Apellidos: .... Grupo: ....

Nombre: .... NIF: ....

ALEM

Grado en Ingeniería Informática

07 de febrero de 2017

1. Sea $f : \mathbb{Z}_{90} \to \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{10}$ la aplicación definida como

$$f(x) = (x \text{ mód } 9, x \text{ mód } 10)$$

Estudia si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

Solución:

- ¿Es f inyectiva?

  Supongamos que tenemos $x, y \in \mathbb{Z}_{90}$ tales que $f(x) = f(y)$. Estudiemos si $x = y$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) = f(y) & \Longrightarrow & (x \text{ mód } 9, x \text{ mód } 10) = (y \text{ mód } 9, y \text{ mód } 10) \\ & \Longrightarrow & x \text{ mód } 9 = y \text{ mód } 9 \text{ y } x \text{ mód } 10 = y \text{ mód } 10 \\ & \Longrightarrow & x \equiv y \text{ mód } 9 \text{ y } x \equiv y \text{ mód } 10 \\ & \Longrightarrow & x - y \equiv 0 \text{ mód } 9 \text{ y } x - y \equiv 0 \text{ mód } 10 \\ & \Longrightarrow & (x-y) \text{ es múltiplo de } 9 \text{ y } (x-y) \text{ es múltiplo de } 10 \\ & \Longrightarrow & (x-y) \text{ es múltiplo de } \mathtt{mcm}(9,10) \\ & \Longrightarrow & (x-y) \text{ es múltiplo de } 90 \\ & \Longrightarrow & x \equiv y \text{ mód } 90 \\ & \Longrightarrow & x = y \text{ (en } \mathbb{Z}_{90}) \end{array}$$

- ¿Es f sobreyectiva?

  Sean ahora $(a, b) \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{10}$. Vamos a ver si podemos encontrar $x \in \mathbb{Z}_{90}$ tal que $f(x) = (a, b)$. Puesto que $f(x) = (x \text{ mód } 9, x \text{ mód } 10)$ lo que tenemos que ver es si existe x tal que:

$$\begin{array}{rcll} x & \equiv & a & \text{mód } 9 \\ x & \equiv & b & \text{mód } 10 \end{array}$$

  Tratamos de resolver el sistema. El teorema chino del resto nos asegura que tiene solución, lo cual sería suficiente para comprobar que es sobreyectiva. No obstante, vamos a dar una solución explícita.

Comenzamos por la segunda:	$x = b + 10k : \ k \in \mathbb{Z}$.
Sustituimos en la primera:	$b + 10k \equiv a$ mód 9.
Reducimos módulo 9:	$b + k \equiv a$ mód 9.
Despejamos k:	$k \equiv a - b$ mód 9.
Obtenemos el valor de k:	$k = a - b + 9k'$.
Sustituimos:	$x = b + 10k = b + 10(a - b + 9k')$.
Operamos:	$x = b + 10(a - b + 9k') = b + 10a - 10b + 90k' = 10a - 9b + 90k'$.

  Y vemos que $x = 10a - 9b$ es solución (si este número fuera negativo, le sumamos 90, y así tendríamos un número entre 0 y 89).

  Por ejemplo, para encontrar x tal que $f(x) = (7, 4)$ tomamos $x = 7 \cdot 10 - 4 \cdot 9 = 70 - 36 = 34$. Es claro que $f(34) = (7, 4)$.

  Para encontrar x tal que $f(x) = (2, 8)$ tomamos $x = 2 \cdot 10 - 8 \cdot 9 + 90 = 20 - 72 + 90 = -52 + 90 = 38$.

Puesto que tanto $\mathbb{Z}_{90}$ como $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{10}$ tienen 90 elementos, una vez comprobado que la aplicación es inyectiva (o sobreyectiva) entonces es automáticamente biyectiva.

2. Se junta un grupo de nueve amigos: Alberto, Borja, Carlos, David, Esteban, Fernando, Gerardo, Héctor e Ignacio. Deciden ordenarse por altura y peso: es decir, una persona está por delante de otra si es más alta y pesa más.

