Doble Grado en Informática-Matemáticas

Variable Compleja I

(Curso 2014-2015) Control 2 — 22-Mayo-2015

1.

(i) Justificar de manera razonada que la función $\frac{1}{z}$ no tiene primitivas en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(ii) Fijado un número real α, encontrar una primitiva de la función $\frac{1}{z}$ en el dominio $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^+ e^{i\alpha}$.

(iii) Calcular $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, donde γ es cualquier camino contenido en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ con punto inicial $-i$ y punto final i.

(2 Puntos)

2.

(1) En este momento, qué relación sabes que existe entre los conceptos:
Función holomorfa y Función analítica.
Justificar razonadamente la respuesta.

(2) Considérese la función f de $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$ en $\mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \log(1+z^2).$$

(i) Determinar el más grande abierto Ω de $\mathbb{C}$ en el que f es holomorfa.

(ii) Calcular el desarrollo de Taylor de f centrado en 0.

(iii) Determinar el disco de convergencia de la serie obtenida y estudiar la convergencia en la circunferencia frontera.

(iv) Verificar que $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

(3 Puntos)

3.

Calcular $\int_\gamma \frac{\cosh z}{z(z+1)^2} dz$, cuando $\gamma = C(2,1)$, $\gamma = C(0,\frac{1}{2})$, $\gamma = C(-1,\frac{1}{2})$, o $\gamma = C(0,2)$.

(3 Puntos)

4.

(i) Enunciar el Teorema de Liouville.

(ii) Probar que si una función entera f tiene límite finito en ∞, entonces f está acotada. Deducir que si $\lim_{z\to\infty} f(z) = a \in \mathbb{C}$, entonces $f(z) = a$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(iii) Probar que si una función entera f tiene límite ∞ en ∞, entonces f se anula en algún punto de $\mathbb{C}$.

(2 Puntos)

SOLUCIONES

1.

(i) Una manera de razonar se basa en el siguiente resultado.

Teorema. *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una función holomorfa. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) f tiene un argumento continuo en Ω.

(2) f tiene un logaritmo continuo en Ω.

(3) f tiene un logaritmo holomorfo en Ω.

(4) La función $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$ de Ω en $\mathbb{C}$ tiene primitiva en Ω (esto es, existe una función $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z \in \Omega$).

Tomando en el Teorema anterior $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y considerando la función f dada por $f(z) = z$, la implicación (4)$\Rightarrow$(1) nos dice que la existencia de primitiva para la función $\frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ implica que la función f admite argumentos continuos en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Esto es una contradicción, ya que sabemos que no pueden existir argumentos continuos en ningún subconjunto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que contenga a una circunferencia centrada en 0.

Otra manera de razonar se basa en la caracterización de existencia de primitivas.

Teorema. *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) f tiene primitivas en Ω.

(2) $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo camino cerrado γ contenido en Ω.

Puesto que

$$\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = i\int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi i \neq 0,$$

por el teorema anterior, podemos concluir que la función $\frac{1}{z}$ no admite primitivas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(ii) Fijado $\alpha \in \mathbb{R}$, el giro $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dado por $\varphi(z) = -e^{-i\alpha}z$ es una biyección biholomorfa que aplica la semirecta $\mathbb{R}_0^+ e^{i\alpha}$ en la semirecta $\mathbb{R}_0^-$. Teniendo en cuenta que el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, deducimos que la función

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \text{ dada por } f(z) := \log(-e^{-i\alpha}z)$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ e^{i\alpha}$. Además, por la regla de la cadena,

$$f'(z) = \frac{-e^{-i\alpha}}{-e^{-i\alpha}z} = \frac{1}{z} \quad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ e^{i\alpha}.$$

Otra manera de abordar este apartado es considerar la rama α del argumento, esto es la función $\arg_\alpha : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ que a cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ le hace corresponder el único argumento de z que pertenece al intervalo $[\alpha, \alpha + 2\pi[$. La función $\arg_\alpha$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ e^{i\alpha}$, y por tanto la rama α del logaritmo, esto es la función $\log_\alpha : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\log_\alpha(z) = \log|z| + i \arg_\alpha(z),$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ e^{i\alpha}$. Puesto que los sectores angulares abiertos determinados por las semirectas $\mathbb{R}_0^-$ y $\mathbb{R}_0^+ e^{i\alpha}$ son dominios, las funciones log y $\log_\alpha$ se diferencian en constantes, y el hecho de que log sea un a primitiva de la función $\frac{1}{z}$, nos permite concluir que también $\log_\alpha$ es una primitiva de $\frac{1}{z}$.

