Convocatoria Febrero 2009

Ejercicio 1. Sea el conjunto $X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Sobre $X \times X$ definimos la relación $(x, y) \; R \; (x', y') \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$. La afirmación correcta es

a) R no es antisimétrica y por lo tanto no es de equivalencia.

b) R es relación de equivalencia y $X \times X/R$ tiene 15 elementos.

c) R es relación de equivalencia y $[(1, 1)]$ tiene 4 elementos.

d) el elemento $(-5, 0)$ pertenece a dos clases de equivalencia distintas, la del $(0, 5)$ y la del $(3, 4)$.

Solución:

El que la relación no sea antisimétrica no significa que no sea de equivalencia. Por tanto, la opción a), la descartamos.

Por tanto, R es de equivalencia. La opción d) tampoco puede ser la correcta, pues en una relación de equivalencia todo elemento está en una sola clase de equivalencia (las clases de equivalencia determinan una partición de $X \times X$. De hecho, las clases del $(0, 5)$ y del $(3, 4)$ son la misma, y el elemento $(-5, 0)$ es un elemento de esta clase.

Los elementos de la clase del $(1, 1)$ son aquellas parejas (x, y) para las que $x^2 + y^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Como x e y son enteros, las únicas posibilidades son $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, lo que nos da cuatro elementos: $(1, 1)$; $(1, -1)$; $(-1, 1)$; $(-1, -1)$.

La opción correcta es entonces la c)

En cuanto a la opción b), decir que el conjunto cociente tiene 20 elementos.

Ejercicio 2. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A = \{1, 2, 3\}$. Entonces el cardinal de $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(\overline{A})$ es

a) 2^4

b) $2^6 - 1$

c) $2^4 - 1$

d) $2^3 \cdot 2^3$

Solución:

El cardinal de $\mathcal{P}(A)$ es $2^3 = 8$ (pues A tiene tres elementos). De la misma forma, el cardinal de $\mathcal{P}(\overline{A})$ es también 8.

Si contamos los elementos de $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(\overline{A})$ nos salen 16, pero en ambos casos hemos contado el conjunto vacío. Por tanto, hemos de quitarlo y nos quedan $15 = 2^4 - 1$, es decir, la opción c).

Podemos verlo más claro si enumeramos los elementos tanto de $\mathcal{P}(A)$ como los de $\mathcal{P}(\overline{A})$:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$\mathcal{P}(\overline{A}) = \{\emptyset, \{0\}, \{4\}, \{5\}, \{0, 4\}, \{0, 5\}, \{4, 5\}, \{0, 4, 5\}\}$$

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ la aplicación dada por $f(z, n) = \frac{z}{n}$. Entonces

a) f es una aplicación biyectiva.

b) f no es una aplicación inyectiva.

c) f no es una aplicación sobreyectiva.

d) f no es una aplicación.

Solución:

f es una aplicación, pues si z es un número entero, y n es un número natural distinto de cero entonces $\frac{z}{n}$ es un número racional.

f no es inyectiva, pues hay parejas diferentes cuya imagen es la misma. Por ejemplo, $(1, 2)$ y $(2, 4)$. Es claro que $f(1, 2) = f(2, 4)$.

Esto nos dice que la opción correcta es la b).

Que f es sobreyectiva es claro, pues cada número racional podemos ponerlo con el denominador positivo, en cuyo caso el numerador es entero y el denominador un número natural distinto de cero.

Ejercicio 4. Sean los conjuntos $X_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $X_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y $f : X_1 \to X_2$ la aplicación dada por $f(x) = x^2 + x + 1$ mod(6). Sean $A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \subseteq X_1$ y $B = \{1, 5\} \subseteq X_2$. Entonces

a) $f^*(f_*(A) \cap \overline{B}) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

b) $B \subseteq f_*(f^*(B))$.

c) $f^*(f_*(A) \cup B) = X_1$.

d) $f^*(f_*(A)) = A$.

