Doble Grado en Informática-Matemáticas

Variable Compleja I

(CURSO 2014-2015) Examen Final 9-Julio-2015

1.

(i) Definir los conceptos de dominio y de conjunto convexo en $\mathbb{C}$. ¿Qué relación existe entre estos conceptos? Justificar de manera razonada que los conjuntos

$$F = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im}(z)| < \frac{\pi}{4}\}, \quad G = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}\},$$

$$S = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\} \quad y \quad \Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

son dominios.

(ii) Definir el concepto de función holomorfa en un abierto de $\mathbb{C}$. Se consideran las funciones f, g y h dadas por

$$f(z) = 2z, \quad g(z) = e^z \quad y \quad h(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Probar, calculando su inversa, que f es biholomorfa de F en G, g es biholomorfa de G en S y h es biholomorfa de S en Δ.

(iii) Probar que la función tangente hiperbólica

$$\tanh(z) := \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

es biholomorfa de F en Δ, y calcular su inversa $\tanh^{-1}$.

(iv) Calcular el desarrollo de Taylor de $\tanh^{-1}$ centrado en 0.

(4 Puntos)

2.

(i) Enunciar el principio de identidad.

(ii) Dado un dominio Ω de $\mathbb{C}$, probar que el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en Ω es un dominio de integridad (esto es, no tiene divisores de cero).

(iii) Dados un dominio Ω de $\mathbb{C}$, un número natural $n \geq 2$ y un número complejo w, determinar todas las funciones holomorfas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ que verifican la condición $f(z)^n = w$ para todo $z \in \Omega$.

(3 Puntos)

3. Se consideran el disco unidad abierto $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y una función holomorfa $f : \Delta \to \Delta$ tal que $f(0) = 0$. A partir de f se define la función auxiliar $h : \Delta \to \mathbb{C}$ por

$$h(z) := \frac{f(z)}{z} \quad \text{si} \quad z \neq 0 \quad \text{y} \quad h(0) := f'(0).$$

(i) Probar que h es holomorfa.

(ii) Probar que, para cada r con $0 < r < 1$, se verifica que $\max_{|z| \leq r} |h(z)| < \dfrac{1}{r}$.

(iii) Deducir que $|h(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Delta$.

(iv) Probar que si existe un $z_0 \in \Delta$ tal que $|h(z_0)| = 1$, entonces existe un $\vartheta \in \mathbb{R}$ tal que $h(z) = e^{i\vartheta}$ para todo $z \in \Delta$.

(v) Enunciar el Lema de Schwarz, esto es, enunciar los apartados (iii) y (iv) en términos de la función inicial f (sin aludir a la función auxiliar h).

(3 Puntos)