

Aplicaciones lineales

Ejercicio 1. De las siguientes aplicaciones decide cuáles son lineales y cuáles no.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f_1(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$$

2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f_2(x, y, z) = (xy, yz, -zx)$$

3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f_3(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 2y)$$

4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f_4(x, y) = (x + 1, y, x)$$

5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f_5(x, y, z) = (x + 1, x + 2, x + 3)$$

6. $f_6 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f_6(x, y, z) = (x, z)$$

7. $f_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f_7(x) = (x, 2x, 3x)$$

8. $f_8 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_8(x, y) = x^2 + y^2$$

Ejercicio 2. Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

1. $f : (\mathbb{Z}_3)^2 \rightarrow (\mathbb{Z}_3)^2, f(x, y) = (x + 1, y + 2)$.
2. $f : V \rightarrow V', f(v) = 0$.
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(r) = r^2$.
4. $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^2, f(x, y, z) = (x + y + z, 28x + 92z)$.

Ejercicio 3. Sea V un \mathbb{Q} -espacio vectorial de dimensión 4 y V' un \mathbb{Q} -espacio vectorial de dimensión 3. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $B' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ bases de V y V' . Se considera la única aplicación lineal $f : V \rightarrow V'$ que verifica:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 4v'_1 + 7v'_2 + 2v'_3 \\ f(v_2) &= -v'_1 + 3v'_2 + 9v'_3 \\ f(v_3) &= v'_2 + 2v'_3 \\ f(v_4) &= 2v'_1 - v'_2 - 8v'_3 \end{aligned}$$

Se pide:

1. Escribe la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' .
2. Calcula la dimensión de los subespacios núcleo e imagen de f .
3. ¿Es f una aplicación lineal inyectiva? ¿Y sobreyectiva? Justifica las respuestas.

Ejercicio 4. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (3x + 2y - z, 5x - 2y, -9x + 10y - 2z)$$

1. ¿Pertenece el vector $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ a la imagen de f ?
2. ¿Existe algún vector de la forma $(2, 5, \lambda)$ que pertenezca al núcleo de f ?
3. ¿Es f un isomorfismo de espacios vectoriales?

Ejercicio 5. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^2$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2z)$. Calcula las ecuaciones implícitas y paramétricas de $N(f)$ y de $\text{im}(f)$.

Ejercicio 6. Calcula la matriz asociada respecto de las bases canónicas de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que lleva

$$\begin{array}{lll} u_1 = (1, 1, 2) & \text{en} & v_1 = (1, 0, 1, 2) \\ u_2 = (0, 1, 1) & \text{en} & v_2 = (0, 1, -1, 1) \\ u_3 = (1, 1, 0) & \text{en} & v_3 = (0, 1, 1, 0) \end{array}$$

Calcula el núcleo y la imagen.

Ejercicio 7. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^3$ que verifica

$$\begin{array}{l} (1, 1, 1) \in N(f) \\ f(1, 2, 1) = (1, 1, 2) \\ f(1, 2, 2) = (0, 1, 1) \end{array}$$

1. Calcula la matriz de f en la base canónica.
2. Calcula las dimensiones del núcleo y la imagen de f .

Ejercicio 8. Construye una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ de forma que $f(0, 1) = (28, 92)$ y $f(1, 0) = (92, 28)$.

Ejercicio 9. Construye una aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_3)^3 \rightarrow (\mathbb{Z}_3)^4$ de forma que

$$\text{im}(f) = L((1, 2, 0, 2), (2, 0, 2, 0)).$$

Ejercicio 10. Construye una aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_2)^3 \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^3$ de forma que el vector $(1, 0, 1)$ pertenezca al núcleo de f y los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a la imagen.

Ejercicio 11. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^3$, $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y, 3x + 2y + z)$. Calcula una base de $N(f)$ y una base de $\text{im}(f)$.

Ejercicio 12. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 + x_3)$. Encuentra la matriz de f respecto de la base canónica y respecto de la base $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$. Halla la imagen mediante f de los siguientes subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^3$:

1. $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}_5^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
2. $V_2 = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_5\}$
3. $V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) = t(1, -1, 1) \mid t \in \mathbb{Z}_5\}$

Ejercicio 13. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z, 2x, y + z)$$

1. Calcula una base del núcleo de f .
2. Calcula ecuaciones implícitas (o cartesianas) de la imagen de f .
3. Calcula la expresión matricial de f respecto de las bases

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1)\}$$

$$B' = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$

Ejercicio 14. Da una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^4$ tal que $(1, -1) \in N(f)$ y $f(3, 2) = (2, -1, 3, -2)$. Describe explícitamente cuanto vale $f(x, y)$ para cualquier vector $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

Ejercicio 15. Da una aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ que verifique que el vector $(1, 2, -1)$ pertenezca al núcleo de f , que $f(1, -1, 0) = (3, 1, 2)$ y que $\text{Im}(f)$ sea el subespacio de ecuación $x - y - z = 0$.

