EXAMEN DE TOPOLOGÍA II. DOBLE GRADO DE MATEMÁTICAS E INGENIERÍA INFORMÁTICA

1. Sea X un espacio topológico arco-conexo, D el disco unidad en $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{S}^2 \to X$ una aplicación continua. Representaremos por $D \cup_f X$ al siguiente espacio cociente: En $D \cup X$ (unión disjunta), dotado de la topología suma, se define la relación xRy si $x = y$ o $y = f(x)$ o $x = f(y)$ o $f(x) = f(y)$. Entonces $D \cup_f X = (D \cup X)/R$. Probar que los grupos fundamentales de X y $D \cup_f X$ son isomorfos.

2. Calcular el grupo fundamental del espacio cociente de un anillo de $\mathbb{R}^2$ obtenido por identificacón de puntos en el circulo mayor que se encuentran separados 120°.

3.

(1) Sea k un entero, $k \geq 0$, y para cada $n \in \mathbb{Z}$, sea $\Phi_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación
$$\Phi_n(x,y) = (x + (2k+1)n, (-1)^{(2k+1)n}y).$$
Probar que $G = \{\Phi_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo de homeomorfismos que actua discontinuamente sobre $\mathbb{R}^2$. Probar que $\mathcal{C}_{2k+1} := \mathbb{R}^2/G$ es homeomorfo a la cinta de Moebius $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$.

(2) Sea $T : \mathcal{C}_{2k+1} \to \mathcal{C}_{2k+1}$ definido por $T([(x,y)]) = [(x+1, -y)]$. Probar que T es un homeomorfismo bien definido, que $T^{2k+1} = Id$ y que $\hat{G} = \{Id, T, T^2, \ldots, T^{2k}\}$ es un grupo que actua discontinuamente sobre $\mathcal{C}_{2k+1}$.

(3) Probar que $\mathcal{C}_{2k+1}/\hat{G}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$ y por tanto la cinta $\mathcal{C}_{2k+1}$ es un recubridor de $2k+1$ hojas de la cinta $\mathcal{C}$.

4.

(1) Existe en la botella de Klein una estructura de grupo topológico? Y en un toro?

(2) Puede ser $\mathbb{S}^1$ un recubridor del espacio constituido por dos circunferencias pegadas por un punto?

(3) Probar que si (Y, p) es un recubridor de X entonces $p^{-1}(x)$ y $p^{-1}(y)$ tienen el mismo cardinal para cualesquiera $x, y \in X$.

(4) Clasificar los recubridores de $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(5) Tiene el espacio de dos circunferencias pegadas por un punto recubridor universal? Podrías dar un recubridor de dos hojas de dicho espacio?

1 –

*) La topología suma se define como $\tau_{\Sigma} = \{U \subset X : U \cap D \in \tau_D \text{ y } U \cap X \in \tau_X\}$.
Es decir, sus abiertos son aquellos conjuntos formados por abiertos de D y abiertos de X.

Consideramos los siguientes conjuntos en X:

$U = (\bar{B}(0,1) - \bar{B}(0,1/3)) \cup X =$  $\cup X$ abierto $\left(\begin{array}{l} D-(U\cap D) = \end{array}\right.$  cerrado $\Rightarrow U \cap D$ es abierto en D ; $U \cap X = X$ abierto en X $\Big)$.

$V = B(0, 2/3)$ abierto $\left(D \cap V = \right.$  abierto en D ; $X \cap V = \phi$ abierto en X $\Big)$.

$U \cap V = B(0, 2/3) - \bar{B}(0, 1/3) =$  abierto (intersección de abiertos).

•) Claramente, $\pi(V,-) = 0$.

•) $U \cap V$ es del mismo tipo de homotopía que S^2. Basta tomar las aplicaciones continuas
$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longleftrightarrow & S^2 \\ x & \longmapsto & \frac{x}{\|x\|} \\ \frac{1}{2} y & \longleftarrow & y \end{array}$$
Es fácil ver que son equivalencias homotópicas. Por tanto, $\pi(U\cap V,-) = \pi(S^2,-) = 0$.

