

Justifica el axioma de Dedekind. Define el supremo de un conjunto. ¿Existe entre el axioma de Dedekind y la propiedad de supremo?

2. (1 punto)

Di si los siguientes conjuntos son numerables; justifica la respuesta:

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1], \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

3. (1.5 puntos)

Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Todo subconjunto no vacío de \mathbb{R} y mayorado tiene máximo.

b) Si para cada natural n , I_n es un intervalo no vacío de \mathbb{R} tales que $I_{n+1} \subset I_n$, entonces $\bigcap_n I_n \neq \emptyset$.

c) Todo subconjunto no vacío de \mathbb{N} que esté mayorado tiene máximo.

4. (2 puntos)

Prueba que $n^3 + 5n$ es múltiplo de 6 para cada número natural n .

5. (4 puntos)

Sean A y B subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} y minorados.

a) Prueba que $A - B$ está mayorado y se verifica

$$\sup(A - B) = \sup A - \sup B,$$

donde

$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

b) Prueba que $A - B$ tiene mínimo si, y sólo si, $A + B$ tiene mínimo.

c) Calcula el ínfimo de $A + B$ siendo

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ 1 + \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

¿Tiene mínimo $A + B$?