   En la siguiente tabla indicamos la altura y el peso de cada uno de los miembros del grupo:

	Antonio	Borja	Carlos	David	Esteban	Fernando	Gerardo	Héctor	Ignacio
Altura	1'8 m	1'7 m	1'78 m	1'9 m	1'87 m	1'72 m	1'71 m	1'81 m	1'85 m
Peso	80 Kg	71 Kg	72 Kg	86 Kg	81 Kg	83 Kg	76 Kg	84 Kg	76 Kg

   Representa en un diagrama a los nueve amigos tal y como quedarían ordenados.

   Consideramos el conjunto formado por aquellos cuyo nombre empieza por vocal.

   Indica quienes serían las cotas superiores e inferiores, el supremo y el ínfimo, el menor y el mayor, y los maximales y minimales.

   Solución:

   En realidad lo que nos piden es que ordenemos los elementos del conjunto

$$\{(1'8,80),\ (1'7,71),\ (1'78,72),\ (1'9,86),\ (1'87,81),\ (1'72,83),\ (1'71,76),\ (1'81,84),\ (1'85,76)\}$$

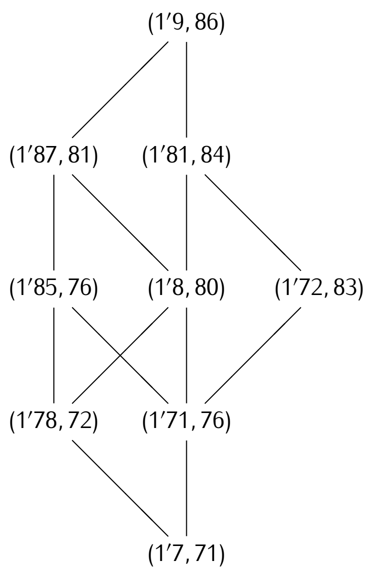
   según el orden producto. Para facilitarnos el trabajo, los ordenamos según la altura:

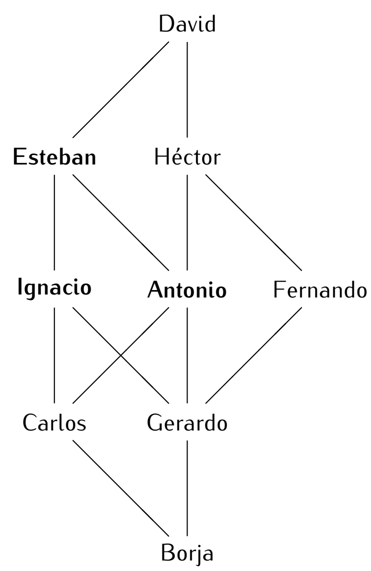
$$\{(1'7,71),\ (1'71,76),\ (1'72,83),\ (1'78,72),\ (1'8,80),\ (1'81,84),\ (1'85,76),\ (1'87,81),\ (1'9,86)\}$$

   Vemos entonces que:

   El segundo $(1'71,76)$ va por encima del primero $(1'7,71)$, y el tercero $(1'72,83)$ por encima del segundo.
   El cuarto $(1'78,72)$ va por encima del primero, pero no de los otros dos.
   El quinto, $(1'8,80)$, va por encima del cuarto y del segundo, pero no del tercero.
   El sexto, $(1'81,84)$ va por encima de todos los que hemos indicado hasta ahora.
   El séptimo, $(1'85,76)$, va por encima del segundo y el cuarto, pero no del tercero y del quinto.
   El octavo, $(1'87,81)$, va por encima del séptimo y el quinto, pero no del tercero.
   Por último, el noveno va por encima de todos.

   Teniendo esto en cuenta, el diagrama de Hasse sería:





   donde hemos señalado en negrita los tres que empiezan por vocal.

