Fundamentos Lógicos de la Programación

(13 - 09 - 2005)

Alumno:____ **D.N.I.:**______________

Titulación:____ **Grupo:**____________

1. Justifica razonadamente que:

$$\models \Big(\big(\big((\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)\big) \to \gamma\big) \to \varphi\Big) \to \big((\varphi \to \alpha) \to (\delta \to \alpha)\big)$$

Solución:
Por el teorema de la deducción, lo que hemos de demostrar es que:

$$\Big(\big(\big((\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)\big) \to \gamma\big) \to \varphi\Big) \models \big((\varphi \to \alpha) \to (\delta \to \alpha)\big)$$

que es equivalente, usando nuevamente el teorema de la deducción a:

$$\Big\{\big[[(\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)] \to \gamma\big] \to \varphi, \quad (\varphi \to \alpha)\Big\} \models \delta \to \alpha$$

Por tanto, lo que vamos a probar es que el conjunto de fórmulas

$$\Big\{\big[[(\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)] \to \gamma\big] \to \varphi, \quad \varphi \to \alpha, \quad \neg(\delta \to \alpha)\Big\}$$

es insatisfacible.
Transformamos cada una de las fórmulas en otras equivalentes:

$$\begin{array}{lll}
\big[[(\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)] \to \gamma\big] \to \varphi & \varphi \to \alpha & \neg(\delta \to \alpha) \\
\neg\big[[(\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)] \to \gamma\big] \vee \varphi & \neg\varphi \vee \alpha & \neg(\neg\delta \vee \alpha) \\
\neg\big[\neg[(\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)] \vee \gamma\big] \vee \varphi & & \delta \wedge \neg\alpha \\
\big[[(\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)] \wedge \neg\gamma\big] \vee \varphi & & \\
\big[[\neg(\alpha \to \beta) \vee (\neg\gamma \to \neg\delta)] \wedge \neg\gamma\big] \vee \varphi & & \\
\big[[\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee (\gamma \vee \neg\delta)] \wedge \neg\gamma\big] \vee \varphi & & \\
\big[[(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\gamma \vee \neg\delta)] \wedge \neg\gamma\big] \vee \varphi & & \\
\big[(\alpha \vee \gamma \vee \neg\delta) \wedge (\neg\beta \vee \gamma \vee \neg\delta) \wedge \neg\gamma\big] \vee \varphi & & \\
(\alpha \vee \gamma \vee \neg\delta \vee \varphi) \wedge (\neg\beta \vee \gamma \vee \neg\delta \vee \varphi) \wedge (\neg\gamma \vee \varphi) & &
\end{array}$$

y lo que tenemos que probar entonces es que el siguiente cojuunto de fórmulas (cláusulas) es insatisfacible:

$$\{\alpha \vee \gamma \vee \neg\delta \vee \varphi, \quad \neg\beta \vee \gamma \vee \neg\delta \vee \varphi, \quad \neg\gamma \vee \varphi, \quad \alpha \vee \neg\varphi, \quad \neg\alpha, \quad \delta\}$$

Para esto, aplicamos el algoritmo de Davis-Putnam:

- Nos fijamos en la cláusula $\neg\alpha$. Eliminamos todas las cláusulas en las que aparezca este literal, y eliminamos el literal α de las cláusulas que lo contengan:

$$\{\gamma \vee \neg\delta \vee \varphi, \quad \neg\beta \vee \gamma \vee \neg\delta \vee \varphi, \quad \neg\gamma \vee \varphi, \quad \neg\varphi, \quad \delta\}$$

- Hacemos lo mismo con δ:

$$\{\gamma \vee \varphi, \quad \neg\beta \vee \gamma \vee \varphi, \quad \neg\gamma \vee \varphi, \quad \neg\varphi\}$$

- Ahora con $\neg\varphi$:

$$\{\gamma, \quad \neg\beta \vee \gamma, \quad \neg\gamma\}$$

Este conjunto se ve claramente que es insatisfacible, al contener las cláusulas γ y $\neg\gamma$.

■

2. Dada la fórmula $\forall x \neg P(x, f(x))$, interprétala con las siguientes estructuras:

a) $\mathbf{L_1}$ dada por:
- $D_1 = \{0, 1, 2, 3\}$
- $P = \{(0,0), (0,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$
- $f(m) = \begin{cases} m+1 & \text{si } m \neq 3 \\ 0 & \text{si } m = 3 \end{cases}$

b) $\mathbf{L_2}$ dada por:
- $D_2 = \mathbb{Z}$
- $P(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \geqslant n \\ 0 & \text{si } m < n \end{cases}$
- $f(m) = m + 1$

Solución: La fórmula que debemos interpretar es semánticamente equivalente a $\neg\exists x P(x, f(x))$.

a) Para el caso de la primera estrucura, la fórmula se interpreta como falsa, pues en este caso sí existe un elemento x en el dominio (por ejemplo, 0) para el cual el predicado $P(0, f(0)) = P(0,1)$ es cierto.

b) Con la segunda estructura, la fórmula se interpreta como verdadera, pues es cierto que no existe ningún número entero m que sea mayor o igual que $f(m) = m + 1$.

