Sucesiones de números reales

1 Sucesiones

Ejercicio 1. Prueba que si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x}$.

Solución 1. Sabemos que $1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (es la suma de una progresión geométrica) y, usando que $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, se obtiene lo pedido.

Ejercicio 2. Sea a un número real positivo y definamos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero.

Solución 2. Usando la definición de la sucesión, se puede comprobar que

$$x_1 = a,\ x_2 = \frac{a}{1+a},\ x_3 = \frac{a}{1+2a}$$

y que, en general, $x_n = \frac{a}{1+(n-1)a}$, con lo que es inmediato concluir que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ejercicio 3. Demuestra que la sucesión $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $\forall n \geq 1$ es convergente y calcular su límite.

Solución 3.

a) Veamos por inducción que la sucesión es creciente. Es inmediato comprobar que $x_1 < x_2$. Si $x_n < x_{n+1}$ tenemos que comprobar que $x_{n+1} < x_{n+2}$:

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} < \sqrt{3x_{n+1}} = x_{n+2}.$$

b) Además es una sucesión acotada, ya que por inducción otra vez tenemos que $x_n \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es inmediato, y si $x_n \leq 3$, comprobémoslo para x_{n+1}. En efecto,

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} \leq \sqrt{3 \cdot 3} = 3.$$

Por tanto, la sucesión es creciente y mayorada, luego existe su límite x, que estará comprendido entre $1 \leq x \leq 3$. Para calcular su valor vamos a tomar límites en la fórmula de recurrencia, esto es $x_{n+1}^2 = 3\,x_n \implies x^2 = 3x \implies x(x-3) = 0$ de lo que se deduce que $\lim_{n\to\infty} x_n = x = 3$.

(E) **Ejercicio 4.** Se considera la sucesión definida por recurrencia por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

Solución 4. Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $a_2 = \sqrt{5} > a_1 = 1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

a) Para $n = 1$, acabamos de ver que $a_1 \leq a_2$.
b) Hipótesis de inducción: suponemos que $a_n \leq a_{n+1}$.
c) Comprobamos que $a_{n+1} \leq a_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow 2a_n \leq 2a_{n+1} \Rightarrow 2a_n + 3 \leq 2a_{n+1} + 3 \Rightarrow \sqrt{2a_n+3} \leq \sqrt{2a_{n+1}+3} \Rightarrow\ a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente, ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por $a_1 = 1$. Veamos que está acotada superiormente por 3. Esto es, que $a_n \leq 3 \forall\, n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

a) Para $n = 1$, es evidente que $a_1 1 \leq 3$.
b) Hipótesis de inducción: Suponemos que $a_n \leq 3$.
c) Comprobamos que $a_{n+1} \leq 3$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$a_n \leq 3 \;\Rightarrow\; 2a_n \leq 6 \;\Rightarrow\; 2a_n + 3 \leq 9 \;\Rightarrow\; \sqrt{2a_n + 3} \leq \sqrt{9} = 3 \Rightarrow\; a_{n+1} \leq 3$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.
Para calcular el límite de $\{a_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{a_n\} = x$ y nos queda que $x = \sqrt{2x + 3}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{2x + 3} \Rightarrow\; x^2 = 2x + 3 \;\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1 \;\text{ ó } x = 3$$

Pero como el límite ha de ser mayor que 1, tenemos que $\lim a_n = 3$.

(E) **Ejercicio 5.** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n} - 1$. Calcula $\lim_{n\to\infty} x_n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$.

Solución 5.

a) Vamos a comprobar que la sucesión $\{x_n\}$ es monótona y acotada.
   i) Veamos, en primer lugar, que la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente. Utilizaremos el principio de inducción.
      1) Es inmediato comprobar que $x_1 = 1 > x_2 = \sqrt{3} - 1$.
      2) Supongamos que $x_n > x_{n+1}$, entonces

$$2x_n + 1 > 2x_{n+1} + 1 \implies \sqrt{1 + 2x_n} - 1 > \sqrt{1 + 2x_{n+1}} - 1,$$

      o, lo que es lo mismo, $x_{n+1} > x_{n+2}$.
   ii) Comprobemos que todos los términos son positivos de nuevo por inducción:
      1) Es evidente que que $x_1 > 0$ y,
      2) si $x_n > 0$, $\sqrt{1 + 2x_n} > 1$ o, lo que es lo mismo, $x_{n+1} > 0$.

