

---

# Derivadas

---

## 1 Definición. Reglas de derivación

**Ejercicio 1.** Calcula la tangente de las siguientes curvas en los puntos dados:

a)  $y = \frac{x}{x^2+1}$  en el origen

c)  $y = x^2 + 1$  en  $(3, 10)$

b)  $y = \cos(x)$  en  $(\frac{\pi}{2}, 0)$

d)  $y = |x|$  en  $(1, 1)$

**Solución 1.**

a)  $y'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \implies y'(0) = 1$  con lo que la recta tangente en el origen es  $y = x$ .

b)  $y'(x) = -\operatorname{sen}(x) \implies y'(\frac{\pi}{2}) = -1$  y la recta tangente que se pide es  $y = -(x - \frac{\pi}{2})$ .

c)  $y'(x) = 2x \implies y'(3) = 6$ . y la recta tangente es  $y = 10 + 6(x - 3)$ .

d)  $y'(x) = 1$  en  $\mathbb{R}^+$  y, por tanto,  $y'(1) = 1$ , y la recta tangente que se pide es  $y = x$ .

**Ejercicio 2.** Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a)  $y = \operatorname{sen}(x + 3)$

d)  $y = \sec(x)$

f)  $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

b)  $y = \cos^2(x)$

e)  $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

c)  $y = \frac{1}{\cos(x)}$

**Solución 2.**

a)  $y'(x) = \cos(x + 3)$ .

b)  $y'(x) = -2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$ .

c)  $y'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$ .

d)  $y'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$ .

e)  $y'(x) = \sqrt{\frac{1}{(1-x)^3(1+x)}}$ .

f)  $y'(x) = \frac{2}{3}x(x^2 + 1)^{-2/3}$ .

**Ejercicio 3.** Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$ .

d)  $f(x) = x^x$ .

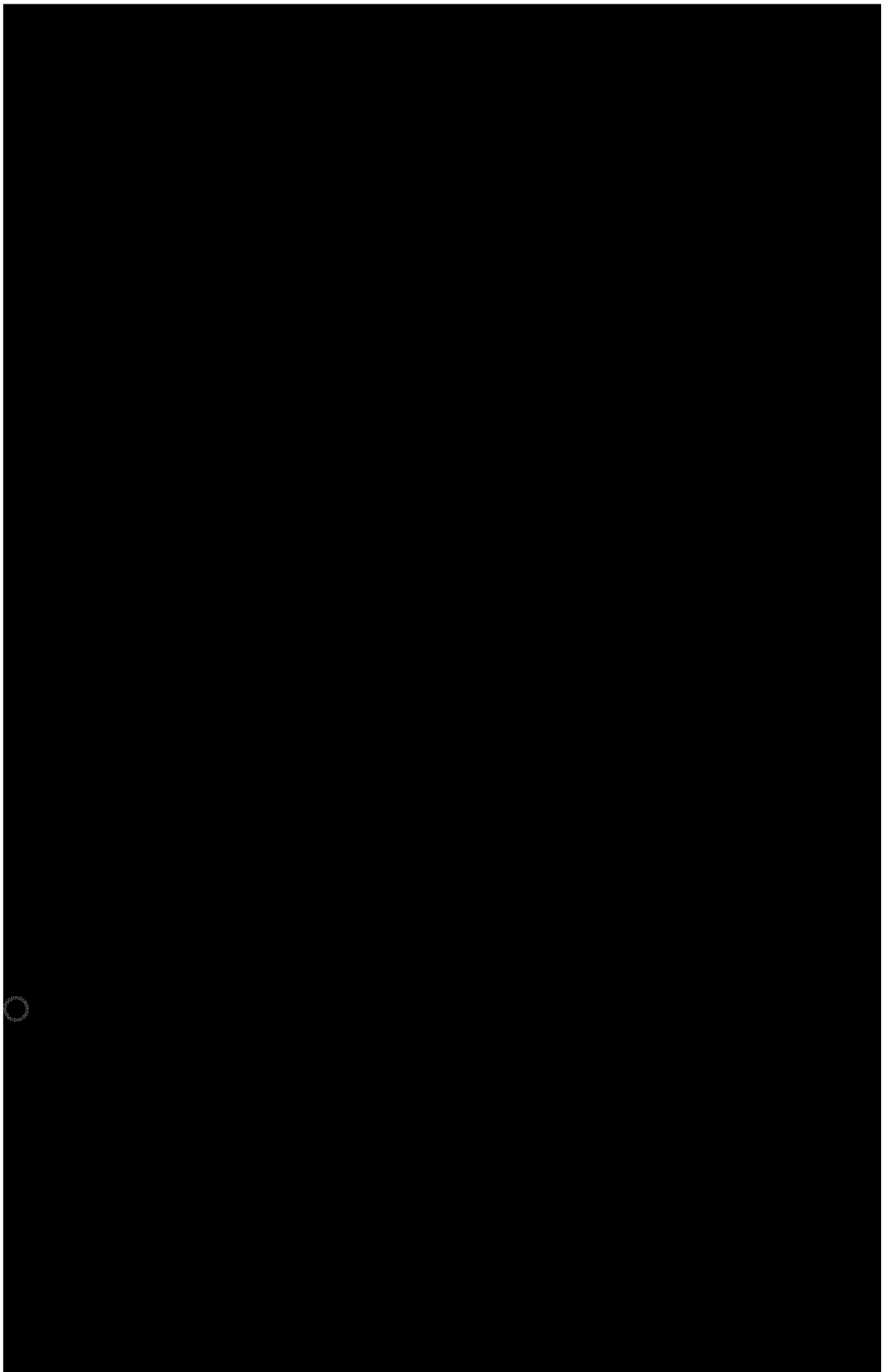
b)  $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$ .

