FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LA INFORMÁTICA

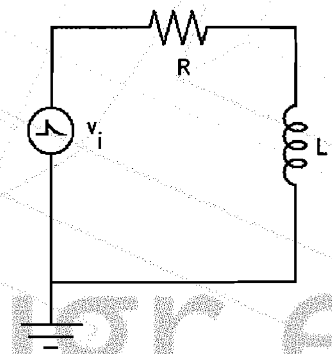
Universidad de Granada
Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores

Ingeniería Informática
Examen Febrero 2008

Duración: 3 horas
Responda a cada pregunta en hojas separadas. Indique en cada hoja su nombre, el número de página y el número de páginas totales que entrega.
Lea detenidamente los enunciados antes de contestar

Nombre ________________________________ **D.N.I.** ____________ **Grupo** ______

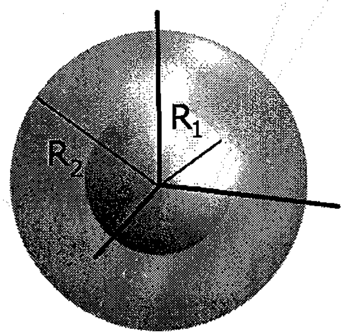
1. En el circuito RL de la figura introducimos en la entrada una señal de tipo exponencial decreciente, $v_i(t) = e^{-t}$ V. Sabiendo que la transformada de Laplace de la corriente que circula por la malla es: $I(s) = \dfrac{1}{1+s} \times \dfrac{1}{R+sL}$, calcula la corriente que recorre el circuito en cada instante de tiempo.



- Calcula la corriente que sigue circulando en el circuito tras el periodo transitorio (calcula el límite de la corriente cuando $t \to \infty$).

Datos: R= 1000 Ω ; L= 500 H; $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \dfrac{1}{s+a}$; **(0.75 puntos)**

2. El potencial creado por dos esferas conductoras concéntricas de radios R_1=1 cm y R_1=2 cm separadas por el vacío y cargadas con Q y –Q respectivamente es:



$$V = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}; & r \le R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}; & R_1 < r < R_2 \\ 0; & r \ge R_2 \end{cases}$$

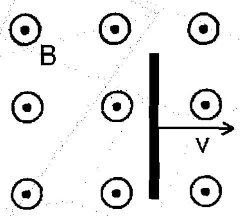
a) Calcula a partir del mismo el campo eléctrico creado por la estructura en cualquier punto del espacio (ten en cuenta el carácter vectorial del campo). **(0.75 puntos)**

b) Calcula a partir del potencial la capacidad del condensador esférico descrito. **(0.75 puntos)**

Datos: $\varepsilon_0 = 8.84 \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2

Nabla: (cartesianas) $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{z}$; (esféricas) $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\hat{\phi}$

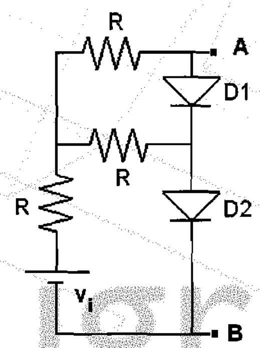
3. Desplazamos una barra conductora perpendicularmente a un campo magnético tal y como muestra la figura (el campo magnético sale del papel). Razona cómo se distribuyen las cargas positivas y negativas en la misma. **(0.75 puntos)**



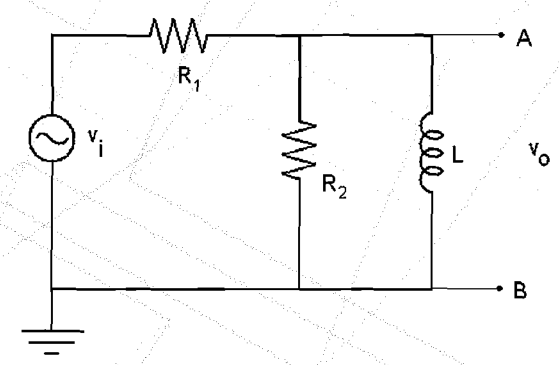
4. Calcula la característica de transferencia del siguiente circuito para tensiones de entrada positivas ($v_0 = V_A - V_B$) **(1.5 puntos)**

   - Calcula la potencia que disipa cada diodo si v_i vale 1 V. **(0.5 puntos)**

   Datos: $V_\gamma = 0.6\,V$ (Válido para los dos diodos)