   Resumiendo, $\{x_n\}$ es decreciente y está acotada inferiormente y, por tanto, es convergente. Si llamamos L al límite, se cumple que $L = \sqrt{1 + 2L} - 1$ de donde se deduce que $L = 0$.
b) Para calcular el límite de la sucesión $\left\{\frac{x_n}{x_{n+1}}\right\}$, multiplicamos y dividimos por $\sqrt{1 + 2x_n} + 1$ y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_n}{\sqrt{1 + 2x_n} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2x_n} + 1}{\sqrt{1 + 2x_n} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 2x_n} + 1\right) = 1.$$

(E) **Ejercicio 6.** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$.

a) Demuestra que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ para cualquier natural n.
b) Demuestra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.
c) Calcula su límite.

Solución 6.

a) Lo demostramos por inducción. Es claro que $\frac{1}{5} < x_1 = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$. Supongamos que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$, entonces

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} > \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25} = \frac{1}{5}, \quad \text{y}$$

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} < \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{25} = \frac{4}{5}.$$

b) De nuevo comprobamos que la sucesión es decreciente por inducción. En primer lugar, es evidente que $x_1 = \frac{1}{2} \geq \frac{41}{100} = x_2$. Supongamos ahora que $x_n \geq x_{n+1}$, entonces

$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 + \frac{4}{25} \geq x_n^2 + \frac{4}{25} = x_{n+1},$$

ya que la función "elevar al cuadrado" conserva el orden en los positivos.

c) De los dos apartados anteriores se deduce que la sucesión es monótona y acotada y, por tanto, convergente. Si L es su límite, debe verificar que

$$L = L^2 + \frac{4}{25} \iff L = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}}}{2} = \frac{1}{5}, \text{ o } \frac{4}{5}.$$

Puesto que la sucesión es decreciente, el límite no puede ser $\frac{4}{5}$ y, se tiene que $L = \frac{1}{5}$.

Ejercicio 7. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Estudiar el comportamiento de la sucesión $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2+a}{2}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución 7. En primer lugar, probamos que la sucesión es decreciente. Se tiene que $x_2 = \sqrt{\frac{a^2+a}{2}} < a = x_1$ ($\iff$ $a > 1$). Si suponemos que $x_{n+1} < x_n$ veamos que también $x_{n+2} < x_{n+1}$. En efecto, como $x_{n+1}^2 < x_n^2$, entonces

$$x_{n+2} = \sqrt{\frac{x_{n+1}^2 + a}{2}} < x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a}{2}}.$$

Además la sucesión está acotada, ya que $1 < x_n \leq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (¡pruébese por inducción!), por tanto la sucesión tiene límite x que verifica la ecuación siguiente:

$$x^2 = \frac{x^2 + a}{2} \implies x^2 = a \implies x = \sqrt{a}.$$

2 Criterios de convergencia

Ejercicio 8. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y calcular su límite cuando exista.

a) $\left\{\frac{1 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5}\right\}$

b) $\left\{\frac{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}{n!}\right\}$

c) $\left\{\frac{1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n}{n}\right\}$

d) $\left\{\frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)}{n + 1} - \frac{2n + 1}{2}\right\}$

Solución 8.

a) Aplicamos el criterio de Stolz y nos queda $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{(n+1)^4}{(n+1)^5-n^5}$. Si desarrollamos el denominador tenemos un polinomio de grado 4 y con coeficiente principal 4, ya que queda de la forma $(n+1)^5 - n^5 = 5n^4 + \ldots + 1$. Por tanto el límite es $\frac{1}{5}$.

b) Aplicando el criterio de Stolz tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!\,((n+1)-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

c) Por el criterio de Stolz, $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{(n+1)-n} = 0$.

d) Escribimos la sucesión de la forma $\frac{x_n}{y_n} = \frac{2+6+10+\cdots+2(2n-1)-(2n+1)(n+1)}{2(n+1)}$ y aplicamos el criterio de Stolz

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{2(2n+1)-((2n+3)(n+2)-(2n+1)(n+1))}{2(n+2)-2(n+1)} = -\frac{3}{2}.$$

Por tanto el límite es $-\frac{3}{2}$.

Ejercicio 9. Calcula el límite de las siguientes sucesiones

a) $\left\{\dfrac{\log(1\cdot 2\cdots n)}{n\log(n)}\right\}$,

b) $\left\{\dfrac{n^2\sqrt{n}}{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\ldots+n\sqrt{n}}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots\sqrt[n]{n}}{n^2}\right\}$

Solución 9.

a) Aplicamos el criterio de Stolz

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)) - \log(1\cdot 2\cdots n)}{(n+1)\log(n+1) - n\log(n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n+1) + n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n+1) + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\end{aligned}$$

dividimos por $\log(n+1)$ y usamos que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$,

