Derivadas

1 Definición. Reglas de derivación

Ejercicio 1. Calcula la tangente de las siguientes curvas en los puntos dados:

a) $y = \frac{x}{x^2+1}$ en el origen
b) $y = \cos(x)$ en $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
c) $y = x^2 + 1$ en $(3, 10)$
d) $y = |x|$ en $(1, 1)$

Solución 1.

a) $y'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \implies y'(0) = 1$ con lo que la recta tangente en el origen es $y = x$.

b) $y'(x) = -\operatorname{sen}(x) \implies y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ y la recta tangente que se pide es $y = -(x - \frac{\pi}{2})$.

c) $y'(x) = 2x \implies y'(3) = 6$. y la recta tangente es $y = 10 + 6(x - 3)$.

d) $y'(x) = 1$ en $\mathbb{R}^+$ y, por tanto, $y'(1) = 1$, y la recta tangente que se pide es $y = x$.

Ejercicio 2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen}(x + 3)$
b) $y = \cos^2(x)$
c) $y = \frac{1}{\cos(x)}$
d) $y = \sec(x)$
e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
f) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Solución 2.

a) $y'(x) = \cos(x + 3)$.

b) $y'(x) = -2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

c) $y'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$.

d) $y'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$.

e) $y'(x) = \sqrt{\frac{1}{(1-x)^3(1+x)}}$.

f) $y'(x) = \frac{2}{3}x(x^2 + 1)^{-2/3}$.

Ejercicio 3. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$.
b) $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$.
c) $f(x) = x^4 e^x \log(x)$.
d) $f(x) = x^x$.
e) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$.
f) $f(x) = \frac{1}{2}x|x|$.

Solución 3.

[redacted]

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right) = \arctan(0) = 0, \quad \text{y}$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x^2+1} = 0.$$

Por tanto, f es continua en cero. Veamos en 1:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x^2+1} = 1, \quad \text{y}$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 + \frac{\log(x)}{x} = 1.$$

En consecuencia, f es continua en toda la recta real.
La derivada, salvo en 0 y 1, vale

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{2}{x^3}}{1+\left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}, & \text{si } 0 < x < 1, \\ \frac{1-\log(x)}{x^2}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Las derivadas laterales en 0 son

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{2}{x^3}}{1+\exp\left(\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2} = 0, \quad \text{y}$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 2,$$

que no coinciden y, por tanto, f no es derivable en 0. En 1,

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0, \quad \text{y}$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\log(x)}{x^2} = 1.$$

Por tanto f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
Para terminar el problema vamos a calcular la imagen de f. Como

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, 0]) \cup f([0, 1]) \cup f([1, +\infty[),$$

calculamos la imagen de cada una de estos tres intervalos por separado

a) En $\mathbb{R}^-$, $f'(x) < 0$ y, por tanto, $f(]-\infty, 0]) = [f(0), \lim_{x\to-\infty} f(x)[= \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$.

b) En $]0, 1[$, la derivada es positiva: $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [0, 1]$.

c) Por último, en $[1, +\infty[$, $f'(x) = 0 \iff x = e$. Evaluando la derivada, es muy sencillo comprobar que f es creciente en $[1, e]$ y decreciente en $[e, +\infty[$. Por tanto,

$$f([1, +\infty[) = [f(1), f(e)] \cup \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(e)\right].$$

2 Teorema del valor medio

[redacted]

[redacted]

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x^2} - \left(x^2-3\right)2xe^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}2x\left(4-x^2\right) = 0 \iff x = 0, \pm 2. \end{aligned}$$

Por tanto, f es estrictamente monótona en los intervalos $]-\infty,-2]$, $[-2,0]$, $[0,2]$, $[2,+\infty[$. Para averiguar qué tipo de monotonía tenemos podemos evaluar la derivada en un punto de cada uno de dichos intervalos

intervalo	x	signo de $f'(x)$	monotonía de f
$]-\infty,0-2]$	-5	+	estrictamente creciente
[-2,0]	-1	-	estrictamente decreciente
[0,2]	1	+	estrictamente creciente
$[2,+\infty[$	5	-	estrictamente decreciente