■

3. Di razonadamente si son unificables o no las siguientes parejas de fórmulas y, caso de serlo, da un unificador de máxima generalidad:

a) $\langle R\big(f(h(z), u), g(h(a)), z\big), R\big(f(u, y), g(y), a\big)\rangle$,

b) $\langle R\big(f(a, y), g(x), z\big), R\big(f(y, u), z, a\big)\rangle$,

Solución:

a) En este caso, planteamos un sistema de ecuaciones en términos, cuya resolución nos dará un unificador de máxima generalidad caso de que las parejas de fórmulas sean unificables.

El sistema es el siguiente:

$$\begin{array}{lcl} f(h(z), u) & = & f(u, y) \\ g(h(a)) & = & g(y) \\ z & = & a \end{array}$$

Realizamos transformaciones en el sistema que nos lo convierten en un sistema equivalente, hasta ver si podemos llegar a algún sistema en forma resuelta:

$$\begin{array}{lcl} h(z) & = & u \\ u & = & y \\ g(h(a)) & = & g(y) \\ z & = & a \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} u & = & h(z) \\ y & = & u \\ h(a) & = & y \\ z & = & a \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} u & = & h(z) \\ y & = & h(z) \\ h(a) & = & y \\ z & = & a \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} u & = & h(z) \\ y & = & h(z) \\ h(a) & = & h(z) \\ z & = & a \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} u & = & h(z) \\ y & = & h(z) \\ a & = & z \\ z & = & a \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} u & = & h(a) \\ y & = & h(a) \\ z & = & a \end{array}$$

Y este último está en forma resuelta, lo que nos da el unificador principal $(y|h(a),\ z|a,\ u|h(a))$.

b) Repetimos aquí el proceso seguido en el caso anterior:

$$\begin{array}{lcl} f(a,y) & = & f(y,u) \\ g(x) & = & z \\ z & = & a \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} a & = & y \\ y & = & u \\ g(x) & = & z \\ z & = & a \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} z & = & a \\ a & = & y \\ y & = & u \\ g(x) & = & z \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} z & = & a \\ a & = & y \\ y & = & u \\ g(x) & = & a \end{array}$$

Y al llegar a una ecuación de la forma $g(x) = a$ concluimos que el sistema no tiene solución, y por tanto, que las dos fórmulas no son unificables.

■

4. Encuentra una fórmula en forma normal prenexa lógicamente equivalente a la fórmula:

$$\forall z\big(\exists y(\forall x R(a,x) \wedge \forall y R(y,a) \wedge Q(y)) \rightarrow (R(z,a) \vee \exists z Q(z))\big)$$

Solución: Vamos a ir haciendo transformaciones en la fórmula propuesta, de forma que en cada paso obtengamos una fórmula lógicamente a la anterior.

$\forall z\ \big[\exists y\big(\forall x R(a,x) \wedge \forall y R(y,a) \wedge Q(y)\big) \rightarrow \big(R(z,a) \vee \exists z Q(z)\big)\big]$
$\forall z\ \big[\neg\exists y\big(\forall x R(a,x) \wedge \forall y R(y,a) \wedge Q(y)\big) \vee \big(R(z,a) \vee \exists z Q(z)\big)\big]$
$\forall z\ \big[\forall y\neg\big(\forall x R(a,x) \wedge \forall y R(y,a) \wedge Q(y)\big) \vee \big(R(z,a) \vee \exists z Q(z)\big)\big]$
$\forall z\ \big[\forall y\big(\neg\forall x R(a,x) \vee \neg\forall y R(y,a) \vee \neg Q(y)\big) \vee \big(R(z,a) \vee \exists z Q(z)\big)\big]$
$\forall z\ \big[\forall y\big(\exists x\neg R(a,x) \vee \exists y\neg R(y,a) \vee \neg Q(y)\big) \vee \big(R(z,a) \vee \exists z Q(z)\big)\big]$
$\forall z\ \big[\forall y\big(\exists x\neg R(a,x) \vee \exists x\neg R(x,a) \vee \neg Q(y)\big) \vee \big(R(z,a) \vee \exists x Q(x)\big)\big]$
$\forall z\ \big[\forall y\big(\exists x(\neg R(a,x) \vee \neg R(x,a)) \vee \neg Q(y)\big) \vee \big(R(z,a) \vee \exists x Q(x)\big)\big]$
$\forall z\ \big[\forall y\exists x\big(\neg R(a,x) \vee \neg R(x,a) \vee \neg Q(y)\big) \vee \exists x\big(R(z,a) \vee Q(x)\big)\big]$
$\forall z\forall y\ \big[\exists x\big(\neg R(a,x) \vee \neg R(x,a) \vee \neg Q(y)\big) \vee \exists x\big(R(z,a) \vee Q(x)\big)\big]$
$\forall z\forall y\exists x\ \big[\big(\neg R(a,x) \vee \neg R(x,a) \vee \neg Q(y)\big) \vee \big(R(z,a) \vee Q(x)\big)\big]$ ■

