

Cálculo
1º Grado en Ingeniería Informática
Segundo Parcial
Curso 2017/2018

Calificación del Primer Parcial:

1. (3 puntos) Calcula:

a) $\int x^2 \log(1+x^2) dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx$

Solución:

a) Aplicamos el método de integración por partes:

$$\begin{aligned} \int x^2 \log(1+x^2) dx &= \left[\begin{array}{l} u = \log(1+x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2} dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] \\ &= \frac{x^3}{3} \log(1+x^2) - \frac{2}{3} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

La integral que nos queda es de tipo racional. Comenzamos por escribir el integrando haciendo uso del algoritmo de división de polinomios:

$$\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int x^2 \log(1+x^2) dx &= \frac{x^3}{3} \log(1+x^2) - \frac{2}{3} \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} \log(1+x^2) - \frac{2x^3}{9} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \arctan(x) + C. \end{aligned}$$

b) Para calcular la integral dada vamos a calcular, en primer lugar, una primitiva del integrando.

Se trata de una primitiva de tipo trigonométrico, donde el integrando es una función racional en $\cos(x)$, y no es par. Por tanto, aplicamos el cambio de variable adecuado a este tipo de integrandos. Esto es, $t = \tan(x/2)$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \tan(x/2) \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] \\ &= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Para resolver esta última primitiva, que es racional, dividimos los polinomios y seguimos así:

$$\begin{aligned}\int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt &= \int \frac{2}{1+t^2} dt - \int dt = 2 \arctan(t) - t + C \\ &= 2 \arctan(\tan(x/2)) - \tan(x/2) + C \\ &= x - \tan(x/2) + C\end{aligned}$$

Calculamos ya la integral que nos piden:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx = [x - \tan(x/2)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

2. (2 puntos) Elige uno de los siguientes apartados:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \arcsen(t^2) dt}{\sqrt{x} \sen(x)} .$

b) Sea $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \int_0^{1/x} e^{-t^2} dt$.

1) Estudia los intervalos de monotonía de f .

2) Sabiendo que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calcula $f(\mathbb{R}^+)$.

Solución:

a) Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que la función $(f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \arcsen(t^2) dt)$ es continua y derivable ya que el integrando, $f(t) = \arcsen(t^2)$, es una función continua. Además, gracias también al Teorema Fundamental del Cálculo, podemos calcular la derivada de f :

$$f'(x) = \arcsen(x) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\arcsen(x)}{2\sqrt{x}}$$

Si calculamos el límite en cero del numerador, es decir, de f :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \int_0^0 \arcsen(t^2) dt = 0$$

Estamos ante una indeterminación del tipo “0/0”. Por tanto, aplicando la regla de L’Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\frac{\sen(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arcsen(x)}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sen(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x)}{\sen(x) + 2x \cos(x)} .$$

Vuelve a presentarse una indeterminación del tipo “0/0”, por lo que volvemos a aplicar la regla de L’Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x) + 2 \cos(x) - 2x \sen(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(3 \cos(x) - 2x \sen(x))}$$

Concluimos entonces que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \arcsen(t^2) dt}{\sqrt{x} \sen(x)} = \frac{1}{3}$$

- b) 1) La función f es derivable gracias al teorema fundamental del cálculo (es composición de funciones derivables en el dominio dado). Y su derivada es:

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \frac{(-1)}{x^2}$$

Esta función no se anula nunca, por lo que f es estrictamente monótona. Además, f' es siempre negativa, y entonces f es estrictamente decreciente en \mathbb{R}^+ .

- 2) El apartado anterior nos asegura que, al ser f continua y decreciente, su imagen es el intervalo siguiente:

$$f(\mathbb{R}^+) = f([0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)[$$

Calculamos cada uno de estos límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Por tanto, $f([0, +\infty[) =]0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}[$.