Solución:
Escribamos en primer lugar la imagen de cada uno de los elementos de X_1:

$$\begin{array}{ll} 0 \mapsto 1 & 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 & \\ 3 \mapsto 1 & 4 \mapsto 3 \\ 5 \mapsto 1 & \\ 6 \mapsto 1 & 7 \mapsto 3 \\ 8 \mapsto 1 & \\ 9 \mapsto 1 & 10 \mapsto 3 \end{array}$$

Puesto que aparece en varias de las opciones, calculemos $f_*(A)$. Para esto, hay que calcular las imágenes de los elementos de A. Como $f(2) = f(6) = f(8) = 1$ y $f(4) = f(10) = 3$ tenemos que $f_*(A) = \{1, 3\}$.

- $f_*(A) \cap \overline{B} = \{1, 3\} \cap \{0, 2, 3, 4\} = \{3\}$, luego $f^*(f_*(A) \cap \overline{B}) = f^*(\{3\}) = \{1, 4, 7, 10\}$ (los elementos cuya imagen pertenece al conjunto $\{3\}$). Por tanto, la opción a) descartada.

- $f^*(B) = f^*(\{1, 5\} = \{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$ y al hacer la imagen de todos estos elementos nos sale 1. Por tanto, $f_*(f^*(B)) = \{1\}$, y claramente, B no está contenido en ese conjunto. Descartamos también la opción b).

- $f^*(f_*(A)) = f^*(\{1, 3\}) = X_1$, que es distinto de A. Por tanto, la opción d) tampoco es la correcta.

- $f_*(A) \cup B = \{1, 3\} \cup \{1, 5\} = \{1, 3, 5\}$ y $f^*(f_*(A) \cup B) = f^*(\{1, 3, 5\}) = X_1$, lo que nos dice que la opción correcta es la c), como ya sabíamos.

Ejercicio 5. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$. Entonces $(A \cdot B)^{-1}$ es

a) no existe

b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:
Multiplicamos A por B.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 6 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 6 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 23 \\ 20 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Y esta matriz no tiene inversa (su determinante es $5 - 12 = -7 = 0$). Por tanto, la respuesta es la a).

Directamente podría haberse deducido de que la matriz B no tiene inversa, lo que implica que $A \cdot B$ tampoco la tiene.

Ejercicio 6. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + 2z & = & 6 \\ 4x + 5y + az & = & 1 \end{array} \right.$$

la respuesta correcta es

a) el sistema es compatible indeterminado y tiene exactamente 7 soluciones.

b) es siempre compatible, pero depende de a que sea compatible determinado o compatible indeterminado.

c) dependiendo del valor de a puede ser compatible o incompatible.

d) es compatible indeterminado, y el número de soluciones depende del valor de a.

Solución:
Escribimos la matriz de coeficientes del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 4 & 5 & a \end{pmatrix}$$

y calculamos su rango.
Tomamos las dos primeras columnas y hallamos su determinante, y tenemos:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 4a = 5 + 3a$$

que si $a \neq 3$ es distinto de cero, mientras que para $a = 3$ vale cero.

Por tanto, si $a \neq 3$, la matriz de coeficientes del sistema tiene rango 2, mientras que si $a = 3$, la matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es también 2.

Es decir, el rango de la matriz de coeficientes es 2 independietemente del valor de a. El de la matriz ampliada es también 2. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado, sea cual sea el valor de a.

Esto descarta las opciones b) y c).

Al ser el rango de la matriz de coeficientes igual a 2, significa que al resolver el sistema vamos a tener dos incógnitas principales y una incógnita libre (que podrá ser z si $a \neq 3$ e y si $a = 3$). Por tanto, la solución vendrá dada en función de un parámetro, que tomará sus valores en $\mathbb{Z}_7$. Como podemos hacer 7 elecciones distintas para ese parámetro, el sistema tiene 7 soluciones. La opción correcta es entonces la a).