   A la vista de esto, tenemos la siguiente tabla:

C. Superiores:	{David, Esteban}	C. Inferiores:	{Borja, Carlos, Gerardo}
Supremo:	Esteban	Ínfimo:	No tiene
El. maximales:	{Esteban}	El. minimales:	{Antonio, Ignacio}
Máximo:	Esteban	Mínimo:	No tiene

3. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

   a) ¿Tiene soluciones la ecuación diofántica $213x + 185y = 111$? En caso afirmativo da tres soluciones diferentes.

   b) ¿Tiene inverso 185 en $\mathbb{Z}_{213}$? En caso afirmativo, calcúlalo.

   c) ¿Existe algún número natural $n \geq 1$ tal que $97^n = 1$ en $\mathbb{Z}_{213}$? ¿y tal que $75^n = 1$ en $\mathbb{Z}_{213}$? En los casos en que exista da uno.

Solución:

a) Para ver si tiene o no soluciones la ecuación diofántica calculamos el máximo común divisor de 213 y 185. Nos valemos del algoritmo de Euclides, para lo cual realizamos las correspondientes divisiones:

$213 = 185 \cdot 1 + 28.$
$185 = 28 \cdot 6 + 17.$
$28 = 17 \cdot 1 + 11.$
$17 = 11 \cdot 1 + 6.$
$11 = 6 \cdot 1 + 5.$
$6 = 5 \cdot 1 + 1.$

Luego $\mathtt{mcd}(213, 185) = 1$. Esto nos asegura que la ecuación tiene solución (pues 111 es múltiplo de 1). Para resoverla, planteamos la congruencia $185y \equiv 111 \text{ mód } 213$.

Necesitamos el inverso de 185 módulo 213. Aprovechamos los cálculos que ya hemos hecho para construir la siguiente tabla:

r	c	v
213		0
185		1
28	1	v_1
17	6	v_2
11	1	v_3
6	1	v_4
5	1	v_5
1	1	v_6

$v_1 = v_{-1} - c_1 \cdot v_0 = 0 - 1 \cdot 1 = -1$
$v_2 = v_0 - c_2 \cdot v_1 = 1 - 6 \cdot (-1) = 7$
$v_3 = v_1 - c_3 \cdot v_2 = -1 - 1 \cdot 7 = -8$
$v_4 = v_2 - c_4 \cdot v_3 = 7 - 1 \cdot (-8) = 15$
$v_5 = v_3 - c_5 \cdot v_4 = -8 - 1 \cdot 15 = -23$
$v_6 = v_4 - c_6 \cdot v_5 = 15 - 1 \cdot (-23) = 38$

r	c	v
213		0
185		1
28	1	-1
17	6	7
11	1	-8
6	1	15
5	1	-23
1	1	38

Luego 185^{-1} (mód 213) = 38.

Y entonces tenemos que $y \equiv 111 \cdot 38 \text{ mód } 213$. Puesto que $111 \cdot 38 = 4218$, que reducido módulo 213 nos da 171, el valor de y viene dado por $y = 171 + 213k : k \in \mathbb{Z}$.

Sustituimos en la ecuación inicial y despejamos el valor de x.

$$213x + 185(171 + 213k) = 111 \Longrightarrow 213x = 111 - 185(171 + 213k) = 111 - 31635 - 185 \cdot 213k = -31524 - 185 \cdot 213k$$

De donde $x = \frac{-31524 - 185 \cdot 213k}{213} = -148 - 185k$.

Y ya tenemos la solución de la ecuación diofántica:

$$\begin{array}{rcrcl} x & = & -148 & - & 185 \cdot k \\ y & = & 171 & + & 213 \cdot k \end{array} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Y ahora, le damos valores a k y obtenemos diferentes soluciones. Vamos a tomar los valores $k = -1$, $k = 0$ y $k = 1$ (valdría cualquier valor entero).

$k = -1$	$k = 0$	$k = 1$
$x = 37$ $y = -42$	$x = -148$ $y = 171$	$x = 333$ $y = 384$

b) El inverso ya ha sido calculado en el apartado anterior, y vale 38.

c) Por el teorema de Fermat, sabemos que si $\mathtt{mcd}(a, m) = 1$ entonces $a^{\varphi(m)} = 1$ en $\mathbb{Z}_m$.

