Cálculo
1^{o}E Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial
Curso 2016/2017

1. **(1 punto)** Calcula los números reales que satisfacen la siguiente inecuación:

$$|x^2-1| \leq |x-1|$$

Solución: Factorizamos el miembro de la izquierda:

$$|(x+1)(x-1)| \leq |x-1| \Leftrightarrow |x+1|\,|x-1| \leq |x-1|$$

Siempre que $x \neq 1$ podemos simplificar el valor absoluto $|x-1|$, así que nos queda:

$$|x+1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x+1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$$

Y como para $x = 1$, la inecuación también se da, la solución es:

$$[-2,0] \cup \{1\}$$

2. Calcula los límites siguientes:

   a) **(2 puntos)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{1+x^2} \right)^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}}$,

   b) **(1.5 puntos)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (5^x + 1)^{1/x}$.

Solución:

a) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que, evidentemente, tiende a 1, cuando la variable tiende a cero. Mientras que la expresión que aparece en el exponente, presenta una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Parta resolver dicha indeterminacación, utilizamos la siguiente descomposición y un límite conocido:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \ ,$$

donde hemos usado que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$. Y notemos que no es necesario precisar si el límite es más infinito o menos. En consecuencia, el límite pedido presenta una indeterminación del tipo "1^∞".

Aplicamos ahora la regla del número e. Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right)^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}} = e^L \iff \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\left[\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}-1\right] = L.$$

Para resolver este límite, volvemos a descomponer la expresión y utilizar el límite recordado más arriba:

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\left[\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}-1\right] = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\frac{1}{1+x^2}\left[\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)-1-x^2}{x}\right]$$

Las dos primeras fracciones que aparecen, sabemos que tienden a 1 cuando x tiende a cero; por tanto, nos ocupamos de la última fracción que presenta una indeterminación del tipo "$0/0$". Aplicamos la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)-1-x^2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)-\cos(x)-2x}{1} = -1$$

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right)^{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}\ .$$

b) En este límite se presenta una indeterminación del tipo "∞^0". Por tanto, usando la fórmula del número e:

$$\lim_{x\to+\infty}(5^x+1)^{1/x} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log(5^x+1)}$$

Nos ocupamos, entonces, del exponente:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log(5^x+1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(5^x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(5)5^x}{5^x+1} = \log(5)\ ,$$

donde hemos aplicado dos veces consecutivas la regla de L'Hôpital al presentarse indeterminación del tipo "∞/∞".

El límite pedido es: $\lim_{x\to+\infty}(5^x+1)^{1/x} = e^{\log(5)} = 5$.

3. **(2 puntos)** Determina el número de soluciones reales de la ecuación:

$$3x^5 - 5x^3 = 1 \ .$$

Solución: Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1$. Se trata, entonces, de determinar el número de ceros de f, que es una función continua y derivable en todo el dominio al ser polinómica. Además, al ser su grado impar, sabemos que al menos se anulará una vez. Tendremos que precisar si se anula más veces y por qué.

Calculamos su derivada:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15(x^4 - x^2) = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x+1)(x-1)$$

Los puntos críticos de f, es decir, aquellos que resuelven la ecuación $f'(x) = 0$, son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. Por tanto, f se anulará, como mucho, 4 veces. Vamos a deducir si estos puntos son de extremo, o no, derivando otra vez:

$$f''(x) = 15(4x^3 - 2x) \quad \text{y} \quad f'''(x) = 15(12x^2 - 2)$$

y evaluamos en los puntos críticos:

$$\begin{aligned} f''(0) = 0 \ \text{ y } \ f'''(0) = 30 \neq 0 &\Rightarrow f \text{ no alcanza un extremo relativo en } \ x = 0, \\ f''(1) = 30 \ &\Rightarrow \ f \text{ alcanza un mínimo relativo en } \ x = 1, \\ f''(-1) = -30 \ &\Rightarrow \ f \text{ alcanza un máximo relativo en } \ x = -1. \end{aligned}$$

Además, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $f(-1) = 1$, por lo que antes de -1, utilizando el teorema de Bolzano, la función se anula una vez; $f(-1) = 1 > 0$, y $f(1) = -1 < 0$, por lo que entre -1 y 1, la función se anula por segunda vez; y, por último, $f(1) = -1 < 0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, por tanto, la función después de 1 se anula por tercera vez. En conclusión, la función f tiene tres ceros, o, lo que es lo mismo, la ecuación dada tiene tres soluciones reales.

4. **(2 puntos)** Se considera la función $f\colon]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \log(\frac{x+1}{x}) - \frac{1}{x}$. Calcula el conjunto imagen de f.

Solución: La función dada es continua y derivable en su dominio. Para calcular su imagen, vamos a buscar posibles extremos relativos calculando sus puntos críticos. Para ello, derivamos f.

$$f'(x) = \frac{\frac{x-x-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

La derivada de f no se anula nunca. Por tanto, f es estrictamente monótona en cada intervalo que define al dominio. De hecho, para $x < -1$ la derivada es negativa (f es estrictamente decreciente en $]-\infty,-1[$); mientras que para $x > 0$, la derivada es positiva (f es estrictamente creciente en $]0,+\infty[$). Con todo esto, calculamos la imagen de f:

$$\operatorname{Im}(f) = f(]-\infty,-1[) \cup f(]0,+\infty[) =]\lim_{x\to -1_-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)[\cup] \lim_{x\to 0_+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)[$$

Sólo nos queda calcular estos cuatro límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -\infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x\to -1_-} f(x) &= -\infty \\ (*) \lim_{x\to 0_+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto: $\operatorname{Im}(f) =]-\infty, 0[$.

(*) Este límite presenta una indeterminación del tipo "$\infty - \infty$". Para ello, hacemo un cambio de variable: $y = \frac{1}{x}$. De esta forma nos queda:

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} \log(\frac{x+1}{x}) - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0_+} \log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \log(1+y) - y = \lim_{y\to +\infty} y\left[\frac{\log(1+y)}{y} - 1\right] = -\infty\,,$$

ya que, utilizando la regla de L'Hôpital, $\lim_{y\to +\infty} \dfrac{\log(1+y)}{y} = 0$.

5. **(1.5 puntos)** El polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de una función dada f es:

$$2 + x + 2x^2$$

Calcula el polinomio de Taylor del mismo orden y centro de la función $g(x) = xe^{f(x)-1}$.

Solución: Sabemos que el polinomio dado es el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de una función dada f; esto es:

$$P_2(x) = 2 + x + x^2 = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

De lo anterior, igualando coeficientes, obtenemos que:

$$f(0) = 2\ ,\ f'(0) = 1\ \ f''(0) = 4$$

Calculemos ahora $T_2(x)$, el polinomio de Taylor centrado en cero y de orden 2 de la función $g(x) = xe^{f(x)-1}$; es decir:

$$T_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2$$

Para ello, calculamos los coeficientes:

$$\begin{aligned} g(x) = xe^{f(x)-1} &\Rightarrow g(0) = 0 \\ g'(x) = e^{f(x)-1} + xf'(x)e^{f(x)-1} = e^{f(x)-1}(1 + xf'(x)) &\Rightarrow g'(0) = e \\ g''(x) = f'(x)e^{f(x)-1}(1 + xf'(x)) + e^{f(x)-1}(f'(x) + xf''(x)) &\Rightarrow g''(0) = 2e \end{aligned}$$

Entonces, el polinomio de Taylor pedido es:

$$T_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 = ex + ex^2$$

Granada, 29 de noviembre de 2016