TOPOLOGÍA I

19 de septiembre de 2014

1. En $X =]0,2] \subset \mathbb{R}$ se define la siguiente familia de subconjuntos:

$$\mathcal{B} = \{]a,b[\ /\ 0 < a < b < 2\} \cup \{]0,c[\ \cup\ ]d,2]\ /\ 0 < c < d < 2\}.$$

   (a) Estudiar si $\mathcal{B}$ es base de una topología sobre X.

   (b) Calcular interior, adherencia y frontera de $]0,1[$ en X con la topología $\mathcal{T}$ que tiene a $\mathcal{B}$ como subbase.

   (c) Encontrar, si es posible, un homeomorfismo entre $(X,\mathcal{T})$ y $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1})$.

2. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ la recta de Sorgenfrey, con base $\{[a,b[\ /\ a < b\}$.

   (a) Describir la topología inducida del espacio topológico producto $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_S)$ sobre cada recta del plano. ¿Son todas esas rectas homeomorfas entre sí?

   (b) Estudiar si la aplicación $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$, dada por $f(x,y) = (x,-y)$, es continua, abierta o cerrada.

3. Se considera el conjunto $X = \{a,b,c,d,e\}$ con la topología:

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}.$$

   (a) Hallar las componentes conexas de $(X,\mathcal{T})$.

   (b) Probar que toda biyección abierta $f : (X,\mathcal{T}) \longrightarrow (X,\mathcal{T})$ es un homeomorfismo.

4. En $X = \mathbb{R} \times \{1,2\}$ se considera la relación de equivalencia:

$$(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow (x,y) = (x',y') \ \text{ o } \ x,x' < 1 \ \text{ o } \ x,x' > 4.$$

   (a) Estudiar si la proyección $p : (X, \mathcal{T}_{uX}) \longrightarrow (X/_R, \mathcal{T}_{uX/R})$ es abierta o cerrada.

   (b) Probar que $(X/_R, \mathcal{T}_{uX/R})$ no es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_{u\mathbb{S}^1})$.

Puntuación: todos igual.
Tiempo: 3 horas.