•) Razonando de la misma forma, tenemos que U es del mismo tipo de homotopía que $S^2 \cup X$, tomando las aplicaciones
$$\begin{array}{ccc} U & \longleftrightarrow & S^2 \cup X \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x/\|x\|, & \text{si } x \in D \\ x, & \text{si } x \in X \end{cases} \\ y & \longleftarrow & y \end{array}$$
Por tanto, $\pi(U,-) = \pi(S^2 \cup X)$.

Además, como la relación de equivalencia sobre el interior de D es la igualdad, y en el resto del conjunto $(S^2 \cup X)$ los puntos quedan fijos por las equivalencias homotópicas, los tipos de homotopía se conservan en el cociente.
Por tanto, si $p: D \cup X \to D\cup X/R$ es la proyección al cociente, aplicando Seifert-Van Kampen tenemos:
$$\pi(D \cup_f X,-) = \pi(p(D\cup X),-) \overset{SVK}{\cong} \pi(p(U),-) *_{\pi(p(U\cap V),-)} \pi(p(V),-) \cong \pi(p(U),-) \cong \pi(p(S^2 \cup X),-)$$
Por tanto, se trata de ver que, en el cociente, $S^2 \cup X$ es del mismo tipo de homotopía que X. De hecho, podemos ver que $S^2 \cup X/R \cong X$. La idea es la siguiente: si $x, y \in X$, $xRy \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \ ✓ \\ x = f(y) \ ✗ \\ f(x) = y \ ✗ \\ f(x) = f(y) \ ✗ \end{cases} \Leftrightarrow x = y$, y si $x \in S^2$, $y \in X$, $xRy \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \ ✗ \\ x = f(y) \ ✗ \\ y = f(x) \ ✓ \\ f(x) = f(y) \ ✗ \end{cases} \Leftrightarrow y = f(x)$. Esto nos dice que todo punto en X solo puede estar relacionado consigo mismo y que todo punto $x \in S^2$ tiene un representante $(f(x))$ en X. Podemos por tanto establecer una correspondencia: $S^2 \cup X/R = \{[x] : x \in S^2 \cup X\} = \{[x] : x \in X\} \equiv X$. Veámoslo formalmente.

*) Recordatorio (Topología I): Si $\phi: X \to Y$ es una identificación entre espacios topológicos y R_ϕ es la relación de equivalencia $x_1 R_\phi x_2 \Leftrightarrow \phi(x_1) = \phi(x_2)$, entonces $X/R_\phi \cong Y$ (y el isomorfismo es $[x] \mapsto f(x)$).
Para que una aplicación continua y sobreyectiva sea una identificación, basta que se dé alguna de estas condiciones: que sea abierta, cerrada, o que tenga inversa continua por la derecha.

Consideramos la aplicación $\phi: S^2 \cup \mathbb{X} \to \mathbb{X}$

$x \longmapsto \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in S^2 \\ x, & \text{si } x \in \mathbb{X} \end{cases}$

•) ϕ es claramente sobreyectiva.

•) ϕ es continua: si $O \in \tau_{\mathbb{X}}$, $\phi^{-1}(O) = \underbrace{f^{-1}(O)}_{\in \tau_{S^2}} \cup \underbrace{O}_{\in \tau_{\mathbb{X}}} \in \tau_{\Sigma(S^2 \cup \mathbb{X})}$ $\left(= \{ \cancel{O \in \tau_{\mathbb{X}}}\ O \cap (S^2 \cup \mathbb{X}) : O \in \tau_{\Sigma} \}\right)$.