Calcula la matriz de f en la base $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

Ejercicio 16. Prueba que las siguientes aplicaciones son lineales.

1. $D : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ dada por

$$D(p(x)) = p'(x)$$

2. $S : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por

$$S(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$$

3. $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por

$$T(A) = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

4. $I_{[0,1]} : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_{[0,1]}(p(x)) = \int_0^1 p(x) dx$$

5. $P : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$P(A) = PA \text{ con } P \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$$

Ejercicio 17. Para las aplicaciones lineales del ejercicio anterior calcula:

1. La matriz asociada respecto de las bases estándar adecuadas.
2. El núcleo y la imagen.

Ejercicio 18. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales entre los espacios vectoriales dados. Halla las matrices respecto de las bases estándar de las que lo sean:

1. $M_B : M_2(\mathbb{Z}_3) \rightarrow M_{2 \times 1}(\mathbb{Z}_3)$ dada por $M_B(A) = AB$ con $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. $S_B : M_2(\mathbb{Q}) \rightarrow M_2(\mathbb{Q})$ dada por $S_B(A) = A + B$ con $B \in M_2(\mathbb{Q})$ fija.
3. $C_B : M_2(\mathbb{Z}_5) \rightarrow M_2(\mathbb{Z}_5)$ dada por $C_B(A) = AB - BA$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $A(p(x)) = (p(0), p(1), p(2), p(3))$

Ejercicio 19. Se considera la aplicación $\det : M_2(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$ que asocia a cada matriz su determinante. Responde a las siguientes cuestiones y justifica la respuesta:

1. ¿Es \det una aplicación lineal?
2. ¿Es f una aplicación inyectiva?
3. ¿Es f una aplicación sobreyectiva?

Ejercicio 20. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z, 2x, y + z)$$

1. Calcula una base del núcleo de f
2. Calcula las ecuaciones cartesianas de la imagen de f
3. Calcula la expresión matricial de f respecto de las bases B y B' , donde

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 1)\}$$

$$B' = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$

Ejercicio 21. Para la aplicación lineal $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{aligned} f_\alpha(1, 1, 1) &= (\alpha, \alpha, \alpha) \\ f_\alpha(0, 1, 1) &= (-\alpha, 0, 0) \\ f_\alpha(1, 0, 1) &= (1, 1 - \alpha, 0) \end{aligned} \quad \text{para un parámetro } \alpha \in \mathbb{R}$$

se pide:

1. La matriz de f_α respecto de la base canónica.
2. Según los valores de α , estudia las dimensiones del núcleo y la imagen de f_α .
3. La matriz de f_α respecto de la base $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

Ejercicio 22. Dadas $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 0)$ y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2)$ calcular $f^n = f \circ \dots \circ f$ y $g \circ f$. [Sugerencia: calcula las matrices de f y g].

Ejercicio 23. Construye una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de manera que $(0, 1, 0) \in N(f)$ y que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

Ejercicio 24. Se consideran los subespacios de $(\mathbb{Z}_3)^4$

$$U = \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right. \quad W = \langle (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$$

1. Da una aplicación lineal no nula f de W en U y calcula $f(1, 0, 1, 0)$.
2. ¿Cuántas aplicaciones lineales sobreyectivas hay de W a $U + W$?

Ejercicio 25. Sabiendo que la aplicación f lleva los vectores

$$B_1 = \{u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = (1, 1, 0), \quad u_3 = (1, 1, 1)\}$$

de \mathbb{Z}_7^3 en los vectores

$$B_2 = \{w_1 = (2, 1, 2), \quad w_2 = (3, 1, 2), \quad w_3 = (6, 2, 3)\}$$

relativamente, encontrar las matrices $M(f; B_c)$, $M(f; B_1 B_2)$, $M(f; B_1)$, $M(f; B_2, B_c)$, donde B_c es la base canónica.

Ejercicio 26. Prueba que si $\dim(V) > \dim(V')$, entonces no existe ninguna aplicación lineal inyectiva de V en V' .

Preguntas test.

Ejercicio 27. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$. Entonces

- a) La dimensión de la imagen de f es 2.
- b) La dimensión del núcleo de f es 2.
- c) f es sobreyectiva.
- d) f es inyectiva.

