UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES I
Primera prueba. 27 de noviembre de 2015

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.

[3] Ejercicio 1.- Una población $P(t)$, que vive en un medio donde la capacidad para sustentarse varía estacionalmente, se rige por la ecuación de Bernouilli

$$\frac{dP}{dt} = P\,(1 - P\cos t).$$

Hallar $P(t)$ cuando $P(0) = P_0$.

[3] Ejercicio 2.- Definir las aproximaciones sucesivas del P.V.I. $x' = A(t)\,x,\ x(t_0) = x_0$, con $A : I \subseteq \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ continua, $t_0 \in I$, y demostrar que convergen a una solución del P.V.I. uniformemente en compactos de I.

Ejercicio 3.-

[2] a) Calcular la matriz fundamental principal en $t_0 = 0$ del sistema lineal

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} x. \tag{1}$$

[2] b) El Teorema de Caley-Hamilton afirma que toda matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ satisface su ecuación característica, es decir, si $p(\lambda) = \det|A - \lambda I_n|$ es su polinomio característico, se cumple que $p(A) = (0)$. Por tanto, si $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^n$, entonces $(A - \lambda_1 I_n)^n = (0)$. Justificar que en este caso

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} e^{(A-\lambda_1 I_n)t} = e^{\lambda_1 t}\left\{ I_n + (A - \lambda_1 I_n)t + \cdots + (A - \lambda_1 I_n)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\}.$$

Usar la fórmula anterior para hallar la matriz fundamental principal en $t_0 = 0$ de (1).