ALUMNO:______________________________ DNI:______________ GRUPO: _____

Lógica y Métodos Discretos

Examen de Teoría

(21/09/2012)

Ejercicio 1. *Sean x_n e y_n las sucesiones definidas por:*

$$x_0 = 0 \qquad\qquad y_0 = 0$$
$$x_1 = 2$$
$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n \qquad\qquad y_n = y_{n-1} + n \cdot 2^n$$

Es decir, $y_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^k = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + \cdots + n \cdot 2^n$.

1. *Calcula los términos x_2, x_3, x_4, x_5 e y_1, y_2, y_3, y_4, y_5.*
2. *Comprueba que $x_n = y_n$ para todo número natural n*
3. *Calcula una expresión para el término general x_n (o de y_n).*

Solución:

1. Tenemos que:

$$y_1 = y_0 + 1 \cdot 2^1 = 0 + 2 = 2$$
$$x_2 = 3x_1 - 2x_0 + 2^2 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 4 = 6 + 0 + 4 = 10 \qquad y_2 = y_1 + 2 \cdot 2^2 = 2 + 2 \cdot 4 = 2 + 8 = 10$$
$$x_3 = 3x_2 - 2x_1 + 2^3 = 3 \cdot 10 - 2 \cdot 2 + 8 = 30 - 4 + 8 = 34 \qquad y_3 = y_2 + 3 \cdot 2^3 = 10 + 3 \cdot 8 = 10 + 24 = 34$$
$$x_4 = 3x_3 - 2x_2 + 2^4 = 3 \cdot 34 - 2 \cdot 10 + 16 = 102 - 20 + 16 = 98 \qquad y_4 = y_3 + 4 \cdot 2^4 = 34 + 4 \cdot 16 = 34 + 64 = 98$$
$$x_5 = 3x_4 - 2x_3 + 2^5 = 3 \cdot 98 - 2 \cdot 34 + 32 = 294 - 68 + 32 = 258 \qquad y_5 = y_4 + 5 \cdot 2^5 = 98 + 5 \cdot 32 = 98 + 160 = 258$$

2. Para comprobar que $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ hacemos uso del segundo principio de inducción.

   En el apartado anterior hemos visto que $x_n = y_n$ para $n \geq 5$. En realidad, nos hace falta únicamente para $n = 0, 1$.

   Sea ahora $n \geq 2$, y supongamos que para todo $m < n$ se tiene que $x_m = y_m$ (hipótesis de inducción). Demostremos que $x_n = y_n$. Entonces:

$$\begin{array}{rcll}
x_n & = & 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n & \text{Por la definición de la sucesión } x_n \\
 & = & 3y_{n-1} - 2y_{n-2} + 2^n & \text{Por hipótesis de inducción, ya que } n-1 < n \text{ y } n-2 < n \\
 & = & y_{n-1} + 2y_{n-1} - 2y_{n-2} + 2^n & \\
 & = & y_{n-1} + 2(y_{n-1} - y_{n-2}) + 2^n & \\
 & = & y_{n-1} + 2(n-1)2^{n-1} + 2^n & \text{Pues } y_{n-1} = y_{n-2} + (n-1)2^{n-1}, \text{ luego } y_{n-1} - y_{n-2} = (n-1)2^{n-1} \\
 & = & y_{n-1} + (n-1)2^n + 2^n & \text{Ya que } 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \\
 & = & y_{n-1} + n \cdot 2^n - 2^n + 2^n & \\
 & = & y_{n-1} + n \cdot 2^n & \\
 & = & y_n & \text{Por la definición de la sucesión } y_n
\end{array}$$

3. Vamos a calcular el término general de la sucesión x_n. Puesto que x_n viene dada por una recurrencia lineal no homogénea, calculamos su polinomio característico. Este polinomio será el producto de dos polinomios: el correspondiente a la parte homogénea, y el correspondiente a la parte no homogénea.

   Con respecto a la parte homogénea, el polinomio es $x^2 - 3x + 2$. Y como la parte no homogénea es 2^n, hemos de multiplicar el anterior polinomio por $x - 2$. Luego el polinomio característico es $(x^2 - 3x + 2)(x - 2) = (x - 1)(x - 2)^2$.

   El polinomio característico también podría haberse obtenido transformando la relación de recurrencia en una relación homogénea. Para eso, hemos de eliminar el término 2^n.

   Partimos de la relación de recurrencia $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n$.

   Escribimos la misma relación, pero para el término anterior: $x_{n-1} = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} + 2^{n-1}$.

   Multiplicamos esta relación por 2: $2x_{n-1} = 6x_{n-2} - 4x_{n-3} + 2^n$.