Calculamos $\varphi(213)$. Para realizar el cálculo, factorizamos 213 como producto de primos: $213 = 3 \cdot 71$.

En tal caso, $\varphi(213) = \varphi(3 \cdot 71) = \varphi(3) \cdot \varphi(71) = 2 \cdot 70 = 140$.

Y ahora, puesto que $mcd(97, 213) = 1$ (pues 97 no es ni múltiplo de 3 ni de 71) tenemos que $97^{140} = 1$ en $\mathbb{Z}_{213}$. Es decir, si existe n y vale 140.

Para el caso $a = 75$ la respuesta es que no existe n, ya que $\mathtt{mcd}(75, 213) = 3$. El teorema de Fermat no nos da ningún exponente al que elevar 75 para que salga 1. Pero de haberlo, tendríamos que $1 = 75^n = 75 \cdot 75^{n-1}$, luego 75^{n-1} sería un inverso para 75, lo cual sabemos que no es posible.

4. Consideremos $\mathbb{Z}_3[x]$. Sea $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

   a) Estudia si $p(x)$ es o no irreducible.

   b) Calcula un representante $q(x)$ de $[x^7 + 2x^3 + x + 2]$, como clase de $\mathbb{Z}_3[x]_{p(x)}$, que tenga grado menor que 4.

   c) Decide si existe $[q(x)]^{-1}$ y, caso de existir, calcular ese inverso.

   d) ¿Cuántos elementos de $\mathbb{Z}_3[x]_{p(x)}$ tienen inverso?

Solución:

a) Para ver si $p(x)$ es o no irreducible estudiamos si tiene o no raíces y caso de no tenerlas, comprobamos si tiene o no divisores de grado 2.

- Buscamos las raíces. Se tiene que
  $p(0) = 1 \neq 0$, $p(1) = 5 = 2 \neq 0$ y $p(2) = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 31 = 1 \neq 0$.
  Por tanto el polinomio no tiene raíces.
- Buscamos divisores de grado 2. Los tres irreducibles de grado 2 son x^2+1, x^2+x+2 y x^2+2x+2. Realizamos las divisiones en este orden:

	1	1	1	1	1
0		0	2	2	0
2			0	0	
	1	1	0	0	1

$r(x) = 1$

	1	1	1	1	1
1		2	1	0	2
1			0	1	
	1	0	2	2	0

$r(x) = 2x$

	1	1	1	1	1
1		1	1	2	1
1			2	1	
	1	2	1	1	2

$r(x) = x + 2$

Al no tener raíces ni divisores de grado 2, el polinomio $p(x)$ es irreducible.

b) Lo que hacemos es calcular el resto de la división de $x^7 + 2x^3 + x + 2$ entre $p(x)$. El resto, será el polinomio $p(x)$.

	1	0	0	0	2	0	1	2
2		2	2	2	2	1	0	0
2			1	1	1	0	0	
2				0	0	0		
2					0			
	1	2	0	0	2	1	1	2

Y el resto de la división es $2x^3 + x^2 + x + 2$ (el cociente es $x^3 + 2x^2$). Por tanto, $q(x) = 2x^3 + x^2 + x + 2$.

c) Por ser el polinomio $p(x)$ irreducible tenemos que $\mathbb{Z}_3[x]_{p(x)}$ es un cuerpo. Eso significa que todo elemento distinto de 0 tiene inverso. En particular, $q(x)$ tiene inverso. Vamos a calcularlo por medio del algoritmo extendido de Euclides:

2	1	1	1	1	1
2		1	1	2	1
2			2	2	
1					
	2	1	1	2	2

$c(x) = 2x + 1$
$r(x) = x^2 + 2x + 2$

	2	1	1	2
1		2	2	0
1			0	
	2	0	0	2

$c(x) = 2x$
$r(x) = 2$

A partir de estas divisiones tenemos la siguiente tabla:

	$r(x)$	$c(x)$	$v(x)$
	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$		0
	$2x^3 + x^2 + x + 2$		1
	$x^2 + 2x + 2$	$2x + 1$	$x + 2$
	2	$2x$	$x^2 + 2x + 1$
$\times 2$	1		$2x^2 + x + 2$

Donde los elementos de la columna de la derecha (aparte del 0 y el 1) se han obtenido con los siguientes cálculos:

$0 - (2x+1) \cdot 1 = 0 + (x+2) \cdot 1 = x+2.$
$1 - 2x \cdot (x+2) = 1 + x \cdot (x+2) = x^2 + 2x + 1.$

Y puesto que el máximo común divisor obtenido no es un polinomio mónico hemos multiplicado por el inverso del coeficiente líder (2). Esto es lo que vemos en la última fila de la tabla.

Tras esto vemos que el inverso que nos pedían es $2x^2 + x + 2$.

d) Al ser $\mathbb{Z}_3[x]_{p(x)}$ un cuerpo todos sus elementos salvo el 0 tienen inverso. El número de estos elementos es entonces $3^4 - 1 = 80$.

5. Ocho excursionistas deben alojarse en un albergue. El albergue dispone de una habitación triple, dos dobles (que consideramos iguales) y una individual. ¿De cuántas formas pueden repartirse en las distintas habitaciones?

   Supongamos además que de los ocho excursionistas hay dos que acostumbraran a alojarse siempre juntos; ¿de cuántas formas pueden repartirse en este nuevo caso?

   Solución:

   Vamos a resolver el ejercicio en los dos supuestos que nos dan.

   - No hay restricción sobre quienes pueden dormir juntos.
     Dividimos el reparto en tres etapas y contamos de cuántas formas se puede realizar cada una de estas etapas:
     - Etapa 1. Elegimos 3 personas para la habitación triple. Lo podemos hacer de $\binom{8}{3} = 56$ formas distintas.
     - Etapa 2. De los 5 excursionistas que nos quedan elegimos los que van a las dos habitaciones dobles. Esto puede realizarse de $\binom{5}{4} = 5$ formas distintas.
     - Etapa 3. Con los cuatro excursionistas que van a las habitaciones dobles formamos dos parejas. Esto puede realizarse de 3 formas distintas (una vez que uno de los excursionistas elige acompañante de entre los 3 restantes están formadas las dos parejas).

     Por el principio del producto, el reparto en las habitaciones puede realizarse de $56 \cdot 5 \cdot 3 = 840$ formas distintas.

     También se podría haber calculado como dividiendo el reparto en las siguientes etapas:
     - Etapa 1. Elegimos 3 personas para la habitación triple. Ya hemos visto que se puede hacer de 56 formas distintas.
     - Etapa 2. De los 5 excursionistas que nos quedan elegimos dos que van a una de las habitaciones dobles. Esto puede realizarse de $\binom{5}{2} = 10$ formas distintas.
     - Etapa 3. De los 3 que quedan elegimos los dos que van a la otra habitación doble. Puede realizarse de $\binom{3}{2} = 3$ formas.

     Una vez hecho esto, que puede hacerse de $56 \cdot 10 \cdot 3 = 1680$ formas notamos que cada dos repartos de los 1680 que hemos contado son en realidad el mismo, pero en el que están intercambiados los inquilinos de las dos habitaciones dobles. Por tanto, el número anterior hemos de dividirlo por 2 y el resultado es 840.
   - Los dos amigos deben ir juntos. Para resolver este supuesto, distinguimos dos casos:
     - Caso 1. Los dos amigos se alojan en la habitación triple.
       Este caso lo realizamos a su vez en tres etapas:
       - Etapa 1. Buscamos un acompañante para los dos amigos. Se puede hacer de $\binom{6}{1} = 6$ formas.
       - Etapa 2. Elegimos los 4 que van a las habitaciones dobles (hay $\binom{5}{4} = 5$ formas distintas de hacerlo).
       - Etapa 3. Formamos dos parejas entre estas 4 personas, que vimos que se puede hacer de 3 formas.

