CÁLCULO.
GRADO EN INFORMÁTICA. GRUPO C.

1. Calcula los números reales x que verifican que

$$|3x-2| < |2x^2-x|.$$

Solución.

Para trabajar con valores absolutos es necesario saber si el argumento del valor absoluto es mayor o menor que cero. En este caso $3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ y, por otra parte, $2x^2-x=x(2x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ o $x=\frac{1}{2}$. Veamos en qué se convierte la desigualdad en cada uno de los casos.

(a) Si $x \leq 0$ entonces $3x-2<0$ y $2x^2-x \geq 0$ con lo que tenemos la desigualdad $2-3x<2x^2-x \Leftrightarrow 2x^2+2x-2=2(x^2+x-1)>0$; resolviendo la ecuación $x^2+x-1=0$ se obtienen las soluciones $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ y la inecuación $x^2+x-1>0$ se verifica si $x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ o $x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Teniendo en cuenta que estamos en el caso de que $x \leq 0$ entonces será $x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

(b) Consideremos ahora el caso $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Entonces $3x-2 \leq 0$ y $2x^2-x \leq 0$ con lo que la desigualdad que pretendemos resolver se convierte en $2-3x<x-2x^2$ que es equivalente a $2x^2-4x+2<0$ pero $2x^2-4x+2=2(x-1)^2$ que es siempre mayor o igual a cero, con lo que no hay solución en este intervalo.

(c) Cuando $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ tenemos que $3x-2 \leq 0$ y $2x^2-x \geq 0$ con lo que la inecuación queda $2-3x<2x^2-x$ que la hemos resuelto en el primer apartado. Ahora el intervalo de solución será $]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{2}{3}]$.

(d) Finalmente, si $x \geq \frac{2}{3}$ tenemos que $3x-2 \geq 0$ y también $2x^2-x \geq 0$; así la inecuación queda $3x-2<2x^2-x \Leftrightarrow 2x^2-4x+2=2(x-1)^2>0$ que es cierto en todo $\mathbb{R}$ salvo en $x=1$

Recogiendo las soluciones que nos han dado en los distintos intervalos tenemos que la inecuación se cumple cuando $x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y cuando $x>\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \setminus \{1\}$.

Otra forma de hacerlo es elevando al cuadrado la desigualdad de los valores absolutos.

$$|3x-2| < |2x^2-x| \Leftrightarrow (3x-2)^2 < (2x^2-x)^2,$$

es decir, si

$$9x^2+4-12x < 4x^4+x^2-4x^3 \Leftrightarrow 4x^4-4x^3-8x^2+12x-4>0.$$

Si resolvemos la ecuación $4x^4-4x^3-8x^2+12x-4=0$ nos quedan las raices $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $x=1$. Estudiando los el signo en los distintos intervalos que definen esas raices se llega a la misma solución que hemos obtenido antes.

2. Demuestra que para todo natural n se verifica que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2n\sqrt{n}-1.$$

Solución.

Vamos a hacerlo por inducción. Llamaremos $A = \{n \in \mathbb{N} : \ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2n\sqrt{n} - 1\}$ y se trata de demostrar que $A = \mathbb{N}$, que es inmediato si demostramos que A es inductivo.

Claramente $1 \in A$ ya que a la izquierda de la desigualdad queda 1 y a la derecha queda $2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1} - 1 = 1$ y en este caso se da la igualdad.

Supongamos que, para cierto natural n, se verifica que $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2n\sqrt{n} - 1$ y tenemos que demostrar que la desigualdad es cierta también para $n+1$, es decir, que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(n+1)\sqrt{n+1} - 1,$$

pero utilizando la hipótesis de inducción tenemos que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2n\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

con lo que basta con demostrar que

$$2n\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(n+1)\sqrt{n+1} - 1,$$

es decir, que

$$2n\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(n+1)\sqrt{n+1},$$

o, lo que es lo mismo, que

$$2(n+1)\sqrt{n+1} - 2n\sqrt{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

pero

$$2(n+1)\sqrt{n+1} - 2n\sqrt{n} \geq 2(n+1)\sqrt{n+1} - 2n\sqrt{n+1} = 2\sqrt{n+1}$$

que es mayor que 1 (de hecho es mayor que 2) para cualquier natural, mientras que $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1$ para cualquier natural con lo que se da la desigualdad buscada y la propiedad se cumple para cualquier natural.