   Restamos ambas igualdades.

$$\begin{array}{rcccccc}
x_n & = & 3x_{n-1} & - & 2x_{n-2} & + & 2^n \\
2x_{n-1} & = & 6x_{n-2} & - & 4x_{n-3} & + & 2^n \\
\hline
x_n - 2x_{n-1} & = & (3x_{n-1} - 6x_{n-2}) & - & (2x_{n-2} - 4x_{n-3}) & + & 0
\end{array}$$

Luego nos queda $x_n - 2x_{n-1} = 3x_{n-1} - 6x_{n-2} - 2x_{n-2} + 4x_{n-3}$, es decir, $x_n - 5x_{n-1} + 8x_{n-2} - 4x_{n-3} = 0$.

La ecuación característica es $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$. Factorizamos el polinomio

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -5 & 8 & -4 \\
1 & & 1 & -4 & 4 \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -4 & 4 \\
2 & & 2 & -4 \\
\hline
 & 1 & -2 & 0
\end{array}$$

Y el resultado es $(x-1)(x-2)(x-2)$.

Tenemos entonces dos raíces, que son $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$, con multiplicidades 1 y 2 respectivamente. La solución general adopta la forma $x_n = a + b \cdot 2^n + c \cdot n \cdot 2^n$. Como conocemos los tres primeros términos de la sucesión, planteamos un sistema de ecuaciones para calcular los coeficientes:

$$\begin{array}{rcccccccc}
x_0 = 0 & \quad & a & + & b & & & = & 0 \\
x_1 = 2 & & a & + & 2b & + & 2c & = & 2 \\
x_2 = 10 & & a & + & 4b & + & 8c & = & 10
\end{array}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 8 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego la solución del sistema es $a = 2$, $b = -2$, $c = 2$. El término general es entonces

$$x_n = 2 - 2 \cdot 2^n + 2n \cdot 2^n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$$

Nota:

La expresión que acabamos de obtener nos permite otra forma de demostrar que $x_n = y_n$. En este caso es usando el primer principio de inducción.

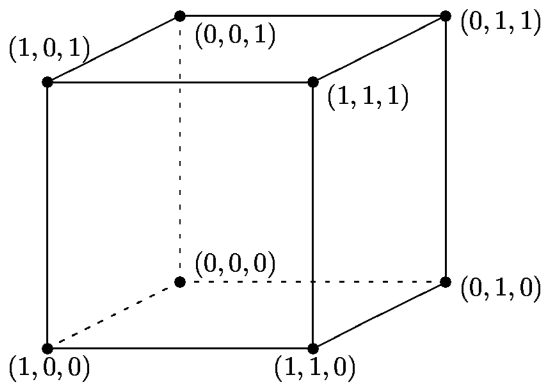
- Caso base: $x_n = y_n$ para $n = 0$. Esto es cierto, pues sabemos que $x_0 = y_0 = 0$.
- Hipótesis de inducción. Para un número natural n suponemos que $y_n = x_n$.
- Paso inductivo. Tenemos que demostrar que $y_{n+1} = x_{n+1}$.

$$\begin{array}{rcll}
y_{n+1} & = & y_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} & \text{Por la definición de la sucesión } y_n \\
 & = & x_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} & \text{Pues } x_n = y_n \text{ (Hipótesis de inducción)} \\
 & = & 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1} + (n+1) \cdot 2^{n+1} & \text{Pues } x_n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1} \\
 & = & 2 + (n-1+n+1) \cdot 2^{n+1} & \text{Sacando factor común } 2^{n+1} \\
 & = & 2 + 2n \cdot 2^{n+1} & \text{Operando: } n-1+n+1 = 2n \\
 & = & 2 + n \cdot 2^{n+2} & \text{Ya que } 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2} \\
 & = & x_{n+1} & \text{Por la expresión que hemos obtenido de la sucesión } x_n
\end{array}$$

Ejercicio 2. *Sea Q_3 el grafo cuyo conjunto de vértices es $\mathbb{B}^3$, y dos vértices (x, y, z) y (x', y', z') son adyacentes si se diferencian en una coordenada. De forma análoga se define el grafo Q_4 (y el grafo Q_n).*

1. *Estudia si Q_3 y Q_4 son grafos de Euler.*
2. *Comprueba que ambos son grafos de Hamilton. Da un ciclo de Hamilton para cada uno de ellos.*
3. *Calcula el número cromático de Q_3 y Q_4.*
4. *Da una representación plana del grafo Q_3.*
5. *Sea G el dual de Q_3 obtenido en la representación que has hecho en el apartado anterior. Calcula su número cromático. ¿Cuántos colores son necesarios para pintar las caras de un cubo, si dos caras adyacentes deben tener colores diferentes?.*

Solución:
El grafo Q_3 representa un cubo (y el grafo Q_4 un cubo tetradimensional).



