Prueba de clase 19 de Mayo de 2015

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**______________

De las cuatro primeras preguntas hay que elegir 3. La quinta es obligatoria.

1. Sea $\alpha = \forall x(P(x,a) \to \exists y Q(f(y),x)) \vee \exists x \neg Q(x,x)$.

   a) Consideramos las siguientes estructuras:

   - Estructura 1:
     - Dominio: $\mathbb{Z}_4$.
     - Asignación de constantes: $a = 0$.
     - Asignación de funciones: $f(x) = 2x$.
     - Asignación de predicados: $P(x,y) \equiv x^2 = y$; $Q(x,y) \equiv x = y$.
   - Estructura 2:
     - Dominio: $\mathbb{N}$.
     - Asignación de constantes: $a = 2$.
     - Asignación de funciones: $f(x) = x^2$.
     - Asignación de predicados: $P(x,y) \equiv y|x$ (es decir, x es múltiplo de y); $Q(x,y) \equiv 2y = x^2$.

   Calcula el valor de verdad de α en ambas estructuras.

   b) Estudia el carácter de α (universalmente válida, satisfacible y refutable, contradicción).

2. Consideramos el siguiente lenguaje de primer orden:

   - Símbolos de constante: $\mathcal{C} = \{a,\ b\}$.
   - Símbolos de función: $\mathcal{F} = \{s^1,\ m^2\}$.
   - Símbolos de predicado: $\mathcal{R} = \{P^1,\ Pr^1,\ M^2,\ E^2\}$.

   Y consideramos la siguiente estructura:

   - Dominio: $\mathbb{N}$.
   - Asignación de constantes: $a = 0$; $b = 2$.
   - Asignación de funciones: $s(x) = x + 1$; $m(x,y) = x + y$.
   - Asignación de predicados: $P(x) \equiv x$ es par; $Pr(x) \equiv x$ es primo; $M(x,y) \equiv x < y$; $E(x,y) \equiv x = y$.

   Expresa en este lenguaje los siguientes enunciados:

   a) Todo número es menor que su doble.

   b) El único primo y par es el dos.

3. Calcula una forma prenexa con el menor número de cuantificadores posible, una forma de Skolem y una forma clausular para la fórmula

$$\forall x[\exists y(P(y) \wedge Q(x,y))] \vee \forall y[\forall z Q(y,f(z)) \to P(y)]$$

4. Estudia si los siguientes conjuntos de cláusulas son satisfacibles o insatisfacibles:

   a)
$$\{Q(g(x),x,a) \vee Q(g(y),x,b),\ \neg Q(g(x),a,x)\}$$

   b)
$$\{Q(x,f(b),g(x)),\ \neg Q(y,f(y),g(a))\}$$

5. Utiliza el método de resolución para probar si la siguiente consecuencia lógica ocurre.

$$\{\forall x \forall y[R(x) \wedge Q(y) \to \neg S(x,y)],\ \forall y[D(y) \vee S(a,y)],\ \forall x[D(f(x)) \to S(a,y)]\} \vDash R(a) \to \exists x \neg Q(f(x))$$