5. Para el circuito de la figura (R_1=200 Ω; R_2=200 Ω;; L=10 mH)



a) Obtenga la función de transferencia $T(s)=V_0(s)/V_i(s)$. **(1 punto)**

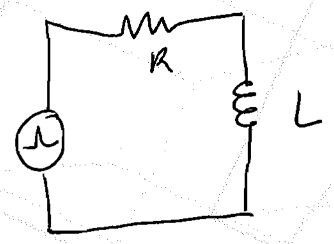
b) Represente el diagrama de Bode en amplitud y fase para dicha función de transferencia. **(2 puntos)**

c) Usando la función de transferencia obtenida, calcule $v_0(t)$ si $v_i(t)=[4\cos(10t)+4\cos(10^4t)]$ V. **(1 punto)**

d) Calcula el equivalente de Thevenin de todo el circuito visto entre los terminales A y B para una tensión de entrada general v_i. **(1 punto)**

Examen de febrero 2008

1.-



$R = 1000\ \Omega$

$L = 500\ H$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

$$I(s) = \frac{1}{1+s} \times \frac{1}{R+sL}$$

Conociendo la transformada de Laplace de la corriente que va por el circuito, lo que hay que hacer es calcular la transformada inversa y así obtenemos $i(t)$

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{R+sL}\right]$$

Descomponemos $\frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{R+sL}$ en una suma de términos más sencillos

$$\frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{R+sL} = \frac{A}{1+s} + \frac{B}{R+sL} = \frac{A(R+sL) + B(1+s)}{(1+s)(R+sL)}$$

Por tanto:

$$1 = A(R+sL) + B(1+s)$$

si $s = 0 \rightarrow 1 = AR + B \rightsquigarrow B = 1 - AR$

si $s = -1 \rightarrow 1 = A(R-L) \rightsquigarrow \boxed{A = 1/_{R-L}}$

$$\boxed{B = 1 - \frac{R}{R-L} = \frac{-L}{R-L}}$$

Por consiguiente $A = \frac{1}{500}$

$B = -1$

$$\frac{1}{1+s} \cdot \frac{1}{R+sL} = \frac{1}{500}\,\frac{1}{1+s} - \frac{1}{1000+500s} = \frac{1}{500}\,\frac{1}{1+s} - \frac{1}{500}\,\frac{1}{2+s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[I(s)\right] = \frac{1}{500}\,e^{-t} - \frac{1}{500}\,e^{-2t} = i(t)$$

Si calculamos $\lim\limits_{t\to\infty} i(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{500}\left[e^{-t} - e^{-2t}\right] = 0$

2.-

$$V = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & ; \quad r \leq R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & ; \quad R_1 \leq r < R_2 \\ 0 & ; \quad r \geq R_2 \end{cases}$$

a) La relación entre el campo y el potencial es

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Por tanto, hay que aplicar nabla sobre V

Si $r \leq R_1 \rightarrow \quad V = \underbrace{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}_{\text{Constante}} ; \quad -\nabla V = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$

Si $r \geq R_2 \rightarrow \quad V = \underbrace{0}_{\text{Constante}} ; \quad -\nabla V = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$

Si $R_1 < r < R_2 \rightarrow \quad V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \underbrace{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}_{\text{constante}}$

$$-\nabla V = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}\right]$$

$$-\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\right]\hat{r} =$$

V no depende de θ y ϕ
Derivadas igual a cero

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

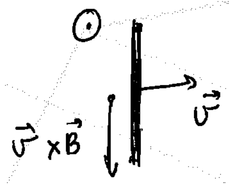
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{si} \quad R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{si} \quad R_2 < r \end{cases}$$

b)

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V(r=R_1) - V(r=R_2)} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{\cancel{Q}}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - 0}$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi \cdot 8.84 \cdot 10^{-12}}{\frac{1}{0.01} - \frac{1}{0.02}} = 2.22 \cdot 10^{-12}\ F$$

3.-



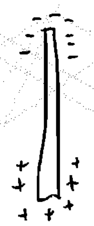
Según la ley de fuerzas de Lorentz, $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$.