Ejercicio 7. Señala la afirmación verdadera. La matriz en $\mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) no tiene inversa para ningún valor de a.

b) tiene inversa para todo valor de a.

c) sólo tiene inversa para $a = 1$.

d) tiene inversa sólo cuando $a \neq 0$.

Solución:
Calculamos el determinante de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a$$

donde en la primera igualdad, a la cuarta columna se le ha sumado la segunda; en la segunda igualdad se ha desarrollado por la fila segunda; en la tercera igualdad, a la primera columna se le ha restado la tercera; en la cuarta igualdad se ha desarrollado por la tercera fila; y en la quinta se ha calculado el determinante de la matriz 2×2 que quedaba.

A partir del valor del determiante es claro que la respuesta es la d).

Ejercicio 8. En el espacio vectorial $\mathbb{Z}_3^4$ se considera la base

$$B = \{(1,0,0,0),(1,2,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,2)\}$$

las coordenadas del vector $(1,2,1,2)$ respecto de esta base B son:

a) $(0,1,2,1)$

b) $(1,2,0,1)$

c) $(1,2,1,2)$

d) $(1,2,1,0)$

Solución:
Vamos a calcular las coordenadas del vector en la base, es decir, vamos a buscar números $a,b,c,d \in \mathbb{Z}_3$ tales que

$$(1,2,1,2) = a\cdot(1,0,0,0) + b\cdot(1,2,0,0) + c\cdot(1,1,1,0) + d\cdot(1,1,1,2)$$

es decir, tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1 & = & a & + & b & + & c & + & d \\ 2 & = & & & 2b & + & c & + & d \\ 1 & = & & & & & c & + & d \\ 2 & = & & & & & & & 2d \end{array}$$

De la última ecuación sacamos que $d = 1$ (lo que nos descarta las opciones c) y d)). Sustituyendo en la tercera, obtenemos $c = 0$. Por tanto, la opción correcta es la b). Podríamos seguir calculando las coordenadas. De la segunda ecuación:

$$2 = 2b + 0 + 1 \Longrightarrow 2b = 1 \Longrightarrow b = 2$$

y sustituyendo en la primera: $1 = a + 2 + 0 + 1 = a$.

Ejercicio 9. Sean los subespacios vectoriales $V_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{rcl} 4x+3y-2z & = & 0 \\ 2x-2y+4z & = & 0 \end{array}\right\}$ y V_2 el subespacio generado por $\langle(1,2,-1),(-5,8,8),(-3,12,6)\rangle$. Una base de V_1+V_2 es

a) $\{(1,2,-1),(-4,10,7)\}$

b) $\{(-5,8,8),(1,1,1),(0,0,0)\}$

c) $\{(4,3,2)\}$

d) $\{(2,-2,4),(1,2,-1)\}$

Solución:

En primer lugar, descartamos la opción b), pues el vector $(0,0,0)$ no puede formar parte de ninguna base.

La opción c) también podemos descartarla, ya que la dimensión de V_2 es mayor o igual que 2 (los vectores $(1,2,-1)$ y $(-5,8,8)$ son linealmente independientes), y por tanto la dimensión de la suma es también mayor o igual que 2.

Nos quedan entonces las opciones a) y d). Por tanto, la dimensión de V_1+V_2 es 2.

Vamos a calcular una base de V_1, que tendrá un vector (pues es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por dos ecuaciones). Para ello, resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones cartesianas:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\sim_f}{F_1\leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim_f}{F_1\leftarrow \frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim_f}{F_2\leftarrow F_2-4F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -10 \end{pmatrix} \sim_f$$
$$\underset{\sim_f}{F_1\leftarrow 7F_1} \begin{pmatrix} 7 & -7 & 14 \\ 0 & 7 & -10 \end{pmatrix} \underset{\sim_f}{F_1\leftarrow F_1+F_2} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -10 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-10}{7} \end{pmatrix}$$

lo que nos da las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x & & + \frac{4z}{7} & = & 0 \\ & y & - \frac{10z}{7} & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rcl} x & = & \frac{-4z}{7} \\ y & = & \frac{10z}{7} \end{array}\right\}$$

dándole a z el valor 7 obtenemos el vector $(-4,10,7)$, que forma una base de V_1.