e)  $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$ .

c)  $f(x) = x^4 e^x \log(x)$ .

f)  $f(x) = \frac{1}{2}x|x|$ .

**Solución 3.**



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan\left(\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right) = \arctan(0) = 0, \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0.$$

Por tanto,  $f$  es continua en cero. Veamos en 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x^2 + 1} = 1, \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{\log(x)}{x} = 1.$$

En consecuencia,  $f$  es continua en toda la recta real.

La derivada, salvo en 0 y 1, vale

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{2}{x^3}}{1 + \left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}, & \text{si } 0 < x < 1, \\ \frac{1 - \log(x)}{x^2}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Las derivadas laterales en 0 son

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{2}{x^3}}{1 + \exp\left(\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2} = 0, \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = 2,$$

que no coinciden y, por tanto,  $f$  no es derivable en 0. En 1,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0, \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \log(x)}{x^2} = 1.$$

Por tanto  $f$  es derivable en  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

Para terminar el problema vamos a calcular la imagen de  $f$ . Como

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, 0]) \cup f([0, 1]) \cup f([1, +\infty[),$$

calculamos la imagen de cada una de estos tres intervalos por separado

a) En  $\mathbb{R}^-$ ,  $f'(x) < 0$  y, por tanto,  $f(]-\infty, 0]) = [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[ = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ .

b) En  $]0, 1[$ , la derivada es positiva:  $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [0, 1]$ .

c) Por último, en  $[1, +\infty[$ ,  $f'(x) = 0 \iff x = e$ . Evaluando la derivada, es muy sencillo comprobar que  $f$  es creciente en  $[1, e]$  y decreciente en  $[e, +\infty[$ . Por tanto,

$$f([1, +\infty[) = [f(1), f(e)] \cup \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right].$$

## 2 Teorema del valor medio

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ .

Entonces, existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Este teorema garantiza que la derivada en algún punto del intervalo es igual a la pendiente de la secante que une los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ .

El teorema del valor medio es una consecuencia directa del teorema de Rolle.

Si se define  $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ , entonces  $F(a) = F(b) = 0$ .

Por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Rolle a  $F$  en el intervalo  $[a, b]$ .

Existirá un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $F'(c) = 0$ .

Como  $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , se obtiene que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

Este resultado es fundamental en el análisis matemático y tiene numerosas aplicaciones.

Por ejemplo, se puede utilizar para demostrar que una función es creciente o decreciente en un intervalo.

Además, el teorema del valor medio es esencial en la teoría de la optimización.

En resumen, el teorema del valor medio es una herramienta poderosa para el estudio de las funciones derivables.

Es importante recordar que el teorema requiere que la función sea continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ .

Si no se cumplen estas condiciones, el teorema no necesariamente se aplica.

Por lo tanto, es crucial verificar las hipótesis del teorema antes de utilizarlo.

El teorema del valor medio es una de las piedras angulares del cálculo diferencial.