3. Demuestra que, si $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $11^{n+1} - 6^n$ es divisible por 5.

Solución.

También por inducción vamos a considerar $A = \{n \in \mathbb{N} : \ 11^{n+1} - 6^n \text{ es divisible por } 5\}$. Se trata de ver que A es inductivo.

Claramente $1 \in A$ ya que $11^2 - 6^1 = 115 = 5 \cdot 23$. Supongamos que, para cierto natural n, 5 divide a $11^{n+1} - 6^n$ y veamos si 5 también divide a $11^{n+2} - 6^{n+1}$. Pero

$$11^{n+2} - 6^{n+1} = 11 \cdot 11^{n+1} - 6 \cdot 6^n = 11 \cdot 11^{n+1} - 11 \cdot 6^n + 11 \cdot 6^n - 6 \cdot 6^n$$

$$11(11^{n+1} - 6^n) + (11 - 6)6^n = 11(11^{n+1} - 6^n) + 5 \cdot 6^n,$$

donde en la primera igualdad hemos restado y sumado $11 \cdot 6^n$. Claramente la expresión que obtenemos, $11(11^{n+1} - 6^n) + 5 \cdot 6^n$ es divisible por 5 al ser la suma de dos números divisibles por 5; el primero por la hipótesis de inducción y el segundo obviamente.

4. Sea $a > 1$. Se define la sucesión $x_1 = a$ y $x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula su límite.

   Solución.

   Como es una sucesión definida por recurrencia vamos a intentar demostrar que es monótona y acotada para concluir que es convergente. Para ver qué tipo de monotonía cumple veremos qué ocurre con los primeros términos. Tenemos que

   $$x_2 = 2 - \frac{1}{a} < a = x_1 \Leftrightarrow \frac{2a-1}{a} < a \Leftrightarrow 2a - 1 < a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 > 0,$$

   que es claro ya que $a > 1$.

   Parece que es decreciente. Vamos a demostrarlo por inducción. Acabamos de ver que $x_2 < x_1$. Supongamos que, para cierto natural n, se cumple que $x_{n+1} < x_n$. Entonces $\frac{1}{x_{n+1}} > \frac{1}{x_n}$ y, multiplicando por -1, $-\frac{1}{x_{n+1}} < -\frac{1}{x_n}$ y sumando 2 en la desigualdad se tiene que

   $$x_{n+2} = 2 - \frac{1}{x_{n+1}} < 2 - \frac{1}{x_n} = x_{n+1}$$

   y la sucesión es decreciente. Para ver si está minorada (ya que mayorada está por ser decreciente) vamos a suponer que la sucesión de hecho está minorada. En ese caso la sucesión es convergente y el límite, L, es también límite de $\{x_{n+1}\}$.

   $$L = \lim\{x_n\} = \lim\{x_{n+1}\} = \lim\{2 - \frac{1}{x_n}\} = 2 - \frac{1}{L},$$

   con lo que L verifica la ecuación $L = 2 - \frac{1}{L}$, que tiene la única solución $L = 1$. Entonces, si la sucesión está minorada, 1 debe ser minorante. Veamos que efectivamente lo es. También lo vamos a ver por inducción. Claramente $x_1 = a > 1$. Supongamos que, para cierto natural n, se cumple $x_n > 1$. Entonces $\frac{1}{x_n} < 1$ y $-\frac{1}{x_n} > -1$; sumando 2 tenemos que $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} > 2 - 1 = 1$. Así que la sucesión está efectivamente minorada por 1 y es convergente. El límite, ya lo sabíamos, es 1.