Ahora ya podemos ver que la opción correcta es la a), pues los vectores $(1,2,-1)$ y $(-4,10,7)$ son linealmente independientes, y pertenecen ambos a V_1+V_2 (el primero porque sabemos que pertenece a V_2 y el segundo sabemos que pertenece a V_1).

Dos vectores linealmente independientes, en un espacio vectorial de dimensión 2 forman una base.

Ejercicio 10. En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio generado por

$$\{(1,2,0,0),(1,1,1,0)\}$$

¿cuál de estos sistemas de ecuaciones corresponde a unas ecuaciones cartesianas de este subespacio?

a) $\left\{\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ x-z=0 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{r} 2x-y-z=0 \\ t=0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ t=0 \end{array}\right.$

d) $\left\{\ 2x-y=0\right.$

Solución:

Las opciones a), c) y d) no pueden ser, ya que el vector $(1,1,1,0)$ no satisface la ecuación $2x-y=0$. Sólo nos queda la opción b).

Ejercicio 11. En $\mathbb{R}^4$ un complementario del subespacio generado por:

$$\{(1,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,1,-1)\}$$

tiene base:

a) $\{(1,1,1,-1)\}$

b) $\{(0,0,0,1),(0,1,0,0)\}$

c) $\{(1,0,-1,0),(1,-1,0,1)\}$

d) $\{(1,0,1,0)\}$

Solución:

En primer lugar calculamos la dimensión del subespacio generado por esos tres vectores. Para ello, calculamos el rango de la matriz cuyas columnas son dichos vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

luego la matriz tiene rango 2, y una base del subespacio es $\{(1,0,1,-1),(0,1,0,1)\}$.

Por tanto, la dimensión del complementario es $4-2=2$, lo que nos descarta las opciones a) y d).

Para ver cuál de las otras dos es la correcta, hay que ver en cual de ellas, los vectores $\{(,0,1,-1),(0,1,0,1)\}$ junto con los dos que nos dan forman una base de $\mathbb{R}^4$. Puede verse en este caso que la opción b) no puede ser, pues los vectores

$$\{(1,0,1,-1),(0,1,0,1),(0,0,0,1),(0,1,0,0)\}$$

son linealmente dependientes (el segundo es la suma del tercero y el cuarto). Por tanto, nos queda la opción c).

Ejercicio 12. Sea $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ la aplicación dada por $f(x, y, z) = (3x + 2y + 4z, x + 4y + 3z)$. Una base del núcleo de f es

a) $\{(1, 1, 0)\}$.

b) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 0)\}$.

c) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 2)\}$.

d) $\{(0, 1, 2)\}$.

Solución:

La segunda opción no puede ser la correcta, pues el vector $(0, 0, 0)$ no puede estar en ninguna base.

La matriz de f en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

que tiene rango 1 (la segunda fila es el doble de la primera). Por tanto, la dimensión de la imagen es 1, luego la dimensión del núcleo es 2 ($\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(N(f)) = \dim(\mathbb{Z}_5^3)$).

Sólo puede ser entonces la opción c).

Ejercicio 13. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ por $f(x, y, z, t) = (x + z + t, y + 2t, x + y + z + t)$ ¿qué afirmación es falsa?

a) Una base del núcleo es $\{(-1, 0, 1, 0)\}$.

b) La imagen tiene dimensión 3.

c) Es inyectiva pero no sobreyectiva.

d) Es sobreyectiva pero no inyectiva.

