Examen de Cálculo
Grado en Ingeniería Informática
Convocatoria extraordinaria de septiembre

1. **(1.5 ptos.)** Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia como

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En caso de ser convergente, calcula su límite.

Solución: Veamos que se trata de una sucesión monótona y acotada. En efecto, en primer lugar tenemos que:

$$x_1 = \sqrt{2} < x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

Comprobemos ahora, haciendo uso del Principio de inducción, que, suponiendo que siendo n un natural fijo y verificándose que $x_n < x_{n+1}$, entonces se verifica también que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto:

$$x_n < x_{n+1} \Leftrightarrow 2x_n < 2x_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{2x_n} < \sqrt{2x_{n+1}} \Leftrightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$$

Tenemos entonces que la sucesión dada es monótona creciente, con lo que la acotación inferior la tenemos garantizada por el primer término de la sucesión, esto es: $\sqrt{2} < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vamos ahora a comprobar que la sucesión está mayorada por 2. Es claro que $x_1 \leq 2$. Aplicando nuevamente el Principio de inducción, supongamos que $x_n \leq 2$ y comprobemos que entonces $x_{x+1} \leq 2$ también. En efecto:

$$x_n \leq 2 \Leftrightarrow 2x_n \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow x_{n+1} \leq 2$$

Por tanto, la sucesión dada es convergente. Calculemos ahora su límite x. Partiendo de la fórmula de recurrencia, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad, $x_{n+1}^2 = 2x_n$ y tomamos límite a ambos lados:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} 2x_n \;\Leftrightarrow\; x^2 = 2x \;\Leftrightarrow\; x(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n = x = 2.$$

Comentemos que la solución $x = 0$ queda descartada ya que si $\sqrt{2} < x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt{2} \leq x \leq 2$, lo que excluye el caso $x = 0$. Por tanto, la sucesión planteada es convergente y su límite es 2.

2. Calcula

   a) **(1.25 ptos.)** $\lim \left(1 + \dfrac{1}{2n^3 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{n^2}$.

   b) **(1.25 ptos.)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2) - x^2}{x^3}$.

Solución:

a) Se trata de una sucesión que presenta una indeterminación del tipo "1^∞", ya que la base tiende a 1, y el exponente a ∞. Aplicamos entonces el criterio del número e y analizamos la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} n^2\left[1 + \frac{1}{2n^3 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right] &= n^2\left[\frac{1}{2n^3 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right] \\ &= \frac{n^2}{2n^3 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{2n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{2} \end{aligned}$$

puesto que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ entonces $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 1$. Por tanto, aplicando el criterio del número e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n^3 \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{n^2} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

b) El límite planteado presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$", por lo que vamos a aplicar la primera Regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2} - 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2x^3}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^3}{3x^2(1+x^2)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{3(1+x^2)} = 0.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2) - x^2}{x^3} = 0$

3. Estudia la convergencia de las siguientes series de números reales.

   a) **(1.25 ptos.)** $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right)^n$.

   b) **(1.25 ptos.)** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n!}{n^2 e^n}$.

Solución:

a) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\left[\left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right)^n\right]} = \sqrt{n^2+n+1} - n$$
$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n+1} + n\right)}$$
$$= \frac{n+1}{\left(\sqrt{n^2+n+1} + n\right)}$$

y dividiendo por n,

$$= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} \to \frac{1}{2} < 1.$$

Por tanto, la serie dada es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^2 e^{n+1}} \frac{n^2 e^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)}{(n+1)^2 e} = +\infty.$$

Por tanto, la serie dada es divergente.

4. **(1.5 ptos.)** Sea $m > 0$. Determina el número de soluciones de la ecuación

$$mx - 1 + \frac{1}{x} = 2m,$$

con $x > 0$.

Solución: Vamos a determinar el número de ceros de la función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = mx - 1 + \frac{1}{x} - 2m.$$

Se trata de una función derivable, así que analizamos su derivada y buscamos posibles puntos críticos:

$$f'(x) = m - \frac{1}{x^2} = 0 \iff x^2 = \frac{1}{m} \iff x = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Por ahora podemos afirmar que como la función derivada sólo tiene un punto crítico, la función f se puede anular, como mucho, en dos puntos. Recordemos que este razonamiento es consecuencia del Teorema de Rolle.

