

Cálculo
1ºA Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial (Tipo I)
Curso 2014/2015

1. (3 puntos) Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log(1+x)}{x} \right)^{1/x}.$

b) Calcula el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \sin(x)$ en el punto $a = 0$ y de orden 3.

Solución:

a) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Parta resolver dicha indeterminación aplicamos la regla de L’Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1,$$

con lo que el límite pedido presenta una indeterminación del tipo “1[∞]”.

Aplicamos ahora la regla del número e . Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log(1+x)}{x} \right)^{1/x} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\log(1+x)}{x} - 1 \right) = L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\log(1+x)}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$$

aplicamos la regla de L’Hôpital, ya que que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Nos queda entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - x}{2x(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log(1+x)}{x} \right)^{1/x} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

- b) Para calcular el polinomio de Taylor de orden 3 de la función seno en $a = 0$ tenemos que calcular las derivadas sucesivas en el cero hasta la de orden 3. Es decir,

$$f(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\text{sen}(x) \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f'''(0) = -1$$

Entonces, el polinomio de Taylor pedido es:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}$$

2. (2.5 puntos) Se considera la función $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \arctan\left(\frac{1+\text{sen}(x)}{1-\text{sen}(x)}\right)$.

- a) ¿Existe algún $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?
 b) ¿Es estrictamente monótona la función f ?

Solución:

- a) Se trata de una función derivable en todo el dominio. Para que la recta tangente a la gráfica de f en un punto sea horizontal, la derivada en dicho punto tendrá que ser cero. Por tanto, calculamos la derivada de f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1+\text{sen}(x)}{1-\text{sen}(x)}\right)^2} \frac{\cos(x)(1-\text{sen}(x)) + \cos(x)(1+\text{sen}(x))}{(1-\text{sen}(x))^2} \\ &= \frac{2\cos(x)}{\left[1 + \left(\frac{1+\text{sen}(x)}{1-\text{sen}(x)}\right)^2\right] (1-\text{sen}(x))^2} = \frac{2\cos(x)}{\left[\frac{(1-\text{sen}(x))^2 + (1+\text{sen}(x))^2}{(1-\text{sen}(x))^2}\right] (1-\text{sen}(x))^2} \\ &= \frac{2\cos(x)}{(1-\text{sen}(x))^2 + (1+\text{sen}(x))^2} = \frac{2\cos(x)}{2 + 2\text{sen}^2(x)} = \frac{\cos(x)}{1 + \text{sen}^2(x)} \end{aligned}$$

Es decir, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$. Pero observemos que en el dominio dado $\cos(x) \neq 0$. Por tanto la respuesta es que no hay ningún punto donde la recta tangente sea horizontal.

- b) El apartado anterior nos da la información de que la derivada no se anula nunca en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, con lo deducimos que f es estrictamente monótona. Como además $f'(x) > 0, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (todos sus factores son positivos), tenemos que f es estrictamente creciente.

3. (2.5 puntos) Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = xe^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- a) Calcula la imagen de f .
- b) Determina el número de soluciones de la ecuación $ef(x) = 1$.

Solución:

- a) La función dada es continua y derivable en todo \mathbb{R} . Para calcular su imagen, vamos a buscar posibles extremos relativos calculando sus puntos críticos. Para ello, derivamos f .

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Calculemos los intervalos de monotonía para decidir si el punto $x = 1$ es punto de extremo relativo o no:

Si $x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente

Si $x > 1 \Rightarrow 1 - x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente

Se deduce entonces que en el punto $x = 1$ se alcanza un máximo relativo y, al ser el único punto crítico de la función, es el punto de máximo absoluto.

Calculamos la imagen de f :

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, 1]) \cup f([1, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] \cup] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1)]$$

Obsérvese que hemos empleado la continuidad y la monotonía de f en cada intervalo para calcular su imagen. Calculamos los límites en los extremos del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ (por la escala de infinitos)}$$

$$f(1) = e^{-1}$$

Por tanto: $f(\mathbb{R}) =]-\infty, e^{-1}] \cup]0, e^{-1}] =]-\infty, e^{-1}]$.

- b) Para encontrar el número de soluciones de la ecuación dada vamos a determinar el número de ceros de la función siguiente:

$$g(x) = ef(x) - 1$$

Esta función es continua y derivable en todo \mathbb{R} y su derivada es: $g'(x) = e f'(x)$. Por tanto, tiene el mismo punto crítico que f (es decir, $x = 1$); y además, ese punto crítico será también el máximo absoluto de la función g . Como

$$g(1) = e f(1) - 1 = e \frac{1}{e} - 1 = 0,$$

y antes de ese punto la función g crece estrictamente y después de él, decrece estrictamente, concluimos que g sólo admite un solo cero que es $x = 1$. Y por tanto, la ecuación planteada tiene una única solución, que además es $x = 1$.

4. **(2 puntos)** De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10, halla las dimensiones de aquél cuya hipotenusa sea mínima.

Solución: Llamemos x e y a los catetos del triángulo. Sabemos entonces que $x + y = 10$. La función que hay que maximizar es la hipotenusa, es decir: $\sqrt{x^2 + y^2}$. Si despejamos y en función de x : $y = 10 - x$, con lo que la función a estudiar es $\sqrt{x^2 + (10 - x)^2}$. Es decir:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (10 - x)^2} = \sqrt{x^2 + 100 - 20x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$$

Esta función (un polinomio de grado 2) se podría definir en todo \mathbb{R} ; pero si las variables x e y indican dimensiones, podemos considerar que el dominio es $[0, 10]$.

Buscamos posibles puntos de extremos en $]0, 10[$. Para ello, calculamos puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{4x - 20}{2\sqrt{2x^2 - 20x + 100}} = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Para calcular el mínimo absoluto, al ser el dominio un intervalo compacto, sólo nos queda evaluar la función:

$$f(0) = 10 = f(10) > f(5) = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}.$$

Por tanto las dimensiones del triángulo rectángulo que hacen que la hipotenusa sea mínima son los catetos iguales a 5.

Granada, 27 de noviembre de 2014