(iii) Puesto que el logaritmo principal es una primitiva de la función $\frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$, por la regla de Barrow, para todo camino $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ contenido en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ con $\gamma(a) = -i$ y $\gamma(b) = i$ tenemos que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \log(\gamma(a)) - \log(\gamma(b)) = \log(i) - \log(-i) = i\frac{\pi}{2} - i\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi i.$$

2.

(1) Ambos conceptos coinciden. Toda función analítica es holomorfa en vista del carácter local de la derivabilidad y del Teorema de derivación de la función suma de una serie de potencias convergente. Recíprocamente, toda función holomorfa es analítica por el Teorema de Taylor.

(2)

(i) Puesto que la función $z \mapsto 1 + z^2$ es entera, y la función logaritmo principal es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$, por la regla de la cadena, f es holomorfa en

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : 1 + z^2 \in \mathbb{R}_0^-\}.$$

Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se tiene que $1 + z^2 = 1 + x^2 - y^2 + i2xy$, y por tanto

$$1 + z^2 \in \mathbb{R}_0^- \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} xy = 0 \\ 1 + x^2 - y^2 \leq 0 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ 1 \leq y^2 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ 1 \leq |y| \end{array} \right\}$$

Luego $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \geq 1\}$.

Además, nótese que para $y \in \mathbb{R}$ con $|y| > 1$, la sucesión

$$z_n = i\left(y + \frac{\text{signo}(y)}{n} i\right) \to iy$$

y la sucesión imagen

$$f(z_n) = \log(1 + z_n^2) = \log\left(1 - y^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2|y|}{n} i\right) \to \log|1 - y^2| - i\pi,$$

mientras que

$$f(iy) = \log(1 - y^2) = \log|1 - y^2| + i\pi.$$

Luego f no es ni siquiera continua en iy. En conclusión, Ω es el más grande abierto de $\mathbb{C}$ en el que f es holomorfa.

(ii) Por el Teorema de Taylor, la finción f se puede escribir en $D(0,1)$ (el más grande disco centrado en 0 y contenido en Ω) como la suma de la serie de Taylor de f en el punto 0. Puesto que

$$f'(z) = \frac{2z}{1 + z^2},$$

y puesto que

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \forall z \in D(0,1),$$

se sigue que

$$f'(z) = \frac{2z}{1 - (-z^2)} = 2z \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1}, \quad \forall z \in D(0,1).$$

Como $f(0) = \log 1 = 0$ se sigue que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{2n} \text{ para todo } z \in D(0,1).$$

Así pues, el desarrollo de Taylor de f centrado en 0 es

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^{2n} \text{ para todo } z \in D(0,1).$$

Alternativamente, si se recuerda que el desarrollo en serie del logaritmo principal en 1 viene dado por

$$\log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n \text{ para todo } z \in D(1,1),$$

sustituyendo z por $1+z^2$, obtenemos que

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,z^{2n}\quad \text{para todo}\quad z\in D(0,1).$$

(iii) Por el apartado anterior la serie converge en $D(0,1)$, y por tanto su radio de convergencia R es mayor o igual a 1. Puesto que

$$\sqrt[n]{|c_n|}=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \quad \text{es impar} \\ \sqrt[2k]{\frac{1}{k}} & \text{si} \quad n=2k \end{cases}$$

se sigue que $\limsup\sqrt[n]{|c_n|}=1$, y por la fórmula de Cauchy-Hadamard $R=1$.

Como la sucesión de coeficientes de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,w^n$$

es una sucesión de números reales que decrece a cero, por el Teorema de Picard (Ejercicio Propuesto 49), dicha serie converge en todos los puntos de la circunferencia unidad, salvo eventualmente en el punto 1. Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,z^{2n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,(iz)^{2n},$$

se sigue que nuestra serie converge en la circunferencia unidad excepto eventualmente en los puntos z tales que $(iz)^2=1$, esto es, en los puntos $z=\pm i$. En tales puntos nuestra serie es la serie $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que no converge. Resumiendo, la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,z^{2n}$$

converge en $\overline{D}(0,1)\backslash\{\pm i\}$. Además, por continuidad radial (Proposición 1.45, Pág. 55) podemos concluir que

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,z^{2n}\quad \text{para todo}\quad z\in \overline{D}(0,1)\backslash\{\pm i\}.$$

(iv) Puesto que $1\in\overline{D}(0,1)\backslash\{\pm i\}$, como consecuencia de (iii)

$$\log 2=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,1^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

3. La función integrando $f(z) = \dfrac{\cosh z}{z(z+1)^2}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$.

$\gamma = C(2, 1)$

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{z(z+1)^2} dz = 0$$

en vista del Teorema de Cauchy para dominios estrellados, ya que el semiplano derecho $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ es un dominio estrellado que contiene a $C(2, 1)$ y en dicho dominio f es holomorfa.