Ya que $\vec{E} = 0 \rightarrow \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$\vec{v} \times \vec{B}$ es un vector que apunta hacia abajo, tal y como se muestra

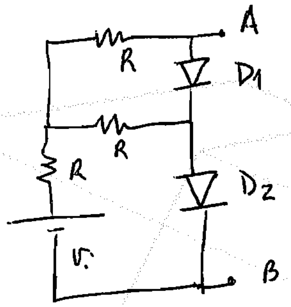
Fuerza sobre cargas positivas $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow$ dirección y sentido de $\vec{v} \times \vec{B}$

Fuerza sobre cargas negativas $\vec{F} = \underset{\text{negativa}}{q}\,\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow$ dirección de $\vec{v} \times \vec{B}$; sentido contrario



Distribución de cargas

4.-



En principio hay cuatro casos posibles

D1 ON D2 ON

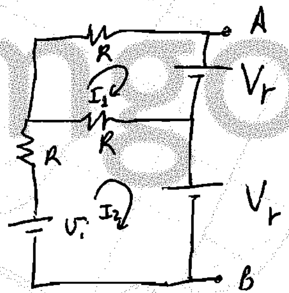
D1 ON D2 OFF

D1 OFF D2 ON

D1 OFF D2 OFF

Vamos a resolverlos todos, y veremos cuándo se da cada uno.

D1 ON D2 ON



1ª malla: $-V_r = 2RI_1 - RI_2$

2ª malla: $v_i - V_r = 2RI_2 - RI_1$

$$I_2 = \frac{2RI_1 + V_r}{R}$$

$$v_i - V_r = 2[2RI_1 + V_r] - RI_1$$

$$v_i - V_r = 4RI_1 + 2V_r - RI_1$$

$$v_i - 3V_r = 3RI_1 \rightarrow \boxed{I_1 = \frac{v_i - 3V_r}{3R}}$$

$$I_2 = \frac{\frac{2}{3}(v_i - 3V_r) + V_r}{R} = \frac{\frac{2}{3}v_i - 2V_r + V_r}{R}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{\frac{2}{3}v_i - V_r}{R}}$$

Si los diodos conducen, los sentidos de las corrientes han de ser positivos

$I_1 = \frac{v_i - 3V_r}{3R} > 0 \rightarrow v_i > 3V_r$

y

$I_2 = \frac{\frac{2}{3}v_i - V_r}{R} > 0 \rightarrow v_i > \frac{3}{2}V_r$

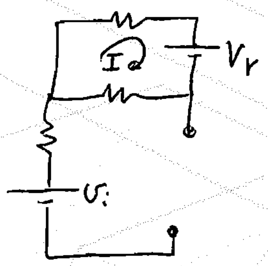
$v_i > 3V_r$ cumple ambas condiciones

D1 y D2 ON si $v_i > 3V_r$

En ese caso $\boxed{v_0 = 2V_r}$

$\boxed{v_0 = 1.2V \quad \text{si} \quad v_i > 1.8V}$

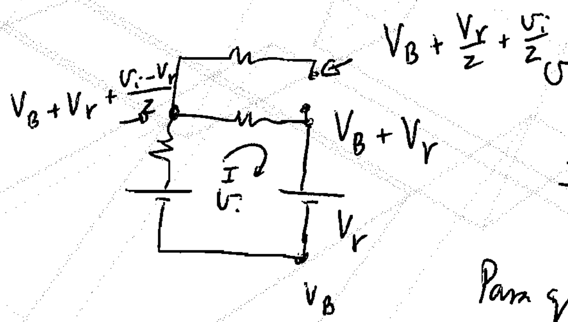
D1 ON   D2 OFF



Malla 1: $-V_r = 2RI \rightarrow I = -\frac{V_r}{2R}$

Si se diera esta configuración I sería negativa
Es imposible

D1 OFF   D2 ON



$v_i - V_r = 2RI$

$I = \frac{v_i - V_r}{2R}$

Para que D2 conduzca, $I > 0 \rightarrow \frac{v_i - V_r}{2R} > 0 \rightarrow \boxed{v_i > V_r}$

Para que D1 no conduzca, la caída de tensión entre su lado p y n ha de ser menor que 0.6

Tensión en su lado n: $V_B + V_r$

Tensión en su lado p: $V_B + \frac{V_r}{2} + \frac{v_i}{2}$

$\Delta V = \frac{v_i}{2} - \frac{V_r}{2} < V_r \rightarrow \boxed{\frac{v_i}{2} < \frac{3V_r}{2}}$