1. Vemos como cada vértice en Q_3 tiene grado 3 (cada vértice (x, y, z) está unido a los vértices $(\overline{x}, y, z)$, $(x, \overline{y}, z)$ y $(x, y, \overline{z})$, donde $\overline{x}$ vale 1 si $x = 0$, y vale 0 si $x = 1$, e igual para $\overline{y}$ y $\overline{z}$). Por tanto, Q_3 no es un grafo de Euler.

   Q_4 sí lo es, pues cada vértice tiene grado 4, que es par.

2. Para encontrar un ciclo de Hamilton en Q_3 podemos recorrer la cara inferior, y antes de cerrar el ciclo, subimos a la cara superior, y la recorremos en sentido contrario. Nos quedaría entonces el siguiente ciclo:

$$(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,1,0) \to (0,1,0) \to (0,1,1) \to (1,1,1) \to (1,0,1) \to (0,0,1) \to (0,0,0)$$

   Para encontrar un ciclo de Hamilton en Q_4, lo que hacemos es recorrer todos los vértices con última coordenada cero (siguiendo el camino seguido para Q_3), y después recorrer los vértices de segunda coordenada uno siguiendo el camino inverso. Es decir:

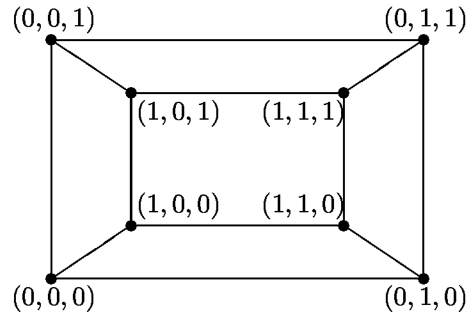
$$\begin{gathered}(0,0,0,0) \to (1,0,0,0) \to (1,1,0,0) \to (0,1,0,0) \to (0,1,1,0) \to (1,1,1,0) \to (1,0,1,0) \to (0,0,1,0) \to \\ \to (0,0,1,1) \to (1,0,1,1) \to (1,1,1,1) \to (0,1,1,1) \to (0,1,0,1) \to (1,1,0,1) \to (1,0,0,1) \to (0,0,0,1) \to (0,0,0,0)\end{gathered}$$

3. Ambos grafos, Q_3 y Q_4 son bipartidos. Las dos particiones serían, por una parte los vectores que tienen un número impar de unos, y por otro los que tienen un número par de unos. Por ejemplo, para Q_3 tendríamos

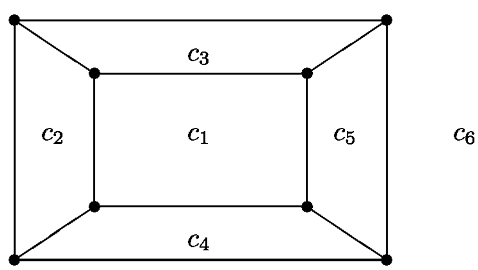
$$V_1 = \{(0,0,0);\ (0,1,1);\ (1,0,1);\ (1,1,0)\} \qquad V_2 = \{(1,0,0);\ (0,1,0);\ (0,0,1);\ (1,1,1)\}$$

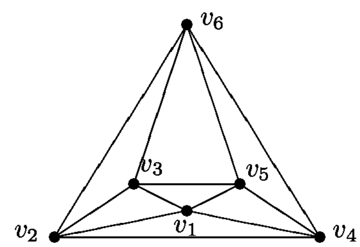
   Se ve claramente que todo lado une un vértice de V_1 con un vértice de V_2. Para Q_4 se hace de forma análoga. Por tanto, el número cromático de Q_3 y de Q_4 vale 2.

4. Puesto que Q_3 es el grafo asociado a un poliedro, es plano. Una representación plana podría ser:



5. A partir de la representación que hemos hecho de Q_3, nombramos las caras, y obtenemos una representación del grafo dual. Este grafo tiene un lado por cada cara de la representación plana de Q_3. Dos vértices están unidos si las correspondientes caras están separadas por un lado.





Al contener un triángulo (un ciclo de longitud 3), son necesarios al menos tres colores para colorear este grafo (pues los tres vértices del ciclo tienen que tener colores distintos). Y vemos que con tres colores es suficiente, ya que podemos colorear v_1 y v_6 con un color, v_2 y v_5 con otro, y por último v_3 y v_4 con un tercer color.

El número cromático es entonces 3. Ese es entonces el número mínimo de colores necesarios para colorear las caras de un cubo si no queremos que dos caras adyacentes tengan el mismo color.