Su comprensión y aplicación son fundamentales para el estudio de las matemáticas.

En la práctica, el teorema del valor medio se utiliza para demostrar la existencia de soluciones a ecuaciones diferenciales.

Además, es útil en la teoría de la aproximación y en la optimización numérica.

El teorema del valor medio es un resultado elegante y poderoso que conecta la geometría con el álgebra.

Es un ejemplo clásico de cómo las ideas matemáticas simples pueden tener aplicaciones profundas.

El teorema del valor medio es una herramienta indispensable para el matemático.

Su estudio y aplicación son esenciales para el desarrollo de la matemática.

El teorema del valor medio es un resultado que ha inspirado a generaciones de matemáticos.

Es un testimonio de la belleza y la potencia de la matemática.

El teorema del valor medio es un resultado que merece ser recordado y estudiado.

Es un resultado que ha marcado la historia de la matemática.

El teorema del valor medio es un resultado que seguirá siendo relevante en el futuro.

Es un resultado que ha sido y será una fuente de inspiración para los matemáticos.

El teorema del valor medio es un resultado que ha sido y será una herramienta esencial para el matemático.

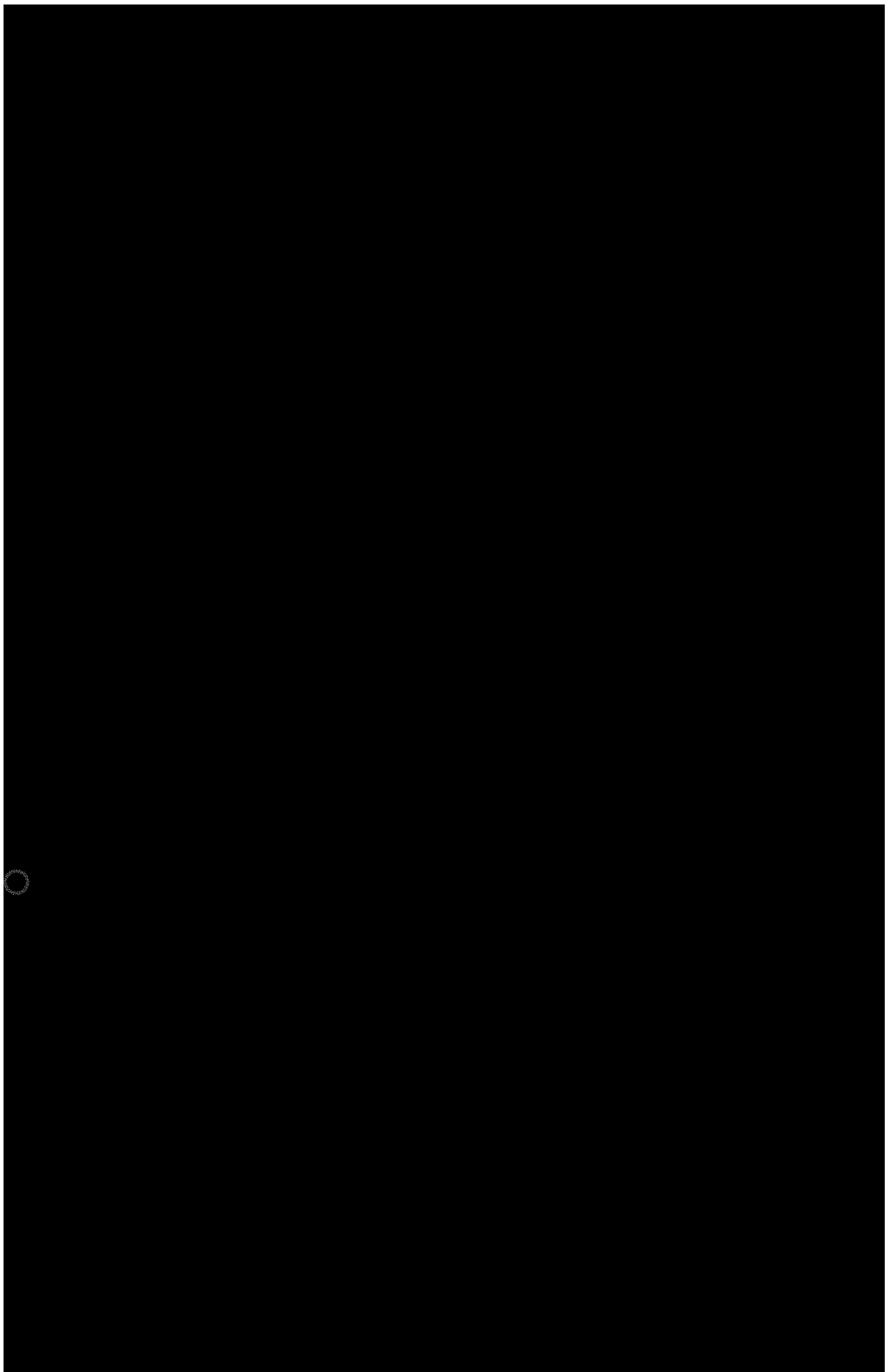
Es un resultado que ha sido y será una piedra angular del análisis matemático.

