Cálculo
1ºE Grado en Ingeniería Informática
Curso 2012/2013

1. Calcula:

   a) $\lim_{x\to 0} \left(\cos(x)+x^2\right)^{1/\operatorname{sen}^2(x)}$ *b*) $\int_0^1 \operatorname{arcsen}(x)\,dx$

   Solución.

   a) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión. Este límite es 1 con lo que el límite pedido presenta una indeterminación del tipo "1^∞".
   Aplicamos entonces la regla del número e. Esto es, estudiamos el siguiente límite:

   $$\lim_{x\to 0} \left(\cos(x)+x^2\right)^{1/\operatorname{sen}^2(x)} = e^L \iff \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \left(\cos(x)+x^2-1\right) = L.$$

   Para resolver el límite

   $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \left(\cos(x)+x^2-1\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)+x^2-1}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

   aplicamos la regla de L'Hôpital. Nos queda:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)+2x}{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2\cos(x)}\right) \left(\frac{-\operatorname{sen}(x)+2x}{\operatorname{sen}(x)}\right)$$

   donde observamos que el primer factor no presenta ninguna indeterminación (de hecho, tiende a $1/2$), mientras que el segundo factor sí que vuelve a presentar la misma indeterminación anterior, por lo que volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital.

   $$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)+2}{\cos(x)} = 1$$

   Por tanto, aplicando la regla del número e, el límite que nos pedían es:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \left(\cos(x)+x^2-1\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} = \left(\cos(x)+x^2\right)^{1/\operatorname{sen}^2(x)} = e^{1/2}$$

b) Se trata de una integral que vamos a calcular aplicando el método de integración por partes. En primer lugar, calculamos una primitiva del integrando:

$$\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arcsen}(x) \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{bmatrix}$$
$$= x\operatorname{arcsen}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= x\operatorname{arcsen}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= x\operatorname{arcsen}(x) - \frac{1}{2}\int 2x\,(1-x^2)^{-1/2}\,dx$$
$$= x\operatorname{arcsen}(x) - \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} = x\operatorname{arcsen}(x) - \sqrt{1-x^2}$$

Calculamos entonces la integral planteada:

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen}(x)\,dx = x\operatorname{arcsen}(x) - \sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

2. Determina el número de soluciones de la ecuación $3x^4 + 12 = 8x^3$.

Solución.

Replanteamos el ejercicio en términos de búsqueda de número de ceros de la siguiente función: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 3x^4 + 12 - 8x^3$. Se trata de una función derivable y, por tanto, continua en todo el dominio. Para detrminar su número de ceros vamos a estudiar su derivada, en concreto, el número de ceros de f', ya que sabemos que este número, utilizando el teorema de Rolle, nos va a acotar superiormente el número de ceros de f.

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 2.$$

Por ahora sabemos que f, a lo sumo, se puede anular tres veces. Seguimos estudiando la función para precisar el número exacto de ceros. Analizando el signo de la derivada, obtenemos que:

- En el intervalo $]-\infty, 0[$ se tiene que $f'(x) < 0$, por lo que la función es estrictamente decreciente.
- En el intervalo $]0, 2[$ se tiene que $f'(x) < 0$, por lo que la función es estrictamente decreciente.
- En el intervalo $]2, +\infty[$ se tiene que $f'(x) > 0$, por lo que la función es estrictamente creciente.

Por tanto, la función presenta un mínimo relativo en el punto de abcisa $x = 2$ que, por ser el único punto de extremo se convierte en mínimo absoluto. Analizamos también los límites en los extremos del dominio, así como el valor del mínimo absoluto:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ , y } f(2) = -4$$

Por tanto,y como consecuencia del teorema de Bolzano, la función presenta dos ceros, uno antes del punto de mínimo absoluto (pasa de ser positiva a ser negativa) y otro después de $x = 2$ (pasa de negativa a positiva).

3. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_0^{\log(x^2+1)} e^{-t^2}\, dt$$

a) Determina los intervalos de monotonía y posibles extremos relativos de f.

b) Calcula $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2+1}$.