Ejercicio 3. *Sea* $X = \{(0,0);\ (1,0);\ (3,1);\ (4,3);\ (4,4);\ (2,2);\ (3,4);\ (1,3);\ (0,1)\} \subseteq \mathbb{N}^2$. *Consideramos en* X *el orden producto.*

1. *Dibuja el diagrama de Hasse de* X.
2. *Comprueba que* X *no es un retículo.*
3. *Calcula cotas superiores, cotas inferiores, supremo, ínfimo, elementos maximales, elementos minimales, máximo y mínimo (si existen) de* $Y = \{(3,1);\ (2,2);\ (3,4);\ (4,3)\} \subseteq X$.
4. *Encuentra un subconjunto de* $\mathbb{N}^2$ *que contenga a* X*, con 15 elementos a lo sumo, y que sea un retículo. Estudia si es distributivo.*

Solución:

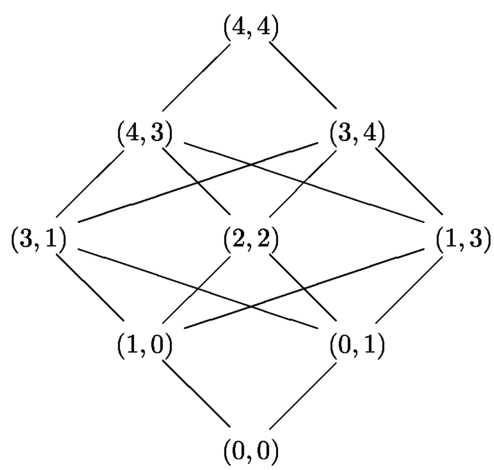
1. Vemos claramente que $(0,0)$ es el elemento más pequeño del conjunto X.

   Entre $(0,0)$ y $(1,0)$ no hay ningún elemento, e igual entre $(0,0)$ y $(0,1)$. Y estos dos ($(1,0)$ y $(0,1)$) no son comparables. Por tanto, $(0,0)$ estará unido a $(1,0)$ y a $(0,1)$.

   El elemento $(3,1)$ es mayor que $(1,0)$ y $(0,1)$. Y al igual que antes, no hay ningún elemento entre $(1,0)$ y $(3,1)$ ni entre $(0,1)$ y $(3,1)$. Entonces, $(1,0)$ y $(0,1)$ estarán unidos a $(3,1)$. Ocurre igual con $(2,2)$ y $(1,3)$.

   $(3,4)$ y $(4,3)$ son mayores que estos tres elementos. Estarán entonces unidos cada uno de los elementos $(3,1)$, $(2,2)$ y $(1,3)$ a $(3,4)$ y $(4,3)$. Y por encima de estos dos está $(4,4)$, que es el máximo del conjunto X.

   Con esto, tenemos el siguiente diagrama de Hasse



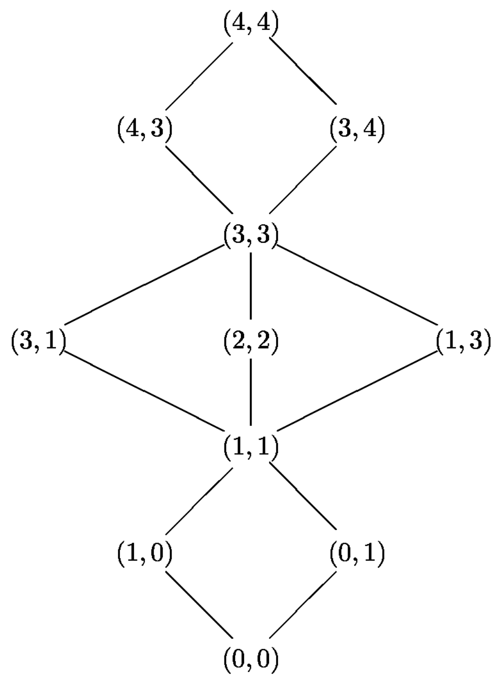
2. Para comprobar que no es un retículo, vamos a ver que hay elementos que no tienen supremo. Por ejemplo, sea $x = (3,1)$ e $y = (2,2)$. El conjunto de las cotas superiores de x e y es $\{(4,3),\ (3,4),\ (4,4)\}$. Y ese conjunto no tiene mínimo. Es decir, no existe la menor de las cotas superiores. Por tanto, no existe el supremo de x e y.

   Al encontrar dos elementos para los que no hay supremo, el conjunto no es un retículo.

3. Tenemos:

Cotas superiores:	$\{(4,4)\}$	Único elemento mayor que todos los de Y.
Supremo:	$(4,4)$	La menor de las cotas superiores.
Máximo:	No tiene	El supremo no pertenece a Y.
Maximales:	$\{(4,3),(3,4)\}$	No hay ninguno mayor que ellos en Y.
Cotas inferiores:	$\{(1,0),(0,1),(0,0)\}$	Son menores que todos los elementos de Y.
Ínfimo:	No tiene	El conjunto anterior no tiene máximo.
Mínimo:	No tiene	Pues no tiene ínfimo.
Minimales:	$\{(3,1),(2,2)\}$	En Y no hay ningún elemento menor que ellos.

