APELLIDOS: ....

NOMBRE: .... D.N.I.: ....

Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas[1]

14 de septiembre de 2015

Ejercicio 1. Sea $A = \{0, 1, 2, \cdots, 99\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Definimos la aplicación $f : A \to B \times B$ dada por

$$f(x) = \left(x \text{ mód } 10, \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor\right)$$

donde $\lfloor a \rfloor$ indica el mayor número entero que es menor o igual que a.

Estudia si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

Ejercicio 2. Sea $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En $A \times A$ definimos la siguiente relación binaria:

$$(a, b)R(c, d) \text{ si, y sólo si, } ad \leq bc$$

1. ¿Es R reflexiva?
2. ¿Es R simétrica?
3. ¿Es R antisimétrica?
4. ¿Es R transitiva?

Ejercicio 3. Sea $X = D(6) \times D(12)$. Consideramos en X el orden producto. Sea $A = \{(1, 2);\ (2, 3);\ (3, 4);\ (2, 4)\}$. Calcula cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, elementos maximales y minimales, máximo y mínimo (si existen) del conjunto A.

Ejercicio 4. Resuelve el siguiente sistema de congruencias

$$\left\{\begin{array}{rrl} 10x \equiv & 5 & (\text{mód } 13) \\ 7x \equiv & 8 & (\text{mód } 9) \\ 2x \equiv & 10 & (\text{mód } 12). \end{array}\right.$$

Ejercicio 5. Jaimito salió 17 días del mes pasado a hacer deporte. Unos días realizaba un circuito corriendo y otros días un circuito en bicicleta, que es 23 Km más largo que el que realizaba corriendo.

A final de mes vio que entre ambos había recorrido 303 Km. ¿Cuál es la longitud de cada circuito, cuántos días salió a correr y cuántos días salió en bicicleta?

Ejercicio 6. Construye un cuerpo con 125 elementos, y calcula en él x^{-1}.

Ejercicio 7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_7)$. Calcula, si es posible, A^{-1}

Ejercicio 8. Sea $V = (\mathbb{Z}_3)^4$. Sean U y W los subespacios siguientes:

$$U = L[(1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 0), (2, 2, 1, 2)] \qquad W \equiv \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & & & + & z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \\ & & 2y & + & 2z & + & t & = & 0. \end{array}\right.$$

Calcula una base de $U \cap W$. ¿Cuántos elementos hay en $U \cap W$?.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$ la única aplicación lineal tal que $f(1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1)$ y cuyo núcleo es el subespacio generado por los vectores $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$; $\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$. Calcula la matriz de f en las bases canónicas de $\mathbb{Q}^3$ y $\mathbb{Q}^4$.

Ejercicio 10. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_2),$$

Encuentra si es posible una matriz regular $P \in M_4(\mathbb{Z}_2)$ tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea una matriz diagonal.

[1] De los 11 ejercicios de que consta el examen hay que hacer 10.

Ejercicio 11. Para el sorteo del euromillón se dispone de dos bombos: uno con 50 bolas (numeradas de 1 a 50) y otro con 11 bolas (numeradas de 1 a 11). El sorteo consiste en extraer 5 bolas del primer bombo y 2 bolas del segundo (cuyos números se denominan *números estrella*).

Una apuesta sencilla consiste en marcar 5 números de una tabla de 50 y 2 estrellas de una tabla de 11.

Según el número de aciertos que se obtengan hay distintas categorías de premios.

1. ¿Cuántas apuestas diferentes se pueden realizar?
2. Dada una combinación ganadora:
   - ¿cuántas apuestas podrían conseguir un premio de quinta categoría (que supone acertar 4 números y una estrella)?
   - ¿cuántas apuestas podrían conseguir un premio de décima categoría (acertar 3 números y cero estrellas)?
   - ¿cuántas apuestas distintas quedarían sin premio [2]?

[2] Las apuestas que se quedan sin premio son las que, o bien no aciertan ningún número de la tabla de 50, o bien aciertan sólo uno de esta tabla y un máximo de una estrella