Examen de Cálculo II (29/05/14)

Soluciones

1. Probar que: $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$

Para la primera desigualdad, consideramos la función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$$

Es claro que $f \in D(\mathbb{R}_0^+)$ con

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$$

Tenemos $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, luego f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$. Por tanto, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ se tiene

$$f(x) > f(0) = 0, \qquad \text{es decir,} \quad \log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

Para la segunda desigualdad, definimos $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = x - \log(1+x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$$

De nuevo es claro que $g \in D(\mathbb{R}_0^+)$ con

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_0^+$$

y tenemos $g'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, luego g es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$. Por tanto, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ se tiene

$$g(x) > g(0) = 0, \qquad \text{es decir,} \quad \log(1+x) < x$$

Alternativamente, para esta segunda desigualdad, fijado $x \in \mathbb{R}^+$, aplicamos el teorema del valor medio a la función logaritmo en el intervalo $[1, 1+x] \subset \mathbb{R}^+$. Obtenemos $c_x \in]1, 1+x[$ tal que

$$\log(1+x) = \log(1+x) - \log 1 = \frac{1}{c_x}(1+x-1) = \frac{x}{c_x}$$

Como $x > 0$ y $c_x > 1$, tenemos $x/c_x < x$, de donde $\log(1+x) < x$. ■

2. Calcular la imagen de la función $H :]-1,1[\to \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = \int_0^{x^2} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \forall\, x \in]-1,1[$$

¿Tienen solución las ecuaciones $H(x) = 1$ y $H(x) = 1/2$?

Pongamos para abreviar $I =]-1,1[$. La función $f : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \forall\, t \in I$$

es continua, lo que permite considerar su integral indefinida con origen en 0:

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad \forall\, x \in I$$

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos $F \in D(I)$ con

$$F'(x) = f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall\, x \in I$$

Como $H(x) = F\big(x^2\big)$ para todo $x \in I$, usando la regla de la cadena obtenemos que $H \in D(I)$ con

$$H'(x) = 2\,x\,F'\big(x^2\big) = \frac{2\,x^5}{\sqrt{1-x^4}} \qquad \forall\, x \in I$$

Tenemos $H'(x) < 0$ para todo $x \in]-1,0[$, mientras que $H'(x) > 0$ para todo $x \in]0,1[$, luego H es estrictamente decreciente en $]-1,0]$ y estrictamente creciente en $[0,1[$. Por tanto, H tiene un mínimo absoluto en el origen, es decir, $\min H(I) = H(0) = 0$.

Para completar el cálculo de la imagen de H, debemos estudiar su comportamiento en los puntos -1 y 1, calculando explícitamente la integral que define a $H(x)$ con $x \in I$ fijo. Para ello usaremos el cambio de variable $t = \operatorname{sen}\theta$. Escribiendo para simplificar la notación, $y = \operatorname{arc\,sen}(x^2)$, al ser $0 \le x^2 < 1$ tenemos $0 \le y < \pi/2$. Para aplicar la fórmula de cambio de variable, observamos que:

$$\begin{array}{l} 0 \le \theta \le y \implies 0 \le t = \operatorname{sen}\theta \le x^2 \\ dt = \cos\theta\,d\theta, \quad \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \cos\theta > 0 \\ t = 0 \quad \text{para} \quad \theta = 0 \qquad \text{y} \qquad t = x^2 \quad \text{para} \quad \theta = y \end{array}$$

Por tanto, la fórmula de cambio de variable nos da

$$\begin{aligned} \int_0^{x^2} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_0^y \frac{\operatorname{sen}^2\theta\,\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta} = \int_0^y \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^y (1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^y = \frac{y}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2y}{4} \end{aligned}$$

Además, tenemos

$$\operatorname{sen} 2y \;=\; 2\,\operatorname{sen} y\,\cos y \;=\; 2\,\operatorname{sen} y\,\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} \;=\; 2\,x^2\sqrt{1-x^4}$$

donde hemos usado que $\cos y > 0$ y que $\operatorname{sen} y = x^2$. Así pues, hemos probado que

$$H(x) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arc\,sen}(x^2) \;-\; x^2\,\sqrt{1-x^4}\,\Big) \qquad \forall\, x \in I$$

Como el arco-seno es una función continua en 1, vemos que:

$$\lim_{x\to 1} H(x) \;=\; \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} 1 \;=\; \frac{\pi}{4}$$

Al ser H estrictamente creciente en $[0,1[$, deducimos que $H\big([0,1[\big) \;=\; [0,\pi/4[$. Pero además, es claro que H es una función par: $H(-x) = H(x)$ para todo $x \in I$. Por tanto, tenemos también $H\big(]-1,0]\big) = [0,\pi/4[$, así que , $H(I) \;=\; [0,\pi/4[$.