$\gamma = C(0, \frac{1}{2})$

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{z(z+1)^2} dz = \int_\gamma \frac{\frac{\cosh z}{(z+1)^2}}{z} dz = 2\pi i \left.\frac{\cosh z}{(z+1)^2}\right|_{z=0} = 2\pi i \frac{\cosh 0}{(0+1)^2} = 2\pi i,$$

donde se ha aplicado la fórmula de Cauchy para la circunferencia, teniendo en cuenta que la función $\dfrac{\cosh z}{(z+1)^2}$ es holomorfa en el dominio $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$, y que dicho dominio contiene a $\overline{D}(0, \frac{1}{2})$.

$\gamma = C(-1, \frac{1}{2})$

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{z(z+1)^2} dz = \int_\gamma \frac{\frac{\cosh z}{z}}{(z+1)^2} dz = 2\pi i \left.\frac{d}{dz} \frac{\cosh z}{z}\right|_{z=-1} = 2\pi i \left.\frac{z \operatorname{senh} z - \cosh z}{z^2}\right|_{z=-1}$$

$$= -2\pi i [\operatorname{senh}(-1) + \cosh(-1)] = -2\pi i \left[\frac{1}{2}(e^{-1} - e) + \frac{1}{2}(e^{-1} + e)\right] = -2\pi i e^{-1},$$

donde se ha aplicado la fórmula de Cauchy para la derivada primera, teniendo en cuenta que la función $\dfrac{\cosh z}{z}$ es holomorfa en el dominio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y que dicho dominio contiene a $\overline{D}(-1, \frac{1}{2})$.

$\gamma = C(0, 2)$

Descomponiendo en fracciones simples

$$\frac{1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2},$$

y por tanto

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{z(z+1)^2} dz = \int_\gamma \frac{\cosh z}{z} dz - \int_\gamma \frac{\cosh z}{z+1} dz - \int_\gamma \frac{\cosh z}{(z+1)^2} dz.$$

Teniendo en cuenta que la función $\cosh z$ es entera y aplicando las correspondientes fórmulas de Cauchy obtenemos que

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{z(z+1)^2} dz = 2\pi i \cosh 0 - 2\pi i \cosh(-1) - \frac{2\pi i}{1!} \left.\frac{d}{dz} \cosh z\right|_{z=-1}$$

$$= 2\pi i[\cosh 0 - \cosh(-1) - \operatorname{senh}(-1)] = 2\pi i \left[1 - \frac{1}{2}(e^{-1} + e) - \frac{1}{2}(e^{-1} - e)\right]$$

$$= 2\pi i(1 - e^{-1}).$$

4.

(i) **Teorema de Liouville.** *Toda función entera y acotada es constante.*

(ii) Sea f una función entera tal que $\lim_{z\to\infty} f(z) = a \in \mathbb{C}$. Por la caracterización del límite (tomando $\varepsilon = 1$):

Existe $R > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > R$ se verifica que $|f(z) - a| < 1$,

y por tanto

$$|f(z)| = |f(z) - a + a| \leq |f(z) - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Luego f está acotada en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$ por $1 + |a|$.

Puesto que $\overline{D}(0, R)$ es un compacto y f es continua, se sigue que f está acotada en $\overline{D}(0, R)$, esto es:

Existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \overline{D}(0, R)$.

En conclusión, f está acotada:

$$|f(z)| \leq \max\{1 + |a|, M\} \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Por el Teorema de Liouville, f es constante, esto es:

Existe $K \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = K$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Entonces $\lim_{z\to\infty} f(z) = K$, y por la unicidad del límite $K = a$.

(iii) Supongamos que f es una función entera tal que $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Si f no se anula en ningún punto, entonces la función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ es una función entera tal que $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$. Por (ii), $g(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, lo que es una contradicción. Luego f debe anularse en algún punto.