       En total, en este caso se pueden hacer un total de $6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$ repartos distintos.
     - Caso 2. Los dos amigos se alojan en una habitación doble.
       También lo dividimos en dos etapas:
       - Etapa 1. Alojamos a tres excursionistas en la habitación triple. Lo podemos hacer de $\binom{6}{3} = 20$ formas diferentes.
       - Etapa 2. Alojamos a dos excursionistas en la habitación doble que está libre. Se puede hacer de $\binom{3}{2} = 3$ formas.

       Luego en el caso de que los dos amigos vayan a una habitación doble podemos hacer $20 \cdot 3 = 60$ repartos distintos.

     Por el principio de la suma, en el supuesto de que los dos amigos duerman en la misma habitación podemos alojarlos de $150 + 60 = 210$ formas diferentes.

6. En el espacio vectorial $\mathbb{Q}^3$ consideramos el conjunto $B = \{(2, 1, -1),\ (1, 1, 1),\ (1, 1, 2)\}$.

   a) Comprueba que B es una base de $\mathbb{Q}^3$.

   b) Calcula la matriz del cambio de base de B_c a B (donde B_c es la base canónica de $\mathbb{Q}^3$).

   c) Sea u un vector cuyas coordenadas en B son $(2, 3, 4)$. ¿De qué vector se trata?

   d) Sea v el vector $(2, -1, 4)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en B?

Solución:

a) Para comprobar que es base formamos la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B en la base canónica. Si esa matriz es regular (tiene inversa) entonces B será una base. En caso contrario no lo será.

La matriz en cuestión es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Tenemos varias formas de ver si A tiene inversa. Puesto que nos puede servir para los apartados siguientes, vamos a intentar calcular la inversa. Le añadimos entonces a A a la derecha las tres columnas de la matriz identidad y realizamos transformaciones elementales por filas hasta obtener en la parte izquierda la matriz identidad. Si esto es posible, A tendrá inversa lo que nos dirá que B es una base.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1)]{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al haber obtenido la matriz identidad en las tres primeras columnas concluimos que A es regular. Por tanto, B es una base.

También se podría haber comprobado calculando el determinante. Se tiene que

$$\det(A) = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4 + 1 - 1 + 1 - 2 - 2 = 1 \neq 0$$

Lo que también nos dice que A es regular.

b) Sabemos que $M_{B_c \to B} = (M_{B \to B_c})^{-1}$, y la matriz $M_{B \to B_c}$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas en la base canónica de los vectores de la base B. Esta es la matriz A.

Por tanto, la matriz que nos piden es

$$M_{B \to B_c} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

que calculamos en el apartado anterior.

c) Si los vectores de B los llamamos u_1, u_2 y u_3, lo que sabemos del vector u es que $u = 2 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 4 \cdot u_3$. Por tanto:

$$u = 2 \cdot (2, 1, -1) + 3 \cdot (1, 1, 1) + 4 \cdot (1, 1, 2) = (4, 2, -2) + (3, 3, 3) + (4, 4, 8) = (11, 9, 9)$$

Es decir, u es el vector $(11, 9, 9)$.

d) Para calcular las coordenadas en B lo que vamos a hacer es multiplicar las coordenadas del vector en la base canónica por la matriz del cambio de base de B_c a B.

$$(v)_B = M_{B_c \to B}(v)_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) + 0 \\ -3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Es decir, las coordenadas de v en la base B son $(3, -15, 11)$.

7. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales dados por:

$$U_1 = L(\{(1, 1-\alpha^2, 2),\ (1+\alpha, 1-\alpha, -2)\})$$
$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\}$$

Calcula los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que $U_1 = U_2$.

