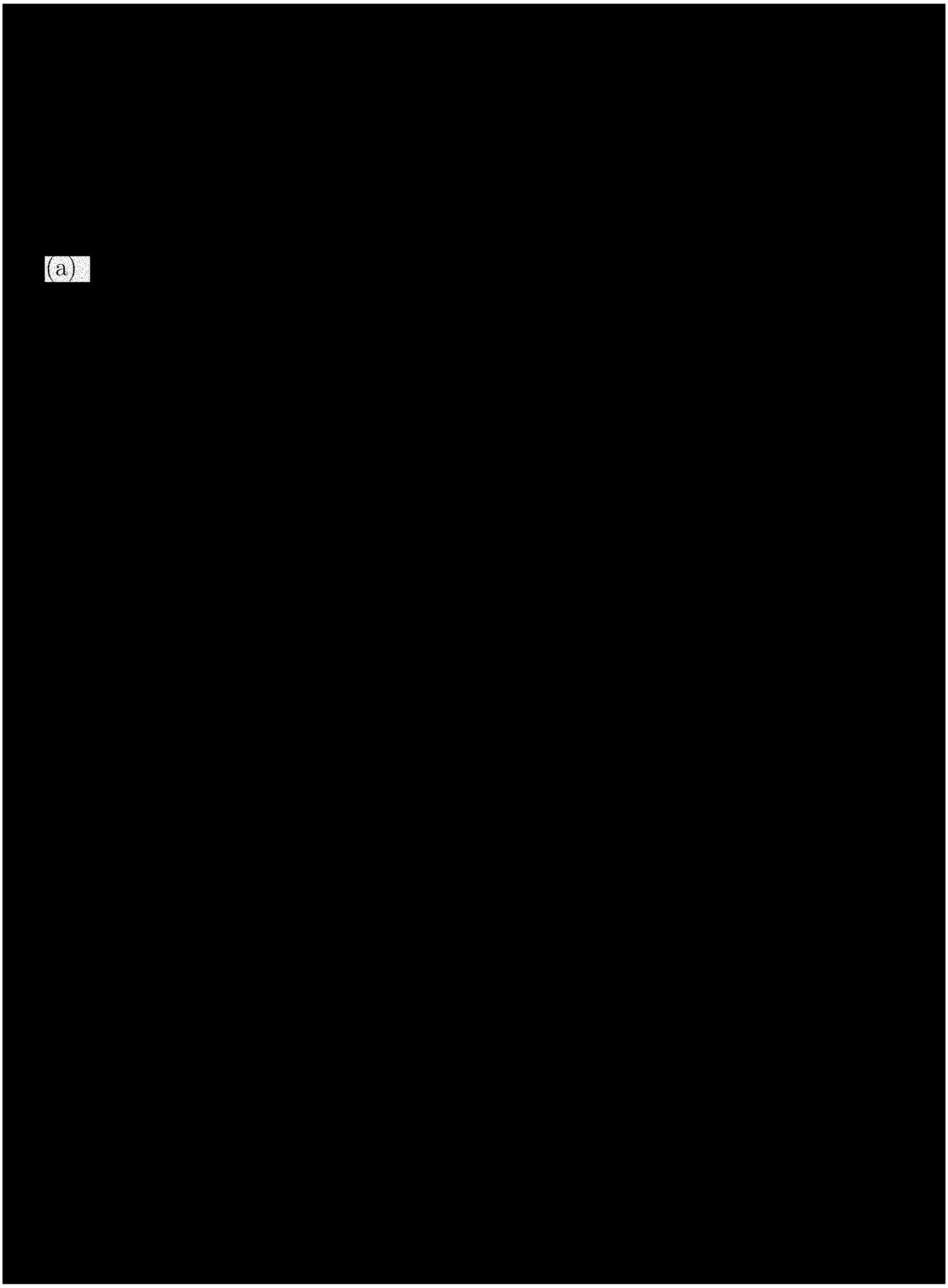
(a)

Soluciones (puede haber diferentes maneras correctas de responder a las preguntas)

1. (a) Sí. La aplicación será inyectiva si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Sea $v \in \mathrm{Ker}(f)$. Sean $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Entonces $0 = f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i)$. Como $f(B)$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces $\lambda_i = 0$, para todo i y por tanto, $v = 0$.

   (b) No. Sea V un espacio vectorial cualquiera, B y B' bases (distintas) de V y f el endomorfismo definido por $f(e_i) = e'_i$, $1 \leq i \leq n$. Entonces $f \neq \mathrm{Id}$ pues $B \neq B'$ pero $M(f, B, B') = I$.

