Soluciones de los ejercicios del examen de Cálculo del 4 de febrero de 2002

Problema 1. (a) Calcular los límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2}{1}+\dfrac{3^2}{2}+\dfrac{4^3}{3^2}+\cdots+\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}; \qquad \lim_{n\to\infty} (\cos(1/n))^{n^2}$$

(b) Estudiar para qué valores de $a>0$ es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n a^n}{n!}$

Solución

(a) Pongamos

$$x_n = \frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}, \quad y_n = n^2$$

Para calcular el límite $\lim \dfrac{x_n}{y_n}$ podemos aplicar el criterio de Stolz, pues la sucesión $\{y_n\}$ es estrictamente creciente y positivamente divergente. Tenemos que

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{\dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}}{2n+1} = \frac{(n+2)^n}{(n+1)^n}\frac{n+2}{2n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \frac{n+2}{2n+1}$$

y, por tanto, $\lim \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$. Y, en virtud del criterio de Stolz, deducimos que $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Comentario

Los fallos más frecuentes en este facilísimo límite son:

• Error al escribir x_{n+1}.

• Error al hacer la diferencia $x_{n+1}-x_n$.

• No reconocer que la sucesión $\dfrac{(n+2)^n}{(n+1)^n}$ converge a e. ¿Cuántas veces habrá aparecido esta sucesión en clase?

• Disparates insólitos como afirmar que $\dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}$ es un ¡cociente de polinomios!

• Aunque parezca increíble, usar la regla de L'Hôpital.

Pongamos $x_n = \cos(1/n)$, $y_n = n^2$, $z_n = (\cos(1/n))^{n^2} = x_n{}^{y_n}$. Como $x_n \to 1$ e $y_n \to +\infty$, podemos usar el criterio de equivalencia logarítmica y calcular el límite de la sucesión $y_n(x_n-1)$. Tenemos que

$$y_n(x_n-1) = n^2(\cos(1/n)-1) = \frac{\cos(1/n)-1}{1/n^2}$$

Naturalmente, esta sucesión conduce a la función $h(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$. Sabido es que $\lim_{x\to 0} h(x) = -\dfrac{1}{2}$, lo que implica, en virtud de la relación entre límite funcional y secuencial, que $h(1/n) \to -\dfrac{1}{2}$. Por el criterio de equivalencia logarítmica se sigue que $z_n \to \mathrm{e}^{-1/2}$.

Comentario

Los fallos más frecuentes en este facilísimo límite son:

• No relacionar la sucesión $n^2(\cos(1/n)-1)$ con la función $\dfrac{\cos x-1}{x^2}$. ¿Cuántas veces lo hemos hecho en clase?

• Error frecuente al afirmar que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$. ¡Una función negativa con límite positivo!

• Disparates insólitos como afirmar que ya que $\cos(1/n)\to 1$ entonces $(\cos(1/n))^{n^2}=1^{n^2}\to 1$.

(b) La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n^n a^n}{n!}$ es apropiada para el criterio del cociente pues su término general $x_n=\dfrac{n^n a^n}{n!}$ tiene factoriales y potencias. Además, como nos dicen que $a>0$, se trata de una serie de términos positivos. Como

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n}a=\frac{(n+1)^n}{n^n}a$$

se sigue que $\lim\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=a\mathrm{e}$. Luego, si $a\mathrm{e}<1$ la serie converge y si $a\mathrm{e}>1$ la serie diverge. En el caso $a\mathrm{e}=1$ el criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de la serie.