Solución:

Una condición necesaria para que U_1 sea igual a U_2 es que los dos vectores que generan U_1 pertenezcan a U_2 (en realidad, con eso, nos aseguramos que $U_1 \subseteq U_2$).

$$(1, 1-\alpha^2, 2) \in U_2 \Longrightarrow 0 = 1 + 1 - \alpha^2 + 2 = 4 - \alpha^2 = 4 - \alpha^2 \Longrightarrow \alpha^2 = 4 \Longrightarrow \alpha = \pm 2$$

$$(1+\alpha, 1-\alpha, -2) \in U_2 \Longrightarrow 0 = 1 + \alpha + 1 - \alpha - 2 = 0$$

Lo que nos dice que el segundo vector pertenece a U_2 para cualquier valor de α mientras que el primero sólo para $\alpha = 2$ y $\alpha = -2$.

Ahora bien, para $\alpha = -2$ se tiene que $U_1 = L[(1, -3, 2),\ (-1, 3, -2)] = L[(1, -3-2)]$ pues los dos vectores son linealmente dependientes. Esto nos dice que en este caso $dim(U_1) = 1$ mientras que $dim(U_2) = 2$. Por tanto, no son iguales.

Para $\alpha = 2$, $dim(U_1) = 2$ pues $U_1 = L[(1, -3, 2),\ (3, -1, -2)]$ y estos dos vectores son linealmente independientes.

Por tanto, el único valor de α para el que $U_1 = U_2$ es $\alpha = 2$.

8. Halla una aplicación lineal $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to (\mathbb{Z}_5)^3$ tal que:

- $N(f) = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_5)^3 \colon x + y + z = 0\}$
- $Im(f) = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_5)^3 \colon x + y - z = 0, x - y = 0\}$

Solución:

Puesto que $N(f)$ viene dado por una ecuación tenemos que $dim(N(f)) = 3 - 1 = 2$. Una base podría ser $B_{N(f)} = \{(1, 0, 4),\ (0, 1, 4)\}$.

Ampliamos esta base a una base de $(\mathbb{Z}_5)^3$: $B = \{(1, 0, 4),\ (0, 1, 4),\ (0, 0, 1)\}$.

Por otra parte, $dim(Im(f)) = 1$ y una base es $B_{Im(f)} = \{(1, 1, 2)\}$.

Vamos a ver cómo actúa f sobre los vectores de la base B:

- $f(1, 0, 4) = (0, 0, 0)$ pues $(1, 0, 4) \in N(f)$.
- $f(0, 1, 4) = (0, 0, 0)$ pues $(0, 1, 4) \in N(f)$.
- Sobre $f(0, 0, 1)$ sabemos que es distinto de $(0, 0, 0)$ (pues no $(0, 0, 1) \notin N(f)$) y que pertenece a $Im(f)$. Podría ser cualquiera de los otros cuatro vectores de $Im(f)$. Elegimos $(1, 1, 2)$ como imagen para $(0, 0, 1)$.

Con estos datos calculamos la imagen de los vectores de la base canónica:

$f(1, 0, 0) = f((1, 0, 4) + (0, 0, 1)) = f(1, 0, 4) + f(0, 0, 1) = (0, 0, 0) + (1, 1, 2) = (1, 1, 2)$.
$f(0, 1, 0) = f((0, 1, 4) + (0, 0, 1)) = f(0, 1, 4) + f(0, 0, 1) = (0, 0, 0) + (1, 1, 2) = (1, 1, 2)$.
$f(0, 0, 1) = (1, 1, 2)$.

Luego:

$$f(x, y, z) = x\cdot f(1, 0, 0)+y\cdot f(0, 1, 0)+z\cdot f(0, 0, 1) = (x, x, 2x)+(y, y, 2y)+(z, z, 2z) = (x+y+z, x+y+z, 2x+2y+2z)$$

Y ya tenemos la aplicación lineal f.

Si hubiéramos elegido otro valor para $f(0, 0, 1)$ tendríamos otra aplicación diferente. En total hay cuatro soluciones distintas.

9. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5),$$

estudia si A es o no diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentra una matriz regular P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal D. Di cuál es la matriz D.