De modo que su imagen es

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f(]-\infty,-2]) \cup f([-2,0]) \cup f([0,2]) \cup f(]2,+\infty[) \\ &= \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), f(-2)\right] \cup [f(0), f(-2)] \cup [f(0), f(2)] \cup \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(2)\right] \\ &= \left]0, e^{-4}\right] \cup \left[-3, e^{-4}\right] = \left[-3, e^{-4}\right] \end{aligned}$$

usando que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, que $f(0) = -3$ y que $f(2) = f(-2) = e^{-4}$.
Observación: Podíamos habernos ahorrado algunos cálculos utilizando que la función f es par y, por tanto, $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_0^+)$.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Estudia la continuidad de f y los límites en $-\infty$ y $+\infty$.

b) Calcula la imagen de f.

Solución 15. La función es derivable por ser composición de funciones derivables. Vamos a calcular los límites en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Para calcular su imagen en primer lugar estudiamos la monotonía. Como la función arcotangente es creciente, sólo tenemos que fijarnos en $\frac{1+x}{1-x}$ y

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Esto nos dice que f es estrictamente creciente *si estamos en un intervalo*. En otras palabras, f es estrictamente creciente en $]-\infty,1[$ y en $]1,+\infty[$. Su imagen será

$$f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = f(]-\infty,1[) \cup f(]1,+\infty[) = \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[= \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Ejercicio 16. Calcula la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.

Solución 16. Esta función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}^+$. Calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{x}x^{1/x-1} - \frac{1}{x^2}x^{1/x}\log(x) = x^{1/x-2}(1 - \log(x)).$$

Por tanto $f'(x) = 0 \iff x = e$. En este punto se tiene un punto de máximo relativo (la función pasa de creciente en el intervalo $]0, e[$ a ser decreciente en $]e, +\infty[$). Calculando los límites en los extremos del dominio ($\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$) se deduce que como $f(e) = e^{1/e} > 1$, la imagen de la función es $f(\mathbb{R}^+) =]0, e^{1/e}]$.

Ejercicio 17. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Demuestra que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real única.

Solución 17. Definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se trata de una función polinómica de grado impar luego, por el teorema de Bolzano, sabemos que al menos se anula en un punto de la recta real. Estudiamos la derivada para deducir la unicidad de la solución de la ecuación $f(x) = 0$ utilizando el teorema de Rolle.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \iff x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 12b}}{6}.$$

Teniendo en cuenta que $a^2 < 3b \implies 4a^2 - 12b < 0$; se tiene que la derivada no se anula en ningún punto real, por lo que la solución de la ecuación $f(x) = 0$ que teníamos es única ya que la función es estrictamente creciente.

3 Reglas de L'Hôpital

Ejercicio 18. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$

c) $\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{2x-\pi}{\cos(x)}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

Solución 18.

a) Usando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{2x} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{6} \implies \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} = \frac{1}{6}.$$

b) Aplicamos las reglas de L'Hôpital $\lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x)}{1} = 3 \implies \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = 3$.

c) Usamos las reglas de L'Hôpital. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{-\operatorname{sen}(x)} = -2 \implies \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{2x-\pi}{\cos(x)} = -2$.

d) Aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 19. Calcula los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+3x-1}{2x}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos(x)}{x\operatorname{sen}(2x)}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\log(\log(x))}{\log(x)}$.