•) ϕ tiene inversa continua por la derecha:

Consideramos $i: \mathbb{X} \hookrightarrow S^2 \cup \mathbb{X}$ la inclusión. i es continua y $\phi \circ i = \phi_{|\mathbb{X}} = Id_{\mathbb{X}}$

$\Rightarrow \phi$ es una identificación, y $x_1 R_\phi x_2 \Leftrightarrow \phi(x_1) = \phi(x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1, x_2 \in \mathbb{X}, & x_1 = x_2 \\ x_1 \in \mathbb{X}, x_2 \in S^2, & x_1 = f(x_2) \\ x_1 \in S^2, x_2 \in \mathbb{X}, & f(x_1) = x_2 \\ x_1, x_2 \in S^2, & f(x_1) = f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow x_1 R x_2.$

Por tanto, $\frac{S^2 \cup \mathbb{X}}{R} = \frac{S^2 \cup \mathbb{X}}{R_\phi} \cong \mathbb{X}$, y finalmente: $\Pi(D \cup_f \mathbb{X}, -) \cong \Pi(\frac{S^2 \cup \mathbb{X}}{R}, -) \cong \Pi(\mathbb{X}, -)$ ∎

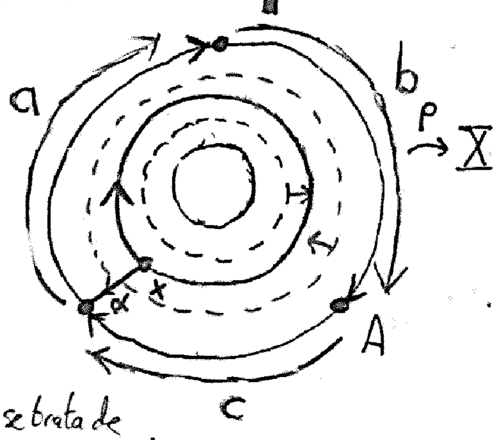
2– Podemos suponer $\mathbb{X} = p(\overline{D}(0,4) - D(0,1))$.

Consideramos los conjuntos:

$\mathcal{U} = p(\overline{D}(0,4) - \overline{D}(0,2))$

$\mathcal{V} = p(D(0,3) - D(0,1))$

$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = p(D(0,3) - \overline{D}(0,2))$.



Los tres conjuntos son abiertos. Recordemos que un conjunto O es abierto en la topología cociente si $p^{-1}(O)$ es abierto. En nuestro caso, como $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son $p(—)$, se trata de ver si $p^{-1}p(—)$ es abierto en ~~el disco~~ la corona, pero para los conjuntos tomados, $p^{-1}p(—) = —$ y $—$ es claramente abierto en la corona.

Además, los tres conjuntos son del mismo tipo de homotopía que S^1 (antes de aplicar p) (basta tomar de nuevo $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ y la inclusión salvo cte.), y como la relación de equivalencia solo afecta a puntos de la circunferencia exterior, se tiene que $\Pi(\mathcal{V}, -) \cong \Pi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, -) \cong \Pi(S^1, -) \cong \mathbb{Z}$.

~~Para U, al proyectar a su borde, obtenemos una circunferencia con sus puntos identificados cada 120°, pero la proyección vuelve a ser una circunferencia, luego Π(U,−) ≅ Π(∂U,−) ≅ Π(S¹,−) ≅ Z (el tipo de homotopía se conserva al pasar de~~

Por otra parte, si llamamos $C = \overline{D}(0,4) - \overline{D}(0,2)$, de nuevo C es del mismo tipo de homotopía que ∂C, y $p(\partial C) \cong S^1$. Como la equivalencia homotópica entre C y ∂C fija los puntos del borde, entonces $\mathcal{U} = p(C)$ es del mismo tipo de homotopía que $p(\partial C)$, luego $\Pi(\mathcal{U}, -) \cong \Pi(S^1, -) \cong \mathbb{Z}$. Es decir, los tres grupos son libres de un generador.