4. En este caso, la opción más fácil es añadir a X los elementos $(1,1)$ y $(3,3)$. El diagrama de Hasse del nuevo conjunto es



No es difícil comprobar que este conjunto es un retículo, y que no es distributivo, ya que tiene un subrretículo $(\{(1,1),(3,1),(2,2),(1,3),(3,3)\})$ que es isomorfo al diamante.

Ejercicio 4. *Dada la función booleana* $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ *definida por*

$$f(x,y,z,t) = (x+y+\overline{z}+t)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+z)\cdot(x+\overline{y}+\overline{z}+\overline{t})\cdot(\overline{x}+y+z+\overline{t})\cdot(x+\overline{z}+t)\cdot(\overline{x}+y+z+t)$$

1. *Calcula la forma normal canónica disyuntiva de* f.
2. *Optimiza la expresión obtenida en el apartado anterior.*

Solución:

1. Puesto que la función nos la han dado como un producto de varios términos, lo más fácil es ver para que valores de las variables x, y, z, t la función toma el valor 0. Esto ocurrirá cuando alguno de los factores tome el valor cero.

   Por ejemplo, si $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $t = 0$ tenemos que $x + y + \overline{z} + t$ vale cero, luego $f(x,y,z,t)$ vale también cero.

   De la misma forma, si $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, (t puede valer tanto 0 como 1) se tiene que $\overline{x}+\overline{y}+z = 0$. Por tanto, para esos valores, $f(x,y,z,t) = 0$.

   Si repetimos esto con cada uno de los factores, obtendremos los puntos en los que f toma el valor cero, y por tanto, en los que toma el valor 1. De esta forma, tenemos el siguiente cuadro.

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$	1	1	0	0
$\overline{z}\,t$	1	1	0	0
$z\,t$	1	0	1	1
$z\,\overline{t}$	0	0	1	1

   La forma normal canónica disyuntiva es entonces:

$$f(x,y,z,t) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}\,y\overline{z}\,\overline{t} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,t + \overline{x}\,y\overline{z}\,t + \overline{x}\,\overline{y}\,zt + xyzt + x\overline{y}\,zt + xyz\overline{t} + x\overline{y}\,z\overline{t}$$

2. Ahora nos fijamos en el diagrama anterior, y agrupamos para obtener una forma simplificada.

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$	1	1		
$\overline{z}\,t$	1	1		
$z\,t$	1		1	1
$z\,\overline{t}$			1	1

   Y vemos que $f(x,y,z,t) = \overline{x}\,\overline{z} + xz + \overline{x}\,\overline{y}\,t$

Ejercicio 5.

1. *¿Cuántos números en binario hay con seis cifras, y que contengan la secuencia 10? ¿Y que contengan la secuencia 01?*

2. *Tenemos un grupo con 12 hombres y 9 mujeres, y formamos cuatro parejas (cada pareja está formada por un hombre y una mujer). ¿De cuántas maneras podemos formar esas cuatro parejas?. Si en el grupo, hay un hombre y una mujer que no pueden ir juntos. ¿De cuántas maneras podemos formar entonces las cuatro parejas?*

Solución:

1. La forma más fácil de abordar este problema es contando los números que no contienen la secuencia 10.

   Comenzamos viendo cuántos números hay que se expresen con 6 cifras en binario. Son 32 (los que van desde el 32, que en binario es 100000 hasta el 63, que en binario es 111111).

   Puesto que la cifra de la izquierda es 1, para que no contenga la secuencia 10, el número debe ser 111111. Es decir, el único número que no contiene la secuencia 10 es el 111111 (pues si recorremos el número de izquierda a derecha, si encontramos un cero, debe ir precedido de un uno). Por tanto, hay 32-1=31 que sí tienen un uno seguido de un cero.

   También podemos resolverlo usando el principio de inclusión-exclusión. La secuencia 10 puede estar en cinco posiciones diferentes. Vamos a llamar A_1 al conjunto formado por todos los números en binario que empiezan por 10. Representaremos los elementos de A_1 como 10____ El cardinal de A_1 es $2^4 = 16$, pues tenemos dos posibilidades para elegir cada una de las cifras que hay libres. De forma análoga tendríamos los conjuntos A_2, A_3, A_4 y A_5.

$$\begin{array}{lll} A_1: & 10\_\_\_\_ & |A_1| = 16 \\ A_2: & 110\_\_\_ & |A_2| = 8 \\ A_3: & 1\_10\_\_ & |A_3| = 8 \\ A_4: & 1\_\_10\_ & |A_4| = 8 \\ A_5: & 1\_\_\_10 & |A_5| = 8 \end{array}$$

   Es claro que $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_3 \cap A_4 = A_4 \cap A_5 = \emptyset$, mientras que $|A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_1 \cap A_5| = 4$ y $|A_2 \cap A_4| = |A_2 \cap A_5| = |A_3 \cap A_5| = 2$. También tenemos que $|A_1 \cap A_3 \cap A_5| = 1$ y que todas las demás intersecciones son vacías.