Para que D1 no conduzca v_i ha de ser menor que $3V_r$

" " D2 conduzca v_i ha de ser mayor que V_r

En estas condiciones $V_A = \frac{v_i}{2} + \frac{V_r}{2} + V_B$

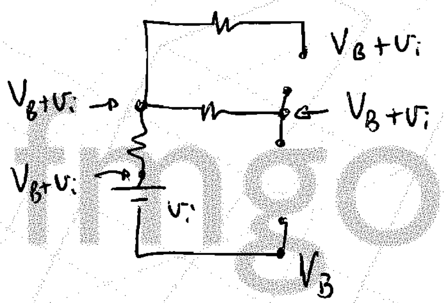
$$V_B = V_B$$

$$v_o = V_A - V_B = \frac{v_i}{2} + \frac{V_r}{2}$$

Por tanto

$$v_o = \frac{v_i}{2} + 0.3 \quad \text{si} \quad v_i > 0.6V \text{ y } v_i < 1.8V$$

Último estado: D1 OFF D2 OFF



D_1 claramente está cortado, porque su lado p está a igual tensión que su lado n.

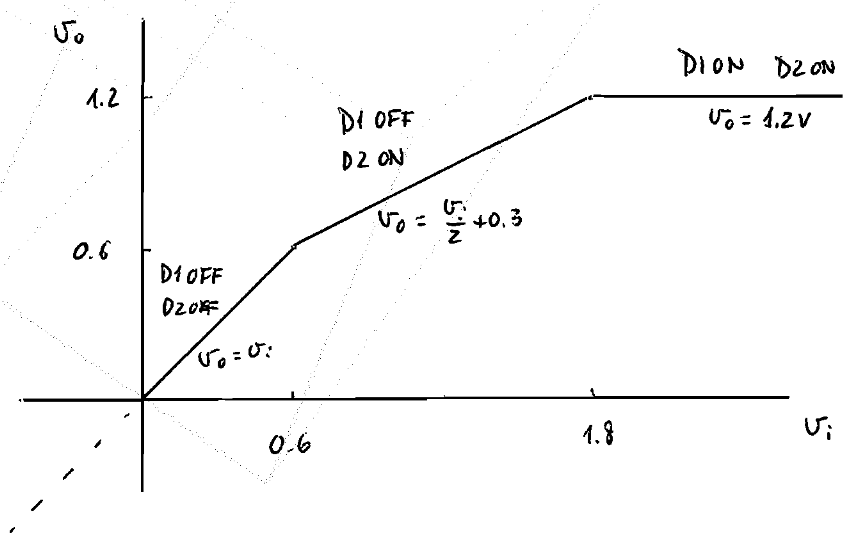
Para que D2 esté cortado $v_i + V_B - V_B$ ha de ser menor que $V_r \rightarrow \boxed{v_i < V_r}$

$$V_A = V_B + v_i$$

$$V_B = V_B$$

$$v_o = V_A - V_B = v_i$$

$$v_o = v_i \quad \text{si} \quad v_i < 0.6V$$



Potencia consumida por los diodos

D1: Cuando $v_i = 1V$, D1 OFF

$$\boxed{P = V \cdot I = V \cdot 0 = 0}$$

D2: Cuando $v_i = 1V$, D2 ON

$$P = V \cdot I = V_\gamma \cdot I = \underset{0.6}{V_\gamma} \cdot \frac{\overset{1}{v_i} - 0.6}{2} = 0.6 \cdot 0.2 = \underline{\underline{0.12\ mW}}$$

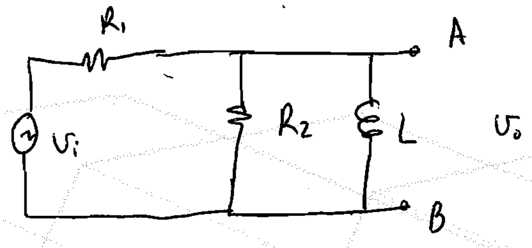
$R = 1K\Omega$

$V_\gamma = 0.6$

$$I = \underbrace{\frac{v_i - 0.6}{2}}$$

Ver primera parte del problema

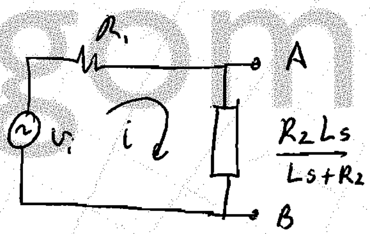
5.-



a) Podemos asociar R_2 y L sin perder los puntos A y B. Están en paralelo

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Ls} = \frac{Ls + R_2}{R_2 Ls}$$