Sea ahora $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ y f lazo en ~~$\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$~~ $A\,\mathbb{X}$ de forma que pf es el lazo generador de $\Pi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x)$, como en el dibujo.

De la misma forma, $\langle \underbrace{p\alpha * pa * p\tilde{\alpha}}_{g_1} \rangle = \Pi(\mathcal{U}, x)$ y $\langle \underbrace{p\beta * pd * p\tilde{\beta}}_{g_2} \rangle = \Pi(\mathcal{V}, x)$. Entonces:

•) En $\mathcal{U}$, $pf \simeq p\alpha * pa * pb * pc * pd * p\tilde{\alpha} \simeq p\alpha * pa * p\tilde{\alpha} * p\alpha * pb * p\tilde{\alpha} * p\alpha * pc * p\tilde{\alpha} \simeq g_1 * g_1 * g_1 = g_1^3$.

•) En $\mathcal{V}$, $pf \simeq p\beta * pd * p\tilde{\beta} = g_2$.

Por tanto, si N es el menor subnormal generado por $i_* \Pi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x) j_*^{-1} \Pi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x)$, donde $\begin{matrix} i: \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{U} \\ j: \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V} \end{matrix}$ son las respectivas inclusiones, se tiene que $g_1^3 g_2^{-1} \in N$, luego $\overline{g_1^3 g_2^{-1}}$ es el elemento neutro al tomar el cociente por N.

Finalmente, aplicando el teorema de Seifert-Van Kampen:

$$\Pi(\mathbb{X}, x) \cong \Pi(\mathcal{U}, x) *_{\Pi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x)} \Pi(\mathcal{V}, x) = \frac{\Pi(\mathcal{U}, x) * \Pi(\mathcal{V}, x)}{N} = \langle g_1, g_2 / g_1^3 = g_2 \rangle = \langle g_1, g_1^3 \rangle = \langle g_1 \rangle = \mathbb{Z}.$$

Como $\mathbb{X}$ es arcoconexo, el grupo fundamental es $\mathbb{Z}$ en cualquier punto. ∎

3 -

(1) $\phi_n(x,y) = (x+(2k+1)n,\ (-1)^{(2k+1)n}y)$, $G = \{\phi_n : n\in\mathbb{Z}\}$, $k\geq 0$.

•) G es un grupo. Dados $\phi_n, \phi_m \in G$,

$\phi_n\circ\phi_m(x,y) = \phi_n(x+(2k+1)m,\ (-1)^{(2k+1)m}y) = (x+(2k+1)(n+m), (-1)^{(2k+1)(m+n)}y) = \phi_{n+m}(x,y)$.

$\phi_0 = Id$ y $(\phi_n)^{-1} = \phi_{-n}\ \forall n \Rightarrow G$ es un grupo (isomorfo a $\mathbb{Z}$). Además, todo elemento distinto de la identidad es una traslación de $\mathbb{R}^2$, luego G es un grupo de homeomorfismos y actúa discontinuamente sobre $\mathbb{R}^2$. Por actuar discontinuamente, G induce la siguiente relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y)R_G(x',y') \Leftrightarrow \exists n \text{ tal que } (x',y') = \phi_n(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x = (2k+1)n \\ y' = (-1)^{(2k+1)n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x \in (2k+1)2\mathbb{Z} \\ y' = y \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x'-x\in(2k+1)(2\mathbb{Z}+1) \\ y' = -y \end{cases}$$

Llamamos, para cada k, $C_{2k+1} := \mathbb{R}^2/G$, $C := C_1$. Veamos que $C_{2k+1} \cong C$.

