TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 2

– Grado en Matemáticas –

Curso 2012/13

Nombre:

Razonar todas las respuestas

1. Sean $p, q \in X$ y τ_p, τ_q las topologías del punto incluido para p y q, respectivamente. Probar que $f : (X, \tau_p) \to (X, \tau_q)$ es continua si y sólo si f es constante o $f(p) = q$. Deducir que $(X, \tau_p) \cong (X, \tau_q)$.
2. Hallar un homeomorfismo entre $B_1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $\mathbb{R}^2$.
3. Se considera $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_u \times \tau_D)$. Hallar la adherencia de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$. Probar que la diagonal, con su topología relativa, es homeomorfa a $(\mathbb{R}, \tau_D)$.
4. En $X = [-1, 2]$ se define la relación de equivalencia

$$x \; R \; y \text{ si } \left\{ \begin{array}{l} \text{son iguales, ó} \\ x, y \in [-1, 0] \text{ ó} \\ x, y \in [1, 2] \end{array} \right.$$

Probar que X/R es homeomorfo a [0,1]

Soluciones

1. Recordemos que la base de entornos de $x \in X$ en (X, τ_p) es $\beta_x = \{\{p, x\}\}$. Supongamos que f es continua. Ya que es continua en X, dado $V' = \{f(x), q\}$, debe existir $V = \{p, x\} \in \beta_x$ tal que $f(\{p, x\}) \subset \{f(x), q\}$. Esto quiere decir que $f(p) \in \{f(x), q\}$, para todo $x \in X$. Si $f(p) = q$, entonces se tiene probado el resultado. Si $f(p) \neq q$, entonces $f(p) = f(x)$, $\forall x \in X$, es decir, f es constante.

   Recíprocamente, se sabe que todas las aplicaciones constantes son continuas. Supongamos ahora que $f(p) = q$. Entonces por el mismo razonamiento anterior, decir que f es continua es equivalente a tener $f(\{p, x\}) \subset \{f(x), q\}$, $\forall x \in X$. Pero como $f(p) = q$, entonces $f(\{p, x\}) = \{q, f(x)\}$.

   Para la segunda parte, sea $f : X \to X$ cualquier aplicación biyectiva que lleve p en q, por ejemplo:
$$f(x) = \begin{cases} q & \text{si } x = p \\ p & \text{si } x = q \\ x & \text{si } x \neq p, q \end{cases}$$
   Como $f(p) = q$, f es continua. La inversa lleva q en p, luego es continua.

2. La aplicación $f : B_1(0,0) \to \mathbb{R}^2$ que se busca es una de la forma $f(x, y) = \lambda(x, y)$, $\lambda \geq 0$ de forma que conforme $|(x, y)|$ varíe de 0 a 1, $|f(x, y)|$ varíe de 0 a ∞. Sea $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ cualquier homeomorfismo tal que $h(0) = 0$ y $h(1) = \infty$, que sabemos que existe. Entonces el valor de λ viene dado por la condición
$$|f(x, y)| = h(|(x, y)|) \Rightarrow \lambda\sqrt{x^2 + y^2} = h(\sqrt{x^2 + y^2}).$$
   Por tanto se define
$$f(x, y) = \begin{cases} h(\sqrt{x^2 + y^2})(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
   De la forma que se ha construido f, se tiene que la inversa de f es
$$f^{-1}(x, y) = \begin{cases} h^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2})(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La continuidad de f en $B_1(0,0)-\{(0,0)\}$ (que es un abierto) se hace componiendo con las proyecciones, obteniendo inmediatamente

$$p_i \circ f = h \circ (\sqrt{p_1^2+p_2^2})\frac{p_i}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}.$$

Para el $(0,0)$, se tiene que si $(x_n,y_n)\to(0,0)$, entonces $|f(x_n,y_n)|=h(\sqrt{x_n^2+y_n^2})\to 0$, ya que $x_n^2+y_n^2\to 0$ y $h(0)=0$.

También se podía haber hecho con el sólo cambio de haber tomado h un homeomorfismo entre $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$ que lleve el 0 en 0 y definiendo f como $f(x,y)=h(\sqrt{x^2+y^2})(x,y)/\sqrt{x^2+y^2}$. En este caso, ya sabíamos que una tal aplicación h era $h(t)=t/(1-t^2)$, con $h^{-1}(t)=t/(1+t^2)$.

3. Una base de entornos de (x,y) es $\beta_{(x,y)}=\{(x-\epsilon,x+\epsilon)\times\{y\};\epsilon>0\}$.

   Para los puntos del borde de A, los conjuntos $(x-\epsilon,x+\epsilon)\times\{y\}$ siempre intersecan a A, excepto para el punto $(0,1)$ y $(0,-1)$ ya que la ordenadas de los puntos del entorno básico o es 1 o es -1, que nunca interseca a A. Si (x,y) satisface $x^2+y^2>1$, no es adherente: se sabe que existe una bola euclídea de radio $r>0$ centrada en el punto que no interseca a A, pero esa bola contiene a $(x-r,x+r)\times\{y\}$. Por tanto $\overline{A}=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}-\{(0,1),(0,-1)\}$.

   Si $D=\{(x,x);x\in\mathbb{R}\}$ es la diagonal, entonces una base de entornos de (x,x) en $(\tau_u\times\tau_D)_{|D}$ es

$$\beta_{(x,x)}\cap D=\{((x-\epsilon,x+\epsilon)\times\{x\})\cap D;\epsilon>0\}=\{(x,x)\},$$

   probando que tiene la topología discreta. Por tanto, un homeomorfismo es cualquier aplicación biyectiva de D en $\mathbb{R}$, ya que las aplicaciones biyectivas entre espacios discretos son homeomorfismos. Por ejemplo, $f(x,x)=x$.

4. Se define $f:X\to[0,1]$ mediante

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in[-1,0]\\ x & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x\in[1,2]\end{cases}$$

   Esta apicación es evidentemente sobreyectiva. También es continua porque en cada uno de los tres trozos es continua (o es constante o es la identidad), y cada uno de los trozos son cerrados en X, pues ya lo son en $\mathbb{R}$. El dominio de f es un compacto (cerrado, por ser un intervalo, y acotado, por ser un intervalo acotado) y llega a un subconjunto de $\mathbb{R}$. Esto prueba que f es cerrada y, de paso, f es una identificación. Sólo queda probar que $R_f = R$, pero esto es evidente por la propia definición de f.

(También se podía haber probado que f es una identificación observando que la inclusión $i : [0,1] \hookrightarrow X$ es una inversa (¡continua!) por la derecha, es decir, $f \circ i = 1_{[0,1]}$.)