   (c) Primero se prueba que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t))$ y luego que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t)))$ (usaremos $V^{**} = V$). Sea $v \in \mathrm{Ker(f)}$. Tomamos $\varphi \in Im(f^t)$ y hay que probar que $v(\varphi) = 0$, es decir, $\varphi(v) = 0$. Como $\varphi \in Im(f^t)$, existe $\varphi' \in V'^*$ tal que $f^t(\varphi') = \varphi$. Por tanto,

   $$\varphi(v) = f^t(\varphi')(v) = \varphi'(f(v)) \overset{(1)}{=} \varphi'(0) = 0,$$

   donde en (1) se ha usado que $v \in \mathrm{Ker}(f)$.
   Por otro lado, si $n = dim(V) = dim(V^*)$, se tiene

   $$\dim(\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t))) = n - \dim(Im(f^t)) \overset{(1)}{=} n - \dim(Im(f)) \overset{(2)}{=} \dim(\mathrm{Ker(f)}),$$

   donde en (1) se usa que $r(f) = r(f^t)$ y en (2) que $n = \dim(\mathrm{Ker(f)}) + r(f)$.

2. Como sólo hay una ecuación cartesiana de U, entonces $\dim(U) = 2$ y una base de U es $\{(-1,2,0),(0,0,1)\}$. Ampliamos a una base de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(-1,2,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$, pues al poner los tres vectores en una matriz, su determinante no es cero (es justamente 1). Se define f mediante

   $$f(-1,2,0) = f(0,0,1) = (0,0,0), f(0,1,0) = (1,0,0).$$

   Entonces

   $$(-1,2,0),(0,0,1) \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow U =< (-1,2,0),(0,0,1) >\subset \mathrm{Ker}(f)$$

   y $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 2$. Por otro lado,

   $$(1,0,0) = f(0,1,0) \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow< (1,0,0) >\subset Im(f)$$

   y así $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 1$. Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = n(f) + r(f)$, entonces $n(f) = 2$, $r(f) = 1$ y tenemos igualdades en todas las inclusiones anteriores. De paso, una base de $\mathrm{Im}(f)$ es $\{(1,0,0)\}$.

Para hallar la matriz, sólo hay que calcular $f(1,0,0)$. Hallando las coordenadas de este vector respecto de B, obtenemos que son: $(-1/2, 0, 1/2)$, luego

$$f(1,0,0) = -\frac{1}{2}f(-1,2,0) + \frac{1}{2}f(0,1,0) = (\frac{1}{2}, 0, 0).$$

Por tanto,

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Si $B_u^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, y como la ecuación cartesiana de U respecto de B_u es $x + y - z = 0$, entonces una base de $an(U)$ es $\{(1,1,-1,0)\}$, escrito el vector en coordenadas respecto de B_u^*, es decir, $\{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3\}$.

   Si escribimos este vector en coordenadas respecto de B_u^* y ampliamos hasta una base de $\mathbb{R}^4$, obtenemos las coordenadas de vectores de $\mathbb{R}^{4*}$ respecto de B_u^* que forman una base de $\mathbb{R}^{4*}$. Basta con tomar: $\{(1,1,-1,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$, es decir, $B' = \{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

   Sea $B' = B^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ y $B' = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$. Escribimos $e_1' = (a, b, c, d)$ y aplicamos a e_1' los elementos de B':

$$a + b - c = 1, b = 0, c = 0, d = 0.$$

   Resolviendo, queda $e_1' = (1,0,0,0)$. Del mismo modo se hace para los demás vectores, obteniendo: $e_2' = (-1,1,0,0)$, $e_3' = (1,0,1,0)$ y $e_4' = (0,0,0,1)$.

4. Se tiene $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + y = 0, y + z = 0\}$. Como las dos ecuaciones son linealmente independientes, entonces $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$. Dando valores a z, obtenemos un vector del núcleo, que constituirá, por tanto, una base del mismo: $\mathrm{Ker}(f) =< (1,-1,1) >$.

   Hallamos $f^t(\varphi)$.

$$f^t(\varphi)(x,y,z) = \varphi(f(x,y,z)) = \varphi(x+y, y+z) = x + y - 2(y+z) = x - y - 2z.$$

   Por tanto, si $B_u = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B_u^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, las coordenadas de $f^t(\varphi)$ son $(1,-1,-2)$.

Observaciones:

En el ejercicio 1. (a), como $f(B)$ es un sistema de generadores de $Im(f)$, entonces $f(B)$ es una base de $Im(f)$. Esto prueba que $\dim(V) = \dim(Im(f))$. Por la fórmula de las dimensiones, se tiene $\dim(Ker(f)) = 0$, es decir, f es inyectiva.

En el ejercicio 4, segundo apartado, podemos escribir $f^t(\varphi) = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3$. Aplicando a ambos lados la base B_u, se tiene

$$a = f^t(\varphi)(e_1), b = f^t(\varphi)(e_2), c = f^t(\varphi)(e_3).$$

Por la definición de f^t, f y φ, se concluye

$$a = f^t(\varphi)(e_1) = \varphi(f(e_1)) = \varphi(1,0) = 1$$

$$b = f^t(\varphi)(e_2) = \varphi(f(e_2)) = \varphi(1,1) = -1$$

$$c = f^t(\varphi)(e_3) = \varphi(f(e_3)) = \varphi(0,1) = -2$$

y las coordenadas son $(1,-1,-2)$, es decir, $f^t(\varphi) = \omega_1 - \omega_2 - 2\omega_3$.