Cálculo I

5 de diciembre de 2011

1. Desarrollar uno de los temas siguientes:

   a) Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

   b) Sucesiones de Cauchy, complitud de $\mathbb{R}$

2. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, explicando las respuestas

   a) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es numerable o denso en $\mathbb{R}$

   ¿2 *b)* Si A es un conjunto de números reales no vacío y mayorado, existe una sucesión creciente de elementos de A que converge a $\sup A$

   c) Toda sucesión divergente, o bien diverge negativamente, o bien admite una sucesión parcial que diverge positivamente

3. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos. Supongamos que A está mayorado y que $\inf B > 0$. Se considera el conjunto

$$C = \left\{ \frac{a}{b} \; : \; a \in A, \; b \in B \right\}$$

Probar que C está mayorado y calcular su supremo.

4. Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1 + 2x_n}{2 + x_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudiar la convergencia de las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{\sqrt[n]{n - x_n}\}$

b) mayorado sup

$x-1$