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\log(n+1)}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1.$$

b) Aplicamos el criterio de Stolz y nos queda:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2\sqrt{n+1} - n^2\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}}$$

multiplicamos y dividimos por $(n+1)^2\sqrt{n+1} + n^2\sqrt{n}$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4(n+1) - n^4 n}{(n+1)\sqrt{n+1}\left((n+1)^2\sqrt{n+1} + n^2\sqrt{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5 - n^5}{(n+1)^4 + n^2(n+1)\sqrt{n(n+1)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^4 + \cdots + 1}{(n+1)^4 + n^2(n+1)\sqrt{n(n+1)}} = \frac{5}{2}\,.
\end{aligned}
$$

c) Este ejercicio se puede intentar resolver por el criterio de Stolz. Si llamamos $x_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots \sqrt[n]{n}$ y $y_n = n^2$ se tendrá que

$$
\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots \sqrt[n]{n} + \sqrt[n+1]{n+1} - \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots \sqrt[n]{n}\right)}{(n+1)^2 - n^2} = \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{2n+1}.
$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = 1$, tenemos que

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{2n+1} = 0.
$$

Por tanto $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots \sqrt[n]{n}}{n^2} = 0.$

Ejercicio 10. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}}{n+1}\right\}$

Solución 10.

a) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,
$$

y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$

b) Aunque directamente no podemos aplicar el criterio de la raíz si hacemos una pequeña manipulación en la sucesión sí que será posible. Se tiene que

$$
\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)} = \sqrt[n]{\frac{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}{n^n}}.
$$

Si ahora llamamos $a_n = \frac{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}{n^n}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)(3n+5)\cdots(3n+n+4)n^n}{(n+1)^{n+1}(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)n^n}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(n+1)^{n+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{4^4}{3^3e}.\end{aligned}$$

c) El término general lo podemos escribir de la forma $x_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}}$ y aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n^n n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{4}{e}.$$

d) Modificamos el término general de la sucesión para poder aplicar el criterio de la raíz. Es decir, la sucesión que vamos es:

$$\sqrt[n]{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{(n+1)^n}}$$

y llamando $a_n = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{(n+1)^n}$, al aplicar el criterio de la raiz, el límite que tendremos que estudiar ahora es:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)\cdot(2n+2)}{(n+2)^{n+1}}\,\frac{(n+1)^n}{2\cdot4\cdot6\cdots2n} = \frac{2n+2}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

El primer factor es una sucesión de tipo racional que converge a 2; y el segundo factor es una sucesión que presenta la indeterminación del tipo "1^∞" por lo que aplicamos la regla del número e:

$$n\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right) = \frac{-n}{n+2} \to -1 \Rightarrow \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \to e^{-1}$$

Por tanto: $\lim \frac{\sqrt[n]{2\cdot4\cdot6\cdots2n}}{n+1} = 2\,e^{-1} = \frac{2}{e}$

Ejercicio 11. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+56n+5}\right\}$

b) $\left\{\left(\frac{n^2-5n+6}{n^2+2n+1}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}\right\}$

c) $\{(1+\log(n+1)-\log(n))^n\}$

Solución 11.

a) Consideramos la sucesión $x_n = \left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+56n+5}$. Como la base converge a 1 y es siempre distinta de uno aplicamos la regla del número e. Concretamente,

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+56n+5)\left(1+\frac{1}{n^2+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+56n+5}{n^2+1} \to 1,$$

y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = e$.

b) Aplicamos la regla del número e y estudiamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{n+2}\left(\frac{n^2-5n+6}{n^2+2n+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-7n^3+\cdots}{n^3+\cdots} = -7.$$

Por tanto, la sucesión tiende a e^{-7}.

c) Escribimos el término general de la forma $x_n = \left(1+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^n$ y aplicamos la regla del número e:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1+\log\left(\frac{n+1}{n}\right)-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \log(e) = 1.$$

Entonces $\lim_{n\to\infty}(1+\log(n+1)-\log(n))^n = e$.

Ejercicio 12. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\log(n)}\right\}$ b) $\left\{\dfrac{\log(n+1)!}{\log(n+1)^n}\right\}$

Solución 12.

a) Por el criterio de Stolz se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\log(n+1)-\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.$$

b) Por el criterio de Stolz se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+2)!-\log(n+1)!}{(n+1)\log(n+2)-n\log(n+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+2)}{n\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)+\log(n+2)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]}{\log(n+2)}+1} = 1.$$

Ejercicio 13. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\left(\dfrac{n+1}{n^2+n+5}\right)^{\frac{1}{1+\log(n)}}\right\}$ b) $\left\{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ c) $\left\{\dfrac{\cos(\sqrt{n^2+1})\log(n)}{n}\right\}$

Solución 13.

