GEOMETRÍA I. Examen del Tema 2

– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –

Curso 2011/12

Nombre:

Razonar todas las respuestas

1. (a) Si una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tiene rango 3, ¿cuál es el rango de AA? ¿y de AAA ?

   (b) Si dos matrices del mismo orden son regulares ¿es regular la suma de ambas matrices?

   (c) ¿Es posible encontrar un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única? ¿y de tres ecuaciones con dos incógnitas?

2. Según el valor de a, hallar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & -1 \\ 3 & a & 0 \end{pmatrix}$$

   y en el caso de que sea regular, hallar la matriz inversa.

3. Discutir y resolver en su caso, los siguientes sistemas

$$\left\{ \begin{array}{ccc} ax - ay & = & -1 \\ (a+1)x + y + z & = & 0 \\ x + z & = & 1 \end{array} \right.$$

4. Usando matrices, hallar el valor de a para que el subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por $U =< (4,3,2,1), (a,1,2,3), (1,2,3,4) >$ tenga dimensión 2 y en tal caso, hallar las ecuaciones cartesianas de U.

Soluciones (puede haber diferentes maneras correctas de responder a las preguntas)

1. (a) En ambos casos el rango es 3, porque al ser A una matriz regular, su determinante no es cero. Por otro lado, $det(AA) = det(A)^2 \neq 0$ y $det(AAA) = (det(A))^3 \neq 0$ y al ser no nulos, son matrices regulares.

   (b) En general no es cierto. Tomamos $A = I_n$ y $B = -I_n$. El determinante de A es 1 y el de B, $(-1)^n$. Como ambos no son cero, las matrices son regulares. Sin embargo, $A + B = 0$, que no es regular ya que su determinante es cero.

   (c) (1) No. Si tiene solución única, entonces

   $$r(A) = r(A|b) = \text{número de incógnitas} = 3,$$

   pero $r(A) \leq 2$ ya que A tiene 2 filas.

   (2) Sí, basta con que $r(A) = r(A|b) = 2$, por ejemplo:

   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

2. Hallamos el rango usando determinantes y empezando por el lugar $(3, 1)$. Como $a_{31} = 3$, entonces $r(A) \geq 1$. Añadimos la segunda fila y tercera columna, y la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante 3, que no es cero. Por tanto, $r(A) \geq 2$. Finalmente calculamos el determinante de la matriz A, que resulta ser, $a^2 - a - 3$. Igualando a cero, tenemos $a = (1 \pm \sqrt{13}))/2$. Por tanto, para estos valores de a, el determinante de A es cero y el rango de A es 2; en otro caso, el rango es 3.

   La matriz inversa es

   $$\frac{1}{a^2 - a - 3} \begin{pmatrix} a & a & -1 - a \\ -3 & -3 & a + 2 \\ -a & 3 - a^2 & a^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

3. Si A es la matriz de los coeficientes de la incógnitas, hallamos su determinante: $det(A) = a^2 + a$. Por tanto, si $a^2 + a \neq 0$, es decir, si $a \neq 0$ y $a \neq -1$, el rango de A es 3, y como la matriz ampliada es 3×4 y contiene a A, entonces su rango también es 3. En este caso el sistema es compatible determinado (hay 3 incógnitas). Las soluciones son

$$x = -1/a, y = 0, z = (a+1)/a.$$

Consideramos el caso $a = 0$. En tal caso, la primera ecuación se convierte en $0 = 1$, lo cual no es posible, y por tanto, el sistema es incompatible.

Caso $a = -1$. Al sustituir en A, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La submatriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene determinante -1, luego el rango de A es 2. En la matriz ampliada, añadimos a esta submatriz la cuarta columna y la tercera fila, quedando $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es 0. Por tanto el rango de la matriz ampliada es 2, quedando un sistema compatible indeterminado. Tomando las incógnitas x e y, pasamos z a la derecha y resolvemos, obteniendo

$$x = 1 - z, y = -z, z \in \mathbb{R}.$$

4. La dimensión de U es el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Empezamos por la submatriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, que tiene determinante -1 y por tanto, el rango de A es al menos 2. El rango de A se halla calculando los determinantes 3×3 que resultan de añadir filas y columnas a esta submatriz. Sólo hay dos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -5a.$$

Por tanto, si $a = 0$, el rango de A es 2 y si $a \neq 0$, el rango es 3. Como conclusión, la dimensión de U es 2 si $a = 0$. Para calcular las ecuaciones cartesianas, cogemos las dos filas que contienen a la submatriz con determinante no nulo, es decir, la segunda y tercera fila, y (para $a = 0$) tenemos $(x, y, z, t) \in U$ si y sólamente si

$$rg \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2.$$

Y esto sucede si y sólamente si

$$\begin{vmatrix} x & z & t \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} y & z & t \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$\begin{cases} -x + 3z - 2t = 0 \\ -y + 2z - t = 0. \end{cases}$$