Ejercicio 28. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y)$. La dimensión del núcleo de f es

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Ejercicio 29. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ que tiene como matriz asociada en la base canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces:

- a) una base de la imagen de f es $\{(1, 3, 0), (4, 3, 2)\}$ y una base del núcleo de f es $\{(2, -1, 1), (-6, 2, 9)\}$.
- b) una base de la imagen de f es $\{(1, 4, 2), (3, 3, -3)\}$ y una base del núcleo de f es $\{(2, -1, 1), (-6, 2, 9)\}$.
- c) una base de la imagen de f es $\{(1, 3, 0), (4, 3, 2)\}$ y una base del núcleo de f es $\{(2, -1, 1)\}$.
- d) una base de la imagen de f es $\{(1, 3, 0), (4, 3, 2)\}$ y una base del núcleo de f es $\{(-6, 2, 9)\}$.

Ejercicio 30. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (3x + 2y, x - y, x + 2y)$. Entonces la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas es

- a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 31. Sea la aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_5)^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ determinada por $f(2, 0) = 3$ y $f(1, 3) = 1$. Entonces

- a) $f(1, 1) = 2$,

- b) $f(1, 1) = 3$,
- c) para tener una aplicación lineal necesitamos que el dominio y el codominio sean espacios vectoriales, cosa que no ocurre con \mathbb{Z}_5 ,
- d) las condiciones del enunciado no determinan ninguna aplicación lineal, así que no puede calcularse $f(1, 1)$.

Ejercicio 32. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ definida por $f(x, y) = (x + y, -x - y, 0)$. Entonces la dimensión de la imagen de f es:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Ejercicio 33. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ definida por $f(x, y) = (x + y, -x - y, 0)$. Entonces la dimensión del núcleo de f es:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Ejercicio 34. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal inyectiva y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base para V . Entonces $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$

- a) es una base para V' .
- b) es un sistema de generadores para V' .
- c) es un conjunto de vectores linealmente independientes.
- d) es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

Ejercicio 35. Sea $f : (\mathbb{Z}_3)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_3)^2$ una aplicación lineal **no sobreyectiva** tal que $(1, 0, 0, 0) \in N(f)$, $(0, 1, 2, 0) \in N(f)$ y $(1, 1) \in \text{Im}(f)$. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente falsa.

- a) $\dim \text{Im}(f) = 1$
- b) $\dim(N(f)) = 3$
- c) $(0, 0, 1, 1) \in N(f)$ y $(0, 0, 0, 2) \in N(f)$
- d) $(2, 2, 1, 0) \in N(f)$ y $(0, 0, 0, 1) \in N(f)$

Ejercicio 36. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y - z, 4x - 2y + 5z)$. Entonces

- a) los subespacios núcleo e imagen de f son iguales,
- b) $f^*({(-1, 1, -2)}) = \emptyset$
- c) el subespacio núcleo de f tiene dimensión 0,
- d) el subespacio imagen de f tiene dimensión 2.

Ejercicio 37. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$. Entonces una base de $\text{Im}(f)$ es

- a) $\{(1, 1, 2), (0, 0, 1)\}$
- b) $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$
- c) $\{(1, 1, 2), (2, 1, 3)\}$

d) $\{(1, 1, 2)\}$

Ejercicio 38. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $\dim(N(f)) = 1$. Entonces:

- a) f es inyectiva,
- b) f es sobreyectiva,
- c) f es biyectiva,
- d) f es un isomorfismo.

Ejercicio 39. Sea $V = (\mathbb{Z}_{11})_2[x]$, es decir, el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes en \mathbb{Z}_{11} , y sea $D : V \rightarrow V$ la aplicación derivada. Entonces:

- (a) $\{7\}$ es una base del núcleo de D y $\{6 + 3x, 9 + 10x\}$ una base de la imagen.
- (b) $\{1\}$ es una base del núcleo de D y $\{1, x\}$ una base de la imagen.
- (c) $\{0\}$ es una base del núcleo de D y $\{1, x, x^2\}$ una base de la imagen.
- (d) $\{x\}$ es una base del núcleo de D y $\{1, x^2\}$ una base de la imagen.

Ejercicio 40. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ definida por $f(x, y, z) = (2x + 3y, 7x + z)$

- (a) Una base de la imagen es $\{(1, 0), (0, 1)\}$.
- (b) f es inyectiva.
- (c) f no es sobreyectiva.
- (d) El núcleo de f tiene dimensión 2.

Ejercicio 41. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$. Las ecuaciones cartesianas del subespacio $\text{Im}(f)$ son:

1. $x + y - z = 0$.

2. $\begin{matrix} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{matrix}$.

