

---

# Sucesiones de números reales

---

## 1 Sucesiones

**Ejercicio 1.** Prueba que si  $|x| < 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x}$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $a$  un número real positivo y definamos  $x_1 = a$ ,  $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que la sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a cero.

**Ejercicio 3.** Demuestra que la sucesión  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$ ,  $\forall n \geq 1$  es convergente y calcular su límite.

Ⓔ **Ejercicio 4.** Se considera la sucesión definida por recurrencia por  $a_1 = 1$  y  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

Ⓔ **Ejercicio 5.** Se define la sucesión  $\{x_n\}$  por recurrencia como  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n} - 1$ . Calcula  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$ .

Ⓔ **Ejercicio 6.** Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida por recurrencia como  $x_1 = \frac{1}{2}$  y  $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$ .

a) Demuestra que  $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$  para cualquier natural  $n$ .

b) Demuestra que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es decreciente.

c) Calcula su límite.

**Ejercicio 7.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$ . Estudiar el comportamiento de la sucesión  $x_1 = a$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a}{2}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2 Criterios de convergencia

**Ejercicio 8.** Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y calcular su límite cuando exista.

a)  $\left\{ \frac{1 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5} \right\}$

b)  $\left\{ \frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{n!} \right\}$

c)  $\left\{ \frac{1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n}{n} \right\}$

d)  $\left\{ \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right\}$

**Ejercicio 9.** Calcula el límite de las siguientes sucesiones

a)  $\left\{ \frac{\log(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n)}{n \log(n)} \right\}$ ,

c)  $\left\{ \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n^2} \right\}$

b)  $\left\{ \frac{n^2 \sqrt{n}}{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \dots + n\sqrt{n}} \right\}$

**Ejercicio 10.** Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

a)  $\left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \right\}$

b)  $\left\{ \frac{1}{n} \sqrt[n]{(3n+1)(3n+2) \dots (3n+n)} \right\}$

$$c) \left\{ \frac{1}{n} \sqrt[n]{(2n)!} \right\}$$

$$d) \left\{ \frac{\sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}}{n+1} \right\}$$

**Ejercicio 11.** Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

$$a) \left\{ \left( 1 + \frac{1}{n^2+1} \right)^{n^2+56n+5} \right\}$$

$$c) \{(1 + \log(n+1) - \log(n))^n\}$$

$$b) \left\{ \left( \frac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 2n + 1} \right)^{\frac{n^2+5}{n+2}} \right\}$$

**Ejercicio 12.** Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

$$a) \left\{ \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log(n)} \right\}$$

$$b) \left\{ \frac{\log(n+1)!}{\log(n+1)^n} \right\}$$

**Ejercicio 13.** Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

$$a) \left\{ \left( \frac{n+1}{n^2+n+5} \right)^{\frac{1}{1+\log(n)}} \right\}$$

$$b) \left\{ \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$c) \left\{ \frac{\cos(\sqrt{n^2+1}) \log(n)}{n} \right\}$$

**Ejercicio 14.** Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

$$a) \left\{ \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)^{n+1}}} \right\}$$

$$b) \left\{ \frac{\log(n!)}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}} \right\}$$

Ⓔ **Ejercicio 15.** Calcula el límite de la sucesión

$$\left\{ \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \right\}.$$

Ⓔ **Ejercicio 16.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \log \left( \frac{3n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 5n} \right) \right)^{4n+1}.$$