CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. EXAMEN FINAL

1. Se considera la sucesión definida por recurrencia por $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + x_n} - \frac{1}{2}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

   Solución: Vamos a comprobar que esta sucesión es monótona y acotada.

   a) Comenzamos con la monotonía. Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que

   $$x_2 = \sqrt{1+1/2} - 1/2 = \sqrt{3/2} - 1/2 < x_1 = 1$$

   puesto que $\sqrt{3/2} < 3/2$.

   Para comprobar que la sucesión dada es monótona decreciente, lo vemos por inducción:

   - Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 > x_2$.
   - Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n > x_{n+1}$.
   - Comprobamos que $x_{n+1} > x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

   $$x_n > x_{n+1} \Rightarrow x_n + 1/2 < x_{n+1} + 1/2 \Rightarrow \sqrt{x_n + 1/2} < \sqrt{x_{n+1} + 1/2}$$

   $$\Rightarrow \sqrt{x_n + 1/2} - 1/2 < \sqrt{x_{n+1} + 1/2} - 1/2 \Rightarrow x_{n+1} > x_{n+2}$$

   Por tanto, la sucesión es monótona decreciente.

   b) Al ser decreciente, ya sabemos que la sucesión está acotada superiormente por $x_1 = 1$. Veamos que está acotada inferiormente por cero. Esto es, que $x_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

   - Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 1 > 0$.
   - Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n > 0$.
   - Comprobamos que $x_{n+1} > 0$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

   $$x_n > 0 \Rightarrow x_n + 1/2 > 1/2 \Rightarrow \sqrt{x_n + 1/2} > \sqrt{1/2}$$

   $$\Rightarrow \sqrt{x_n + 1/2} - 1/2 > \sqrt{1/2} - 1/2 > 0 \Rightarrow x_{n+1} > 0$$

   Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

   c) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ y nos queda que $x = \sqrt{x+1/2} - 1/2$. Resolvemos la ecuación:

   $$x = \sqrt{x+1/2} - 1/2 \Rightarrow x + 1/2 = \sqrt{x+1/2} \Rightarrow (x+1/2)^2 = x + 1/2$$

   $$\Rightarrow (x+1/2)(x+1/2-1) = 0 \Rightarrow (x+1/2)(x-1/2) = 0$$

   Obtenemos dos soluciones: $x = -1/2$ y $x = 1/2$, pero descartamos la primera solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que 0. El motivo es que $0 < x_n \leq 1 \;, \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 1/2$.

2. Calcula el límite de la sucesión

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right\}$$

y como consecuencia estudia el carácter de la serie

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{(n+1)^n}$$

Solución: Introducimos dentro de la raíz n-sima el factor $\frac{1}{n+1}$, con lo que la sucesión a estudiar es:

$$\left\{\sqrt[n]{\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{(n+1)^n}}\right\}$$

Aplicamos el criterio de la raíz; esto es, si llamamos x_n a la sucesión radicando, tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)}{(n+2)^{n+1}}\,\frac{(n+1)^n}{n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+2)n}\,\frac{(n+1)^n}{(n+2)^n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+2)n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n\end{aligned}$$

La primera fracción es una sucesión de tipo racional que converge a 4 y la segunda fracción es de tipo exponencial: $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$. Esta última presenta una indeterminación de "1^∞", por lo que, aplicando la regla del número e, nos queda que

$$n\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right) = \frac{-n}{n+2} \to -1 \;\Rightarrow\; \text{lím}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Como consecuencia de todo lo anterior:

$$\text{lím}\left\{\frac{1}{n+1}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right\} = \text{lím}\left\{\sqrt[n]{\frac{2n(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{(n+1)^n}}\right\} = \frac{4}{e}$$

Estudiemos ahora la serie planteada. Observamos que, por el tipo de sumando, interesa aplicar el criterio del cociente. Si llamamos, otra vez, x_n a la sucesión sumando de la serie, aplicando el criterio mencionado habría que calcular el límite de la sucesión cociente $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, sucesión que acabamos de estudiar más arriba y cuyo límite es $4/e$. Dado que $4/e > 1$, el criterio del cociente nos asegura que la serie **no converge**.

