

**Cálculo**  
**1ºE Grado en Ingeniería Informática**  
**Curso 2012/2013**

1. Calcula:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x) + x^2)^{1/\sin^2(x)}$

b)  $\int_0^1 \arcsen(x) dx$

**Solución.**

- a) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión. Este límite es 1 con lo que el límite pedido presenta una indeterminación del tipo “1<sup>∞</sup>”.

Aplicamos entonces la regla del número  $e$ . Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x) + x^2)^{1/\sin^2(x)} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(x)} (\cos(x) + x^2 - 1) = L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(x)} (\cos(x) + x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + x^2 - 1}{\sin^2(x)}$$

aplicamos la regla de L'Hôpital. Nos queda:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) + 2x}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2\cos(x)} \right) \left( \frac{-\sin(x) + 2x}{\sin(x)} \right)$$

donde observamos que el primer factor no presenta ninguna indeterminación (de hecho, tiende a 1/2), mientras que el segundo factor sí que vuelve a presentar la misma indeterminación anterior, por lo que volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x) + 2}{\cos(x)} = 1$$

Por tanto, aplicando la regla del número  $e$ , el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(x)} (\cos(x) + x^2 - 1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x) + x^2)^{1/\sin^2(x)} = e^{1/2}$$

- b) Se trata de una integral que vamos a calcular aplicando el método de integración por partes. En primer lugar, calculamos una primitiva del integrando:

$$\begin{aligned}
 \int \arcsen(x) dx &= \left[ \begin{array}{l} u = \arcsen(x) \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] \\
 &= x \arcsen(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= x \arcsen(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= x \arcsen(x) - \frac{1}{2} \int 2x(1-x^2)^{-1/2} dx \\
 &= x \arcsen(x) - \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} = x \arcsen(x) - \sqrt{1-x^2}
 \end{aligned}$$

Calculamos entonces la integral planteada:

$$\int_0^1 \arcsen(x) dx = \left[ x \arcsen(x) - \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

2. Determina el número de soluciones de la ecuación  $3x^4 + 12 = 8x^3$ .

### Solución.

Replanteamos el ejercicio en términos de búsqueda de número de ceros de la siguiente función:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = 3x^4 + 12 - 8x^3$ . Se trata de una función derivable y, por tanto, continua en todo el dominio. Para determinar su número de ceros vamos a estudiar su derivada, en concreto, el número de ceros de  $f'$ , ya que sabemos que este número, utilizando el teorema de Rolle, nos va a acotar superiormente el número de ceros de  $f$ .

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 2.$$

Por ahora sabemos que  $f$ , a lo sumo, se puede anular tres veces. Seguimos estudiando la función para precisar el número exacto de ceros. Analizando el signo de la derivada, obtenemos que:

- En el intervalo  $]-\infty, 0[$  se tiene que  $f'(x) < 0$ , por lo que la función es estrictamente decreciente.
- En el intervalo  $]0, 2[$  se tiene que  $f'(x) < 0$ , por lo que la función es estrictamente decreciente.
- En el intervalo  $]2, +\infty[$  se tiene que  $f'(x) > 0$ , por lo que la función es estrictamente creciente.

Por tanto, la función presenta un mínimo relativo en el punto de abscisa  $x = 2$  que, por ser el único punto de extremo se convierte en mínimo absoluto. Analizamos también los límites en los extremos del dominio, así como el valor del mínimo absoluto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ y } f(2) = -4$$

Por tanto, y como consecuencia del teorema de Bolzano, la función presenta dos ceros, uno antes del punto de mínimo absoluto (pasa de ser positiva a ser negativa) y otro después de  $x = 2$  (pasa de negativa a positiva).

3. Se considera la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x) = \int_0^{\log(x^2+1)} e^{-t^2} dt$$

a) Determina los intervalos de monotonía y posibles extremos relativos de  $f$ .

b) Calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1}$ .