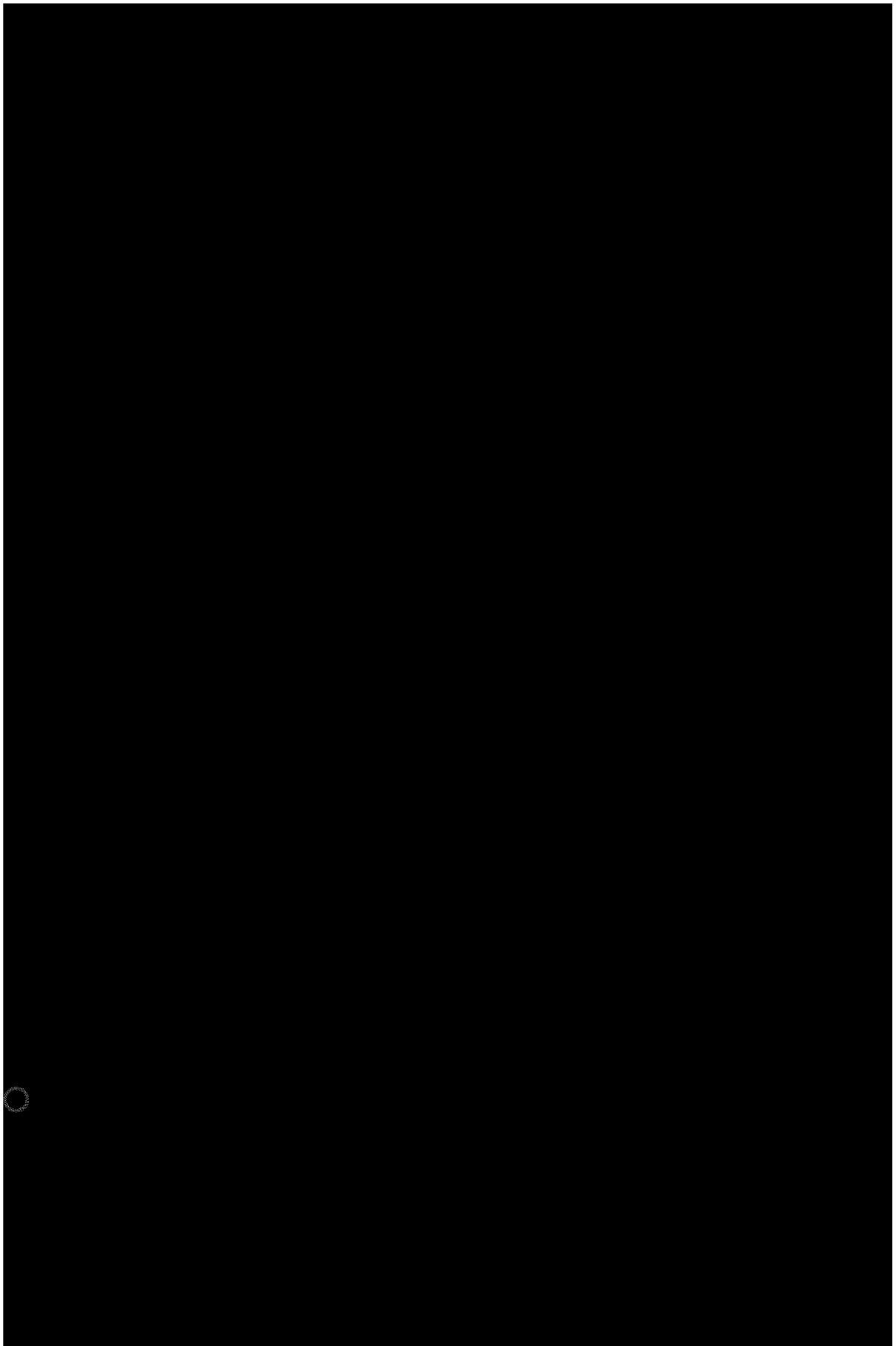
El teorema del valor medio es un resultado que ha sido y será una herramienta indispensable para el estudio de las matemáticas.