$$Z_{eq} = \frac{R_2 Ls}{Ls + R_2}$$



$$v_i = R_1 i + \frac{R_2 Ls}{Ls+R_2} i$$

$$i = \frac{v_i}{R_1 + \frac{R_2 Ls}{Ls+R_2}}$$

v_o es la caída de tensión en Z_{eq}

$$v_o = i \cdot Z_{eq} = \frac{v_i}{R_1 + \frac{R_2 Ls}{Ls+R_2}} \cdot \frac{R_2 Ls}{Ls + R_2}$$

$$v_o = \frac{v_i\, L R_2 s}{R_1 Ls + R_2 R_1 + R_2 Ls} = \frac{v_i\, L R_2 s}{R_1 R_2 + (R_1 L + R_2 L)s}$$

$$T(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2 Ls}{R_1 R_2 + (R_1 L + R_2 L)s} = \frac{2s}{4 \cdot 10^4 + 4s} = \boxed{\frac{s}{2 \cdot 10^4 + 2s}}$$

$$R_2 L = 200 \cdot 10^{-2} = 2$$
$$R_1 R_2 = 200 \cdot 200 = 4 \cdot 10^4$$
$$(R_1 + R_2)L = 400 \cdot 10^{-2} = 4$$

c) $v_i(t) = \underbrace{4\cos(10t)}_{4e^{j0}} + \underbrace{4\cos(10^4 t)}_{4e^{j0}}$

→ Primer término : $\omega = 10$ rad/s

$$|T(\omega=10)| = \frac{\frac{10}{2\cdot 10^4}}{\sqrt{1+\left(\frac{10}{10^4}\right)^2}} \approx \frac{\frac{1}{2\cdot 10^3}}{1} = \frac{1}{2\cdot 10^3} = 5\cdot 10^{-4}$$

$$\arg T(\omega=10) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{10}{10^4}\right) \approx \pi/2$$

$$|v_0| = 4\cdot 5\cdot 10^{-4} = 20\cdot 10^{-4} = 2\cdot 10^{-3}$$

$$\arg v_0 = \pi/2$$

→ Segundo término : $\omega = 10^4$

$$|T(\omega=10^4)| = \frac{\frac{10^4}{2\cdot 10^4}}{\sqrt{1+\left(\frac{10^4}{10^4}\right)^2}} = \frac{1/2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

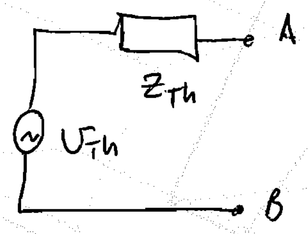
$$\arg T(\omega=10^4) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{10^4}{10^4}\right) = \pi/4$$

$$|v_0| = 4\cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

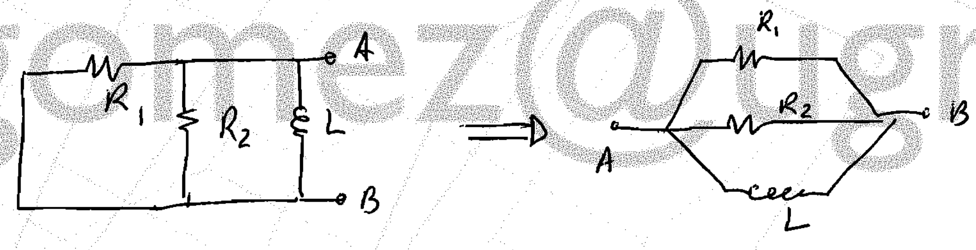
$$\arg v_0 = \pi/4$$

$$\boxed{v_o(t) = 2\cdot 10^{-3}\cos(10t + \pi/2) + \frac{2}{\sqrt{2}}\cos(10^4 t + \pi/4)}$$

d) Según el teorema de Thevenin el circuito visto desde A y B se puede sustituir por



