1. Dado $a \in \mathbb{R}^+$, probar que

$$x^a \leq a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \Longleftrightarrow \quad a = e$$

2. Sea $A =]-1,0[\cup \mathbb{R}^+$ y $f : A \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{2 \operatorname{arctg} x \, \log(1+x) - 2x^2 + x^3}{x^5} \quad \forall x \in A$$

Estudiar el comportamiento de f en -1, 0 y $+\infty$.

3. Se considera la función $H : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = \int_0^{\pi x^2} e^{2t} \operatorname{sen} t \, dt \quad \forall x \in [-1,1]$$

Estudiar los posibles extremos absolutos y relativos de H, y calcular su imagen.
¿Existe $x \in [-1,1]$ tal que $H(x) = 13$?