Solución 19.

a) Aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)+3}{2}=\frac{3}{2}\implies \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+3x-1}{2x}=\frac{3}{2}.$$

b) Sabemos que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$, por tanto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos(x)}{x\operatorname{sen}(2x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos(x)}{2x^2}\ \text{(aplicamos la regla de L'Hôpital)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2\operatorname{sen}(x)}{4x}\ \text{(regla de L'Hôpital de nuevo)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2\cos(x)}{4}=1.\end{aligned}$$

c) Usamos la segunda regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1/x}{\log(x)}}{1/x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\log(x)}=0\implies \lim_{x\to +\infty}\frac{\log(\log(x))}{\log(x)}=0.$$

Ejercicio 20. Calcula los límites de las siguientes funciones en el punto indicado:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\cos(x)+2\operatorname{sen}(3x))^{\frac{1}{x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\operatorname{sen}(4x)}{x^3\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x-\cos(x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

Solución 20.

a) Utilizamos la regla del número e y estudiamos el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)+2\operatorname{sen}(3x)-1}{x}=\frac{0}{0}.$$

Esta indeterminación la resolvemos utilizando la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen}(x)+6\cos(3x)}{1}=6,$$

con lo que $\lim_{x\to 0^+}(\cos(x)+2\operatorname{sen}(3x))^{\frac{1}{x}}=e^6$.

b) Usando que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}=1$ y que $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\operatorname{sen}(4x)}{x^3\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x(1-\cos(x))}{x^3}\cdot\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sqrt{2}(1-\cos(x))}{x^2}.$$

Este último límite se resuelve aplicando la primera regla de L'Hôpital y se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\operatorname{sen}(4x)}{x^3\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = 2\sqrt{2}.$$

c) Si aplicamos la regla de L'Hôpital, llegamos al límite $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}$ que no existe y, por tanto, no podemos decir nada sobre el límite original. En cambio, dividiendo numerador y denominador por x se resuelve fácilmente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x-\cos(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{1-\frac{\cos(x)}{x}} = 1,$$

usando que $\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cos(x)}{x} = 0$.

d) Estamos ante una indeterminación del tipo "1^∞". Por tanto

$$\lim_{x\to 1}\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^L \iff \lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right) = L.$$

Calculemos el límite de la derecha:

$$\lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

y, como $\lim_{x\to 1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1$ y $\lim_{x\to 1}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Para resolver este último límite aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

y por tanto

$$\lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -1 \implies \lim_{x\to 1}\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{-1}.$$

Ejercicio 21. Estudia el comportamiento de la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]2, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$, $\alpha = 2$.

b) $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{\log(x)} - \dfrac{1}{x-1}$, $\alpha = 1$.

c) $A =]1, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{x^x - x}{1 - x - \log(x)}$, $\alpha = 1$.

Solución 21.

a) Aplicando la primera regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x})\sqrt{x^2-4}}{2x\sqrt{x(x-2)}}$$

simplificando el factor $\sqrt{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x})\sqrt{x+2}}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{2}$.

b) Como $f(x) = \frac{1}{\log(x)} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-\log(x)}{(x-1)\log(x)}$, si aplicamos L'Hôpital nos queda

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\log(x) + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\log(x)+x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} = \frac{x-1}{x\log(x) + x - 1}.$$

Volviendo a aplicar L'Hôpital, $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\log(x)+2} = \frac{1}{2}$. Por tanto, $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

c) Aplicamos L'Hôpital y nos queda $\lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\log(x))-1}{-1-1/x} = 0$. Por tanto $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

Ejercicio 22. Estudia el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f, g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dadas por

a) $f(x) = \dfrac{\log(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}}$,

b) $g(x) = (a^x + x)^{1/x}$, donde $a \in \mathbb{R}^+$.

Solución 22.