   El conjunto de los números que en binario se escriben con 6 cifras, y no contienen la secuencia 10 es el conjunto $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$. Por el principio de inclusión-exclusión, su cardinal vale:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = 16 + 8 + 8 + 8 + 8 - 4 - 4 - 4 - 2 - 2 - 2 + 1 = 31$$

   Para contar los que contienen la secuencia 01 procedemos de forma análoga. Contamos aquéllos que no la contienen. Para que esto ocurra, una vez que encontremos un cero en la expresión binaria del número, todas las cifras de la derecha deben ser también cero. Los números que no la contienen son entonces:

$$111111 \quad 111110 \quad 111100 \quad 111000 \quad 110000 \quad 100000$$

   Es decir, un total de 6. Por tanto hay 32-6=26 números que sí la contienen.

   Si los contamos usando el principio de inclusión-exclusión, y siguiendo un esquema similar al que hemos empleado antes, tendríamos:

$$\begin{array}{lll} B_1: & 101\_\_\_ & |B_1| = 8 \\ B_2: & 1\_01\_\_ & |B_2| = 8 \\ B_3: & 1\_\_01\_ & |B_3| = 8 \\ B_4: & 1\_\_\_01 & |B_4| = 8 \end{array}$$

Y ahora, $B_1 \cap B_2 = B_2 \cap B_3 = B_3 \cap B_4 = \emptyset$, $|B_1 \cap B_3| = |B_1 \cap B_4| = |B_2 \cap B_4| = 2$, y todas las demás intersecciones son vacías. Por tanto,

$$|B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4| = 8 + 8 + 8 + 8 - 2 - 2 - 2 = 26$$

2. Para formar las parejas, dividimos el proceso en varias etapas, y vamos contando el número de formas en que podemos realizar cada una de esas etapas. Por el principio del producto, multiplicando los resultados obtendremos de cuántas maneras podemos formas las 4 parejas.

    - Elegimos 4 hombres del conjunto de 12. Como el orden en que los elijamos no importa, podemos hacerlo de $\binom{12}{4}$ maneras distintas.
    - Elegimos 4 mujeres del conjunto de 9. Podemos hacerlo de $\binom{9}{4}$ formas diferentes.

    Una vez elegidos los hombres y las mujeres, hay que emparejarlos. Es decir, tenemos 4 hombres y 4 mujeres, y queremos formar cuatro parejas. Lo hacemos como sigue:

    - Una mujer elige su pareja. Puede hacerlo de 4 formas distintas.
    - Una segunda mujer elige la suya. Tiene 3 posibilidades.
    - Una tercera mujer elige la suya. Ya sólo tiene dos donde elegir.

    El número total es entonces $\binom{12}{4} \cdot \binom{9}{4} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{12!}{8! \cdot 4!} \frac{9!}{5! \cdot 4!} 4! = \frac{12! \cdot 9!}{8! \cdot 5! \cdot 4!} = 1496880$.

    También podemos hacerlo así:

    - Elegimos 4 mujeres del conjunto de 9. Podemos hacerlo de $\binom{9}{4}$.
    - Una mujer elige su pareja. Puede hacerlo de 12 formas distintas.
    - Una segunda mujer elige la suya. Tiene 11 posibilidades.
    - Una tercera mujer elige la suya. Tiene 10 posibilidades.
    - La última mujer elige su pareja entre los 9 hombres que quedan.

    El número total es $\binom{9}{4} \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 126 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 1496880$.

    Supongamos que H_1 y M_1 son respectivamente el hombre y la mujer que no pueden ir juntos. Tenemos que ver cuántas maneras hay de formar las 4 parejas de forma que ellos dos no vayan juntos. Para eso, contamos cuántas maneras hay de formar las parejas en las que estén los dos juntos.

    Pero si van los dos juntos, en realidad lo que estamos haciendo es formar 3 parejas de un conjunto formado por 11 hombres y 8 mujeres (la cuarta pareja sería la formada por ellos dos). Las formas de hacerlo son $\binom{11}{3} \cdot \binom{8}{3} \cdot 3! = 55440$.

    Luego la solución al problema es 1496880-55440=1441440.