Comentario

Los fallos más frecuentes en esta facilísima serie son:

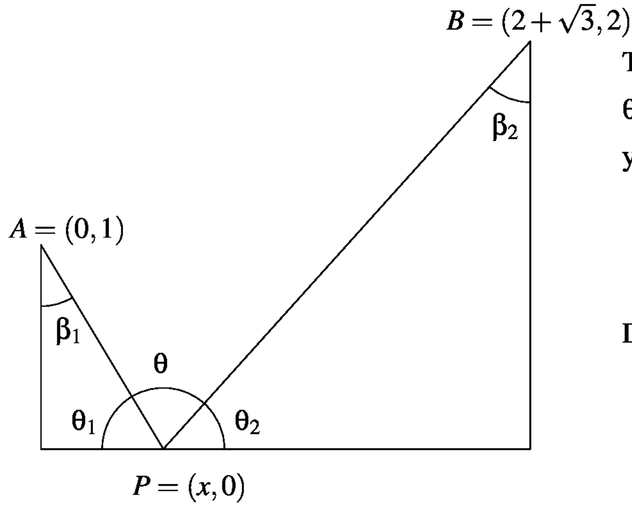
• Error al simplificar $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

• No reconocer que la sucesión $\dfrac{(n+1)^n}{n^n}=(1+1/n)^n$ converge a e. ¿Cuántas veces habrá aparecido esta sucesión en clase?

• Error grave al aplicar el criterio del cociente que consiste en afirmar que si $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$ la serie converge. Si eso fuera cierto la serie armónica $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ sería convergente.

• Disparates increíbles como aplicar en cadena el criterio del cociente y de la raíz: primero se calcula $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ y después $\sqrt[n]{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}}$. ¿Un nuevo criterio cociente-raíz?

Problema 2. Calcular la posición del punto P en la figura para que el ángulo θ sea máximo. ¿Cuál es dicho valor máximo de θ? Justifica con detalle lo que haces.



Tenemos que $\theta=\pi-\theta_1-\theta_2$, es decir $\theta=(\pi/2-\theta_1)+(\pi/2-\theta]_2)=\beta_1+\beta_2$ y deducimos fácilmente que

$$\theta(x)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\left(\frac{2+\sqrt{3}-x}{2}\right)$$

Derivando, tenemos

$$\theta'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1/2}{1+\left(\frac{2+\sqrt{3}-x}{2}\right)^2}$$

Simplificando resulta

$$\theta'(x)=\frac{9+4\sqrt{3}-(4+2\sqrt{3})x-x^2}{(1+x^2)(4+(2+\sqrt{3}-x)^2)}$$

Los ceros de la derivada son las raíces de $x^2+(4+2\sqrt{3})x-4\sqrt{3}-9=0$, que vienen dadas por

$$\alpha=\frac{-4-2\sqrt{3}+\sqrt{(4+2\sqrt{3})^2+4(4\sqrt{3}+9)}}{2},\quad \beta=\frac{-4-2\sqrt{3}-\sqrt{(4+2\sqrt{3})^2+4(4\sqrt{3}+9)}}{2}$$

Como $(4+2\sqrt{3})^2+4(4\sqrt{3}+9)=32(2+\sqrt{3})=16(4+2\sqrt{3})=16(\sqrt{3}+1)^2$. Naturalmente, como $0\leqslant x\leqslant 2+\sqrt{3}$, y $\beta<0$ se sigue que

$$\alpha=\frac{-4-2\sqrt{3}+\sqrt{16(\sqrt{3}+1)^2}}{2}=\sqrt{3}$$

es el único cero de la derivada en el intervalo $[0,2+\sqrt{3}]$.

Estudiemos ahora el signo de la derivada. Como el denominador de $\theta'(x)$ es positivo, el signo de $\theta'(x)$ es igual al de $9+4\sqrt{3}-(4+2\sqrt{3})x-x^2$. Pero $9+4\sqrt{3}-(4+2\sqrt{3})x-x^2=-(x-\alpha)(x-\beta)$ que es positivo cuando $\beta<x<\alpha$ y negativo si $x<\beta$ o $\alpha<x$. Deducimos que $\theta'(x)>0$ si $0\leqslant x<\sqrt{3}$ y $\theta'(x)<0$ si $\sqrt{3}<x\leqslant 2+\sqrt{3}$. Por tanto, la función θ es creciente en $[0,\sqrt{3}]$ y decreciente en $[\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$. Concluimos que en $\sqrt{3}$ la función θ alcanza un máximo absoluto en $[0,2+\sqrt{3}]$. El valor máximo es $\theta(\sqrt{3})=\operatorname{arctg}(\sqrt{3})+\operatorname{arctg}(1)=\pi/3+\pi/4=7\pi/12$

Comentarios

• Lo primero que sorprende es que casi nadie plantee bien el ejercicio. En la relación de ejercicios de derivadas tenéis más de veinte ejercicios resueltos del mismo tipo que este. ¿Dónde está la dificultad para expresar θ como función de x?

