

Cálculo
1ºE Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial (I)
Curso 2013/2014

1. (2 puntos) Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$x_1 = 1$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_n + 3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.
- b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1+3} = \sqrt{4/2} = \sqrt{2} > x_1 = 1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 < x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n < x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n < x_{n+1} \Rightarrow x_n + 3 < x_{n+1} + 3 \Rightarrow \sqrt{x_n + 3} < \sqrt{x_{n+1} + 3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_n + 3} < \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_{n+1} + 3} \Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por el $x_1 = 1$. Veamos que está acotada superiormente por 2. Esto es, que $x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 1 \leq 2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 2$.

- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 2$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} x_n \leq 2 &\Rightarrow x_n + 3 \leq 5 \Rightarrow \sqrt{x_n + 3} \leq \sqrt{5} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_n + 3} &< \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{5} \Rightarrow x_{n+1} \leq \sqrt{\frac{5}{2}} \leq 2 \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

- b) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x+3}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x+3} \Rightarrow 2x^2 = x+3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 3/2$ y $x = -1$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que 1. El motivo es que $1 \leq x_n \leq 3/2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 3/2$.

2. (2 puntos) Calcula el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{ \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\log(\sqrt{n+1})} \right\}$$

Solución: Observamos que tenemos un cociente donde el denominador, claramente, crece a infinito. Aplicamos el criterio de Stolz y, si llamamos a_n al numerador y b_n al denominador, tendremos que estudiar el límite del siguiente cociente:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - [1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}]}{\log(\sqrt{n+2}) - \log(\sqrt{n+1})} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\log\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)} \\ &= \frac{1}{(n+1) \log\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)} = \frac{1}{\log\left[\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+1}\right]} \end{aligned}$$

Estudiamos aparte la sucesión: $\left\{ \left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+1} \right\} = \left\{ \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} \right\}$ ya que presenta una indeterminación del tipo “ 1^∞ ”. Podríamos aplicar el criterio del número e , o bien, escribir la sucesión de forma que nos aparezca una muy conocida. De hecho:

$$\left\{ \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} \right\} = \left\{ \left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \right)^{1/2} \right\} \rightarrow e^{1/2}$$

ya que la base tiende al número e . Por tanto:

$$\lim \left\{ \log \left[\left(\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \right)^{n+1} \right] \right\} = \log(e^{1/2}) = \frac{1}{2}$$

Como $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, aplicando el criterio de Stolz:

$$\lim \left\{ \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\log(\sqrt{n+1})} \right\} = 2$$

3. (3 puntos) Calcula el límite de la siguiente sucesión:

$$\left\{ 3^n \log \left(1 + \frac{7}{3^n + n^2} \right) \right\}$$

Como consecuencia del límite anterior deduce el carácter de la serie:

$$\sum \log \left(1 + \frac{7}{3^n + n^2} \right)$$

Solución: Por las propiedades del logaritmo, la sucesión dada se puede reescribir como sigue:

$$\left\{ \log \left[\left(1 + \frac{7}{3^n + n^2} \right)^{3^n} \right] \right\}$$

Como la sucesión $\left(1 + \frac{7}{3^n + n^2} \right)^{3^n}$ presenta una indeterminación del tipo “ 1^∞ ”, aplicamos la regla del número e :

$$3^n \left[1 + \frac{7}{3^n + n^2} - 1 \right] = 3^n \left[\frac{7}{3^n + n^2} \right] = \frac{7 \cdot 3^n}{3^n + n^2} \rightarrow 7$$

Por tanto, $\left(1 + \frac{7}{3^n + n^2} \right)^{3^n} \rightarrow e^7$ y de aquí se tiene que:

$$\left\{ 3^n \log \left(1 + \frac{7}{3^n + n^2} \right) \right\} = \left\{ \log \left[\left(1 + \frac{7}{3^n + n^2} \right)^{3^n} \right] \right\} \rightarrow \log(e^7) = 7$$

Vamos ahora a deducir el carácter de la serie $\sum \log \left(1 + \frac{7}{3^n + n^2} \right)$. Basta con escribir la sucesión que acabamos de estudiar de la siguiente forma:

$$3^n \log \left(1 + \frac{7}{3^n + n^2} \right) = \frac{\log \left(1 + \frac{7}{3^n + n^2} \right)}{\frac{1}{3^n}} \rightarrow 7 \neq 0$$

Haciendo uso del criterio de comparación por paso al límite, ambas series, la del numerador y la del denominador ($\sum \frac{1}{3^n}$) tienen el mismo carácter. Como es conocido que la serie $\sum \frac{1}{3^n}$ es convergente, la serie que nos proponen también es convergente.

4. (3 puntos) Estudia la posible convergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2n+5}{2n+8} \right)^{-n^2}$$

$$b) \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-3)^{n+1}}{6^n} + \frac{2^n}{3^{n+1}} \right). \text{ Si es convergente, calcula su suma.}$$

Solución:

a) Aplicamos el criterio de la raíz (ya que el término general presenta una potencia n -sima). Por tanto, estudiamos el límite de $\sqrt[n]{a_n}$, siendo $a_n = \left(\frac{2n+5}{2n+8} \right)^{-n^2}$.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{2n+8} \right)^{-n^2}} = \left(\frac{2n+5}{2n+8} \right)^{-n^2/n} = \left(\frac{2n+5}{2n+8} \right)^{-n}$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo “ 1^∞ ”, por lo que aplicamos el criterio del número e :

$$\begin{aligned} (-n) \left[\frac{2n+5}{2n+8} - 1 \right] &= (-n) \left[\frac{2n+5-2n-8}{2n+8} \right] = \frac{3n}{2n+8} \rightarrow \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{2n+8} \right)^{-n^2}} &\rightarrow e^{3/2} > 1 \end{aligned}$$

Por tanto, el criterio de la raíz nos asegura que la serie dada es divergente.

b) La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-3)^{n+1}}{6^n} + \frac{2^n}{3^{n+1}} \right) &= \sum_{n \geq 1} (-3) \left(\frac{-3}{6} \right)^n + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \\ &= -3 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{-1}{2} \right)^n + \frac{1}{3} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{3} \right)^n \end{aligned}$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{2}| < 1$ y $|\frac{2}{3}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la

suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$, nos queda entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-3)^{n+1}}{6^n} + \frac{2^n}{3^{n+1}} \right) &= -3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2} \right)^n + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &= -3 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2} \right)^n - 1 \right] + \frac{1}{3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right] \\ &= -3 \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} - 1 \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 1 \right] = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Granada, 28 de noviembre de 2013