

Lógica y Métodos Discretos

Examen de Teoría

(05/07/2012)

Ejercicio 1. Sea x_n la sucesión definida por

$$x_0 = 0; \quad x_1 = \frac{4}{3}; \quad x_n = x_{n-1} + 2 \cdot x_{n-2} + 2^n$$

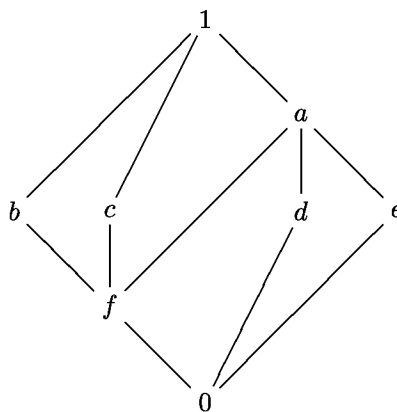
1. Calcula los términos x_2, x_3, x_4 .
2. Encuentra una relación de recurrencia lineal homogénea para la sucesión x_n .
3. Calcula una expresión para el término general x_n .
4. Calcula x_{10} .

Ejercicio 2. Construye un grafo con 7 vértices, que tenga dos vértices de grado 2, uno de grado 3, tres de grado 4 y uno de grado 5.

1. ¿Es dicho grafo plano?
2. ¿Es conexo?
3. ¿Tiene algún camino, o circuito de Euler? En caso afirmativo, da uno.
4. ¿Cuál es su número cromático?

Ejercicio 3. Sea L el conjunto ordenado cuyo diagrama de Hasse es

Figura 1:



1. Comprueba que es un retículo.
2. Estudia si es distributivo.
3. Calcula todos los elementos que tienen complemento. ¿Forman estos elementos un subretículo?
4. Sea $S = \{a, b, c, f\}$. Calcula los elementos notables de este conjunto (cotas superiores, cotas inferiores, supremo, ínfimo, máximo, mínimo, elementos maximales y elementos minimales).

Ejercicio 4. Dada la función booleana $f : \mathbb{B}^4 \rightarrow \mathbb{B}$ dada por

$$f(x, y, z, t) = x + (y\bar{z}) + t \downarrow (x \downarrow z)$$

1. Calcula la forma normal canónica disyuntiva de f y la forma normal canónica conjuntiva de \bar{f} .
2. Simplifica la expresión de f obtenida en el apartado anterior.
3. Expresa f usando únicamente las operaciones suma y complementario.

Ejercicio 5. Tenemos 7 velas. Tres con forma de 1, dos con forma de 2 una con forma de 5 y una con forma de 8.

1. ¿Cuántos números podemos formar con las 7 velas?
2. ¿Cuántos de ellos tienen juntos el 5 y el 8?
3. ¿Cuántos hay que tengan juntos un 1 y un 5?
4. ¿Cuántos números hay que sean mayores que 5000000?
5. ¿Cuántos hay en los que se alternan cifras pares con cifras impares?

En todos los apartados de este ejercicio, en cada número hay que usar las 7 velas.

Ejercicio 6. Sea $\alpha = a \rightarrow (b \wedge \neg c)$ y $\beta = (a \leftrightarrow \neg b) \vee c$. Encuentra una fórmula γ tal que para cualquier interpretación se verifique que $I(\gamma) = I(\alpha) + I(\alpha)I(\beta)$. Calcula la forma clausular de γ .

Ejercicio 7. Sea $\alpha = \neg \exists x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(x, x)) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z))$.
Estudia si α es universalmente válida, satisfacible y refutable o contradicción.

Ejercicio 8. Considera las siguientes fórmulas:

- $\alpha_1 = \exists y \forall x (Q(x, y) \rightarrow R(x))$
- $\alpha_2 = \exists x \neg P(x, x) \rightarrow \forall x \forall y Q(x, y)$
- $\alpha_3 = \forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow Q(f(x), y))$
- $\alpha_4 = \forall x (R(f(x)) \rightarrow P(x, a))$
- $\beta = \exists x (P(a, x) \wedge Q(f(x), x))$.

Demuestra que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \models \beta$.

¿Es posible encontrar una deducción lineal-input de la cláusula vacía? Razona la respuesta.