Solución.

a) Para determinar los intervalos de monotonía y posibles extremos relativos de f vamos a analizar las propiedades de la función dada. Gracias al teorema fundamental de Cálculo, se trata de una función continua y derivable (el integrando es una función continua) en todo el dominio, y además su derivada es:

$$f'(x) = e^{-\log(x^2+1)^2} \frac{2x}{x^2+1} \text{ , } \forall x \in \mathbb{R}$$

Buscamos posibles puntos críticos:

$$f'(x) = e^{-\log(x^2+1)^2} \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Descomponemos el dominio de la función f para encontrar los intervalos de monotonía y, teniendo en cuenta que el factor $e^{-\log(x^2+1)^2} > 0$,$\forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

- En el intervalo $]-\infty, 0[$ la derivada es negativa, por lo que f es estrictamente decreciente.
- En el intervalo $]0, +\infty[$ la derivada es positiva, por lo que f es estrictamente creciente.

Por tanto, en el punto de abcisa $x = 0$ la función alcanza un mínimo relativo y, al ser el único punto de extremo, también alcanza su mínimo absoluto, valiendo $f(0) = \int_0^0 e^{-t^2}\, dt = 0$.

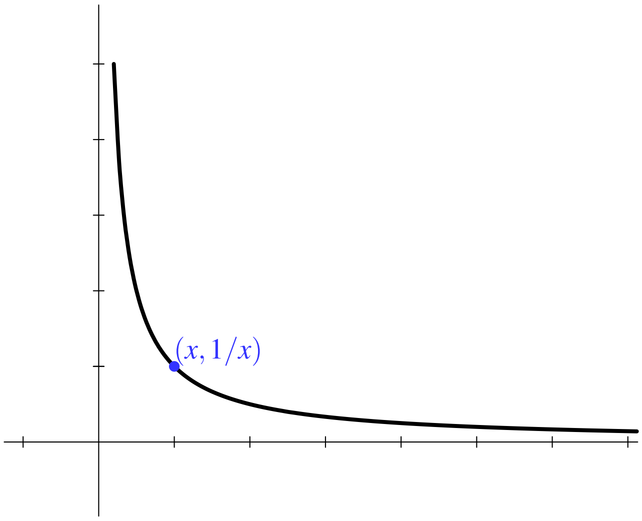

Figura 1: Gráfica de $y = \frac{1}{x}$

b) Aplicamos la segunda regla de L'Hôpital para calcular dicho límite ya que se presenta una indeterminación del tipo "$\frac{?}{\infty}$":

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\log(x^2+1)^2}\,\frac{2x}{x^2+1}}{2x} == \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\log(x^2+1)^2}\cancel{2x}}{\cancel{2x}(x^2+1)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{\log(x^2+1)^2}(x^2+1)} = 0$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2+1} = 0$.

4. Determina el punto de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x > 0$ cuya distancia al origen de coordenadas sea mínima.

   Sugerencia: La distancia entre un punto (x,y) y el origen es igual a $\sqrt{x^2+y^2}$.

   Solución. La función a minimizar es la función distancia, pero para simplificar los cálculos, vamos a optimizar la función distancia al cuadrado ya que el punto donde se alcanze el mínimo es el mismo para ambas funciones .

   Si llamamos $(x,1/x)$ a un punto genérico de la gráfica de la función f (ver figura 1), entonces la distancia al origen desde dicho punto es: $\sqrt{x^2+(1/x)^2}$.

   La función que vamos a minimizar es entonces:

$$g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4+1}{x^2} \ , \ \forall x > 0$$

Derivamos la función para buscar puntos críticos:

$$g'(x) = \frac{4x^3x^2 - 2x(x^4+1)}{x^4} = \frac{4x^5 - 2x^5 - 2x}{x^4} = \frac{2x^5 - 2x}{x^4} = \frac{2\cancel{x}(x^4-1)}{\cancel{x}x^3} = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Descartamos la solución negativa ya que el dominio es el conjunto de los números reales positivos. Calculamos ahora la derivada segunda de f para concluir si tenemos extremo relativo en el punto $x = 1$:

$$g''(x) = \frac{8x^3x^3 - 3x^2(2x^4-2)}{x^6} = \frac{\cancel{x^2}2x^4+6}{\cancel{x^2}x^4} = \frac{2x^4+6}{x^4}$$

Por tanto, $g''(1) > 0$, con lo que podemos asegurar que la función g alcanza un mínimo relativo, y al ser el único punto de mínimo, alcanza su mínimo absoluto en $x = 1$.

La respuesta al ejercicio es que el punto de la gráfica de f más próximo al origen es el punto $(1,1)$.

Granada, 23 de enero de 2013