Es un resultado que ha sido y será una fuente de orgullo para los matemáticos.

El teorema del valor medio es un resultado que ha sido y será una herramienta esencial para el matemático.

Es un resultado que ha sido y será una piedra angular del análisis matemático.





$$f'(x) = 2xe^{-x^2} - (x^2 - 3)2xe^{-x^2}$$

$$= e^{-x^2} 2x(4 - x^2) = 0 \iff x = 0, \pm 2.$$

Por tanto,  $f$  es estrictamente monótona en los intervalos  $]-\infty, -2]$ ,  $[-2, 0]$ ,  $[0, 2]$ ,  $[2, +\infty[$ . Para averiguar qué tipo de monotonía tenemos podemos evaluar la derivada en un punto de cada uno de dichos intervalos

intervalo	$x$	signo de $f'(x)$	monotonía de $f$
$] - \infty, 0 - 2]$	-5	+	estrictamente creciente
$[-2, 0]$	-1	-	estrictamente decreciente
$[0, 2]$	1	+	estrictamente creciente
$[2, +\infty[$	5	-	estrictamente decreciente

De modo que su imagen es

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, -2]) \cup f([-2, 0]) \cup f([0, 2]) \cup f([2, +\infty[)$$

$$= \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-2) \right] \cup [f(0), f(-2)] \cup [f(0), f(2)] \cup \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(2) \right]$$

$$= ]0, e^{-4}] \cup [-3, e^{-4}] = [-3, e^{-4}]$$

usando que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , que  $f(0) = -3$  y que  $f(2) = f(-2) = e^{-4}$ .

*Observación:* Podíamos habernos ahorrado algunos cálculos utilizando que la función  $f$  es par y, por tanto,  $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_0^+)$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ .

- Estudia la continuidad de  $f$  y los límites en  $-\infty$  y  $+\infty$ .
- Calcula la imagen de  $f$ .

**Solución 15.** La función es derivable por ser composición de funciones derivables. Vamos a calcular los límites en  $\pm\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Para calcular su imagen en primer lugar estudiamos la monotonía. Como la función arcotangente es creciente, sólo tenemos que fijarnos en  $\frac{1+x}{1-x}$  y

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Esto nos dice que  $f$  es estrictamente creciente *si estamos en un intervalo*. En otras palabras,  $f$  es estrictamente creciente en  $] - \infty, 1[$  y en  $]1, +\infty[$ . Su imagen será

$$f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = f(]-\infty, 1]) \cup f(]1, +\infty[) = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[ = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}.$$

**Ejercicio 16.** Calcula la imagen de  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{1/x}$ .

**Solución 16.** Esta función es continua y derivable en todo  $\mathbb{R}^+$ . Calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{x} x^{1/x-1} - \frac{1}{x^2} x^{1/x} \log(x) = x^{1/x-2} (1 - \log(x)).$$

Por tanto  $f'(x) = 0 \iff x = e$ . En este punto se tiene un punto de máximo relativo (la función pasa de creciente en el intervalo  $]0, e[$  a ser decreciente en  $]e, +\infty[$ ). Calculando los límites en los extremos del dominio ( $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ) se deduce que como  $f(e) = e^{1/e} > 1$ , la imagen de la función es  $f(\mathbb{R}^+) = ]0, e^{1/e}]$ .

**Ejercicio 17.** Sean  $a, b, c \in \mathbb{R}$  con  $a^2 < 3b$ . Demuestra que la ecuación  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  tiene una solución real única.

**Solución 17.** Definimos la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Se trata de una función polinómica de grado impar luego, por el teorema de Bolzano, sabemos que al menos se anula en un punto de la recta real. Estudiamos la derivada para deducir la unicidad de la solución de la ecuación  $f(x) = 0$  utilizando el teorema de Rolle.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \iff x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 12b}}{6}.$$

Teniendo en cuenta que  $a^2 < 3b \implies 4a^2 - 12b < 0$ ; se tiene que la derivada no se anula en ningún punto real, por lo que la solución de la ecuación  $f(x) = 0$  que teníamos es única ya que la función es estrictamente creciente.

