Prueba de clase 19 de Mayo de 2015

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**____________

De las cuatro primeras preguntas hay que elegir 3. La quinta es obligatoria.

1. Sea $\alpha = \forall x(P(x,a) \to \exists y Q(f(y),x)) \vee \exists x \neg Q(x,x)$.

   a) Consideramos las siguientes estructuras:

   - Estructura 1:
     - Dominio: $\mathbb{Z}_4$.
     - Asignación de constantes: $a = 0$.
     - Asignación de funciones: $f(x) = 2x$.
     - Asignación de predicados: $P(x,y) \equiv x^2 = y$; $Q(x,y) \equiv x = y$.
   - Estructura 2:
     - Dominio: $\mathbb{N}$.
     - Asignación de constantes: $a = 2$.
     - Asignación de funciones: $f(x) = x^2$.
     - Asignación de predicados: $P(x,y) \equiv y|x$ (es decir, x es múltiplo de y); $Q(x,y) \equiv 2y = x^2$.

   Calcula el valor de verdad de α en ambas estructuras.

   b) Estudia el carácter de α (universalmente válida, satisfacible y refutable, contradicción).

Solución 1. a*) En la estructura 1, observamos que $\exists x \neg Q(x,x)$ es falso, puesto que $Q(x,x)$ significa $x = x$, lo que siempre ocurre. Hay que interpretar por tanto el otro miembro de la fórmula. Como el dominio tiene solo 4 elementos podemos recorrer todas las posibles asignaciones de x para determinar si el $\forall x$ es cierto:*

x	$x^2 = 0$	$\exists y(2y = x)$	$(x^2 = 0) \to \exists y(2x = y)$
0	V	V $(y = 0)$	V
1	F		V
2	V	V $(y = 0)$	V
3	F		V

como es verdadero para todos los valores de x, entonces la fórmula es verdadera. En la estructura 2 es más fácil, porque $\exists x \neg Q(x,x)$ es verdadera, ya que para $x = 1$, $2x \neq x^2$, y por tanto ya hemos encontrado x tal que $I(\neg Q(x,x)) = 1$. Así que la fórmula también es verdadera en esta estructura.

b*) Es satisfacible como demuestran las dos interpretaciones del apartado anterior. También es refutable, para ello tomamos la interpretación:*

- *Dominio: $\mathbb{Z}_2$.*
- *Asignación de constantes: $a = 0$.*
- *Asignación de funciones: $f(x) = 1$ (una función cte).*
- *Asignación de predicados: $P = \{(1,0)\}$; $Q = \{(1,0),(0,1)\}$.*

$\exists x \neg Q(x,x)$ es falsa puesto que $(0,0),(1,1) \notin Q$, y tomando $x = 1$ se tiene $I(P(1,0)) = 1$ pero $Q(f(y),1) = Q(1,1)$ es falso con lo que la implicación es falsa para $x = 1$.

2. Consideramos el siguiente lenguaje de primer orden:

   - Símbolos de constante: $\mathcal{C} = \{a,\ b\}$.
   - Símbolos de función: $\mathcal{F} = \{p^2,\ m^2\}$.
   - Símbolos de predicado: $\mathcal{R} = \{P^1,\ Pr^1,\ M^2,\ E^2\}$.

   Y consideramos la siguiente estructura:

- Dominio: $\mathbb{N}$.
- Asignación de constantes: $a = 0$; $b = 2$.
- Asignación de funciones: $p(x, y) = x \cdot y$; $s(x, y) = x + y$.
- Asignación de predicados: $P(x) \equiv x$ es par; $Pr(x) \equiv x$ es primo; $M(x, y) \equiv x < y$; $E(x, y) \equiv x = y$.

Expresa en este lenguaje los siguientes enunciados:

a) El doble de un número primo nunca es un número primo.

b) La suma de dos números impares es par.

Solución 2. a*)* $\forall x(Pr(x) \to \neg Pr(p(x, b)))$.
b*)* $\forall x \forall y(\neg P(x) \wedge \neg P(y) \to P(s(x, y)))$.

