

### GEOMETRÍA I. Examen del Tema 3

– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –  
Curso 2011/12

**Nombre:**

Razonar todas las respuestas

- Si  $f \in L(V, V')$ ,  $B$  es base de  $V$  y  $f(B)$  es un conjunto de vectores linealmente independiente, ¿ $f$  es inyectiva?
  - Si  $f \in \text{End}(V)$  con  $M(f, B, B') = I$ , ¿es cierto que  $f = \text{Id}$ ?
  - Si  $f \in L(V, V')$ , probar que  $\text{Ker}(f) = \text{an}(\text{Im}(f^t))$ .
- En  $\mathbb{R}^3$  se considera  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y = 0\}$ . Hallar un endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\text{Ker}(f) = U$ . Hallar una base de  $\text{Im}(f)$ . Hallar  $M(f, B_u)$ .
- Sea  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z = 0\}$ . Hallar una base de  $\text{an}(U)$ . Ampliar a una base  $B'$  de  $\mathbb{R}^{4*}$ . Hallar la base  $B$  de  $\mathbb{R}^4$  tal que  $B^* = B'$  (todo lo anterior en términos de  $B_u^*$ ).
- Se considera la aplicación lineal  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$  y  $\varphi \in \mathbb{R}^{2*}$  dada por  $\varphi(x, y) = x - 2y$ . Hallar una base de  $\text{Ker}(f)$ . Calcular las coordenadas de  $f^t(\varphi)$  respecto de la base usual de  $\mathbb{R}^{3*}$ .

Soluciones (puede haber diferentes maneras correctas de responder a las preguntas)

1. (a) Sí. La aplicación será inyectiva si  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ . Sea  $v \in \text{Ker}(f)$ . Sean  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  tal que  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ . Entonces  $0 = f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i)$ . Como  $f(B)$  es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces  $\lambda_i = 0$ , para todo  $i$  y por tanto,  $v = 0$ .
- (b) No. Sea  $V$  un espacio vectorial cualquiera,  $B$  y  $B'$  bases (distintas) de  $V$  y  $f$  el endomorfismo definido por  $f(e_i) = e'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Entonces  $f \neq \text{Id}$  pues  $B \neq B'$  pero  $M(f, B, B') = I$ .
- (c) Primero se prueba que  $\text{Ker}(f) \subset \text{an}(\text{Im}(f^t))$  y luego que  $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{an}(\text{Im}(f^t)))$  (usaremos  $V^{**} = V$ ). Sea  $v \in \text{Ker}(f)$ . Tomamos  $\varphi \in \text{Im}(f^t)$  y hay que probar que  $v(\varphi) = 0$ , es decir,  $\varphi(v) = 0$ . Como  $\varphi \in \text{Im}(f^t)$ , existe  $\varphi' \in V'^*$  tal que  $f^t(\varphi') = \varphi$ . Por tanto,

$$\varphi(v) = f^t(\varphi')(v) = \varphi'(f(v)) \stackrel{(1)}{=} \varphi'(0) = 0,$$

donde en (1) se ha usado que  $v \in \text{Ker}(f)$ .

Por otro lado, si  $n = \dim(V) = \dim(V^*)$ , se tiene

$$\dim(\text{an}(\text{Im}(f^t))) = n - \dim(\text{Im}(f^t)) \stackrel{(1)}{=} n - \dim(\text{Im}(f)) \stackrel{(2)}{=} \dim(\text{Ker}(f)),$$

donde en (1) se usa que  $r(f) = r(f^t)$  y en (2) que  $n = \dim(\text{Ker}(f)) + r(f)$ .

2. Como sólo hay una ecuación cartesiana de  $U$ , entonces  $\dim(U) = 2$  y una base de  $U$  es  $\{(-1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$ . Ampliamos a una base de  $\mathbb{R}^3$ :  $B = \{(-1, 2, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ , pues al poner los tres vectores en una matriz, su determinante no es cero (es justamente 1). Se define  $f$  mediante

$$f(-1, 2, 0) = f(0, 0, 1) = (0, 0, 0), f(0, 1, 0) = (1, 0, 0).$$

Entonces

$$(-1, 2, 0), (0, 0, 1) \in \text{Ker}(f) \Rightarrow U = \langle (-1, 2, 0), (0, 0, 1) \rangle \subset \text{Ker}(f)$$

y  $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 2$ . Por otro lado,

$$(1, 0, 0) = f(0, 1, 0) \in \text{Im}(f) \Rightarrow \langle (1, 0, 0) \rangle \subset \text{Im}(f)$$

y así  $\dim(\text{Im}(f)) \geq 1$ . Como  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = n(f) + r(f)$ , entonces  $n(f) = 2$ ,  $r(f) = 1$  y tenemos igualdades en todas las inclusiones anteriores. De paso, una base de  $\text{Im}(f)$  es  $\{(1, 0, 0)\}$ .