Solución:

Puesto que el espacio vectorial de partida ($\mathbb{R}^4$) tiene dimensión mayor que el espacio vectorial de llegada ($\mathbb{R}^3$), la aplicación no puede ser inyectiva. Por tanto, la afirmación falsa es la de la respuesta c), y esa es la opción correcta.

Ejercicio 14. Sea $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^4$ la aplicación dada por $f(x, y, z) = (x + 3y + 4z, x + 2z, 2y + 3z, x + y + z)$. Una base de la imagen de f es

a) $\{(1, 1, 1, 5), (1, 1, 4, 3)\}$

b) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

c) $\{(1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 4)\}$

d) $\{(4, 2, 3, 1)\}$

Solución:

La opción b) no puede ser la buena, ya que la imagen es un subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^4$, y los vectores que ahí nos dan están en $\mathbb{Z}_5^3$.

La matriz de la aplicación lineal es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es mayor que 1, lo que nos elimina la opción d).

Ya sabemos por tanto que la dimensión de la imagen es 2. Vamos a calcular una base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

y aquí podemos deducir que la opción correcta es la c), ya que los vectores $(1, 1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1, 4)$ están en la imagen (son las columnas primera y segunda de la última matriz que nos ha salido) y son linealmente independientes.

Como la imagen tiene dimensión 2, esos dos vectores forman una base.

Ejercicio 15. Sea $U_1 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \\ 2x+3y+4z & = & 0 \end{array} \right.$ y $U_2 = \langle (2,3,2),(1,0,1) \rangle$ subespacios vectoriales de $\mathbb{Z}_5^3$.

a) Existe una única aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ tal que $N(f) = U_1$ e $Im(f) = U_2$.

b) No existe $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ tal que $N(f) = U_2$ e $Im(f) = U_1$ porque $U_1 \subseteq U_2$.

c) $\mathbb{Z}_5^3 = U_1 \oplus U_2$.

d) Existe al menos una aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ tales que $N(f) = U_2$ e $Im(f) = U_1$.

Solución:
Vamos a calcular una base de U_1, para lo cual resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que nos da ecuaciones

$$\left. \begin{array}{rcrcl} x & & + & 4z & = & 0 \\ & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right\} \qquad \left. \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 3z \end{array} \right\}$$

luego una base de U_1 es $\{(1,3,1)\}$.

Como $\dim(U_1) + \dim(U_2) = 3$, hay aplicaciones lineales $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ tales que $N(f) = U_1$ e $Im(f) = U_2$ o bien $N(f) = U_2$ e $Im(f) = U_1$.

Esto nos dice que la opción d) es correcta. Aunque no es necesario para resolver el ejercicio, vamos a ver cómo buscar aplicaciones con esas condiciones.

Para dar una aplicación lineal basta dar la imagen de los elementos de una base. Esto lo determina totalmente.

Tomamos una base de U_2 $\{(2,3,2),(1,0,1)\}$. Ampliamos esta base a una base de $\mathbb{Z}_5^3$.

$$\{(2,3,2),(1,0,1),(0,0,1)\}$$

Llamemos a estos vectores u_1, u_2, u_3. Entonces, basta con que definamos cuanto valen $f(u_1)$, $f(u_2)$ y $f(u_3)$ para dar una aplicación lineal.

Como queremos que u_1 y u_2 pertenezcan al núcleo de f, estamos obligados a definir $f(u_1) = (0,0,0)$ y $f(u_2) = (0,0,0)$.

Por otra parte, u_3 no debe pertenecer al núcleo, luego su imagen debe ser distinta de $(0,0,0)$. Como queremos que $(1,3,1)$ pertenezca a la imagen de f, entonces definimos $f(u_3)$ como $(1,3,1)$. De esta forma ya tenemos la aplicación lineal buscada $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$.

Como $\{(2,1,2)\}$ es también una base de U_1, podríamos haber definido $f(u_3)$ como $(2,1,2)$ y así vemos que hay más de una aplicación lineal con las condiciones buscadas.

