UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES I
Primera prueba. 17 de diciembre de 2013

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.

[3] Ejercicio 1.- Se considera el p.v.i.

$$x' = 2\frac{x}{t} + \frac{t}{x}, \qquad x(1) = 1.$$

1. Determina el dominio de definición de la ecuación anterior y resuelve el p.v.i. dado.
2. Sea $x(t)$ la solución encontrada en el apartado anterior; determina el intervalo (α, ω) en el que está definida $x(t)$ y calcula, si es posible, $\lim_{t\to\alpha^+} x(t)$ y $\lim_{t\to\omega^-} x(t)$. Representa gráficamente la solución del p.v.i.

[3] Ejercicio 2.- Se considera la ecuación diferencial

$$x' = Ax,$$

con $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$.

1. Demuestra que si $x(t)$ es la solución de esta ecuación cumpliendo $x(0) = x_0$, entonces $x \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ y la derivada m-ésima de x, $x^{(m)}$, es también solución de dicha ecuación y cumple $x^{(m)}(0) = A^m x_0$, $\forall m \in \mathbb{N}$.
2. Construye el desarrollo en serie de MacLaurin de $x(t)$ y utiliza el apartado anterior para probar que $x(t) = e^{At}x_0$.

[4] Ejercicio 3.- Sea $x(t) = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1+t \end{pmatrix}$ una solución de la ecuación diferencial $x' = Ax$ con $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$.

1. Determina A y calcula e^{At}.
2. Halla la solución del p.v.i.

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \; x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$