Finalmente de $2 < \pi < 4$ deducimos que $1/2 < \pi/4 < 1$, luego $1/2 \in H(I)$ mientras que $1 \notin H(I)$. Así pues, la ecuación $H(x) = 1$ no tiene solución, mientras que $H(x) = 1/2$ tiene exactamente dos soluciones, una en $]-1,0[$ y otra en $]0,1[$. ■

4. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando la respuesta:

(a) Sea A un conjunto no vacío de números reales, tal que $A \subset A'$. Si A no es un intervalo, existe una función $f \in D(A)$ tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in A$, pero f no es decreciente.

Esta afirmación es VERDADERA. Como A no es un intervalo, existen $a,b,c \in \mathbb{R}$ con $a < c < b$, tales que $a,b \in A$ pero $c \notin A$. Definimos entonces $f : A \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x-c} \qquad \forall\, x \in A$$

Nótese que f está bien definida, porque $x \neq c$ para todo $x \in A$. Además, f es una función racional, luego $f \in D(A)$ con

$$f'(x) \;=\; -\,\frac{1}{(x-c)^2} \;<\; 0 \qquad \forall\, x \in A$$

Si f fuese decreciente, al ser $a,b \in A$ y $a < b$, se tendría $f(a) \geq f(b)$, lo cual es falso:

$$f(a) \;=\; \frac{1}{a-c} \;<\; 0 \;<\; \frac{1}{b-c} \;=\; f(b)$$

luego f no es decreciente, como se quería. ■

(b) Si $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ son funciones uniformemente continuas, con $f(A) \subset B$, entonces la composición $g \circ f$ es uniformemente continua.

Esta afirmación también es VERDADERA. Para probarlo podemos usar directamente la definición de continuidad uniforme. Dado $\varepsilon > 0$ como g es uniformemente continua, podemos encontrar $\eta > 0$ tal que:

$$u, v \in B\,, \quad |u - v| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |g(u) - g(v)| < \varepsilon \tag{$*$}$$

Encontrado este $\eta > 0$, la continuidad uniforme de f nos dice que existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in A\,, \quad |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \eta$$

Entonces, para $x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$ tenemos que $f(x), f(y) \in f(A) \subset B$ verifican que $|f(x) - f(y)| < \eta$, luego podemos usar $(*)$ con $u = f(x)$ y $v = f(y)$ para obtener que $|g(u) - g(v)| < \varepsilon$ es decir, $\big|g\big(f(x)\big) - g\big(f(y)\big)\big| < \varepsilon$. En resumen, hemos probado que

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \; : \; x, y \in A\,, \quad |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|\big(g \circ f\big)(x) - \big(g \circ f\big)(y)\big| < \varepsilon$$

es decir, que $g \circ f$ es uniformemente continua.

Alternativamente, podemos usar la caracterización de la continuidad uniforme mediante sucesiones. Concretamente, deberemos probar que, si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones de puntos de A tales que $\{x_n - y_n\} \to 0$, entonces $\big\{\big(g \circ f\big)(x_n) - \big(g \circ f\big)(y_n)\big\} \to 0$. Ahora bien, como f es uniformemente continua, tenemos $\{f(x_n) - f(y_n)\} \to 0$. Entonces, como $\{f(x_n\}$ y $\{f(y_n\}$ son sucesiones de puntos de B, la continuidad uniforme de g nos dice que $\big\{g\big(f(x_n)\big) - g\big(f(y_n)\big)\big\} \to 0$, como queríamos. ■

(c) Si $f \in D(\mathbb{R})$ es una función periódica, entonces $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$ es un conjunto infinito.

Esta afirmación también es VERDADERA. Como toda función periódica tiene un periodo positivo, sea $T \in \mathbb{R}^+$ un periodo de f. De la igualdad

$$f(x) \,=\, f(x + T) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

deducimos evidentemente que

$$f'(x) \,=\, f'(x + T) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

luego f' también es T-periódica.

Por otra parte, como $f(0) = f(T)$ podemos aplicar a f el teorema de Rolle en el intervalo $[0, T]$, obteniendo $c \in]0, T[$ tal que $f'(c) = 0$. Para $k \in \mathbb{Z}$, sabemos que kT es un periodo de f', luego $f'(c + kT) = 0$. Esto prueba que

$$\{c + kT \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \,\subset\, \{x \in \mathbb{R} \,:\, f'(x) = 0\}$$

El primero de estos conjuntos es infinito, porque es equipotente a $\mathbb{Z}$, luego el segundo también lo es.