Definimos la aplicación $F: C_1 \longrightarrow C_{2k+1}$

$$[x,y]_1 \longmapsto [(2k+1)x, y]_{2k+1}.$$

$$F[x,y] = F[x',y'] \Updownarrow [(2k+1)x',y']_{2k+1} = [(2k+1)x,y]_{2k+1} \Updownarrow$$

•) F está bien definida y es inyectiva:

$$[x,y]_1 = [x',y']_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x\in 2\mathbb{Z} \\ y'=y\end{cases} \text{ o } \begin{cases} x'-x\in 2\mathbb{Z}+1 \\ y' = -y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2k+1)x'-(2k+1)x\in(2k+1)2\mathbb{Z} \\ y'=y\end{cases} \text{ o } \begin{cases}(2k+1)x'-(2k+1)x\in(2k+1)(2\mathbb{Z}+1) \\ y'=-y\end{cases}$$

•) F es continua, sobre y abierta, por serlo $(x,y)\mapsto((2k+1)x,y)$ en $\mathbb{R}^2$ y las proyecciones (que son aplicaciones recubridores).

$\Rightarrow F$ es homeomorfismo y $C_1 \cong C_{2k+1}$ ∎

(2) $T: C_{2k+1}\longrightarrow C_{2k+1}$, $T[x,y] = [x+1,-y]$.

•) T está bien definida y es inyectiva:

$$[x,y] = [x',y'] \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x\in(2k+1)2\mathbb{Z} \\ y'=y\end{cases} \text{ o } \begin{cases} x'-x\in(2k+1)(2\mathbb{Z}+1) \\ y'=-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x'+1)-(x+1)\in(2k+1)2\mathbb{Z} \\ -y'=-y\end{cases} \text{ o } \begin{cases}(x'+1)-(x+1)\in(2k+1)(2\mathbb{Z}+1) \\ (-y') = -(-y)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow [x+1,-y] = [x'+1,-y'] \Leftrightarrow T[x,y] = T[x',y'].$$

•) T es continua, sobre y abierta por serlo $(x,y)\mapsto(x+1,-y)$ en $\mathbb{R}^2$ y por serlo las proyecciones.

Por tanto, T es un homeomorfismo, y se tiene que, en general, $T^n[x,y] = [x+n,(-1)^n y]$. ¿Cuándo $T^n = Id$?

$$T^n[x,y] = [x,y] \Leftrightarrow [x+n,(-1)^n y] = [x,y] \Leftrightarrow \begin{cases} x+n-x\in(2k+1)2\mathbb{Z} \\ y' = (-1)^n y\end{cases} \text{ o } \begin{cases} x+n-x\in(2k+1)(2\mathbb{Z}+1) \\ y = (-1)^{n+1}y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n\in(2k+1)2\mathbb{Z} \\ y = (-1)^n y = y \text{ (n par)}\end{cases} \text{ o } \begin{cases} n\in(2k+1)(2\mathbb{Z}+1) \\ y = (-1)^{n+1}y = y \text{ (n impar)}\end{cases} \Leftrightarrow n\in(2k+1)\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2k+1\mid n.$$

Por tanto, $T^{2k+1} = Id$ y $ord(T) = 2k+1$, luego $\hat{G} = \{Id, T, \dots, T^{2k}\} = \langle T\rangle$ es un grupo de homeomorfismos en C_{2k+1} y actúa discontinuamente, ya que todo elemento no trivial es la proyección de una traslación en el plano. ∎

(3) Como $\hat{G}$ actúa discontinuamente sobre G_{2k+1}, le induce la siguiente relación de equivalencia:

$[x,y] R_{\hat{G}} [x',y'] \Leftrightarrow \exists n: T^n[x,y]=[x',y'] \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+n \\ y'=(-1)^n y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x \in 2\mathbb{Z} \\ y'=y \end{cases}$ o $\begin{cases} x'-x \in 2\mathbb{Z}+1 \\ y'=-y. \end{cases}$

Buscamos una aplicación $H: G_{2k+1} \longrightarrow G_1$ que sea una identificación de forma que $R_H = R_{\hat{G}}$.

