

UNIVERSIDAD DE GRANADA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA  
ECUACIONES DIFERENCIALES I  
Primera prueba. 27 de noviembre de 2015

*El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.*

[3] Ejercicio 1.- Una población  $P(t)$ , que vive en un medio donde la capacidad para sustentarse varía estacionalmente, se rige por la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dP}{dt} = P(1 - P \cos t).$$

Hallar  $P(t)$  cuando  $P(0) = P_0$ .

[3] Ejercicio 2.- Definir las aproximaciones sucesivas del P.V.I.  $x' = A(t)x$ ,  $x(t_0) = x_0$ , con  $A : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  continua,  $t_0 \in I$ , y demostrar que convergen a una solución del P.V.I. uniformemente en compactos de  $I$ .

Ejercicio 3.-

[2 ] a) Calcular la matriz fundamental principal en  $t_0 = 0$  del sistema lineal

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} x. \quad (1)$$

[2 ] b) El Teorema de Caley-Hamilton afirma que toda matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  satisface su ecuación característica, es decir, si  $p(\lambda) = \det[A - \lambda I_n]$  es su polinomio característico, se cumple que  $p(A) = (0)$ . Por tanto, si  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^n$ , entonces  $(A - \lambda_1 I_n)^n = (0)$ . Justificar que en este caso

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} e^{(A - \lambda_1 I_n)t} = e^{\lambda_1 t} \left\{ I_n + (A - \lambda_1 I_n)t + \cdots + (A - \lambda_1 I_n)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\}.$$

Usar la fórmula anterior para hallar la matriz fundamental principal en  $t_0 = 0$  de (1).