• ¿La longitud de una circunferencia de radio R es $360R$? ¿Verdad que no? Hasta el más despistado se da cuenta de que $360R$ es mucho más grande que la longitud de dicha circunferencia. No, la longitud correcta es $2\pi R$. Pero, ¿sabes por qué? Pues porque estás usando como unidad de medida el radio de la circunferencia: la longitud de una circunferencia es igual a 2π veces la longitud de su radio y el área de un círculo es π veces el cuadrado de su radio. Ahora viene la pregunta del millón: ¿Cómo se miden los ángulos cuando la unidad de medida es el radio? Pues se miden en radianes. Eso lo saben los niños en la escuela. Bien, ya puedes suponer que si las fórmulas $2\pi R$ y πR^2 que dan la longitud y el área de un círculo sólo son válidas cuando medimos ángulos en radianes, tendrás que tener razones muy fuertes para medir ángulos en grados y no en radianes. Todas las funciones trigonométricas suponen la medida de ángulos en radianes. Repasa la definición de las función seno y coseno y lo que allí está escrito sobre este asunto (primer capítulo del temario de este curso).

Bien, te digo todo lo anterior porque no es conveniente usar grados para medir ángulos y al mismo tiempo usar las funciones trigonométricas que suponen medida en radianes. Eso es lo que hacéis cuando afirmáis que $\theta = 180 - \theta_1 - \theta_2$ ¿Qué pinta ahí ese 180? ¿Acaso vais a usar grados? Pues entonces tenéis que cambiar la función $\operatorname{sen} x$ por $\operatorname{sen}(2\pi x/360)$ y lo mismo con las demás funciones trigonométricas. Y, por favor, no me digáis que $\operatorname{arc tg} 1 = 45$. Recuerda que $-\pi/2 < \operatorname{arc tg} x < \pi/2$ y $\pi/2 < 45$. ¿Tendré que volver a repetirlo? Lo repito: **En Cálculo sólo usamos radianes para medir ángulos**.

• Muchos no han aprendido a derivar. No sé si todavía están a tiempo de aprender.

• Con una sola excepción, ninguno ha simplificado bien la derivada. ¿Tan difícil es? Nadie ha calculado los ceros de la derivada. Por supuesto, para facilitar su cálculo se indicó en el examen y se dejó escrito en la pizarra que $(4+2\sqrt{3})^2 + 4(4\sqrt{3}+9) = 16(\sqrt{3}+1)^2$.

• Nadie ha hecho bien este ejercicio.

Problema 3. Calcular la derivada en el punto $x = 0$ de la función $f :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x}, \quad f(0) = \mathrm{e}$$

Justifica con detalle lo que haces.

Solución

Definamos $\varphi(x) = \log f(x) = \dfrac{\log(1+\operatorname{sen} x)}{x}$; $\varphi(0) = 1$. Tenemos, evidentemente, que $f(x) = \exp(\varphi(x))$. En virtud de la regla de la cadena, como la función exponencial es derivable en todo $\mathbb{R}$, en todo punto a donde φ sea derivable se verificará que también es derivable f siendo $f'(a) = \exp'(\varphi(a))\varphi'(a) = f(a)\varphi'(a)$. Estudiaremos, por tanto, la derivabilidad de φ en $a = 0$. Tenemos que

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{\log(1+\operatorname{sen} x) - x}{x^2}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital, tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\operatorname{sen} x}{(1+\operatorname{sen} x)2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\operatorname{sen} x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

Por tanto $\varphi'(0)=-1/2$, y $f'(0)=-\mathrm{e}/2$.

