Cálculo
1ºB Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial (II)
Curso 2012/2013

1. **(2.5 puntos)** Estudia el carácter de las siguientes series.

   a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}$

   b) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log(n)\,\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$

   Solución:

   a) Aplicamos el criterio del cociente. Llamamos $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}$. Entonces tendremos que analizar el límite del cociente:

   $$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)(2n+3)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)(4n)}\,\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\\ &= \frac{2n+3}{4n} \to \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1\end{aligned}$$

   Por tanto, el criterio del cociente nos asegura que la serie dada es convergente.

   b) Arreglamos, en primer lugar, el término general de la serie, multiplicando numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$:

   $$a_n = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\log(n)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\log(n)(n+1-n)} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\log(n)}$$

   Gracias a la escala de infinitos, es fácil observar que el término general de la serie dada diverge a $+\infty$, por lo que la serie es divergente, al no cumplir el requisito necesario para la convergencia, a saber, que el término general converja a cero.

2. **(2.5 puntos)** Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

   a) $\left\{\dfrac{2!+4!+\cdots+(2n)!}{(2n)!}\right\}$

   b) $\left\{\left(1+\log\left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)\right)^{n^2}\right\}$

Solución:

a) Aplicamos el criterio de Stolz (el numerador no sabemos a dónde converge o diverge, pero el denominador diverge positivamente y es creciente). Si llamamos a_n al numerador y b_n al denominador, tendremos que analizar el límite del cociente siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \frac{2!+4!+\cdots+(2n)!+(2n+2)!-(2!+4!+\cdots+(2n)!)}{(2n+2)!-(2n)!}\\ &= \frac{(2n+2)!}{(2n+2)!-(2n)!}\end{aligned}$$

y factorizando los factoriales:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)![(2n+2)(2n+1)-1]} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)-1} \to 1$$

Observemos que hemos obtenido un cociente de polinomios del mismo grado, por lo que la sucesión converge al cociente de los coeficientes principales. Por tanto $\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 1$, y aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim \left\{ \frac{2!+4!+\cdots+(2n)!}{(2n)!} \right\} = 1$$

b) Este límite presenta una indeterminación del tipo "1^∞", por lo que, aplicando el criterio del número e, tendremos que estudiar la sucesión siguiente:

$$n^2\left[1+\log\left(1+\frac{4}{n^2}\right)-1\right] = n^2\log\left(1+\frac{4}{n^2}\right) = \log\left[\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2}\right]$$

Nos queda una sucesión de un logaritmo que actúa sobre otra sucesión que vuelve a presentar una indeterminación del tipo "1^∞"; por lo que volvemos a aplicar el criterio del número, pero solamente a la sucesión que está afectada por el logaritmo; es decir, a la sucesión $\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} n^2\left[1+\frac{4}{n^2}-1\right] = \frac{4n^2}{n^2} = 4 \to 4 \;\Rightarrow\; \lim\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2} = e^4\\ \Rightarrow\; \lim\log\left[\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2}\right] = \log(e^4) = 4\end{aligned}$$

Como teníamos que

$$\log\left[\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{n^2}\right] = n^2\left[1+\log\left(1+\frac{4}{n^2}\right)-1\right] \to 4$$

y aplicando el criterio del número e concluimos que:

$$\lim\left\{\left(1+\log\left(1+\frac{4}{n^2}\right)\right)^{n^2}\right\}=e^4$$

3. **(2.5 puntos)** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$x_1=\frac{1}{3}$$
$$x_{n+1}=\sqrt{3x_n+4},\ \ \forall n\in\mathbb{N}$$

a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.

b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

c) Calcula $\lim\limits_{n\to\infty}(3x_n-11)^{\frac{1}{x_n-4}}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}>x_1=\frac{1}{3}$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n=1$, acabamos de ver que $x_1<x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n<x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1}<x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n<x_{n+1}\ \Rightarrow\ 3x_n<3x_{n+1}\ \Rightarrow\ 3x_n+4<3x_{n+1}+4$$
$$\Rightarrow\ \sqrt{3x_n+4}<\sqrt{3x_{n+1}+4}\ \Rightarrow\ x_{n+1}<x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por $x_1=1/3$. Veamos que está acotada superiormente por 4. Esto es, que $x_n\leq 4$,$\forall n\in\mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n=1$, es evidente que $x_1=1/3\leq 4$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n\leq 4$.
- Comprobamos que $x_{n+1}\leq 4$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n\leq 4\ \Rightarrow\ 3x_n\leq 12\ \Rightarrow\ 3x_n+4\leq 16\ \Rightarrow\ \sqrt{3x_n+4}\leq\sqrt{16}=4$$
$$\Rightarrow\ x_{n+1}\leq 4$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

b) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \sqrt{3x+4}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{3x+4} \Rightarrow x^2 = 3x+4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 4$ y $x = -1$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que $1/3$. El motivo es que $1/3 \leq x_n \leq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 4$.

c) Observamos que en el cálculo de $\lim_{n\to\infty} (3x_n - 11)^{\frac{1}{x_n-4}}$ tenemos una indeterminación del tipo "1^∞", ya que la base tiende a 1 y el exponente a infinito. Entonces, aplicando el criterio del número e:

$$\frac{1}{x_n - 4}\left[3x_n - 11 - 1\right] = \frac{3x_n - 12}{x_n - 4} = \frac{3(x_n - 4)}{x_n - 4} = 3 \to 3$$

Por tanto, $\lim_{n\to\infty} (3x_n - 11)^{\frac{1}{x_n-4}} = e^3$.

4. **(2.5 puntos)** Estudia la posible convergencia de las siguientes series y calcula su suma cuando sea posible:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3}{(n+2)(n+3)}$.

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3^{n-1} - (-2)^n}{4^n}$.

Solución:

a) Comparamos con la serie armónica $\sum \frac{1}{n^2}$ que es convergente.

$$\frac{\frac{3}{(n+2)(n+3)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{3n^2}{(n+2)(n+3)} \to 3 \neq 0$$

Por tanto, la serie es convergente. Calculamos su suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(n+2)(n+3)} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

Descomponemos el término general y apreciamos así que se trata de una serie telescópica:

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

con lo que las sumas parciales de la serie se pueden calcular de la forma siguiente:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} \Rightarrow 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = 3 \lim S_n = 3 \lim \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{3}{2}$$

b) La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{3^{n-1} - (-2)^n}{4^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^n - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{-2}{4} \right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{3}{4} \right)^n - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{-1}{2} \right)^n$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{3}{4}| < 1$ y $|\frac{-1}{2}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \right)$, nos queda:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - (-2)^n}{4^n} &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{3}{4}} - 1 \right) - \left(\frac{1}{1 - \frac{-1}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Granada, 28 de noviembre de 2012