Solución:
Para responder a este ejercicio seguimos los siguientes pasos:

- Cálculo del polinomio característico:

  Tenemos:

$$\begin{array}{l} \mathrm{tr}(A) = 2+0+2 = 4 = 1. \\ \mathrm{tr}(Adj(A)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (0-2)+(4-1)+(0-2) = 1+0+1 = 2. \\ \det(A) = 2\cdot 0\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 1 = 0+2+2-0-1-1 = 2. \end{array}$$

  De donde $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \mathrm{tr}(A)\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2$.

- Cálculo de los valores propios con su multiplicidad algebraica.

  Para esto calculamos las raíces de $p_A(\lambda)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & & 2 & 0 & 1 \\ \hline & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & & 2 & 2 & \\ \hline & 2 & 2 & 0 & \\ 2 & & 1 & & \\ \hline & 2 & 0 & & \end{array}$$

  Lo que nos da dos valores propios: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Las multiplicidades algebraicas son $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 1$.

- Cálculo de las multiplicidades geométricas.

  Con los cálculos realizados tenemos:

Valor propio	Multiplicidad algebraica	Multiplicidad geométrica
$\lambda = 1$	$\alpha_1 = 2$	$d_1 = 1$ ó 2
$\lambda = 2$	$\alpha_2 = 1$	$d_2 = 1$

  Necesitamos calcular $d_1 = 3 - \mathrm{rg}(A - Id)$. Tomamos esta matriz y calculamos su forma normal de Hermite.

$$A - Id = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(2)]{E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Luego $\mathrm{rg}(A - Id) = 1$ y por tanto $d_1 = 3 - 1 = 2$.

Valor propio	Multiplicidad algebraica	Multiplicidad geométrica
$\lambda = 1$	$\alpha_1 = 2$	$d_1 = 2$
$\lambda = 2$	$\alpha_2 = 1$	$d_2 = 1$

Llegados aquí, y puesto que $d_1 + d_2 = 3$, la matriz A es diagonalizable. Continuamos entonces:

- Calculamos subespacios propios.

  Tenemos que hallar dos subespacios propios:

  1. Subespacio propio V_1.
     Este subespacio es $N(A - Id)$, es decir, los vectores que multiplicados por la matriz $A - Id$ dan 0. Esto nos da un sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes es precisamente $A - Id$. Con los cálculos hechos en el apartado anterior tenemos que el subespacio V_1 tiene ecuación $x + y + z = 0$.
     Una base es entonces $B_{V_1} = \{(1,0,2),\ (0,1,2)\}$.

2. Subespacio propio V_2.

   Tomamos la matriz $A-2Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y calculamos su forma normal de Hermite. De esta forma tendremos las ecuaciones de V_2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(1)]{E_{12}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El subespacio V_2 viene dado por $V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{ccccc} x & & + & 2z & = & 0 \\ & y & + & z & = & 0. \end{array} \right.$ Luego $dim(V_2) = 3-2 = 1$ (algo que ya sabíamos) y una base de B_2 la obtenemos dándole a z el valor 1. $B_{V_2} = \{(1,2,1)\}$.

- Formamos las matrices P y D.

  La matriz P tiene como columnas una base de vectores propios. Por tanto, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. La matriz D es una matriz diagonal que tiene en la diagonal los valores propios, y tantas veces como indica su multiplicidad. Entonces $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

  El orden en que hemos colocado los vectores propios en la matriz P nos dice cómo hemos de colocar los valores propios en la matriz D.

En el primer apartado podríamos haber calculado el polinomio característico como sigue:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= det(A-\lambda Id) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot(2-\lambda) + 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot(-\lambda)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot(2-\lambda) - (2-\lambda)\cdot 2\cdot 1 \\
&= (4-4\lambda+\lambda^2)(-\lambda) + 2 + 2 + \lambda + (2-\lambda) + (2-\lambda) \\
&= -4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 2 + 2 + \lambda + 2 + 2\lambda + 2 + 2\lambda \\
&= 2\lambda + \lambda^2 + 2\lambda^3 + 2 + 2 + \lambda + 2 + 2\lambda + 2 + 2\lambda \\
&= 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2
\end{aligned}$$

Y obtenemos el mismo resultado, como era de esperar.