Doble Grado en Informática-Matemáticas

Variable Compleja I

(Curso 2014-2015) Control 1 27-Marzo-2015

1.

(i) Demostrar que

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \quad \text{para cualesquiera} \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

(ii) Demostrar la identidad del paralelogramo:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad \text{para cualesquiera} \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

(iii) Obtener el mínimo valor de la expresión $|z-a|^2 + |z-b|^2$, donde a y b son números complejos fijos y z varía en $\mathbb{C}$.

(2 Puntos)

2.

(i) Enunciar los conceptos de continuidad y de derivabilidad en un punto de una función compleja de variable compleja. ¿Cuándo una función compleja se dice holomorfa en un abierto?

(ii) Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua que no se anula en ningún punto de Ω. Demostrar que si f^2 es holomorfa en Ω, entonces f es holomorfa en Ω.

(2 Puntos)

3.

(i) Enunciar el concepto de función analítica. En este momento, qué relación sabes que existe entre los conceptos:

Función holomorfa y Función analítica.

Justificar razonadamente la respuesta.

(ii) Estudiar la convergencia de la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} z^n$ y determinar su función suma.

(iii) En conveniente disco con centro 0, expresar las funciones

$$\frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{(1-z)^3}.$$

como suma de una serie de potencias centrada en 0.

(iv) Demostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$

(v) Verificar que la función $\dfrac{1}{z}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(4 Puntos)

4.

(i) Enunciar el Criterio de la mayorante de Weierstrass.

(ii) Se considera la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(z)$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n : \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ está definida por

$$f_n(z) := \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Probar que para cada $\rho > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(z)$ converge absoluta y uniformemente en $D(0,\rho) \setminus \mathbb{N}$. Deducir que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(z)$ converge puntualmente en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

(2 Puntos)