Vamos a decidir si este punto crítico encontrado es de mínimo o máximo analizando el signo de la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \iff f''\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) > 0.$$

Por tanto tenemos un punto de mínimo que, al ser el único punto crítico de f, se convierte en el mínimo absoluto de la función. Evaluamos f en dicho punto y calculamos los límites de f en los extremos del dominio para concluir el ejercicio:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = 2\sqrt{m} - 2m - 1 = 2(\sqrt{m} - m) - 1 < 0.$$

¿Cómo llegamos a la conclusión de que el valor de f en el punto de mínimo es negativo? Si resolvemos la ecuación $2(\sqrt{m} - m) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{m} = 2m + 1$; y elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación: $4m = 4m^2 + 4m + 1 \Leftrightarrow 4m^2 + 1 = 0$, la ecuación resultante no tiene solución para $m \in \mathbb{R}$. Además, es fácil comprobar que para $m = 1$, por ejemplo, el valor de f en el mínimo es negativo; por tanto, sea quien sea $m > 0$, el valor del mínimo de f es siempre negativo. Hay que añadir que la función, tanto en cero como en $+\infty$, diverge a $+\infty$. Con todo esto concluimos que la función f tiene dos ceros (uno, antes de $x = \frac{1}{\sqrt{m}}$; y otro, después de $x = \frac{1}{\sqrt{m}}$). Por tanto, la ecuación planteada tiene exactamente dos soluciones en $\mathbb{R}^+$.

Nota: Observemos que si transformamos la ecuación planteada en esta otra equivalente:

$$mx^2 - x + 1 = 2mx \Leftrightarrow mx^2 - (2m + 1)x + 1 = 0$$

Se trata de discutir el número de soluciones de esta ecuación de segundo grado, en función del parámetro $m > 0$. Si resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{(2m + 1) \pm \sqrt{(2m + 1)^2 - 4m}}{2} = \frac{(2m + 1) \pm \sqrt{4m^2 + 1}}{2}$$

Como el valor $4m^2 + 1$ es positivo, independientemente del valor de m, podemos asegurar que la ecuación dada tiene dos soluciones reales distintas, tal y como hemos concluido en la resolución anterior del ejercicio.

5. *a*) **(1 pto.)** Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t \arctan(t) dt}{\operatorname{sen}^3(x)}$ utilizando el teorema fundamental del cálculo.

b) **(1 pto.)** Calcula $\displaystyle\int_0^x t \arctan(t)dt$.

Solución:

a) Este límte presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$", por lo que vamos a aplicar la primera Regla de L'Hôpital. Hay que comentar que la función numerador es derivable como consecuencia del teorema fundamental del Cálculo, y que su derivada es:

$$F(x) = \int_0^x t \arctan(t)dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = x \arctan(x) \ , \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces, aplicando la primera Regla de L'Hôpital, nos queda:

$$\frac{F'(x)}{3 \operatorname{sen}^2(x) \cos(x)} = \frac{x \arctan(x)}{3 \operatorname{sen}^2(x) \cos(x)} = \frac{1}{3 \cos(x)} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \frac{\arctan(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Hemos descompuesto el cociente en el producto de otros tres con el objetivo de simplificar cálculos a la hora de volver a aplicar la Regla de L'Hôpital. Así que estudiamos cada uno por separado, teniendo en cuenta que sólo vamos a aplicar la Regla de L'Hôpital en los dos últimos:

$$\frac{1}{3 \cos(x)} \to \frac{1}{3} \ (x \to 0)$$
$$\frac{1}{\cos(x)} \to 1 \ (x \to 0)$$
$$\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos(x)} \to 1 \ (x \to 0)$$

Por tanto, el límite que nos pedían es $\frac{1}{3}$.

b) Para calcular $\displaystyle\int_0^x t \arctan(t)dt$ aplicamos el método de integración por partes, donde:

$$u = \arctan(t) \Rightarrow \; du = \frac{1}{1+t^2}$$
$$dv = t \Rightarrow \; v = \frac{t^2}{2}$$

Con lo que la integral nos queda:

$$\begin{aligned}
\int_0^x t \arctan(t) dt &= \frac{1}{2} t^2 \arctan(t) \Big]_0^x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1} \, dt \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2} \int_0^x 1 \, dt + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan(x) \\
&= \frac{1}{2} \left(x^2 \arctan(x) - x + \arctan(x) \right).
\end{aligned}$$

Granada a 19 de septiembre de 2012.