a) Si llamamos x_n al término general de la sucesión propuesta, vamos a estudiar $\log(x_n)$, es decir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \log(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\log(n)} \Big(\log(n+1) - \log(n^2+n+5) \Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1) - 2\log(n) - \log(1+1/n+5/n^2)}{1+\log(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log(n+1)}{\log(n)} - 2 - \frac{\log(1+1/n+5/n^2)}{\log(n)}}{\frac{1}{\log(n)}+1} = -1.
\end{aligned}$$

Entonces, $\lim_{n\to\infty} x_n = e^{-1}$.

b) Utilizando la continuidad de la función seno en el cero se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{sen}(0) = 0.$$

c) El límite es

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\sqrt{n^2+1}\right) \frac{\log(n)}{n} = 0,$$

donde hemos utilizado que es el producto de una sucesión acotada, $\cos\left(\sqrt{n^2+1}\right)$, por una convergente a cero, $\frac{\log(n)}{n}$.

Ejercicio 14. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\sqrt[n]{\dfrac{n!}{(2n)^{n+1}}}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{\log(n!)}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}\right\}$

Solución 14.

a) Aplicamos el criterio de la raíz y, si $x_n = \frac{n!}{(2n)^{n+1}}$, estudiamos el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)^{n+2}}}{\frac{n!}{(2n)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n)^{n+1}}{(2n+2)^{n+2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+2} \cdot \left(\frac{2n}{2n+2}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ahora estudiamos cada uno de los factores por separado: el primero de ellos es un cociente de polinomios de mismo grado que tiene límite $1/2$; el segundo presenta una indeterminación de la forma "1^∞". La resolvemos:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+2}\right)^{n+1} = e^L \iff \lim_{n\to\infty} (n+1)\left(\frac{2n}{2n+2} - 1\right) = L.$$

Es muy fácil comprobar que $L = -1$ y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)^{n+1}}} = 1/2 e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

b) Para la sucesión $x_n = \frac{\log(n!)}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}$ aplicamos el criterio de Stolz. Notemos que en este caso el denominador es una sucesión de números positivos estrictamente creciente y no mayorada. Aplicando Stolz tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log((n+1)!) - \log(n!)}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-\sqrt{1}-\sqrt{2}-\ldots-\sqrt{n}} = \frac{\log\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)}{\sqrt{n+1}} = \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n+1}}.$$

Finalmente aplicamos de nuevo el criterio de Stolz a este último cociente:

$$\frac{\log(n+1+1)-\log(n+1)}{\sqrt{n+1+1}-\sqrt{n+1}} = \frac{\log(\frac{n+2}{n+1})}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \frac{\log(\frac{n+2}{n+1})}{\sqrt{n+2}\left(1-\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right)} \to 0,$$

lo que nos asegura que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ⓔ **Ejercicio 15.** Calcula el límite de la sucesión

$$\left\{\frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}\right\}.$$

Solución 15. En este caso vamos a utilizar el criterio de Stolz para ver el comportamiento de la sucesión. Si llamamos $a_n = \frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$ y $b_n = n^2$ es claro que $\{b_n\}$ es creciente y no mayorada y entonces

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}+\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}-\left(\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)}{(n+1)^2-n^2}\\ &= \frac{\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}}{2n+1} = \frac{n+2}{2n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n.\end{aligned}$$

Se tiene que el límite de $\left\{\frac{n+2}{2n+1}\right\}$ es $1/2$ y, utilizando la regla del número e, la sucesión $\left\{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\right\}$ tiende a e, con lo que la sucesión converge a $\frac{e}{2}$.

Ⓔ **Ejercicio 16.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right)^{4n+1}.$$

Solución 16. Está claro que el cociente de polinomios al que afecta el logaritmo, al ser polinomios del mismo grado, converge a 1, que es el cociente de los coeficientes líderes. Como logaritmo neperiano es continuo en 1 y vale 0 tenemos que la base del término general converge a 1 mientras que el exponente es claro que diverge positivamente. En conclusión, estamos ante una indeterminación de la forma "1^∞".
Utilizando la regla del número e tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right)^{4n+1} = e^L \iff \lim_{n\to\infty}(4n+1)\left(1+\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)-1\right) = L,$$

pero

$$\lim_{n\to\infty}(4n+1)\left(\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)^{(4n+1)}.$$

Ahora hacemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)^{(4n+1)} = e^L \iff \lim_{n\to\infty}(4n-1)\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}-1\right) = L$$

y

$$\lim_{n\to\infty}(4n+1)\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}-1\right) = \lim_{n\to\infty}(4n+1)\left(\frac{-3n+1}{3n^2+5n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-12n^2+7n-1}{3n^2+5n}\right) = -4,$$

y el límite buscado resulta

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right)^{4n+1} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}.$$