Cálculo II

16 de mayo de 2013

Soluciones

1. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, determinar el número de soluciones reales de la ecuación

$$1 + x^2 = \exp(\lambda + 2 \operatorname{arc\,tg} x)$$

¿Qué ocurre para $\lambda = 0$?

Solución:

Para $x \in \mathbb{R}$ se tiene $1 + x^2 = \exp(\lambda + 2 \operatorname{arc\,tg} x) \Leftrightarrow \log(1 + x^2) - 2 \operatorname{arc\,tg} x = \lambda$, así que consideramos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \log(1 + x^2) - 2 \operatorname{arc\,tg} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, llamamos $N(\lambda)$ al número de soluciones pedido, que coincide con el número de elementos del conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \lambda\}$.

Es claro que $f \in D(\mathbb{R})$ con

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{2(x-1)}{1 + x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x < 1$ tenemos $f'(x) < 0$, luego f es estrictamente decreciente en $]-\infty, 1[$. Además, $f(x) \to +\infty \quad (x \to -\infty)$, luego $f\big(]-\infty, 1[\big) =]f(1), +\infty[$.

Para $x > 1$ tenemos $f'(x) > 0$, luego f es estrictamente creciente en $]1, +\infty[$. Como $f(x) \to +\infty \quad (x \to +\infty)$, tenemos $f\big(]1, +\infty[\big) =]f(1), +\infty[$.

Como $f(1) = \log 2 - \pi/2$, concluimos que

$$N(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < \log 2 - \pi/2 \\ 1 & \text{si } \lambda = \log 2 - \pi/2 \\ 2 & \text{si } \lambda > \log 2 - \pi/2 \end{cases}$$

Por ser $2 < e$ tenemos $\log 2 < 1 < \pi/2$, luego $\log 2 - \pi/2 < 0$. Concluimos que, para $\lambda = 0$, la ecuación dada tiene dos soluciones, siendo $x = 0$ una de ellas.

2. Calcular la imagen de la función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = \int_0^{\frac{x}{1+x^2}} \operatorname{arc\,sen} t \, dt \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

¿Tiene solución la ecuación $H(x) = \pi/6$?

Solución:

El arco-seno es una función continua en $[-1,1]$, lo que permite considerar su integral indefinida con origen en 0:

$$F : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad F(y) = \int_0^y \operatorname{arc\,sen} t \, dt \quad \forall\, y \in [-1,1]$$

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que $F \in D[-1,1]$ con

$$F'(y) = \operatorname{arc\,sen} y \quad \forall\, y \in [-1,1]$$

Para $x \in \mathbb{R}$ se tiene claramente $2\,|x| \leq 1 + x^2$, luego

$$\frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad H(x) = F\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

Por tanto, la regla de la cadena nos dice que $H \in D(\mathbb{R})$ con

$$H'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Como el arco-seno toma valores negativos en $[-1,0[$ y positivos en $]0,1]$ deducimos:

$$\begin{aligned} H'(x) > 0 \qquad & \forall\, x \in]-\infty,-1[\,\cup\,]0,1[\\ H'(x) < 0 \qquad & \forall\, x \in]-1,0[\,\cup\,]1,+\infty[\end{aligned}$$

Es claro que $H(0) = 0$ y por comodidad escribiremos $\alpha = H(-1)$ y $\beta = H(1)$. Por otra parte, vamos a comprobar que $\lim\limits_{x\to-\infty} H(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$. En efecto, si $\{x_n\}$ es una sucesión divergente de números reales, tenemos $\{H(x_n)\} = \{F(y_n)\}$ donde $\{y_n\} = \{x_n/(1+x_n^2)\} \to 0$, luego $\{H(x_n)\} \to F(0) = 0$, por ser F continua en 0. Resumiendo todo lo anterior, concluimos que H es:

- estrictamente creciente en $]-\infty,-1[$, con $H\big(]-\infty,-1[\big) =]0,\alpha[$
- estrictamente decreciente en $[-1,0]$, con $H\big([-1,0]\big) = [0,\alpha]$
- estrictamente creciente en $[0,1]$, con $H\big([0,1]\big) = [0,\beta]$
- estrictamente decreciente en $]1,+\infty[$, con $H\big(]1,+\infty[\big) =]0,\beta[$

Vemos que $H(\mathbb{R}) = \big[0, \text{máx}\{\alpha, \beta\}\big]$ pero, para precisar mejor, debemos calcular α y β. Puesto que el arco-seno es una función de clase C^1 en el intervalo abierto $]-1, 1[$, para $-1 < y < 1$ podemos usar la fórmula de integración por partes, obteniendo

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^y \operatorname{arc\,sen} t\, dt = \Big[t \operatorname{arc\,sen} t \Big]_0^y - \int_0^y \frac{t\, dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= y \operatorname{arc\,sen} y + \int_0^y \frac{-2\, t\, dt}{2\sqrt{1-t^2}} = y \operatorname{arc\,sen} y + \Big[\sqrt{1-t^2} \Big]_0^y \\ &= y \operatorname{arc\,sen} y + \sqrt{1-y^2} - 1 \end{aligned}$$

Vemos que F es una función par, y deducimos que

$$H(\pm 1) = F(\pm 1/2) = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2} + \sqrt{1-(1/2)^2} - 1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

Concluimos finalmente que la imagen de H es el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right]$.

Por ser $\sqrt{3} < 2$, se tiene $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 < \dfrac{\pi}{12} < \dfrac{\pi}{6}$, luego la ecuación $H(x) = \pi/6$ no tiene solución.

4. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, razonando la respuesta:

(a) Si una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tiene límite en $+\infty$ y en $-\infty$, entonces f está acotada.

Esta afirmación es VERDADERA: Sean $\alpha = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\beta = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Podemos entonces encontrar $a \in \mathbb{R}^-$ y $b \in \mathbb{R}^+$ tales que:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R},\ \ x < a \ &\Rightarrow\ |f(x) - \alpha| < 1 \ \Rightarrow\ |f(x)| < |\alpha| + 1 \\ x \in \mathbb{R},\ \ x > b \ &\Rightarrow\ |f(x) - \beta| < 1 \ \Rightarrow\ |f(x)| < |\beta| + 1 \end{aligned}$$

Por otra parte, como f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, el Teorema de Weierstrass nos dice que f está acotada en dicho intervalo, luego existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \in [a, b] \implies |f(x)| \leq M$$

Tomando $K = \text{máx}\{|\alpha| + 1\,,\ |\beta| + 1\,,\ M\}$, tenemos claramente que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log(1 + x^4)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es uniformemente continua.

Esta afirmación también es VERDADERA: Claramente $f \in D(\mathbb{R})$ con

$$f'(x) = \frac{4\,x^3}{1 + x^4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Comprobaremos que f' está acotada, luego f será lipschitziana y, en particular, uniformemente continua. Para ello se puede usar el apartado anterior, ya que f' es continua y $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Alternativamente, podemos pensar que, para $x \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
|x| \leq 1 \quad &\Longrightarrow \quad |f'(x)| \leq \frac{4}{1 + x^4} \leq 4 \\
|x| > 1 \quad &\Longrightarrow \quad |x|^3 < x^4 < 1 + x^4 \quad \Longrightarrow \quad |f'(x)| < 4
\end{aligned}$$

luego $|f'(x)| \leq 4$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) Toda primitiva de una función continua, en un intervalo no trivial, es una integral indefinida de dicha función.

Esta afirmación es FALSA: Basta pensar que una integral indefinida de la función dada siempre se anula al menos en un punto del intervalo, el que hayamos tomado como origen, mientras que una primitiva puede no anularse en ningún punto. El contraejemplo más sencillo se obtiene tomando $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que es ciertamente una función continua en un intervalo no trivial. Si F es cualquier integral indefinida de f, se tiene evidentemente $F(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, tomando $G(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, obtenemos una primitiva de f que no es una integral indefinida.