Ejercicio 6. *Sea* $\alpha = (p \to (q \to (r \to s))) \to ((p \to q) \to (p \to (r \to s)))$. *Comprueba que* α *es una tautología.*

Solución:

Decir que α es tautología es lo mismo que decir que $\models \alpha$ (es decir, α es consecuencia lógica del conjunto vacío). Aplicamos repetidas vences el teorema de la deducción para transformar este problema.

$$\begin{array}{l}
\models (p \to (q \to (r \to s))) \to ((p \to q) \to (p \to (r \to s))) \\
\{p \to (q \to (r \to s))\} \models (p \to q) \to (p \to (r \to s)) \\
\{p \to (q \to (r \to s));\ p \to q\} \models p \to (r \to s) \\
\{p \to (q \to (r \to s));\ p \to q;\ p\} \models r \to s \\
\{p \to (q \to (r \to s));\ p \to q;\ p;\ r\} \models s
\end{array}$$

Y probar esto es equivalente a probar que el siguiente conjunto de fórmula es insatisfacible.

$$\{p \to (q \to (r \to s));\ p \to q;\ p;\ r;\ \neg s\}$$

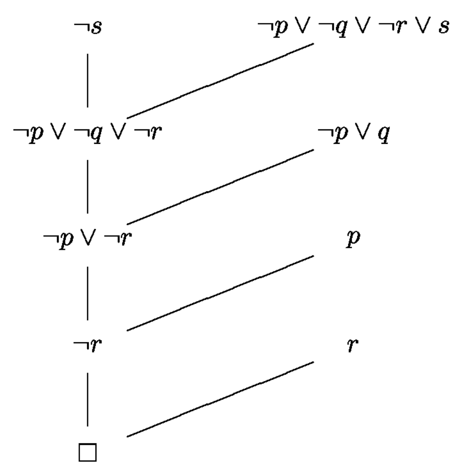
Calculamos la forma clausular de cada una de las fórmulas que tenemos:

$$\begin{array}{rcl}
p \to (q \to (r \to s)) & \xrightarrow{\text{Forma clausular}} & \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s \\
p \to q & \xrightarrow{\text{Forma clausular}} & \neg p \vee q \\
p & \xrightarrow{\text{Forma clausular}} & p \\
r & \xrightarrow{\text{Forma clausular}} & r \\
\neg s & \xrightarrow{\text{Forma clausular}} & \neg s
\end{array}$$

Tenemos entonces que probar que el conjunto de cláusulas

$$\{\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s;\ \neg p \vee q;\ p;\ r;\ \neg s\}$$

es insatisfacible. Como este conjunto es un conjunto de Horn, buscamos una deducción lineal-input de la cláusula vacía comenzando por la cláusula negativa ($\neg s$).



Y al llegar a la cláusula vacía deducimos que el conjunto es insatisfacible, luego α es una tautología. También podríamos haber llegado a la misma conclusión con el algoritmo de Davis-Putnam.

$$
\begin{array}{c}
\{\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s;\ \neg p \vee q;\ p;\ r;\ \neg s\} \\
\Big| \quad \lambda = p \\
\{\neg q \vee \neg r \vee s;\ q;\ r;\ \neg s\} \\
\Big| \quad \lambda = q \\
\{\neg r \vee s;\ r;\ \neg s\} \\
\Big| \quad \lambda = r \\
\{s;\ \neg s\} \\
\Big| \quad \lambda = s \\
\{\square\}
\end{array}
$$

Ejercicio 7. *Sean* $\alpha_1 = \forall y(Q(a,y) \to \exists z(P(z) \wedge R(z,y)))$ *y* $\alpha_2 = \exists x R(x,a) \to \forall z \exists y(R(z,y) \wedge Q(y,z))$ *dos fórmulas de un lenguaje de primer orden, y consideramos la estructura siguiente:*

- *Dominio: Números naturales* ($\mathbb{N}$).
- *Asignación de constantes:* $a = 1$.
- *Asignación de predicados:* $P(x) \equiv x$ *es primo.* $Q(x,y) \equiv x < y$. $R(x,y) \equiv x|y$.

Estudia si las fórmulas α_1 *y* α_2 *se interpretan como verdaderas o falsas en esta estructura.*

Solución:

- Vamos con α_1.

  Tenemos que $Q(a,y)$ significa $y > 1$. En tal caso, la fórmula α_1, nos dice que para cualquier $y \in \mathbb{N}$, si $y > 1$ entonces existe z que es primo y que divide a y. Dicho de otra forma, todo número $y > 1$ tiene un divisor primo.

  Eso sabemos que es cierto, por tanto, la fórmula α_1 se interpreta como cierta.

- Vamos ahora con α_2.

  En primer lugar interpretamos $\exists x R(x,a)$. Dado el significado que le hemos dado al símbolo de predicado R, y la asignación que hemos hecho del símbolo de constante a, esa fórmula quiere decir que existe un número natural que es divisor de 1, lo cual es cierto, pues $x = 1$ es un divisor de 1.