En tal caso, $\frac{G_{2k+1}}{\hat{G}} \simeq \frac{G_{2k+1}}{R_H} \cong G_1$ y H será un recubridor de G_1 isomorfo a la proyección $p: G_{2k+1} \to \frac{G_{2k+1}}{\hat{G}}$.

Definimos $H: G_{2k+1} \longrightarrow G$ por $[x,y]_{2k+1} \longmapsto [x,y]_G$.

•) H bien definida:

$[x,y]_{2k+1} = [x',y']_{2k+1} \overset{R_G}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x'-x \in (2k+1)2\mathbb{Z} \\ y'=y \end{cases}$ o $\begin{cases} x'-x \in (2k+1)(2\mathbb{Z}+1) \\ y'=-y \end{cases} \overset{2k+1 \text{ impar}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x'-x \in 2\mathbb{Z} \\ y'=y \end{cases}$ o $\begin{cases} x'-x \in 2\mathbb{Z}+1 \\ y'=-y \end{cases}$

$\Leftrightarrow [x,y]_G = [x',y']_G$.

•) H es continua, sobre y abierta por lo de siempre $\Longrightarrow$ H es una identificación.

•) $R_H = R_{\hat{G}}$.

$[x,y] R_H [x',y'] \Leftrightarrow H[x,y]_{2k+1} = H[x',y']_{2k+1} \Leftrightarrow [x,y]_G = [x',y']_G \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x \in 2\mathbb{Z} \\ y'=y \end{cases}$ o $\begin{cases} x'-x \in 2\mathbb{Z}+1 \\ y'=-y \end{cases} \Leftrightarrow [x,y] R_{\hat{G}} [x',y']$

Finalmente veamos que (G_{2k+1}, H) recubre con $2k+1$ hojas a G.

$H[x',y']_{2k+1} = [x,y]_G \Leftrightarrow [x',y']_G = [x,y]_G \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+n \\ y'=(-1)^n y. \end{cases}$

Se trata de ver por tanto, cuantos $m,n \in \mathbb{N}$ verifican la igualdad $[x+n,(-1)^n y]_{2k+1} = [x+m,(-1)^m y]_{2k+1}$.

$[x+n,(-1)^n y]_{2k+1} = [x+m,(-1)^m y]_{2k+1} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n \in (2k+1)2\mathbb{Z} \\ (-1)^n y = (-1)^m y \\ \Downarrow \\ y=y \text{ (} n \text{ y } m \text{ misma paridad)} \end{cases}$ o $\begin{cases} m-n \in (2k+1)(2\mathbb{Z}+1) \\ (-1)^n y = -(-1)^m y \\ \Downarrow \\ y=y \text{ (} n \text{ y } m \text{ distinta paridad)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow m-n \in (2k+1)\mathbb{Z} \Leftrightarrow m \equiv n \pmod{2k+1}$

Por tanto, H tiene $2k+1$ preimágenes distintas, $[x+n,(-1)^n y]$, $n=0,\dots,2k$.

En consecuencia, G_{2k+1} recubre con $2k+1$ hojas a G.

4-

(1)- Sabemos de la teoría que el grupo fundamental de un grupo topológico es siempre abeliano. Como el grupo fundamental de la botella de Klein no lo es, no puede admitir estructura de grupo topológico. En cambio, en el toro, $S^1 \times S^1$ sí podemos definir un producto y un inverso continuos de forma natural a partir del producto e inverso de S^1 (el heredado del producto e inverso de $\mathbb{C}$). Las aplicaciones quedan así:

$$\cdot : T \times T \longrightarrow T \qquad ((e^{it}, e^{is}), (e^{it'}, e^{is'})) \longmapsto (e^{i(t+t')}, e^{i(s+s')})$$

$$(\cdot)^{-1} : T \longrightarrow T \qquad (e^{it}, e^{is}) \longmapsto (e^{i(-t)}, e^{i(-s)}).$$

(2) S^1 no puede recubrir a ∞. En el punto donde se unen las dos circunferencias, cualquier entorno está formado por dos arcos secantes y distintos. Sin embargo, cualquier entorno de S^1 en cualquier punto lo compone un único arco, luego no puede aplicarse homeomórficamente sobre el otro entorno por la aplicación recubridora.

