GEOMETRÍA I. Examen del Tema 3
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2011/12

<u>Nombre</u>:

Razonar todas las respuestas

1. (a) Si $f \in L(V, V')$, B es base de V y $f(B)$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, ¿f es inyectiva?
   (b) Si $f \in \text{End}(V)$ con $M(f, B, B') = I$, ¿es cierto que $f = \text{Id}$?
   (c) Si $f \in L(V, V')$, probar que $\text{Ker}(f) = \text{an}(\text{Im}(f^t))$.
2. En $\mathbb{R}^3$ se considera $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y = 0\}$. Hallar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que $\text{Ker}(f) = U$. Hallar una base de $\text{Im}(f)$. Hallar $M(f, B_u)$.
3. Sea $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z = 0\}$. Hallar una base de $an(U)$. Ampliar a una base B' de $\mathbb{R}^{4*}$. Hallar la base B de $\mathbb{R}^4$ tal que $B^* = B'$ (todo lo anterior en términos de B_u^*).
4. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$ y $\varphi \in \mathbb{R}^{2*}$ dada por $\varphi(x, y) = x - 2y$. Hallar una base de $\text{Ker}(f)$. Calcula las coordenadas de $f^t(\varphi)$ respecto de la base usual de $\mathbb{R}^{3*}$.

Soluciones (puede haber diferentes maneras correctas de responder a las preguntas)

1. (a) Sí. La aplicación será inyectiva si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Sea $v \in \mathrm{Ker}(f)$. Sean $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Entonces $0 = f(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$. Como $f(B)$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces $\lambda_i = 0$, para todo i y por tanto, $v = 0$.

   (b) No. Sea V un espacio vectorial cualquiera, B y B' bases (distintas) de V y f el endomorfismo definido por $f(e_i) = e'_i$, $1 \leq i \leq n$. Entonces $f \neq \mathrm{Id}$ pues $B \neq B'$ pero $M(f, B, B') = I$.

   (c) Primero se prueba que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t))$ y luego que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t)))$ (usaremos $V^{**} = V$). Sea $v \in \mathrm{Ker(f)}$. Tomamos $\varphi \in Im(f^t)$ y hay que probar que $v(\varphi) = 0$, es decir, $\varphi(v) = 0$. Como $\varphi \in Im(f^t)$, existe $\varphi' \in V'^*$ tal que $f^t(\varphi') = \varphi$. Por tanto,

   $$\varphi(v) = f^t(\varphi')(v) = \varphi'(f(v)) \overset{(1)}{=} \varphi'(0) = 0,$$

   donde en (1) se ha usado que $v \in \mathrm{Ker}(f)$.
   Por otro lado, si $n = dim(V) = dim(V^*)$, se tiene

   $$\dim(\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f^t))) = n - \dim(Im(f^t)) \overset{(1)}{=} n - \dim(Im(f)) \overset{(2)}{=} \dim(\mathrm{Ker(f)}),$$

   donde en (1) se usa que $r(f) = r(f^t)$ y en (2) que $n = \dim(\mathrm{Ker(f)}) + r(f)$.

2. Como sólo hay una ecuación cartesiana de U, entonces $\dim(U) = 2$ y una base de U es $\{(-1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$. Ampliamos a una base de $\mathbb{R}^3$: $B = \{(-1, 2, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$, pues al poner los tres vectores en una matriz, su determinante no es cero (es justamente 1). Se define f mediante

   $$f(-1, 2, 0) = f(0, 0, 1) = (0, 0, 0), f(0, 1, 0) = (1, 0, 0).$$

   Entonces

   $$(-1, 2, 0), (0, 0, 1) \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow U =< (-1, 2, 0), (0, 0, 1) >\subset \mathrm{Ker}(f)$$

   y $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 2$. Por otro lado,

   $$(1, 0, 0) = f(0, 1, 0) \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow< (1, 0, 0) >\subset Im(f)$$

   y así $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 1$. Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = n(f) + r(f)$, entonces $n(f) = 2$, $r(f) = 1$ y tenemos igualdades en todas las inclusiones anteriores. De paso, una base de $\mathrm{Im}(f)$ es $\{(1, 0, 0)\}$.

