

Geometría II. Curso 2012-2013.
Grado en Matemáticas
Convocatoria extraordinaria de septiembre

1. a) **(1,5 puntos)** Definid el concepto de endomorfismo autoadjunto de un espacio vectorial euclídeo (\mathbf{V}, \mathbf{g}) . A partir de esta definición y de la de vector propio, demostrad que si $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbf{V}$ son dos vectores propios de un endomorfismo autoadjunto f , correspondientes a valores propios distintos, entonces \bar{u} y \bar{v} son ortogonales.
b) Responded razonadamente si son ciertas o no las dos afirmaciones siguientes:
 - (i) **(1 punto)** En un espacio vectorial métrico cualquiera (\mathbf{V}, \mathbf{g}) dos vectores ortogonales distintos y no nulos son siempre linealmente independientes.
 - (ii) **(1 punto)** En el plano euclídeo \mathbb{R}^2 con su métrica estándar consideramos el giro g_θ de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$ en el sentido inducido por la base usual y la simetría ortogonal h con respecto a la recta de ecuación $y = 0$. Entonces, $f = g_\theta \circ h$ es la simetría ortogonal con respecto a la recta de ecuación $(\cos \theta - 1)x + (\sin \theta)y = 0$.
2. **(2 puntos)** Sea \mathbf{V} un espacio vectorial tridimensional y $\mathcal{B} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$ una base de \mathbf{V} . Consideremos $f \in \text{End } \mathbf{V}$ del que se sabe lo siguiente:
 - (i) $f(\bar{b}_1) = 3\bar{b}_1 + 2\bar{b}_2 + 2\bar{b}_3$, $f(\bar{b}_2) = 2\bar{b}_1 + 2\bar{b}_2$.
 - (ii) $M(f, \mathcal{B})$ es simétrica.
 - (iii) El vector $\bar{u} = 2\bar{b}_1 - 2\bar{b}_2 - \bar{b}_3$ está en el núcleo de f .Calculad $M(f, \mathcal{B})$ y estudiad si f es diagonalizable. En caso afirmativo, obtened una base \mathcal{C} de \mathbf{V} tal que $M(f, \mathcal{C})$ sea diagonal.
3. **(1,5 puntos)** Sea $F(x, y) = xy$ la forma cuadrática asociada a una métrica \mathbf{g} de \mathbb{R}^2 . Encontrad una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 tal que la matriz $M(\mathbf{g}, \mathcal{B})$ sea diagonal. Deducid de qué tipo es la métrica \mathbf{g} .
4. En el espacio vectorial \mathbf{S}_2 de las matrices simétricas de orden 2 consideramos la forma bilineal \mathbf{g} definida como:

$$\mathbf{g}(A, C) = \text{traza}(AC),$$

y el endomorfismo $f : \mathbf{S}_2 \rightarrow \mathbf{S}_2$ siguiente:

$$f \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a/\sqrt{2} \\ a/\sqrt{2} & -\sqrt{2}c \end{pmatrix}.$$

- a) **(1,5 puntos)** Demostrad que \mathbf{g} es una métrica euclídea sobre \mathbf{S}_2 . Calculad una base ortonormal de $(\mathbf{S}_2, \mathbf{g})$.
- b) **(1,5 puntos)** Probad que f es una isometría de $(\mathbf{S}_2, \mathbf{g})$. Estudiad los subespacios propios de f y deducid que se trata de la composición de una reflexión y de un giro.