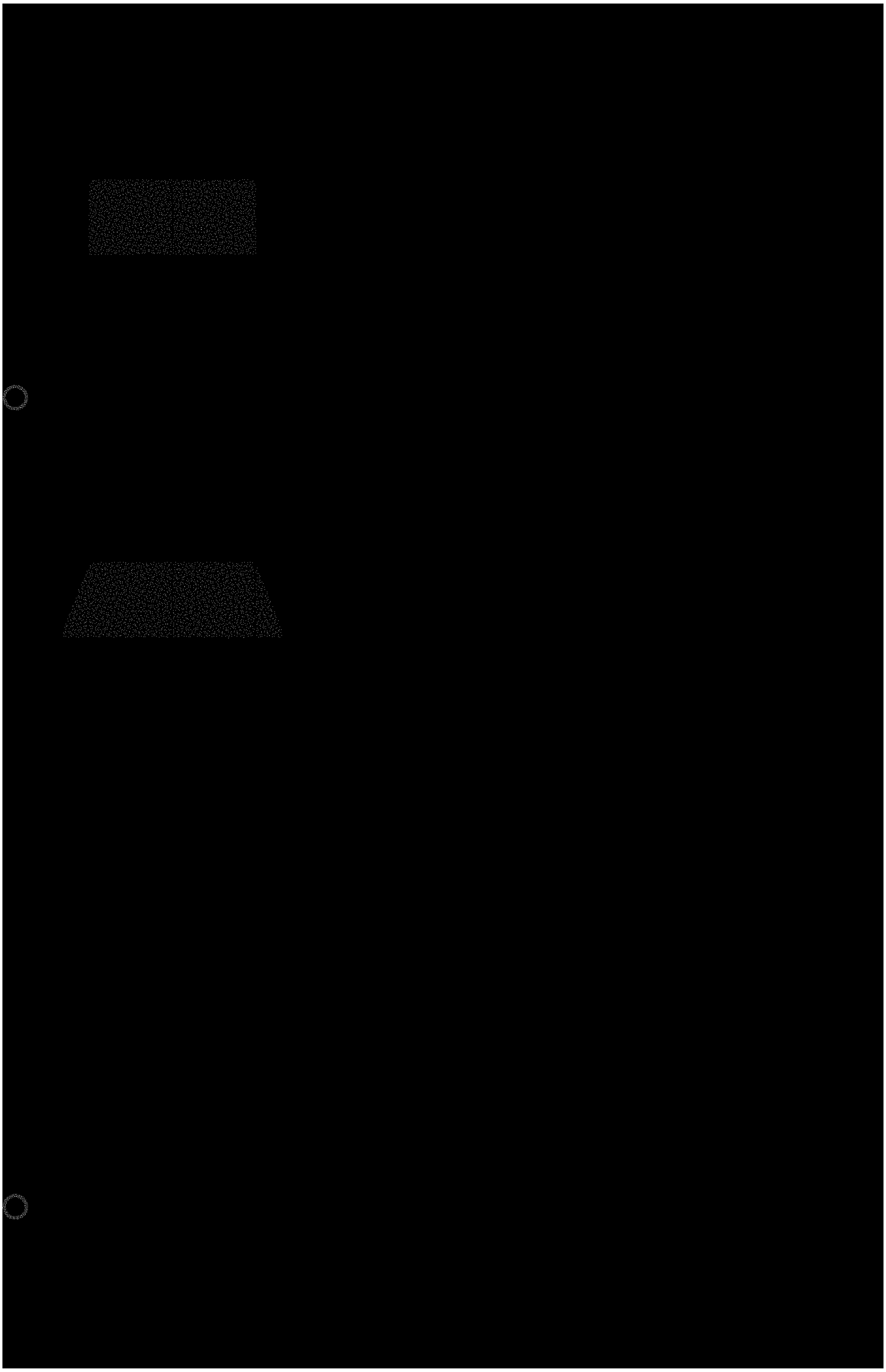
a) Para estudiar el límite de f en $+\infty$ aplicamos la segunda regla de L'Hôpital:

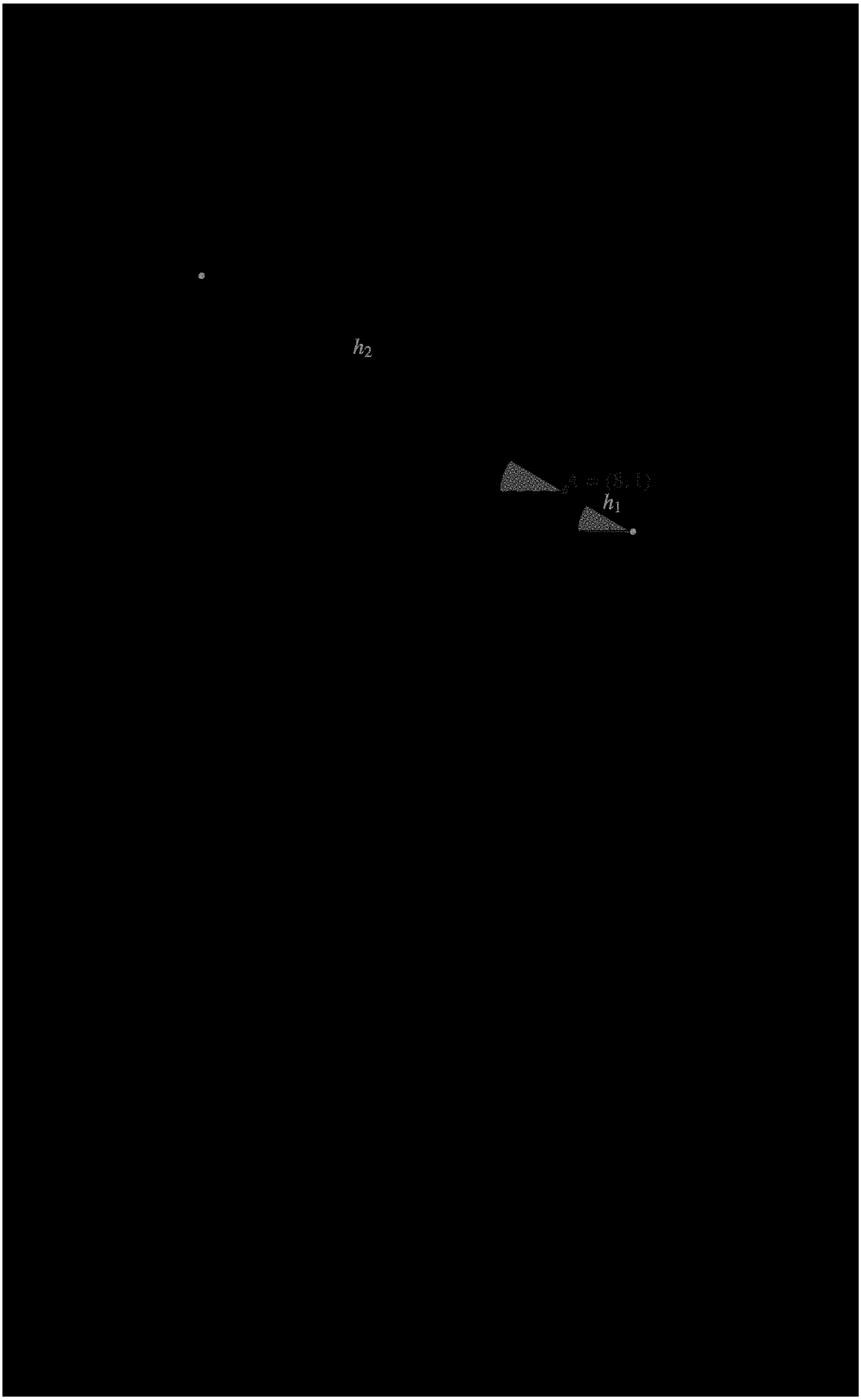
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,e^x}{2+3e^x}\,\frac{\sqrt{2+3x^2}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

