CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. EXAMEN FINAL.

1. (2.5 ptos.)

   (a) Se considera la sucesión definida por recurrencia por $x_1 = 8$ y $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

   (b) Calcula el límite de la sucesión

$$\left\{ \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \right\}.$$

Solución:

(a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \frac{8}{2} - 2 = 6 < x_1 = 8$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona decreciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 > x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n > x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} > x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n > x_{n+1} \Rightarrow \frac{x_n}{2} > \frac{x_{n+1}}{2} \Rightarrow \frac{x_n}{2} + 2 > \frac{x_{n+1}}{2} + 2 \Rightarrow x_{n+1} > x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona decreciente.

Al ser decreciente, ya sabemos que la sucesión está acotada superiormente por x_1. Veamos que está acotada inferiormente por 4. Esto es, que $x_n \geq 4 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 8 \geq 4$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \geq 4$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \geq 4$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \geq 4 \Rightarrow \frac{x_n}{2} \geq 2 \Rightarrow \frac{x_n}{2} + 2 \geq 2 + 2$$
$$\Rightarrow \frac{x_n}{2} + 2 \geq 4 \Rightarrow x_{n+1} \geq 4$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ y nos queda que $x = \frac{x}{2} + 2$. Resolvemos la ecuación:

$$x - \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \lim\{x_n\} = 4$$

(b) Aplicamos el criterio de Stolz (tenemos una indeterminación de "$\frac{\infty}{\infty}$" y además la sucesión del denominador es creciente). Llamemos $a_n = \frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$ y $b_n = n^2$. Estudiamos entonces el límite de la sucesión: $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ y nos queda:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}}{(n+1)^2 - n^2} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n^2+2n-1-n^2)(n+1)^n} = \frac{(n+2)}{2n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$$

Descomponemos la sucesión en el producto de $\frac{(n+2)}{2n}$, cuyo límite es $1/2$, y en $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$, que presenta una indeterminación del tipo "1^∞", por lo que, aplicando el criterio del número e, nos queda que

$$n\left(\frac{n+2}{n+1} - 1\right) = \frac{n}{n+1} \to 1 \Rightarrow \lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = e^1 = e$$

Como consecuencia de todo lo anterior:

$$\lim\left\{\frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}\right\} = \frac{e}{2}$$

2. (2 ptos.) Tenemos un alambre de 1 metro de longitud. Se corta el alambre en dos trozos con los que se construyen un cuadrado y un triángulo equilátero, respectivamente. Calcula el punto donde es necesario cortar el alambre para que la suma de las áreas de las dos figuras sea mínima.

Solución: Llamemos x al punto entre 0 y 1 donde cortamos el alambre. Con el trozo de longitud x construimos un triángulo de lado l (por tanto $3l = x$ y de aquí $l = x/3$) y con el resto de alambre, $1-x$, construimos un cuadrado de lado $\frac{1-x}{4}$. Está claro que el área de este cuadrado ha de ser $\frac{(1-x)^2}{16}$, y para expresar el área del triángulo en función de la variable x nos haría falta calcular su altura h. Para ello, si consideramos el triángulo rectángulo mitad del construido de lado $x/3$, la relación entre los catetos $x/6$ y h con la hipotenusa x nos permite establecer la igualdad:

$$(\frac{x}{3})^2 = h^2 + (\frac{x}{6})^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36}} = \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

Por tanto, la función que vamos a maximizar es:

$$f(x) = \frac{x^2}{12\sqrt{3}} + \left(\frac{1-x}{4}\right)^2, \ \forall x \in [0,1]$$

Derivamos y simplificamos la derivada: $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{27}} - \frac{1-x}{8}$, con lo que el punto crítico que encontramos es:

$$x = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{27}+4} \in]0,1[$$

Derivamos por segunda vez: $f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{27}} + \frac{1}{8}$ que es positiva, por lo que en dicho punto se alcanza un mínimo relativo, así que lo descartamos. Para decidir dónde se alcanza el máximo, sólo nos resta evaluar en los extremos del intervalo:

$$f(0) = \frac{1}{16}$$
$$f(1) = \frac{1}{4\sqrt{27}}$$

y es claro que $f(0) > f(1)$ con lo que el máximo se alcanza en $x = 0$; o lo que es lo mismo, utilizando todo el alambre para construir el cuadrado.