  Interpretamos ahora $\forall z \exists y(R(z,y) \wedge Q(y,z))$. En nuestro caso, esa fórmula dice que para todo $z \in \mathbb{N}$, existe $y \in \mathbb{N}$, que es múltiplo de z y menor que z. Eso no es verdad, pues no hay ningún número que sea múltiplo de cero y a la vez menor que cero (de hecho, no hay ninguno que sea menor que cero). Por tanto, si tomamos $z = 0$, la fórmula $\exists y(R(z,y) \wedge Q(y,z))$ es falsa.

  La fórmula α_2 adopta la forma $\gamma \to \delta$, donde γ se interpreta como cierta y δ se interpreta como falsa. Por tanto, α_2 se interpreta como falsa.

En resumen, α_1 es verdadera en la estructura dada, mientras que α_2 es falsa.

Ejercicio 8. *Dadas las siguientes cláusulas:*

$\alpha_1 = P(x) \vee \neg Q(a,x)$.

$\alpha_2 = T(x) \vee \neg P(x)$.

$\alpha_3 = Q(x, f(x)) \vee \neg R(x) \vee \neg S(x)$.

$\alpha_4 = S(f(f(a)))$.

$\alpha_5 = P(a)$.

$\alpha_6 = \neg T(f(x)) \vee \neg R(x) \vee \neg S(x)$.

$\alpha_7 = S(x) \vee \neg S(f(x))$.

$\alpha_8 = R(x) \vee \neg P(x)$.

Comprueba que el conjunto $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ *es un conjunto de Horn, y que es insatisfacible.*

Solución:

El conjunto es un conjunto de Horn, pues hay una cláusula con todos los literales negativos (α_6), y en el resto de las cláusulas hay exactamente un literal positivo ($P(x)$ en α_1, $T(x)$ en α_2, $Q(x, f(x))$ en α_3, $S(f(f(a)))$ en α_4, $P(a)$ en α_5, $S(x)$ en α_7 y $R(x)$ en α_8.

Si es insatisfacible, habrá una deducción lineal-input de la cláusula vacía con raíz la cláusula negativa. Vamos a dar una.

$$
\begin{array}{ccc}
\neg T(f(x)) \vee \neg R(x) \vee \neg S(x) & (y|f(x)) & T(y) \vee \neg P(y) \\
\neg R(x) \vee \neg S(x) \vee \neg P(f(x)) & (y|x) & R(y) \vee \neg P(y) \\
\neg S(x) \vee \neg P(f(x)) \vee \neg P(x) & (y|x) & S(y) \vee \neg S(f(y)) \\
\neg P(f(x)) \vee \neg P(x) \vee \neg S(f(x)) & (y|f(x)) & P(y) \vee \neg Q(a,y) \\
\neg P(x) \vee \neg S(f(x)) \vee \neg Q(a, f(x)) & (x|a) & P(a) \\
\neg S(f(a)) \vee \neg Q(a, f(a)) & (x|f(a)) & S(x) \vee \neg S(f(x)) \\
\neg Q(a, f(a)) \vee \neg (S(f(f(a))) & (x|a) & Q(x, f(x)) \vee \neg R(x) \vee \neg S(x) \\
\neg (S(f(f(a))) \vee \neg R(a) \vee \neg S(a) & & S(f(f(a))) \\
\neg R(a) \vee \neg S(a) & (x|a) & R(x) \vee \neg P(x) \\
\neg S(a) \vee \neg P(a) & (x|a) & S(x) \vee \neg S(f(x)) \\
\neg P(a) \vee \neg S(f(a)) & & P(a) \\
\neg S(f(a)) & (x|a) & S(x) \vee \neg S(f(x)) \\
\neg S(f(f(a))) & & S(f(f(a))) \\
\square & &
\end{array}
$$

Algunas consideraciones:

- Cuando se hace la resolvente de dos cláusulas, las variables que intervienen en una y en otra son diferentes, aunque se llamen igual. Por tal motivo, para evitar confusiones, se han renombrado las variables de una de las cláusulas.

- El camino seguido no es el más corto. Pero se ha seguido este por ser más sencillo, pues siempre se ha resuelto con el literal que teníamos más a la izquierda, y los literales nuevos que iban saliendo en el proceso íbamos colocándolos a la derecha.

- En la tercera línea, cuando tenemos la cláusula $\neg S(x) \vee \neg P(f(x)) \vee \neg P(x)$, hemos resuelto con α_7. Podríamos haberlo hecho también con α_4, pero en tal caso habríamos entrado una rama sin salida.

- También, en la quinta línea, en la que teníamos la cláusula $\neg P(x) \vee \neg S(f(x)) \vee \neg Q(a, f(x))$, hemos resuelto con α_5, y no con α_1, que también podríamos hacerlo. También habríamos entrado en una rama sin salida. El mismo comentario vale para $\neg P(a) \vee \neg S(f(a))$.