### 3 Reglas de L'Hôpital

**Ejercicio 18.** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4}$   
b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{2x - \pi}{\cos(x)}$   
d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

**Solución 18.**

a) Usando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 4} = \frac{1}{6}.$$

b) Aplicamos las reglas de L'Hôpital  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(3x)}{1} = 3 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$ .

c) Usamos las reglas de L'Hôpital.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{2}{-\sin(x)} = -2 \implies \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{2x - \pi}{\cos(x)} = -2$ .

d) Aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cos(x) = \frac{1}{2}.$$



**Ejercicio 19.** Calcula los siguientes límites

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + 3x - 1}{2x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos(x)}{x \sin(2x)} \end{array}$$

**Solución 19.**

a) Aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) + 3}{2} = \frac{3}{2} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + 3x - 1}{2x} = \frac{3}{2}.$$

b) Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ , por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos(x)}{x \sin(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos(x)}{2x^2} \quad (\text{aplicamos la regla de L'Hôpital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2 \sin(x)}{4x} \quad (\text{regla de L'Hôpital de nuevo}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2 \cos(x)}{4} = 1. \end{aligned}$$

c) Usamos la segunda regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1/x}{\log(x)}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(x)} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)} = 0.$$

**Ejercicio 20.** Calcula los límites de las siguientes funciones en el punto indicado:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x) + 2 \sin(3x))^{\frac{1}{x}} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \cos(x)} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \sin(4x)}{x^3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) \right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \end{array}$$

**Solución 20.**

a) Utilizamos la regla del número  $e$  y estudiamos el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) + 2 \sin(3x) - 1}{x} = \frac{0}{0}.$$

Esta indeterminación la resolvemos utilizando la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(x) + 6 \cos(3x)}{1} = 6,$$

con lo que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x) + 2 \sin(3x))^{\frac{1}{x}} = e^6$ .

b) Usando que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{4x} = 1$  y que  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \operatorname{sen}(4x)}{x^3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(1 - \cos(x))}{x^3} \cdot \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{2}(1 - \cos(x))}{x^2}.\end{aligned}$$

Este último límite se resuelve aplicando la primera regla de L'Hôpital y se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \operatorname{sen}(4x)}{x^3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = 2\sqrt{2}.$$

- c) Si aplicamos la regla de L'Hôpital, llegamos al límite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)}$  que no existe y, por tanto, no podemos decir nada sobre el límite original. En cambio, dividiendo numerador y denominador por  $x$  se resuelve fácilmente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{1 - \frac{\cos(x)}{x}} = 1,$$

usando que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$ .

- d) Estamos ante una indeterminación del tipo “ $1^\infty$ ”. Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) \right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 1} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left( \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1 \right) = L.$$

Calculemos el límite de la derecha:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left( \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\end{aligned}$$

y, como  $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 1} \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Para resolver este último límite aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{-\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow 1} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left( \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1 \right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1 \implies \lim_{x \rightarrow 1} \left( \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) \right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{-1}.$$

**Ejercicio 21.** Estudia el comportamiento de la función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  en el punto  $\alpha$  en cada uno de los siguientes casos:

a)  $A = ]2, +\infty[, f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}, \alpha = 2.$

b)  $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, f(x) = \frac{1}{\log(x)} - \frac{1}{x-1}, \alpha = 1.$

c)  $A = ]1, +\infty[, f(x) = \frac{x^x - x}{1 - x - \log(x)}, \alpha = 1.$

**Solución 21.**

a) Aplicando la primera regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x})\sqrt{x^2-4}}{2x\sqrt{x(x-2)}}$$

simplificando el factor  $\sqrt{x-2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x})\sqrt{x+2}}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}.$

b) Como  $f(x) = \frac{1}{\log(x)} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-\log(x)}{(x-1)\log(x)}$ , si aplicamos L'Hôpital nos queda

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\log(x) + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\log(x)+x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x\log(x) + x-1}.$$

Volviendo a aplicar L'Hôpital,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\log(x)+2} = \frac{1}{2}.$  Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}.$

c) Aplicamos L'Hôpital y nos queda  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1+\log(x))-1}{-1-1/x} = 0.$  Por tanto  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$