Ejercicio 16. Sea la matriz $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7)$. Se verifica que

a) tiene valores propios $3, 1, 5$.

b) no es diagonalizable.

c) no tiene valores propios.

d) existe una matriz regular P tal que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Solución:
Vamos a calcular el polinomio característico de la matriz C.

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 5 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (4-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda)+0+0-\big(6\cdot(2-\lambda)+0+0\big) = \\ &= -\lambda^3+9\lambda^2-26\lambda+24-12+6\lambda \\ &= 6\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+5 \end{aligned}$$

Y ahora calculamos las raíces (por Ruffini)

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & & 6 & 1 & 2 \\ \hline & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & & 5 & 5 & \\ \hline & 6 & 6 & 0 & \\ 6 & & 1 & & \\ \hline & 6 & 0 & & \end{array}$$

Vemos que los valores propios son 1, 2 y 6. Al tener tres valores propios distintos, la matriz es diagonalizable. La respuesta es entonces la d) (corrigiendo el error que hay en el enunciado, pues donde dice $P^{-1} \cdot A \cdot P$ debería decir $P^{-1} \cdot C \cdot P$).

Ejercicio 17. Sean $V_1 \equiv \{x + y = 0\}$ y $V_2 = \langle(4, 2, 5)\rangle$ los subespacios propios de una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7)$ de valores propios 3 y 5 respectivamente. Entonces

a) A no es diagonalizable pues tenemos únicamente dos subespacios propios.

b) A no es diganoalizable pues la multiplicidad geométrica del valor propio 5 es menor que la multiplicidad geométrica del valor propio 3.

c) A puede ser la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

La dimensión de V_1 es 2, luego la multiplicidad geométrica del valor propio 3 vale 2. La dimensión de V_2 es 1, luego la multiplicidad geométrica del valor propio 5 es 1. Al ser la suma de las multiplicidades geométricas de los subespacios propios igual al tamaño de la matriz, la matriz es diagonalizable. Por tanto, descartamos las dos primeras opciones.

Tomamos la matriz de la opción c) y calculamos $N(A - 3Id)$, es decir, el subespacio dado por:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 6 & 0 \\ 3 & 6-3 & 0 \\ 4 & 4 & 3-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y nos queda una única ecuación: $x + y = 0$.

Por tanto el subespacio propio de valor propio 3 de la matriz A es V_1.

Multiplicamos ahora la matriz A por el vector $(4, 2, 5)$, y nos queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

lo que nos dice que $(4, 2, 5)$ es un vector propio de valor propio 5.

La opción correcta es por tanto la c).

Ejercicio 18. Dada la matriz en $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

señala la afirmación verdadera:

a) Tiene 3 valores propios son distintos, por tanto es diagonalizable.

b) Cuando $a = 2$ la matriz no es diagonalizable.

c) Cuando $a = 1$ la matriz no es diagonalizable.

d) Cuando $a = 0$ la matriz no es diagonalizable.

Solución:
En este caso, el polinomio característico es muy sencillo de calcular:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(a-\lambda)$$

Si $a = 1$ tenemos dos valores propios: $\lambda = 1$, con multiplicidad algebraica 2, y $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 1.

Si $a = 2$ tenemos entonces los valores propios $\lambda = 1$, con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 2.

Esto descarta la opción a).

Y si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ entonces tenemos tres valores propios distintos.

Por tanto, si $a = 0$ la matriz tiene tres valores propios distintos, y es diagonalizable. Descartamos la opción d).

Nos quedan entonces las b) y la c).

Vamos a analizar la b), que nos sitúa en el caso $a = 2$. Como ya hemos dicho antes tenemos un valor propio con multiplicidad algebraica 1 ($\lambda = 1$) y otro valor propio con multiplicidad algebraica 2 ($\lambda = 2$).

Puesto que la multiplicidad geométrica está comprendida entre 1 y la multiplicidad algebraica, la multiplicidad geométrica del valor propio 1 vale 1, mientras que la multiplicidad geométrica del valor propio 2 puede valer 1 ó 2.