5. Demuestra haciendo uso de la técnica de resolución lineal-input, que la sentencia:

$$\exists x(M(x) \wedge \neg D(x))$$

es consecuencia (semántica) de las hipótesis:

a) $\forall y(\neg C(y) \to \exists x A(x,y))$,

b) $\forall x[\exists y(\neg C(y) \wedge A(x,y)) \to M(x)]$,

c) $\forall x[(M(x) \wedge D(x)) \to \neg\exists y(\neg C(y) \wedge A(x,y))]$,

d) $\exists x \neg C(x)$.

Solución:

Calculamos una forma clausular de cada una de las hipótesis:

a)
- $\forall y(\neg C(y) \to \exists x A(x,y))$
- $\forall y(C(y) \vee \exists x A(x,y))$
- $\forall y \exists x(C(y) \vee A(x,y))$
- $\forall y(C(y) \vee A(f(y),y))$

b)
- $\forall x[\exists y(\neg C(y) \wedge A(x,y)) \to M(x)]$
- $\forall x[\neg\exists y(\neg C(y) \wedge A(x,y)) \vee M(x)]$
- $\forall x[\forall y \neg(\neg C(y) \wedge A(x,y)) \vee M(x)]$
- $\forall x[\forall y(C(y) \vee \neg A(x,y)) \vee M(x)]$
- $\forall x \forall y(C(y) \vee \neg A(x,y) \vee M(x))$

c)
- $\forall x[(M(x) \wedge D(x)) \to \neg\exists y(\neg C(y) \wedge A(x,y))]$
- $\forall x[\neg(M(x) \wedge D(x)) \vee \neg\exists y(\neg C(y) \wedge A(x,y))]$
- $\forall x[\neg M(x) \vee \neg D(x) \vee \forall y \neg(\neg C(y) \wedge A(x,y))]$
- $\forall x \forall y[\neg M(x) \vee \neg D(x) \vee C(y) \vee \neg A(x,y)]$

d)
- $\exists x \neg C(x)$
- $\neg C(a)$

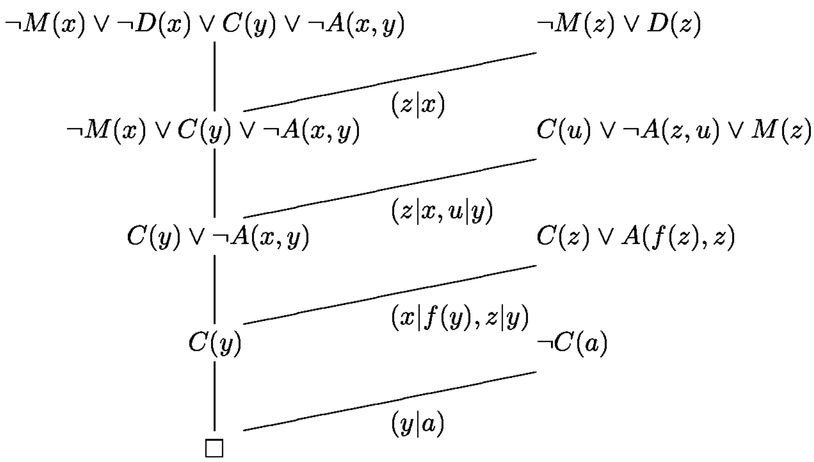
y de la negación de la tesis:

- $\neg\exists x(M(x) \wedge \neg D(x))$
- $\forall x \neg(M(x) \wedge \neg D(x))$
- $\forall x(\neg M(x) \vee D(x))$

Hemos de ver entonces, mediante resolución lineal-input, que del conjunto de cláusulas

$$\{C(y) \vee A(f(y),y),\ C(y) \vee \neg A(x,y) \vee M(x),\ \neg M(x) \vee \neg D(x) \vee C(y) \vee \neg A(x,y),\ \neg C(a),\ \neg M(x) \vee D(x)\}$$

podemos deducir la cláusula vacía.



■