3. (1.5 puntos) Estudia la convergencia y, en su caso, el límite de la sucesión definida por recurrencia de la siguiente forma:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución: Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \sqrt{3x_1 + 4} = \sqrt{10} \geq x_1 = 2$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, comprobamos por inducción que $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 \leq x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} x_n \leq x_{n+1} &\Rightarrow 3x_n \leq 3x_{n+1} \text{ (es cierto ya que los números son positivos)} \\ &\Rightarrow 3x_n + 4 \leq 3x_{n+1} + 4 \\ &\Rightarrow \sqrt{3x_n + 4} \leq \sqrt{3x_{n+1} + 4} \\ &\Rightarrow x_{n+1} \leq x_{n+2} . \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por el $x_1 = 2$. Veamos que está acotada superiormente por 4. Esto es, que $x_n \leq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nuevamente lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 2 \leq 4$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 4$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 4$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} x_n \leq 4 &\Rightarrow 3x_n \leq 12 \Rightarrow 3x_n + 4 \leq 16 \\ &\Rightarrow \sqrt{3x_n + 4} \leq \sqrt{16} = 4 \Rightarrow x_{n+1} \leq 4 \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

Para calcular el límite de $\{x_n\}$, partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \sqrt{3x+4}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{3x+4} \Rightarrow x^2 = 3x+4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 4.$$

Como la sucesión es creciente y comienza en 2, el límite no puede ser negativo, por lo que , $\lim\{x_n\} = 4$.

4. (2 puntos) Estudia la convergencia de las series:

$$\begin{aligned} a) & \sum \left(\frac{5n^2 + 1}{5n^2 + n} \right)^{-n^2} . \\ b) & \sum \frac{2^n(n+2)!}{n^n} . \end{aligned}$$

Solución:

a) Aplicamos el criterio de la raíz.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{5n^2 + 1}{5n^2 + n} \right)^{-n^2}} = \left(\frac{5n^2 + 1}{5n^2 + n} \right)^{-n}$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo “ 1^∞ ”; por tanto, aplicamos la regla del número e :

$$\begin{aligned} (-n) \left[\frac{5n^2 + 1}{5n^2 + n} - 1 \right] &= (-n) \left[\frac{5n^2 + 1 - 5n^2 - n}{5n^2 + n} \right] \\ &= (-n) \frac{(-n+1)}{5n^2 + n} = \frac{n^2 - n}{5n^2 + n} \rightarrow 1/5 \end{aligned}$$

Con lo que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n^2 + 1}{5n^2 + n} \right)^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 + 1}{5n^2 + n} \right)^{-n} = e^{1/5} > 1 ,$$

de lo que se deduce que la serie dada es divergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente. Así, si llamamos $a_n = \frac{2^n(n+2)!}{n^n}$ tenemos que estudiar el límite del cociente siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+3)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{(n)^n}{2^n(n+2)!} = \frac{2(n+3)}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow 2 \cdot (1/e) = \frac{2}{e} < 1$$

de lo que se deduce que la serie es convergente.

5. (1.5 puntos) Estudia la convergencia de la siguiente serie y calcula su suma, si existe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{6^{n+1}}.$$

Solución: La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n + 2^n}{6^{n+1}} = \frac{1}{6} \left(\sum_{n \geq 1} \left(\frac{-1}{6}\right)^n + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{6}\right)^n \right) = \frac{1}{6} \left(\sum_{n \geq 1} \left(\frac{-1}{6}\right)^n + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{6}| < 1$ y $|\frac{1}{3}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente por ser el producto de una constante ($1/6$) por la suma de dos series convergentes. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$, nos queda:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{6^{n+1}} &= \frac{1}{6} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{6}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{6}\right)^n - 1 \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{1 - \frac{-1}{6}} - 1 \right) + \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{6}} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\frac{2}{3}} - 1 \right) \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{6}{7} - 1 + \frac{3}{2} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{-1}{7} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{5}{14} \right] = \frac{5}{84} \end{aligned}$$

Granada, a 20 de diciembre de 2017