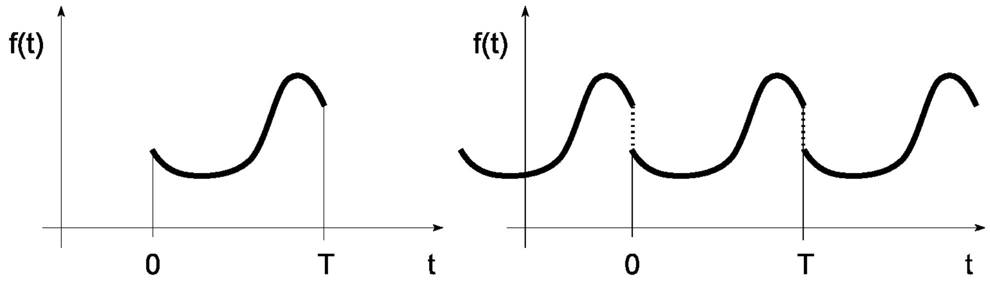
Series de Fourier

FFT

Sea una función continua* en el intervalo [0,T], o periódica (periodo=T)



⇒ Se puede desarrollar en serie de un conjunto de funciones ϕ_i si son un conjunto ortogonal/ortonormal y completo.

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(t)$$

$$f = \frac{1}{T} \qquad \text{Hz = 1/s}$$

$$\omega = 2\pi f \qquad \text{rad/s = 1/s}$$

Continua* = continua salvo un número finito de discontinuidades, con un número finito de máximos y mínimos, y que esté acotada.

La diferencia entre base ortonormal y ortogonal, es que al operar con el propio elemento de la base, el resultado es 1, o una constante.

$$\int_0^T \phi_i \phi_j^* dt = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \neq 0 \text{ si } i = j \end{cases} \qquad \text{Base Ortogonal}$$

$$\int_0^T \phi_i \phi_j^* dt = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ = 1 \text{ si } i = j \end{cases} \qquad \text{Base Ortonormal}$$

f(t) se puede desarrollar en serie de Fourier

Base ortogonal: ½ ; cos(nωt) ; sen(nωt)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t) \right\}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad n = 0,1,\ldots+\infty$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)\,dt \qquad n = 1,2,\ldots+\infty$$

f(t) se puede desarrollar en serie de Fourier

Base ortogonal: exp (i nωt)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t} dt \qquad n = -\infty\ldots,-1,0,1,\ldots+\infty$$

Es lógico que exista una relación entre los coeficientes a,b y c:

$$a_0 = 2c_0 \qquad c_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b_n}{i}\right)$$

$$a_n = c_n + c_{-|n|}$$

$$b_n = (c_n - c_{-|n|})\, i \qquad c_{-|n|} = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{b_n}{i}\right)$$

Si la función f(t) es real, los coeficientes a y b son reales,

los coeficientes c_n y c_{-n} son complejos conjugados.

Relaciones útiles:

$$\mathrm{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$$

par $\cos(-a) = \cos(a)$

impar $\mathrm{sen}(-a) = -\mathrm{sen}(a)$

$$\mathrm{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\mathrm{sen}(a+b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\,\mathrm{sen}(b)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)$$

$$\mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\mathrm{sen}^2(a) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2a)\right] \qquad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$

$$\mathrm{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}(a-b) + \mathrm{sen}(a+b)\right]$$

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2a)\right]$$

Ejercicios

Obtener el desarrollo en serie de Fourier de f(t)

(desarrollo trigonométrico y exponencial)

$$f(t) = \mathrm{sen}(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{i\omega t} - \frac{1}{2i}e^{-i\omega t}$$

$$f(t) = \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}$$

Obtener el desarrollo en serie de Fourier de f(t)
(desarrollo trigonométrico y exponencial)

$$f(t) = \operatorname{sen}^2(\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\omega t) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{i0\omega t} - \frac{1}{4}e^{i2\omega t} - \frac{1}{4}e^{-i2\omega t}$$

$$f(t) = \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{i0\omega t} + \frac{1}{4}e^{i2\omega t} + \frac{1}{4}e^{-i2\omega t}$$

Obtener el desarrollo en serie de Fourier de f(t)
(desarrollo trigonométrico y exponencial)

$$f(t) =$$

$$\operatorname{sen}(3\omega t)\cos(2\omega t) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}((3-2)\omega t) + \operatorname{sen}((3+2)\omega t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(1\omega t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(5\omega t) =$$

$$= \frac{1}{4i}e^{i\omega t} - \frac{1}{4i}e^{-i\omega t} + \frac{1}{4i}e^{i5\omega t} - \frac{1}{4i}e^{-i5\omega t}$$