Llamemos d_2 a esta multiplicidad geométrica. Entonces:

$$d_2 = \mathrm{Dim}(N(A-2Id)) = 3-rg(A-2Id) = 3-rg \begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} = 3-rg \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3-1 = 2$$

Por tanto, la suma de las multiplicidades geométricas vale 3 y la matriz es diagonalizable.

Esto nos descarta también la opción b).

Luego la opción correcta es la c).

Puede comprobarse fácilmente que en este caso, la multiplicidad geométrica del valor propio 1 vale 1.

Ejercicio 19. Dadas las permutaciones

$$\sigma = (2\ 5\ 3\ 6)(3\ 4\ 1) \text{ y } \tau = (7\ 2\ 1\ 4)(3\ 2\ 1\ 5)$$

la descomposición en ciclos disjuntos de $\sigma \circ \tau$ es

a) $(1\ 6\ 2\ 5\ 3\ 4)$

b) $(1\ 5\ 3)(2\ 4\ 7)$

c) $(1\ 3\ 6\ 2)(4\ 7\ 5)$

d) $(1\ 6\ 2\ 5)(3\ 4)$

Solución:

Tenemos que $\sigma \circ \tau = (2\ 5\ 3\ 6)(3\ 4\ 1)(7\ 2\ 1\ 4)(3\ 2\ 1\ 5)$. Es decir, tenemos $\sigma \circ \tau$ como producto de cuatro ciclos. Vamos a ir viendo las imágenes de cada uno de los elementos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ por la composición $\sigma \circ \tau$. Recordemos que para componer se va de izquierda a derecha:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 2 & \mapsto & 1 & \mapsto & 3 & \mapsto & 6 \\ 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 & \mapsto & 4 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 \end{array}$$

y aquí se cierra el ciclo, que es $(1\ 3\ 6\ 2)$. Esto nos deja sólo la posibilidad de la opción c) (podría haberse visto después de calcular la imagen del 1). Aún así, vamos a continuar calculando el resto de ciclos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 7 & \mapsto & 7 & \mapsto & 7 \\ 7 & \mapsto & 7 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 5 \\ 5 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 \end{array}$$

lo que nos da el otro ciclo $(4\ 7\ 5)$.

Por tanto, $\sigma \circ \tau = (1\ 3\ 6\ 2)(4\ 7\ 5)$.

Ejercicio 20. En S_9 sea σ la permutación $(1\ 2\ 4)(4\ 7\ 6\ 2)^{-1}(9\ 1\ 7\ 4)(3\ 5)$. Entonces σ^{273} es igual a

a) 1.

b) σ^3.

c) σ.

d) σ^2.

Solución:
Vamos a calcular el orden de σ. Para ello, descomponemos σ como producto de ciclos disjuntos. Puesto que $(4\,7\,6\,2)^{-1} = (2\,6\,7\,4)$ se tiene que

$$(1\ 2\ 4)(2\,6\,7\,4)(9\ 1\ 7\ 4)(3\,5)$$

y por tanto:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 7 & \mapsto & 4 & \mapsto & 1 \\
2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 \\
6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 7 & \mapsto & 7 \\
7 & \mapsto & 7 & \mapsto & 4 & \mapsto & 2 & \mapsto & 4 \\
4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 9 & \mapsto & 9 & \mapsto & 9 \\
9 & \mapsto & 9 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 2 \\
3 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 \\
5 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 \\
8 & \mapsto & 8 & \mapsto & 8 & \mapsto & 8 & \mapsto & 8
\end{array}$$

lo que nos da $\sigma = (2\,6\,7\,4\,9)(3\,5)$.
El orden de σ es $\mathrm{mcm}(5,2) = 10$. Por tanto, $\sigma^{10} = \mathrm{id}$, luego $\sigma^{270} = \mathrm{id}$, y $\sigma^{273} = \sigma^3$.