser el dominio un intervalo compacto, sólo nos queda evaluar la función:

$$f(0) = 0 = f(1) < f(1/2) = 1 - 1/2 = 1/2$$

Por tanto el rectángulo inscrito que tiene área máxima $1/2$ es el definido por los vértices $(1/2, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ y $(1/2, 0)$.

5. **(2 puntos)** El polinomio de Taylor de orden 3 centrado en el origen de una función dada f es:

$$4 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Calcula el polinomio de Taylor del mismo orden y centro de la función $g(x) = (f(x) - 1)^3$.

Solución:

El enunciado del problema nos permite asegurar que:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 4 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Igualando coeficientes deducimos que:

$$f(0) = 4, f'(0) = -1, f''(0) = -1, f'''(0) = 1$$

Para calcular el polinomio de Taylor de la función g en $a = 0$ de orden 3 tenemos que calcular las derivadas sucesivas en el cero hasta la de orden 3. Es decir,

$$g(x) = (f(x) - 1)^3 \Rightarrow g(0) = (4 - 1)^3 = 27$$

$$g'(x) = 3(f(x) - 1)^2 f'(x) \Rightarrow g'(0) = -27$$

$$g''(x) = 6(f(x) - 1)(f'(x))^2 + 3(f(x) - 1)^2 f''(x) \Rightarrow g''(0) = 18 - 27 = -9$$

$$\begin{aligned} g'''(x) &= 6f'(x)(f'(x))^2 + 12(f(x) - 1)f'(x)f''(x) + 6(f(x) - 1)f'(x)f''(x) + 3(f(x) - 1)^2 f'''(x) \\ &\Rightarrow g'''(0) = -6 + 36 + 18 + 27 = 75 \end{aligned}$$

Entonces, el polinomio de Taylor pedido es:

$$P_3(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 = 27 - 27x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{75}{6}x^3 = 27 - 27x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{25}{2}x^3$$

Granada, 30 de noviembre de 2015