Examen Álgebra III. 2 de diciembre 2015

Nombre:. . . . .

Ejercicio.[1]

En las siguientes cuestiones responde "VERDADERO" ó "FALSO" y haz un breve razonamiento para justificar la respuesta.

(1) $\square$

Si E/K y F/K son extensiones de Galois, entonces $\mathrm{Gal}(E/K) \cong \mathrm{Gal}(F/K)$ si, y sólo si, $E \cong F$.

(2) $\square$

La extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i)$ es de Galois.

(3) $\square$

El grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ tiene orden 3.

(4) $\square$

Si $K \subseteq F \subseteq E$ es una torre de cuerpos y $\mathrm{Gal}(E/K)$ es un grupo abeliano, entonces F/K y E/F son extensiones de Galois.

(5) $\square$

Si $K \subseteq F \subseteq E$ es una torre de cuerpos, F/K y E/F son extensiones de Galois si, y sólo si, E/K es una extensión de Galois.

(6) $\square$

La extensión $\mathbb{C}(X, Y)/\mathbb{C}(X^3, Y^3)$ tiene grupo de Galois $C_3 \times C_3$.

(7) $\square$

La extensión $\mathbb{Q}(X, Y, \omega)/\mathbb{Q}(X^3, Y^3)$ tiene grupo de Galois $C_2 \times C_3 \times C_3$, donde ω es una raíz cúbica primitiva de la unidad

[1] a

Examen Álgebra III. 2 de diciembre 2015

Nombre:. . . . .

Ejercicio.

En las siguientes cuestiones responde "VERDADERO" ó "FALSO" y haz un breve razonamiento para justificar la respuesta.

(1) $\square$ Respuesta: F-002

Si E/K y F/K son extensiones de Galois, entonces $\mathrm{Gal}(E/K) \cong \mathrm{Gal}(F/K)$ si, y sólo si, $E \cong F$.

Resolución.

Las extensiones $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$ tienen grupo de Galois isomorfo a C_2, pero no son isomorfas, ya que en caso de serlo se tendría un isomorfismo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$, pero entonces la imagen de $\sqrt{2}$ debería ser una raíz de $X^2 - 2$, que es un polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. $\blacksquare$

(2) $\square$ Respuesta: F-013

La extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i)$ es de Galois.

Resolución.

Si $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i)$ es una extensión de Galois, entonces $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$, una raíz primitiva de la unidad, pertenece a E, y se escribe en la forma $(-1+\sqrt{-3})/2 = a+bi$, con $a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$, por tanto $a = -1/2$, y $b = \sqrt{3}/2$. Es claro que $b = \sqrt{3}/2 \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}$. $\blacksquare$

(3) $\square$ Respuesta: F-022

El grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ tiene orden 3.

Resolución.

Ocurre que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q} = \{1\}$, ya que $\sqrt[3]{2}$ es la única raíz de $X^3 - 2$ en $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. $\blacksquare$

(4) $\square$ Respuesta: V-032

Si $K \subseteq F \subseteq E$ es una torre de cuerpos y $\mathrm{Gal}(E/K)$ es un grupo abeliano, entonces F/K y E/F son extensiones de Galois.

Resolución.

Ya que $\mathrm{Gal}(E/F) \trianglelefteq \mathrm{Gal}(E/K)$. $\blacksquare$

(5) $\square$ Respuesta: F-033

Si $K \subseteq F \subseteq E$ es una torre de cuerpos, F/K y E/F son extensiones de Galois si, y sólo si, E/K es una extensión de Galois.

Resolución.

Considerar $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$. $\blacksquare$

(6) $\square$ Respuesta: V-036

La extensión $\mathbb{C}(X,Y)/\mathbb{C}(X^3,Y^3)$ tiene grupo de Galois $C_3 \times C_3$.

Resolución.

El grupo de Galois es $C_3 \times C_3$, ya que existen dos subextensiones $\mathbb{C}(X,Y^3)/\mathbb{C}(X^3,Y^3)$ y $\mathbb{C}(X^3,Y)/\mathbb{C}(X^3,Y^3)$ verificando $\mathbb{C}(X,Y^3)\mathbb{C}(X^3,Y) = \mathbb{C}(X,Y)$ y $\mathbb{C}(X,Y^3) \cap \mathbb{C}(X^3,Y) = \mathbb{C}(X^3,Y^3)$. $\blacksquare$

(7) $\square$ Respuesta: F-036

La extensión $\mathbb{Q}(X,Y,\omega)/\mathbb{Q}(X^3,Y^3)$ tiene grupo de Galois $C_2 \times C_3 \times C_3$, donde ω es una raíz cúbica primitiva de la unidad

Resolución.

Tenemos la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}(X,Y,\omega) & \\
\mathbb{Q}(X,Y^3,\omega) \arrow[ur] & & \mathbb{Q}(X^3,Y,\omega) \arrow[ul] \\
& \mathbb{Q}(X^3,Y^3,\omega) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& \mathbb{Q}(X^3,Y^3) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

El grupo de Galois es de orden 18 y se obtiene a partir de dos copias de S_3. En particular la subsextensión $\mathbb{Q}(X,Y^3)/\mathbb{Q}(X^3,Y^3)$ no es normal. $\blacksquare$

Examen Álgebra III. 2 de diciembre 2015

Nombre:. . . . .

Problema.

Sea K un cuerpo de característica $\neq 2$. Si $F = K(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ donde $D_1, D_2 \in K$ tienen la propiedad de que D_1, D_2 y D_1D_2 no son cuadrados en K. Demuestra que F/K es una extensión de Galois con grupo de Galois isomorfo al grupo de Klein.

Recíprocamente, demuestra que cualquier extensión de Galois con grupo de Galois isomorfo al de Klein es del tipo antes descrito.

Pregunta.

Sea K un cuerpo y E/K una extensión finita, son equivalentes:

(a) E/K es una extensión normal.
(b) Para cada $\sigma : E/K \longrightarrow \overline{K}/K$, donde $\overline{K}$ es una clausura algebraica de E y por tanto de K, se tiene $E^\sigma = E$.
(c) Todo polinomio irreducible $p(X) \in K[X]$ con una raíz en E descompone en E.

Puntuación:

(1) Ejercicio: hasta 3,34 puntos.
(2) Problema: hasta 3,33 puntos.
(3) Pregunta: hasta 3,33 puntos.