3. (2.5 ptos.)

   (a) Estudia si es convergente la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

   (b) Calcula la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

Solución:

(a) Aplicamos el criterio del cociente, ya que aparecen factoriales en la expresión del término general de la serie. Así, si llamamos $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ tenemos que estudiar el límite del cociente siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2 (n!)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2n+2)(2n+1)(2n)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1$$

Por tanto, la serie es convergente.

(b) La serie propuesta, salvo un signo menos, es una serie geométrica de razón $-1/2$, por tanto, utilizando que $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{-1}{2}} = \frac{2}{3}$ su suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n - 1\right) = -\left(\frac{2}{3}-1\right) = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

4. (2 ptos.) Sea la función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_0^x \frac{\log(2+t)}{1+t}dt$, para $x \geq 0$.

(a) Demuestra que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$.

(b) Calcula $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{(\log(x))^2}$.

(c) Calcula la imagen de la función f.

Solución:

(a) La función f es una función derivable gracias al teorema fundamental del cálculo. Y como consecuencia de dicho teorema su derivada es:

$$f'(x) = \frac{\log(2+x)}{1+x} \ \forall x > 0$$

Observamos que en dicho cociente, tanto numerador como denominador, son positivos, por lo que la derivada de f es mayor que cero en todo el dominio. Deducimos entonces que la función f es estrictamente creciente en $[0, +\infty[$.

(b) Para calcular el límite propuesto aplicamos la segunda regla de L'Hôpital (tenemos un cociente donde el denominador evidentemente diverge, pero del numerador no sabemos nada):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{2\log(x)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} = \frac{\log(2+x)x}{2\log(x)\,(1+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2(1+x)}\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(2+x)}{\log(x)} = \frac{1}{2}$$

donde el último límite lo hemos resuelto volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2+x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2+x} = 1 \ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(2+x)}{\log(x)} = 1$$

(c) Para calcular la imagen de la función f tenemos en cuenta que además de ser continua (gracias al teorema fundamental del cálculo), es también estrictamente creciente (lo hemos comprobado en el apartado (a)). Por tanto:

$$f(\mathbb{R}_0^+) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [0,+\infty[$$

Para deducir el comportamiento de la función en $+\infty$ hemos utilizado la información que nos aporta el límite calculado en el apartado (b); esto es:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{(\log(x))^2} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

5. (1 pto.) Calcula $\int \operatorname{sen}(x)e^{-x}dx$. Si $G(x)$ es dicha primitiva, calcula $\lim_{x\to+\infty} G(x)$.

Solución: Aplicamos el método de integración por partes, donde vamos a considerar:

$$\begin{aligned} u = \operatorname{sen}(x) &\ \Rightarrow\ du = \cos(x) \\ dv = e^{-x} &\ \Rightarrow\ v = -e^{-x} \end{aligned}$$

Por tanto, la integral se resuelve así:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \operatorname{sen}(x)e^{-x}\,dx = -\operatorname{sen}(x)e^{-x} - \left(\int \cos(x)(-e^{-x})\,dx\right) \\ &= -\operatorname{sen}(x)e^{-x} + \int \cos(x)e^{-x}\,dx \\ &\text{volvemos a aplicar partes} \left[\begin{cases} u = \cos(x) & \Rightarrow\ du = -\operatorname{sen}(x) \\ dv = e^{-x} & \Rightarrow\ v = -e^{-x} \end{cases}\right] \\ &= -\operatorname{sen}(x)e^{-x} + \left[-\cos(x)e^{-x} - \int (-\operatorname{sen}(x)(-e^{-x})\,dx\right] \\ &= -e^{-x}(\operatorname{sen}(x)+\cos(x)) - \int \operatorname{sen}(x)\,e^{-x}\,dx \\ &= -e^{-x}(\operatorname{sen}(x)+\cos(x)) - G(x) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} &G(x) = -e^{-x}(\operatorname{sen}(x)+\cos(x)) - G(x) \ \Rightarrow\ 2G(x) = -e^{-x}(\operatorname{sen}(x)+\cos(x)) \\ &G(x) = \frac{-e^{-x}(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))}{2} \end{aligned}$$

Calculamos ahora $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{2}\right) = 0$, donde hemos aplicado que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ y el factor restante es una función acotada.

Granada, 4 de febrero de 2011