3. Calcula una forma prenexa con el menor número de cuantificadores posible, una forma de Skolem y una forma clausular para la fórmula

$$[\exists x P(x) \longrightarrow \forall z Q(z, a)] \longrightarrow \forall y \exists x[\neg P(f(x)) \vee Q(x, y)]$$

Solución 3. *En primer lugar cambiamos las implicaciones usando $a \to b \equiv \neg a \vee b$:*

$$\begin{aligned} &[\exists x P(x) \longrightarrow \forall z Q(z, a)] \longrightarrow \forall y \exists x[\neg P(f(x)) \vee Q(x, y)] \equiv \\ &\equiv \neg[\neg \exists x P(x) \vee \forall z Q(z, a)] \vee \forall y \exists x[\neg P(f(x)) \vee Q(x, y)] \equiv \\ &\equiv [\exists x P(x) \wedge \neg \forall z Q(z, a)] \vee \forall y \exists x[\neg P(f(x)) \vee Q(x, y)] \equiv \\ &\equiv [\exists x P(x) \wedge \exists z \neg Q(z, a)] \vee \forall y \exists x[\neg P(f(x)) \vee Q(x, y)] \equiv \end{aligned}$$

Ahora sacamos hacia la izquierda los cuantificadores, en primer lugar dentro del primer paréntesis, sacamos $\exists z$ que no aparece libre en el término de su izquierda y luego $\exists x$

$$\equiv \exists z \exists x[P(x) \wedge \neg Q(z, a)] \vee \forall y \exists x[\neg P(f(x)) \vee Q(x, y)] \equiv$$

Ahora en ambos paréntesis observamos que podemos sacar $\exists z$ porque no aparece libre en el resto de la fórmula, y lo mismo $\forall y$

$$\equiv \exists z \forall y(\exists x[P(x) \wedge \neg Q(z, a)] \vee \exists x[\neg P(f(x)) \vee Q(x, y)]) \equiv$$

ahora dentro del paréntesis usamos $\exists x \alpha \vee \exists x \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$ y obtenemos una forma prenexa:

$$\equiv \exists z \forall y \exists x([P(x) \wedge \neg Q(z, a)] \vee [\neg P(f(x)) \vee Q(x, y)])$$

Ahora aplicamos la skolemización, z se sustituye por b, y x por $g(y)$

$$\forall y([P(g(y)) \wedge \neg Q(b, a)] \vee [\neg P(f(g(y))) \vee Q(g(y), y)])$$

que es una forma de Skolem, y por último usando la distributiva obtenemos la forma clausular:

$$\forall y[P(g(y)) \vee \neg P(f(g(y))) \vee Q(g(y), y)] \wedge \forall y[\neg Q(b, a) \vee \vee \neg P(f(g(y))) \vee Q(g(y), y)]$$

4. Estudia si los siguientes conjuntos de cláusulas son satisfacibles o insatisfacibles:

a)
$$\{Q(x, g(x), g(x)) \vee Q(g(x), x, g(x)),\ \neg Q(y, g(y), y)\}$$

b)
$$\{Q(x, b, g(y)),\ \neg Q(a, x, y)\}$$

Solución 4. a*) En este conjunto hay dos posibles estrategias: primero unificar los dos literales Q de la primera cláusula para obtener un factor lo cual no es posible: $Q(x, g(x), g(x)) \vee Q(g(x), x, g(x))$ nos da, aplicando el algoritmo de unificación, un primer conjunto de discordancia $\{x, g(x)\}$ en el que el término depende de la variable que aparece, con lo que nos daría un bucle de sustituciones infinito y por tanto no es posible la unificación. También puede intentarse calcular dos resolventes sucesivas, para la unificación del primer literal de la primera cláusula con el literal de la segunda cláusula:*

$$\begin{array}{l} Q(x, g(x), g(x)) \vee Q(g(x), x, g(x)) \\ \neg Q(y, g(y), y) \end{array}$$

tenemos el primer conjunto de discordancia $\{x, y\}$, y procedemos a sustituir $(x|y)$:

$$\begin{array}{l} Q(y, g(y), g(y)) \vee Q(g(y), y, g(y)) \\ \neg Q(y, g(y), y) \end{array}$$

y ahora el siguiente conjunto de discordancia es $\{y, g(y)\}$ que, como antes, nos indica que no es posible la unificación. No es necesario intentarlo con el segundo literal de la primera cláusula puesto que en cualquier caso no puede eliminarse el primero, pero el intento daría también la imposibilidad de la unificación. Así que el conjunto es **satisfacible** *puesto que hemos calculado* **todas** *las resolventes posibles y no aparece la cláusula vacía.*