**Ejercicio 22.** Estudia el comportamiento en  $+\infty$  de las funciones  $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

a)  $f(x) = \frac{\log(2 + 3e^x)}{\sqrt{2 + 3x^2}},$

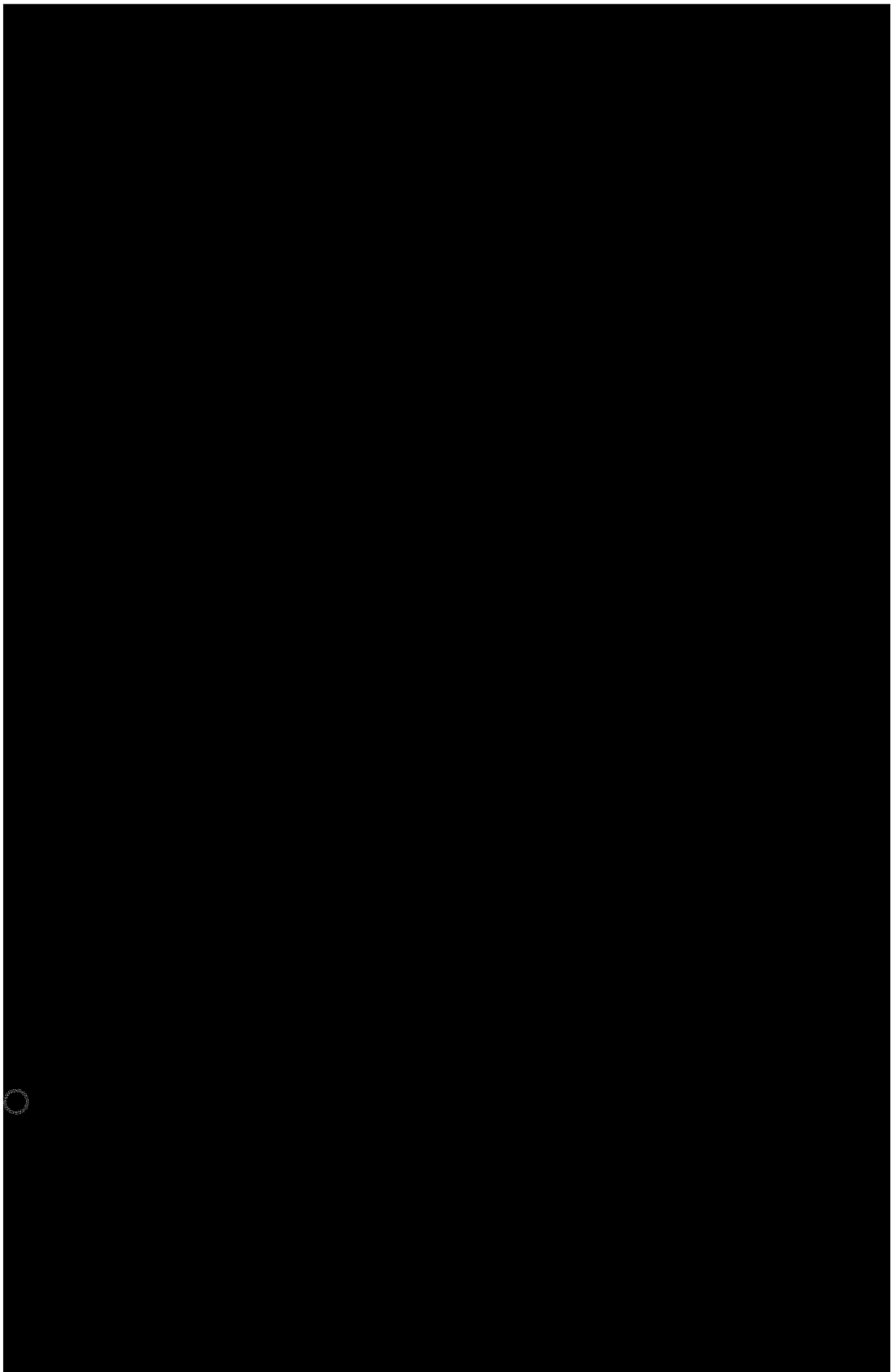
b)  $g(x) = (a^x + x)^{1/x},$  donde  $a \in \mathbb{R}^+.$