Obtener el desarrollo en serie de Fourier de las siguientes funciones:
(desarrollo trigonométrico y exponencial)

$$\operatorname{sen}^3(\omega t)$$

$$\cos^3(\omega t)$$

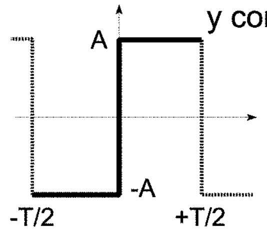
$$\operatorname{sen}(3\omega t)\operatorname{sen}(4\omega t)$$

$$\cos(2\omega t)\cos(4\omega t)$$

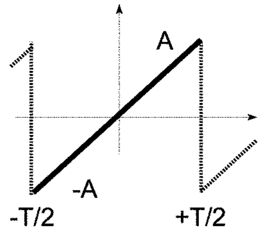
$$\cos(2\omega t)\cos(3\omega t)\cos(4\omega t)$$

Con MathCAD

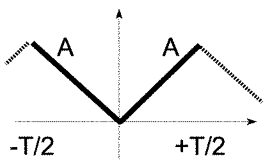
Representar gráficamente el desarrollo en serie (derecha), y comprobar que generan la función de la izquierda.



$$\frac{4A}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{1} + \frac{\operatorname{sen}(3\omega t)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(5\omega t)}{5} + \dots\right]$$



$$\frac{2A}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{1} - \frac{\operatorname{sen}(2\omega t)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(3\omega t)}{3} - \dots\right]$$



$$\frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2}\left[\frac{\cos(\omega t)}{1^2} + \frac{\cos(3\omega t)}{3^2} + \frac{\cos(5\omega t)}{5^2} + \dots\right]$$

Conclusiones:

Si f(t) está definida en un intervalo [0,T] o es periódica (periodo=T)

⇒ Se puede desarrollar en serie de las funciones de una base:

Base ortogonal: ½ ; cos(nωt) ; sen(nωt)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)\right\}$$

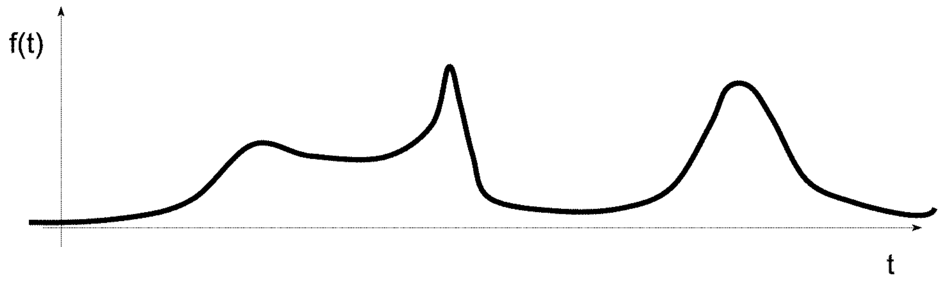
Base ortogonal: exp (i nωt)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

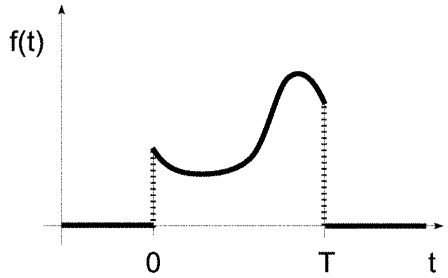
Las frecuencias son múltiplos (nω) de la frecuencia fundamental ω=2πf

$$f = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi f$$

¿Y si la función no es periódica?



¿o si la función sólo es distinta de cero en un intervalo finito?



Integral o Transformada de Fourier

Si f(t) (o g(t)) no es periódica, pero es de cuadrado sumable*

⇒ Se puede aplicar la Transformada (o integral) de Fourier,

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, e^{i2\pi ft}\, df \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-i2\pi ft}\, df \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Las frecuencias varían de forma continua.

f(t) es de cuadrado sumable si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \text{finita} \Rightarrow$$ ∃ transformada de Fourier

Otras formas de la transformada de Fourier:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

Series de Fourier

FFT Granada granada.net78.net

4-X-2011
S.O.: Win95
Res.: 800x600
Col.: 16bit

FIN