3. Calcula la suma de la serie $\sum_{n\geq 1}\frac{3^{-n}-1}{2^n}$.

Solución: En primer lugar, analizamos su convergencia. Esta serie se puede descomponer como la diferencia de dos series de la forma siguiente:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{3^{-n}-1}{2^n} = \sum_{n\geq 1}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2^n} - \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{6}\right)^n - \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Como cada sumando es una serie convergente (el primer sumando es una serie geométrica de razón $r = 1/6 < 1$, luego convergente; y el segundo sumando es la serie geométrica de razón $r = 1/2 < 1$, luego también convergente), la serie propuesta es también convergente. Calculamos entonces su suma, sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ y entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} - 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} - 1 - \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1\right) = \frac{1}{5} - 1 = \frac{-4}{5}$$

4. Calcula los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2^{1/x}+3^{1/x}}{2}\right)^x$.

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,\mathrm{d}t}{1-\cos(x)}$.

   Solución:

   a) Se trata de un límite que presenta una indeterminación del tipo "1^∞" por lo que aplicamos la regla del número e. Es decir, hay que calcular

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2^{1/x}+3^{1/x}}{2} - 1\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2^{1/x}+3^{1/x}-2}{2}\right]$$

Desearíamos un límite que presentara una indeterminación; para ello, pasamos el factor x dividiendo como $1/x$:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2^{1/x}+3^{1/x}}{2} - 1\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2^{1/x}+3^{1/x}-2}{2}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{2^{1/x}+3^{1/x}-2}{1/x}\right]$$

La función que está en el interior del corchete anterior presenta una indeterminación del tipo "0/0". Aplicamos entonces la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{2^{1/x}(-1/x^2)\log(2) + 3^{1/x}(-1/x^2)\log(3)}{-1/x^2}\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{2^{1/x}\cancel{(-1/x^2)}\log(2) + 3^{1/x}\cancel{(-1/x^2)}\log(3)}{\cancel{-1/x^2}}\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left[2^{1/x}\log(2) + 3^{1/x}\log(3)\right]
\end{aligned}$$

(como $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3^{1/x} = 1$)

$$= \frac{1}{2}\left[\log(2)+\log(3)\right] = \frac{1}{2}\left[\log(2\cdot 3)\right] = \log(\sqrt{6})$$

Por tanto, $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2^{1/x}+3^{1/x}}{2}\right)^x = e^{\log(\sqrt{6})} = \sqrt{6}$.

También podemos calcular este límite aplicando la regla del nº e al revés. Es decir, recordemos que dicha regla asegura que si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L \iff \lim_{x\to a} g(x)\,(f(x)-1) = L$$

Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2^{1/x}+3^{1/x}}{2}-1\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2^{1/x}+3^{1/x}-2}{2}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x\left[2^{1/x}-1\right] + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x\left[3^{1/x}-1\right]$$

Aplicando la regla del nº e al revés, cada uno de los sumandos se calcula así:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[2^{1/x}-1\right] = \log\left(\lim_{x\to+\infty}(2^{1/x})^x\right) = \log(\lim_{x\to+\infty} 2) = \log(2)$$

y

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[3^{1/x}-1\right] = \log\left(\lim_{x\to+\infty}(3^{1/x})^x\right) = \log(\lim_{x\to+\infty} 3) = \log(3)$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{2^{1/x}+3^{1/x}}{2}-1\right] = \frac{1}{2}\left(\log(2)+\log(3)\right) = \log(\sqrt{6})$$

y concluimos como hemos hecho anteriormente.

b) Se nos presenta un cociente cuyo numerador es una función definida por una integral. Esta función, gracias al teorema fundamental del Cálculo, sabemos que es continua (y $\lim_{x\to 0}\int_0^{x^2}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0$) y derivable. Además su derivada es:

$$F(x) = \int_0^{x^2}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow F'(x) = 2x\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = 2\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$$

Para resolver la indeterminación del tipo “$0/0$”, aplicamos la regla de L’Hôpital. El límite del cociente de las derivadas es

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x^2)}{x\operatorname{sen}(x)}$$

Este último límite vuelve a presentar una indeterminación del tipo “$0/0$” con lo que volvemos a aplicar la regla de L’Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x\cos(x^2)}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)} = \lim_{x\to 0} 4\cos(x^2)\,\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)} = 4\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)}$$

y aplicando la regla de L’Hôpital al segundo factor, nos queda:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)+\cos(x)-x\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{4x\cos(x^2)}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)} = \frac{4}{2} = 2$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,\mathrm{d}t}{1-\cos(x)} = 2$

5. Sea $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(x) - x + 2$.

   a) Encuentra los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f, así como sus extremos relativos.

   b) Calcula $f(]0,+\infty[)$.

   c) Determina el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ en $\mathbb{R}^+$ y localízalas en intervalos de longitud $1/2$.