Comentarios

En clase hemos hecho varios ejercicios casi iguales a este. En los ejercicios resueltos de derivadas tenéis también ejercicios muy parecidos. A pesar de eso, pocos habéis hecho bien este ejercicio. Los errores más corrientes son los siguientes.

• Tratar de calcular directamente el límite de $f'(x)$. Eso es mucho más de lo que pide el ejercicio (¿por qué?) y los cálculos son más difíciles. Quien haya intentado hacerlo así es casi seguro que se habrá equivocado o al calcular la derivada de f o al tratar de calcular el límite $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Además, supuesto que ese límite exista, hay que justificar por qué eso implica que f es derivable en 0.

• No simplificar al calcular el límite. En especial, no simplificar después de aplicar la regla de L'Hôpital.

• Aplicar equivalencias asintóticas en una suma.

Problema 4. Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y=\frac{2}{\sqrt{x}\,(x^2-2x+2)}\qquad (1\leqslant x<+\infty)$$

Solución

Se trata de calcular la integral $\pi\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{4}{x(x^2-2x+2)^2}dx$. Es claro que $x^2-2x+2=1+(x-1)^2$ no tiene raíces reales. El denominador tiene raíces imaginarias múltiples y podemos usar el método de Hermite. Para ello escribimos:

$$\frac{4}{x(x^2-2x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{Mx+N}{x^2-2x+2}\right)=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}+\frac{2M+2N-2Nx-Mx^2}{(x^2-2x+2)^2}=$$

$$=\frac{4A+(-8A+2C+2M+2N)x+(8A+2B-2C-2N)x^2+(-4A-2B+C-M)x^3+(A+B)x^4}{x(x^2-2x+2)^2}$$

Se deduce fácilmente que $A=1$, $B=-1$, $C+M+N=4$, $C+N=3$, $C-M=2$, de donde, $M=1$, $C=3$, $N=0$. Por tanto

$$\int_1^t\frac{4}{x(x^2-2x+2)^2}dx=\log t+\int_1^t\frac{-x+3}{x^2-2x+2}dx+\left.\frac{x}{x^2-2x+2}\right|_1^t=$$

$$=\log t+2\operatorname{arctg}(x-1)\Big|_1^t-\frac{1}{2}\log(x^2-2x+2)\Big|_1^t+\frac{t}{t^2-2t+2}-1=$$

$$=\log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}\right)+2\operatorname{arctg}(t-1)+\frac{t}{t^2-2t+2}-1$$

Deducimos que

$$\pi \int_1^{+\infty} \frac{4}{x(x^2-2x+2)^2}\,dx = \pi \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{4}{x(x^2-2x+2)^2}\,dx = \pi(\pi-1)$$

Problema 5. Dar, según proceda, una breve justificación o un contraejemplo de los siguientes enunciados:

(a) Toda función continua en un intervalo está acotada superiormente.

(b) En todo punto donde una función derivable alcanza un mínimo relativo la derivada es nula.

(c) Una función cuya imagen es un intervalo es continua.

(d) Entre dos ceros consecutivos de la derivada de una función tiene que haber al menos un cero de la función.

Solución

(a) Evidentemente falso. Basta considerar $f:]0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=1/x$.

(b) Cierto. Por hipótesis hay un intervalo $]a-\rho,a+\rho[$ tal que para todo $x\in]a-\rho,a+\rho[$ se verifica que $f(a)\leqslant f(x)$. Como f es derivable, deducimos que

$$f'(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0$$

y

$$f'(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$$

luego $f'(a)=0$.

(c) Evidentemente falso. Ejemplo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(0)=1, f(1)=0$, $f(x)=x$ para todo $x\neq 0,1$.

(d) Evidentemente falso. Basta considerar $f(x)=\operatorname{sen} x+2$. Tenemos que $f(x)>0$ para todo x pero $f'(x)=\cos x$ que se anula en $k\pi+\pi/2$ para todo $k\in\mathbb{Z}$.