3. $\begin{matrix} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{matrix}$.

4. Puesto que $\dim(\text{Im}(f)) = 3$, no tiene ecuaciones cartesianas.

Ejercicio 42. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^2 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^4$ la aplicación lineal definida por las condiciones $f(1, 0) = (1, 2, 0, 5)$ y $f(0, 1) = (2, 2, 4, 2)$, y sea $g : (\mathbb{Z}_7)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^2$ la aplicación lineal dada por $g(x, y, z, t) = (x + 4y + z + 3t, 2x + y + 5t)$. Sea U el núcleo de g y V la imagen de f . Una base de $U + V$ es

- 1. $\{(1, 0, 4, 4), (1, 0, 3, 1), (0, 1, 5, 4)\}$.
- 2. $\{(1, 2, 0, 5), (2, 2, 4, 2), (1, 0, 3, 1), (0, 1, 5, 4)\}$.
- 3. $\{(1, 2, 0, 5), (2, 2, 4, 2), (1, 4, 1, 3), (2, 1, 0, 5)\}$.
- 4. $\{(1, 2, 0, 5), (2, 2, 4, 2), (1, 1, 2, 3)\}$.

Ejercicio 43. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal tal que $\dim(N(f)) = \dim(\text{Im}(f))$. Entonces podemos asegurar que:

1. $V = V'$.
2. $\dim(V)$ es par.
3. $\dim(V')$ es par.
4. $\dim(V + V')$ es par.

Ejercicio 44. Sea $f : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ la aplicación lineal cuya matriz en la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, y $g : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ la única aplicación lineal que verifica que $g(1, 1) = (0, -2)$ y $g(1, -1) = (2, 4)$. Entonces:

- a) $f + g$ es inyectiva.
- b) El núcleo de $f + g$ está generado por el vector $(-2, 2)$.
- c) $f + g$ es sobreyectiva.
- d) La imagen de $f + g$ está generada por el vector $(-2, 2)$.

Ejercicio 45. Sea $f : (\mathbb{Z}_7)^2 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^2$ la aplicación lineal $f(x, y) = (3x + 5y, x + y)$, y sea $B = \{(1, 2); (1, 1)\}$ una base de $(\mathbb{Z}_7)^2$. Entonces la matriz de f en la base B es:

- a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- b) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
- c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
- d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 46. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^4$ la aplicación lineal $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + 4z, 2x + 3y + z)$. Entonces:

- a) $N(f) = L[(3, 2, 3)]$ e $\text{Im}(f) = L[(1, 1, 1, 1), (2, 1, 3, 4)]$.
- b) $N(f) = \{0\}$ e $\text{Im}(f) \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$.
- c) $N(f) = L[(2, 3, 2)]$ e $\text{Im}(f) \equiv \begin{cases} x + 4y + 4z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases}$.
- d) $N(f) = \{0\}$ e $\text{Im}(f) = (\mathbb{Z}_5)^4$.

Ejercicio 47. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Z}_5)$. Sea $f : (\mathbb{Z}_5)^4 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^3$ la aplicación lineal cuya matriz en las bases canónicas de $(\mathbb{Z}_5)^4$ y $(\mathbb{Z}_5)^3$ es la matriz A . Entonces:

- a) El núcleo de f es el subespacio de ecuación $x + y + 2z + t = 0$.
- b) f es sobreyectiva.
- c) La imagen de f es el subespacio generado por $(2, 3, 2)$ y $(3, 1, 2)$.
- d) f es inyectiva.

Ejercicio 48. Sea $f : (\mathbb{Z}_3)^3 \rightarrow (\mathbb{Z}_3)^4$ la aplicación lineal $f(x, y, z) = (x+y+z, 2x+z, x+2y+4z, y+z)$. Entonces:

a) $N(f) \equiv x + y + z = 0$ e $\text{Im}(f) \equiv \begin{cases} y + z + t = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$.

b) $N(f) = \{0\}$ e $\text{Im}(f) = L[(1, 2, 1, 0), (1, 0, 2, 1), (2, 2, 1, 1)]$.

c) $N(f) = \{0\}$ e $\text{Im}(f) \equiv y + z + t = 0$.

d) $N(f) = L[(1, 1, 1)]$ e $\text{Im}(f) = L[(1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 1)]$.

Ejercicio 49. Sea A el conjunto de todas las aplicaciones lineales $f : (\mathbb{Z}_7)^3 \rightarrow (\mathbb{Z}_7)^3$ que verifican que $N(f) = \text{Im}(f)$. Entonces el cardinal del conjunto A es:

a) 1.

b) 7.

c) 49.

d) 0.