Solución:

a) Se trata de una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}^+$ por ser suma de funciones que también lo son. Para estudiar la monotonía de f vamos a analizar el signo de su derivada; pero antes veamos quiénes son los candidatos a puntos de extremos:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} = 0 \iff x = 1$$

Obtenemos un solo punto crítico ($x = 1$), así que los intervalos de monotonía de f son $]0,1[$ y $]1,+\infty[$. En cada uno de ellos el signo de la derivada se conserva, así que es fácil comprobar que:

$$\begin{aligned} x \in]0,1[\ &\Rightarrow \ f'(x) > 0 \ \Rightarrow f \text{es estrictamente creciente en }]0,1[\\ x \in]1,+\infty[\ &\Rightarrow \ f'(x) < 0 \ \Rightarrow f \text{es estrictamente decreciente en }]1,+\infty[\end{aligned}$$

Como consecuencia de lo anterior, tenemos que en el punto $x = 1$ se alcanza un máximo relativo, que al ser el único punto de máximo relativo, se convierte en el punto de máximo absoluto de f.

b) Para calcular el conjunto imagen de f nos apoyamos en el apartado anterior:

$$f(]0,+\infty[) = f(]0,1]) \cup f([1,+\infty[) =]\lim_{x\to 0} f(x), f(1)] \cup]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)]$$

Solo nos queda calcular los límites indicados en la descomposición anterior:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (\log(x) - x + 2) = -\infty \\ &\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\log(x) - x + 2) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\log(x)}{x} - 1 + \frac{2}{x}\right) = -\infty \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la escala de infinitos en el límite: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$. Entonces, como $f(1) = 1$, tenemos que $f(]0,+\infty[) =]-\infty, 1]$.

c) Para determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ nos apoyamos en todo el estudio anterior y obtenemos que hay dos soluciones. Para llegar a esta conclusión utilizamos el teorema de Bolzano en el intervalo $]0,1[$ (hay cambio de signo de f, por tanto hay al menos un cero de f entre 0 y 1) y razonando análogamente, pero en el intervalo $[1,+\infty[$ concluimos que al menos hay otro cero de f por encima de 1. Pero, ¿habría más ceros de f? No, puesto que f'solo se anula una vez y, por el teorema de Rolle, sabemos de f no se puede anular más de dos veces. Por tanto, la ecuación dada tiene exactamente dos soluciones.

Nos ocupamos ahora de localizarlas en intervalos de longitud $1/2$. La primera solución se localiza en el intervalo $]0,1/2]$ y la segunda en $[e,e+1/2]$, ya que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= -\infty \\
f(1/2) &= -\log(2)+3/2 = 0{,}8068 > 0 \\
f(e) &= 3-e > 0 \\
f(e+1/2) &= \log(e+1/2)-e-1/2+2 = -0{,}04943 < 0
\end{aligned}$$

6. Sea $f(x)=(x-a)\cos(x)$. Calcula el valor de a sabiendo que $\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}-2$.
Solución: Aplicamos el método de integración por partes:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (x-a)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = x-a & \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos(x)\mathrm{d}x & \Rightarrow v = \operatorname{sen}(x) \end{bmatrix} \\
&= [(x-a)\operatorname{sen}(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} - a + [\cos(x)]_0^{\pi/2} == \frac{\pi}{2} - a - 1
\end{aligned}$$

Ahora bien, nos dan el valor de la integral que haremos coincidir con el que acabamos de obtener. Por tanto:

$$\frac{\pi}{2} - a - 1 = \frac{\pi}{2} - 2 \iff a = 1$$

Granada, 2 de septiembre de 2013