Para hallar la matriz, sólo hay que calcular  $f(1, 0, 0)$ . Hallando las coordenadas de este vector respecto de  $B$ , obtenemos que son:  $(-1/2, 0, 1/2)$ , luego

$$f(1, 0, 0) = -\frac{1}{2}f(-1, 2, 0) + \frac{1}{2}f(0, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right).$$

Por tanto,

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Si  $B_u^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ , y como la ecuación cartesiana de  $U$  respecto de  $B_u$  es  $x + y - z = 0$ , entonces una base de  $\text{an}(U)$  es  $\{(1, 1, -1, 0)\}$ , escrito el vector en coordenadas respecto de  $B_u^*$ , es decir,  $\{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3\}$ .

Si escribimos este vector en coordenadas respecto de  $B_u^*$  y ampliamos hasta una base de  $\mathbb{R}^4$ , obtenemos las coordenadas de vectores de  $\mathbb{R}^{4*}$  respecto de  $B_u^*$  que forman una base de  $\mathbb{R}^{4*}$ . Basta con tomar:  $\{(1, 1, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ , es decir,  $B' = \{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ .

Sea  $B' = B^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$  y  $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ . Escribimos  $e'_1 = (a, b, c, d)$  y aplicamos a  $e'_1$  los elementos de  $B'$ :

$$a + b - c = 1, b = 0, c = 0, d = 0.$$

Resolviendo, queda  $e'_1 = (1, 0, 0, 0)$ . Del mismo modo se hace para los demás vectores, obteniendo:  $e'_2 = (-1, 1, 0, 0)$ ,  $e'_3 = (1, 0, 1, 0)$  y  $e'_4 = (0, 0, 0, 1)$ .

4. Se tiene  $\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y = 0, y + z = 0\}$ . Como las dos ecuaciones son linealmente independientes, entonces  $\dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$ . Dando valores a  $z$ , obtenemos un vector del núcleo, que constituirá, por tanto, una base del mismo:  $\text{Ker}(f) = \langle (1, -1, 1) \rangle$ .

Hallamos  $f^t(\varphi)$ .

$$f^t(\varphi)(x, y, z) = \varphi(f(x, y, z)) = \varphi(x + y, y + z) = x + y - 2(y + z) = x - y - 2z.$$

Por tanto, si  $B_u = \{e_1, e_2, e_3\}$  y  $B_u^* = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , las coordenadas de  $f^t(\varphi)$  son  $(1, -1, -2)$ .

Observaciones:

En el ejercicio 1. (a), como  $f(B)$  es un sistema de generadores de  $\text{Im}(f)$ , entonces  $f(B)$  es una base de  $\text{Im}(f)$ . Esto prueba que  $\dim(V) = \dim(\text{Im}(f))$ . Por la fórmula de las dimensiones, se tiene  $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ , es decir,  $f$  es inyectiva.

En el ejercicio 4, segundo apartado, podemos escribir  $f^t(\varphi) = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3$ . Aplicando a ambos lados la base  $B_u$ , se tiene

$$a = f^t(\varphi)(e_1), b = f^t(\varphi)(e_2), c = f^t(\varphi)(e_3).$$

Por la definición de  $f^t$ ,  $f$  y  $\varphi$ , se concluye

$$a = f^t(\varphi)(e_1) = \varphi(f(e_1)) = \varphi(1, 0) = 1$$

$$b = f^t(\varphi)(e_2) = \varphi(f(e_2)) = \varphi(1, 1) = -1$$

$$c = f^t(\varphi)(e_3) = \varphi(f(e_3)) = \varphi(0, 1) = -2$$

y las coordenadas son  $(1, -1, -2)$ , es decir,  $f^t(\varphi) = \omega_1 - \omega_2 - 2\omega_3$ .