Calculamos Z_{Th}. ~~Las~~ Anulamos las fuentes y vemos la Z_{eq} entre A y B



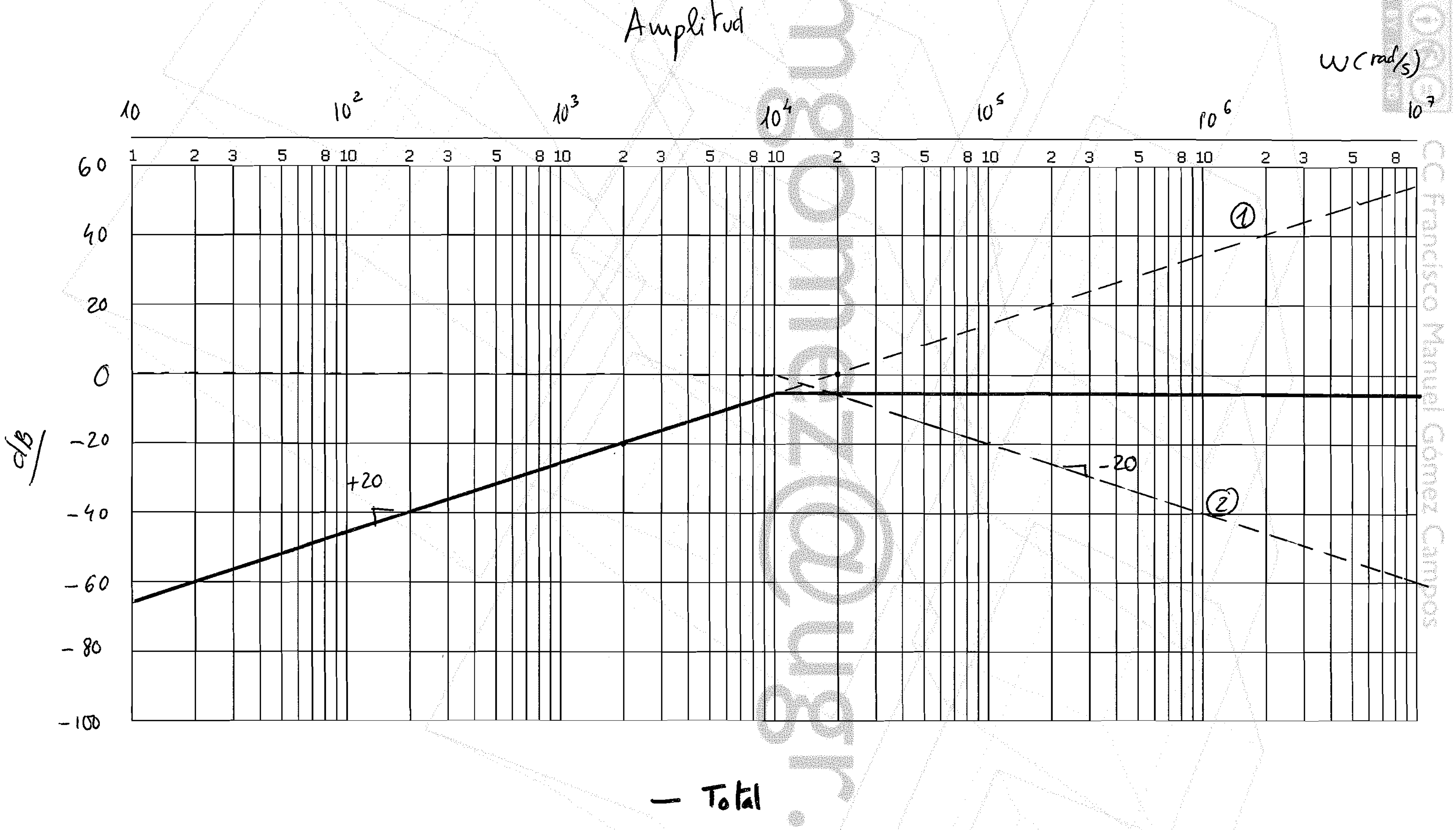
$$\frac{1}{Z_{Th}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Ls} = \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \frac{1}{10^{-2}s} = \frac{1}{100} + \frac{1}{10^{-2}s} = \frac{100 + 10^{-2}s}{s}$$