5. Calcula el límite de la sucesión

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{1+\sqrt{2!}+\sqrt[3]{3!}+\cdots+\sqrt[n]{n!}}{n^2} \right\}.$$

Solución.

Como es un cociente y el denominador, n^2, es una sucesión que diverge positivamente se puede aplicar el criterio de Stolz. Además en el numerador hay una suma con un número variable de sumandos, que suele ir bien con el criterio de Stolz. Veamos, si llamamos $a_n = 1+\sqrt{2!}+\sqrt[3]{3!}+\cdots+\sqrt[n]{n!}$ y $b_n = n^2$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} &= \frac{(1+\sqrt{2!}+\sqrt[3]{3!}+\cdots+\sqrt[n+1]{(n+1)!})-(1+\sqrt{2!}+\sqrt[3]{3!}+\cdots+\sqrt[n]{n!})}{(n+1)^2-n^2} \\ &= \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{2n+1}.\end{aligned}$$

Volvemos a tener una fracción en la que el denominador diverge, pero si volvemos a aplicar Stolz el numerador se complica. Se puede aplicar el criterio de la raiz si el denominador lo metemos también dentro de la raiz.

$$\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{2n+1} = \sqrt[n+1]{\frac{(n+1)!}{(2n+1)^{n+1}}}.$$

Vamos a llamar $z_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(2n+1)^{n+1}}$. Entonces $z_n = \frac{n!}{(2n-1)^n}$. Se tiene que $\sqrt[n+1]{\frac{(n+1)!}{(2n+1)^{n+1}}} = \sqrt[n+1]{z_{n+1}}$. Claramente $\lim\{\sqrt[n+1]{z_{n+1}}\} = \lim\{\sqrt[n]{z_n}\}$. Entonces

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(n+1)!(2n-1)^n}{(2n+1)^{n+1}n!} = \frac{n+1}{2n+1}\cdot\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n.$$

El primer factor, $\frac{n+1}{2n+1}$ es una sucesión que converge a $\frac{1}{2}$ mientras que el segundo, $\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$ presenta una indeterminación de la forma 1^∞. Aplicando la regla del número e a esta sucesión tenemos que

$$\left\{\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n\right\} \longrightarrow e^L \Leftrightarrow \left\{n\left(\frac{2n-1}{2n+1}-1\right)\right\} \longrightarrow L,$$

y $\left\{n\left(\frac{2n-1}{2n+1}-1\right)\right\} = \left\{n\left(\frac{2n-1-(2n+1)}{2n+1}\right)\right\} = \left\{\frac{-2n}{2n+1}\right\} \longrightarrow -1$, con lo que $\lim\left\{\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n\right\} = e^{-1}$. Resumiendo, la sucesión $\{x_n\}$ converge a $\frac{1}{2e}$.

6. Estudia si es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}\right)^2$.

Solución.

Aplicando el criterio de cociente, si llamamos $x_n = \left(\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots3n}\right)^2$, tenemos que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)(3n+1)}{3\cdot6\cdot9\cdots3n(3n+3)}\right)^2\cdot\left(\frac{3\cdot6\cdot9\cdots3n}{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}\right)^2 = \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2.$$

Claramente la sucesión $\left\{\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\right\} = \left\{\frac{9n^2+6n+1}{9n^2+18n+9}\right\} \longrightarrow 1$ y el criterio del cociente no decide si la serie es convergente o no. Sin embargo podemos aplicar el criterio de Raabe y nos queda

$$\left\{n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)\right\} = \left\{n\left(1-\frac{9n^2+6n+1}{9n^2+18n+9}\right)\right\}$$

$$= \left\{n\left(\frac{9n^2+18n+9-(9n^2+6n+1)}{9n^2+18n+9}\right)\right\} = \left\{\frac{12n^2+8n}{9n^2+18n+9}\right\} \longrightarrow \frac{12}{9} = \frac{4}{3} > 1$$

y la serie es convergente.

Granada, 2de diciembre de 2013