### Solución.

a) Para determinar los intervalos de monotonía y posibles extremos relativos de  $f$  vamos a analizar las propiedades de la función dada. Gracias al teorema fundamental de Cálculo, se trata de una función continua y derivable (el integrando es una función continua) en todo el dominio, y además su derivada es:

$$f'(x) = e^{-\log(x^2+1)^2} \frac{2x}{x^2+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Buscamos posibles puntos críticos:

$$f'(x) = e^{-\log(x^2+1)^2} \frac{2x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Descomponemos el dominio de la función  $f$  para encontrar los intervalos de monotonía y, teniendo en cuenta que el factor  $e^{-\log(x^2+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , tenemos que:

- En el intervalo  $] -\infty, 0[$  la derivada es negativa, por lo que  $f$  es estrictamente decreciente.
- En el intervalo  $]0, +\infty[$  la derivada es positiva, por lo que  $f$  es estrictamente creciente.

Por tanto, en el punto de abscisa  $x = 0$  la función alcanza un mínimo relativo y, al ser el único punto de extremo, también alcanza su mínimo absoluto, valiendo

$$f(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0.$$

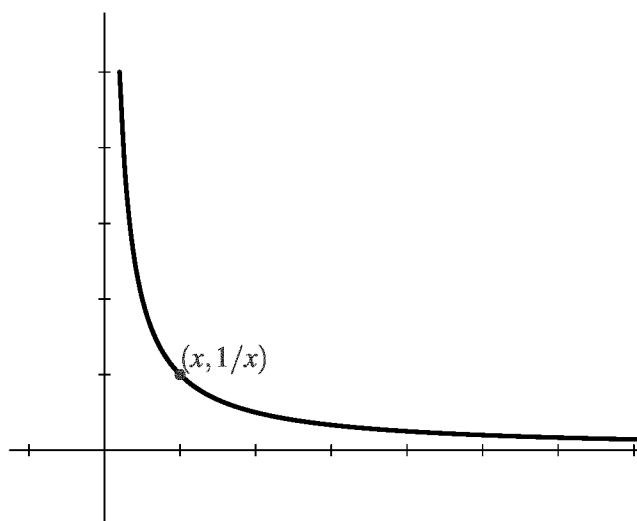


Figura 1: Gráfica de  $y = \frac{1}{x}$

- b) Aplicamos la segunda regla de L'Hôpital para calcular dicho límite ya que se presenta una indeterminación del tipo " $\frac{0}{0}$ ":

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{2x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\log(x^2+1)^2} \frac{2x}{x^2+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\log(x^2+1)^2} \cancel{2x}}{\cancel{2x}(x^2+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\log(x^2+1)^2} (x^2+1)} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2+1} = 0$ .

4. Determina el punto de la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $\forall x > 0$  cuya distancia al origen de coordenadas sea mínima.

Sugerencia: La distancia entre un punto  $(x, y)$  y el origen es igual a  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Solución.** La función a minimizar es la función distancia, pero para simplificar los cálculos, vamos a optimizar la función distancia al cuadrado ya que el punto donde se alcance el mínimo es el mismo para ambas funciones.

Si llamamos  $(x, 1/x)$  a un punto genérico de la gráfica de la función  $f$  (ver figura 1), entonces la distancia al origen desde dicho punto es:  $\sqrt{x^2 + (1/x)^2}$ .

La función que vamos a minimizar es entonces:

$$g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + 1}{x^2}, \quad \forall x > 0$$

Derivamos la función para buscar puntos críticos:

$$g'(x) = \frac{4x^3 x^2 - 2x(x^4 + 1)}{x^4} = \frac{4x^5 - 2x^5 - 2x}{x^4} = \frac{2x^5 - 2x}{x^4} = \frac{2x(x^4 - 1)}{\cancel{x}x^3} = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Descartamos la solución negativa ya que el dominio es el conjunto de los números reales positivos. Calculamos ahora la derivada segunda de  $f$  para concluir si tenemos extremo relativo en el punto  $x = 1$ :

$$g''(x) = \frac{8x^3 x^3 - 3x^2(2x^4 - 2)}{x^6} = \frac{\cancel{x^2}2x^4 + 6}{\cancel{x^2}x^4} = \frac{2x^4 + 6}{x^4}$$

Por tanto,  $g''(1) > 0$ , con lo que podemos asegurar que la función  $g$  alcanza un mínimo relativo, y al ser el único punto de mínimo, alcanza su mínimo absoluto en  $x = 1$ .

La respuesta al ejercicio es que el punto de la gráfica de  $f$  más próximo al origen es el punto  $(1, 1)$ .

*Granada, 23 de enero de 2013*