(3) Sean $x_1, x_2 \in X$, $f:[0,1] \to X$ arco que une x_1 y x_2 y $\tilde{f}$ el arco inverso.
Fijado $y \in p^{-1}(x_1)$, $\exists^1\, g_y$ levantamiento de f con $g_y(0) = y$, y $g_y(1) \in p^{-1}(x_2)$
Fijado $z \in p^{-1}(x_2)$, $\exists^1\, h_z$ levantamiento de $\tilde{f}$ con $h_z(0) = z$, y $h_z(1) \in p^{-1}(x_1)$
La unicidad nos dice que $\tilde{g}_y$ es el único levantamiento de algún $z \in p^{-1}(x_2)$ y análogamente para $\tilde{h}_z$.
Por tanto, dos levantamientos sobre puntos distintos no pueden tener mismo punto final.
En consecuencia, tenemos las inyecciones:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(x_1) & \text{———} & p^{-1}(x_2) \\ y & \longmapsto & g_y(1) \\ h_z(1) & \longleftarrow & z \end{array}$$

Por tanto, $\mathrm{card}(p^{-1}(x_1)) = \mathrm{card}(p^{-1}(x_2))$.

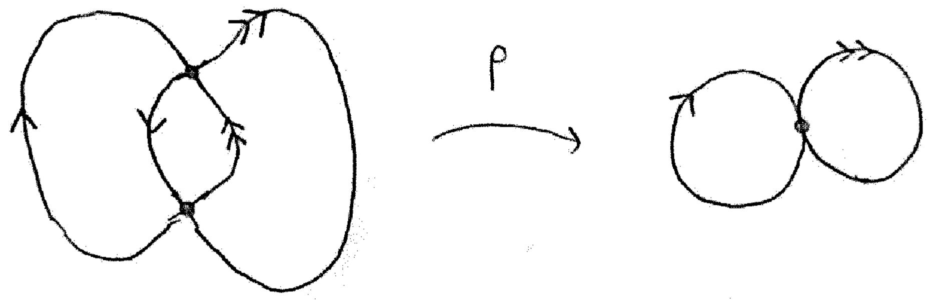
(4) $X = \overline{D}(0,2) - D(0,1)$ es homotópico a S^1, luego $\Pi(X, -) = \mathbb{Z}$, luego las clases de conjugación son sus subgrupos, $\{m\mathbb{Z} : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, y tendrá tantos recubridores como subgrupos.
Podemos ver $X \cong S^1 \times [1,2]$
$e^{it} r \longleftrightarrow (e^{it}, r)$. Como conocemos los recubridores de S^1 y de $[1,2]$ (simplemente conexo), podemos clasificar los recubridores de X a partir de los de S^1 y $[1,2]$:

•) $m = 0$, $p_0 : \mathbb{R} \times [1,2] \longrightarrow X$
$(t, a) \longmapsto a e^{it}$

•) $m > 0$, $p_m : S^1 \times [1,2] \longrightarrow X$
$(z, a) \longmapsto a z^m$.

(5) $X = \infty$ posee recubridor universal por ser semilocalmente simplemente conexo. De hecho, es localmente simplemente conexo puesto que para cualquier punto podemos tomar un entorno en el que cualquier lazo puede contraerse al constante (basta tomar cualquier entorno que no contenga a una circunferencia).

Un recubridor de dos hojas de X es el siguiente:



(Idea: partir de $\begin{matrix}\times\\ \times\end{matrix} \xrightarrow{p} \times$. Completar cada circunferencia con dos arcos entre cada punto).