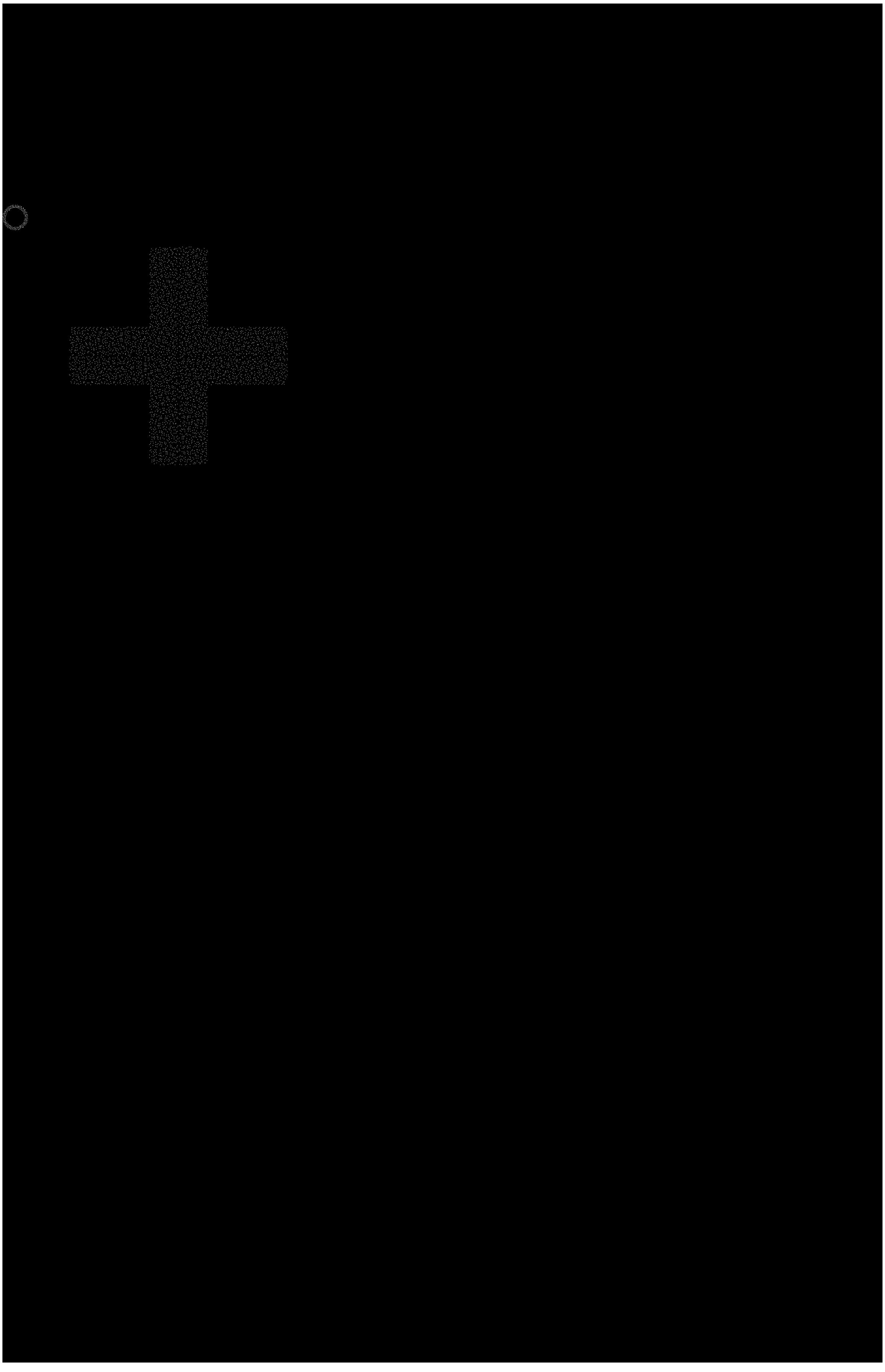
Por tanto el límite de f es $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