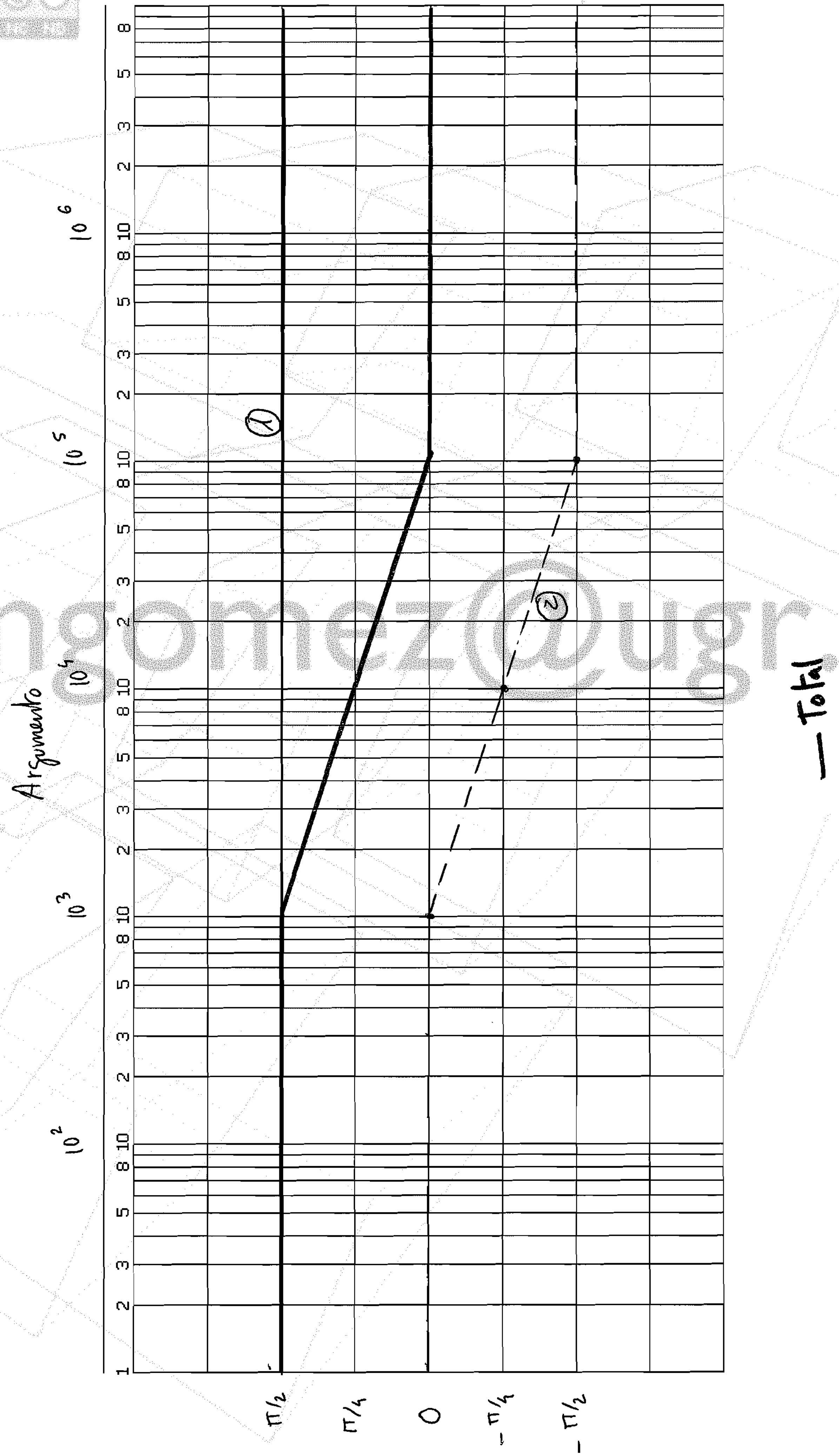
$$\boxed{Z_{Th} = \frac{s}{100 + 10^{-2}s} = \frac{j\omega}{100 + 10^{-2}j\omega}}$$

Calculamos V_{Th}. Es la caída de tensión entre A y B ¡¡¡Pero esto coincide con V_o del apartado a) !!!

$$\boxed{V_{Th} = \frac{s}{2\cdot 10^4 + 2s} V_i = \frac{j\omega}{2\cdot 10^4 + 2j\omega} V_i}$$

FIN


Amplitud
ω (rad/s)
10
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
dB
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
+20
-20
1
2
— Total


Argumento
— Total
1
2
$\pi/2$
$\pi/4$
0
$-\pi/4$
$-\pi/2$
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6