**Solución 22.**

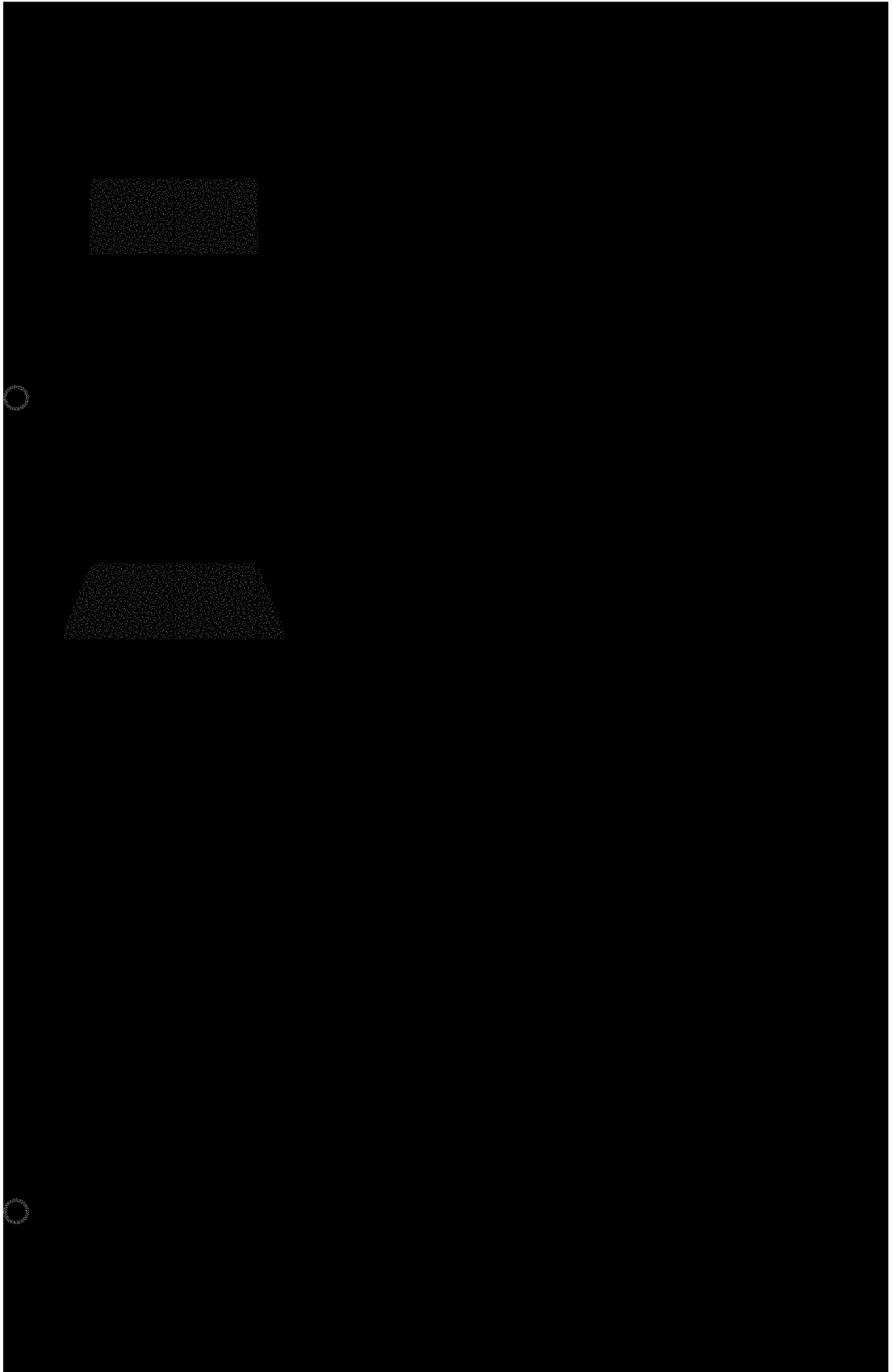
a) Para estudiar el límite de  $f$  en  $+\infty$  aplicamos la segunda regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x}{2 + 3e^x} \frac{\sqrt{2 + 3x^2}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por tanto el límite de  $f$  es  $\frac{\sqrt{3}}{3}.$



#### 4 Optimización



•

$h_2$