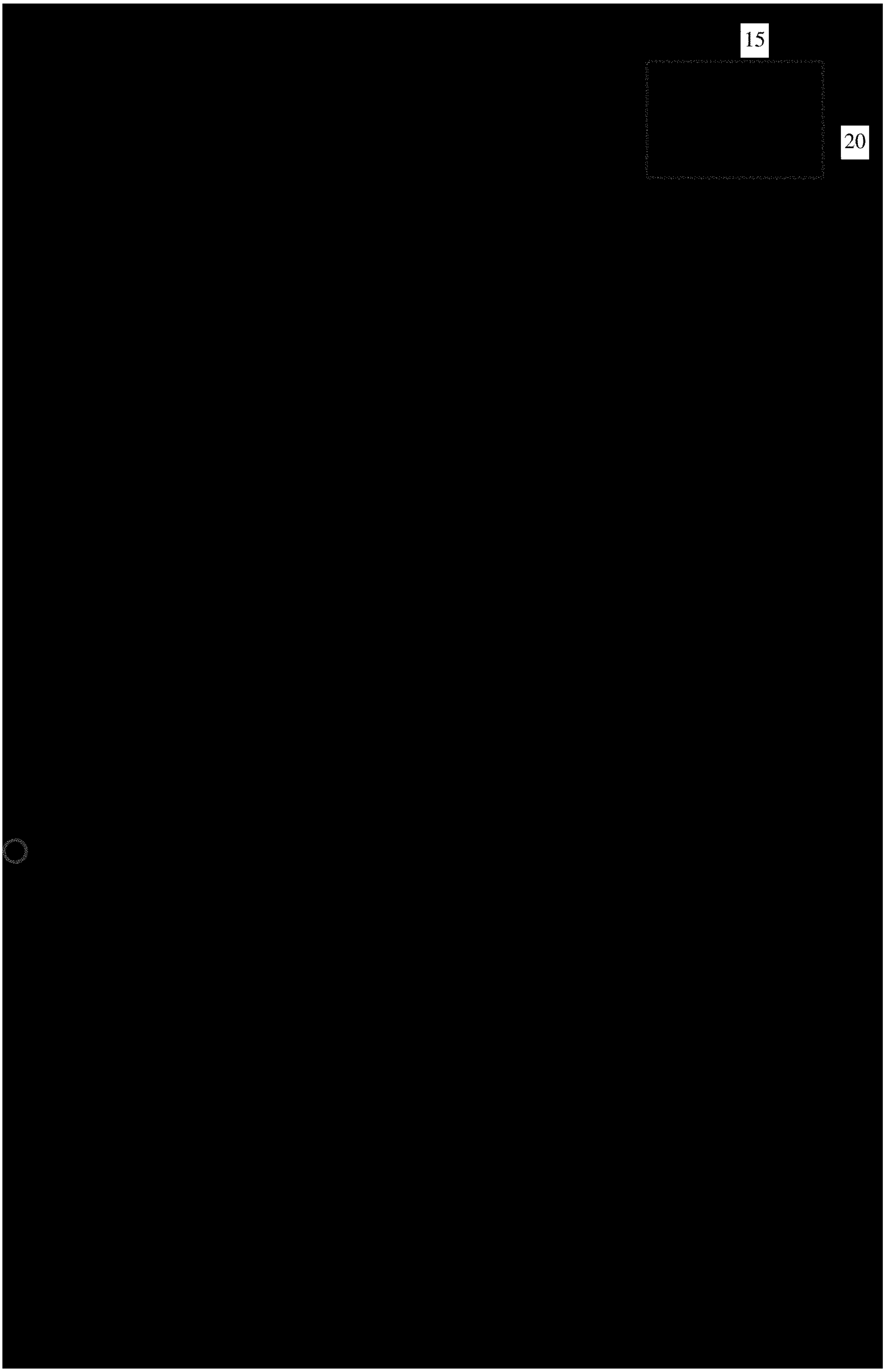
[redacted]

4 Optimización




h_2
$A = (8, 1)$
h_1




15
20