Para hallar la matriz, sólo hay que calcular $f(1,0,0)$. Hallando las coordenadas de este vector respecto de B, obtenemos que son: $(-1/2,0,1/2)$, luego

$$f(1,0,0) = -\frac{1}{2}f(-1,2,0) + \frac{1}{2}f(0,1,0) = (\frac{1}{2},0,0).$$

Por tanto,

$$M(f,B_u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Si $B_u^* = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, y como la ecuación cartesiana de U respecto de B_u es $x+y-z=0$, entonces una base de $an(U)$ es $\{(1,1,-1,0)\}$, escrito el vector en coordenadas respecto de B_u^*, es decir, $\{\omega_1+\omega_2-\omega_3\}$.

   Si escribimos este vector en coordenadas respecto de B_u^* y ampliamos hasta una base de $\mathbb{R}^4$, obtenemos las coordenadas de vectores de $\mathbb{R}^{4^*}$ respecto de B_u^* que forman una base de $\mathbb{R}^{4^*}$. Basta con tomar: $\{(1,1,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, es decir, $B' = \{\omega_1+\omega_2-\omega_3,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$.

   Sea $B' = B^* = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ y $B' = \{e_1',e_2',e_3',e_4'\}$. Escribimos $e_1' = (a,b,c,d)$ y aplicamos a e_1' los elementos de B':

$$a+b-c = 1, b = 0, c = 0, d = 0.$$

   Resolviendo, queda $e_1' = (1,0,0,0)$. Del mismo modo se hace para los demás vectores, obteniendo: $e_2' = (-1,1,0,0)$, $e_3' = (1,0,1,0)$ y $e_4' = (0,0,0,1)$.

4. Se tiene $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+y=0, y+z=0\}$. Como las dos ecuaciones son linealmente independientes, entonces $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3-2 = 1$. Dando valores a z, obtenemos un vector del núcleo, que constituirá, por tanto, una base del mismo: $\mathrm{Ker}(f) =< (1,-1,1) >$.

   Hallamos $f^t(\varphi)$.

$$f^t(\varphi)(x,y,z) = \varphi(f(x,y,z)) = \varphi(x+y,y+z) = x+y-2(y+z) = x-y-2z.$$

   Por tanto, si $B_u = \{e_1,e_2,e_3\}$ y $B_u^* = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, las coordenadas de $f^t(\varphi)$ son $(1,-1,-2)$.

——————-

Observaciones:

En el ejercicio 1. (a), como $f(B)$ es un sistema de generadores de $Im(f)$, entonces $f(B)$ es una base de $Im(f)$. Esto prueba que $\dim(V) = \dim(Im(f))$. Por la fórmula de las dimensiones, se tiene $\dim(Ker(f)) = 0$, es decir, f es inyectiva.

En el ejercicio 4, segundo apartado, podemos escribir $f^t(\varphi) = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3$. Aplicando a ambos lados la base B_u, se tiene

$$a = f^t(\varphi)(e_1), b = f^t(\varphi)(e_2), c = f^t(\varphi)(e_3).$$

Por la definición de f^t, f y φ, se concluye

$$a = f^t(\varphi)(e_1) = \varphi(f(e_1)) = \varphi(1, 0) = 1$$

$$b = f^t(\varphi)(e_2) = \varphi(f(e_2)) = \varphi(1, 1) = -1$$

$$c = f^t(\varphi)(e_3) = \varphi(f(e_3)) = \varphi(0, 1) = -2$$

y las coordenadas son $(1, -1, -2)$, es decir, $f^t(\varphi) = \omega_1 - \omega_2 - 2\omega_3$.