b*) En este caso solo hay que intentar la resolvente de ambas cláusulas unit:*

$$\{Q(x, b, g(y)),\ \neg Q(a, x, y)\}$$

antes de aplicar el algoritmo de unificación renombramos las variables de cláusulas distintas:

$$\{Q(x_1, b, g(y_1)),\ \neg Q(a, x_2, y_2)\}$$

la primera pasada del algoritmo de unificación nos proporciona el conjunto de discordancia $D_1 = \{x_1, a\}$ así que realizamos la sustitución $(x_1|a)$ y nos queda

$$\{Q(a, b, g(y_1)),\ \neg Q(a, x_2, y_2)\}$$

el segundo conjunto de discordancia es $D_2 = \{x_2, b\}$ así que sustituimos $(x_2|b)$:

$$\{Q(a, b, g(y_1)),\ \neg Q(a, b, y_2)\}$$

y por último el conjunto de discordancia es $D_3 = \{y_2, g(y_1)\}$ que nos da la sustitución $(y_2|g(y_1)$ con lo que queda realizada la unificación. La resolvente de ambas cláusulas es la cláusula vacía y por tanto el conjunto es **insatisfacible**.

5. Utiliza el método de resolución para probar si la siguiente consecuencia lógica ocurre.

$$\{\forall x \forall y[\neg P(x) \wedge R(y) \to S(x, y)];\ \forall y[S(b, y) \to D(y)],\ \forall x R(f(x))\} \vDash \neg P(b) \to \exists x \exists y[D(f(x)) \wedge S(b, y)]$$

Solución 5. *El problema de consecuencia lógica dado puede transformarse usando el* **Teorema de la deducción** *en el siguiente problema equivalente*

$$\{\forall x \forall y[\neg P(x) \wedge R(y) \to S(x, y)];\ \forall y[S(b, y) \to D(y)],\ \forall x R(f(x)),\ \neg P(b)\} \vDash \exists x \exists y[D(f(x)) \wedge S(b, y)]$$

que a su vez es equivalente a probar que el conjunto de fórmulas

$$\{\forall x \forall y[\neg P(x) \wedge R(y) \to S(x, y)];\ \forall y[S(b, y) \to D(y)],\ \forall x R(f(x)),\ \neg P(b),\ \neg \exists x \exists y[D(f(x)) \wedge S(b, y)]\}$$

es insatisfacible. Por último, sigue siendo equivalente a probar la insatisfacibilidad del conjunto de cláusulas a que dan lugar cada una de las fórmulas, así que calculamos dichas cláusulas:

a*)* $\forall x \forall y[\neg P(x) \wedge R(y) \to S(x, y)] \equiv \forall x \forall y[\neg(\neg P(x) \wedge R(y)) \vee S(x, y)] \equiv$
$\equiv \forall x \forall y[P(x) \vee \neg R(y) \vee S(x, y)]$ *que ya es forma clausular.*

b*)* $\forall y[S(b, y) \to D(y)] \equiv \forall y[\neg S(b, y) \vee D(y)]$ *nos da una cláusula.*

c*)* $\forall x R(f(x))$ *es cláusula.*

d) $\neg P(b)$ *es cláusula.*

e) $\neg\exists x\exists y[D(f(x)) \wedge S(b,y)] \equiv \forall x\forall y[\neg D(f(x)) \vee \neg S(b,y)]$ *es la última cláusula.*

Tenemos entonces que probar la insatisfacibilidad del conjunto de cláusulas

$$\{(1)P(x) \vee \neg R(y) \vee S(x,y),\ (2)\neg S(b,y) \vee D(y),\ (3)R(f(x)),\ (4)\neg P(b),\ (5)\neg D(f(x)) \vee \neg S(b,y)\}$$

Ahora utilizamos el método de resolución. Un ejemplo de deducción de la cláusula vacía es:

R(2,5) *mediante la sustitución* $(y|f(x))$ *en ambas se obtiene como resolvente* $(6)\,\neg S(b,f(x))$.

R(1,4) *mediante la sustitución* $(x|b)$ *se obtiene la resolvente* $(7)\neg R(y) \vee \neg S(b,y)$.

R(7,6) *mediante la sustitución* $(y|f(x))$ *nos da* $(8)\neg R(f(x))$.

R(8,3) *es la cláusula vacía.*