

Integrado de Ing. y M.
19

Geometría II. Grado en matemáticas
Examen final. Curso 2013-2014
Toda la asignatura

1. Sea f el endomorfismo de \mathbb{R}^3 que respecto de la base usual tiene matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Probar que $\lambda = 1$ es un valor propio de f y estudiar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es diagonalizable.
- (b) Cuando f no sea un automorfismo encontrar una base de vectores propios de f . *→ endomorfismo biyectivo ($\det \neq 0$)*
- (c) Para algún valor de α , encontrar una base ortogonal de \mathbb{R}^3 con su métrica usual formada por vectores propios de f .

2. Sea g_β la métrica en \mathbb{R}^3 cuya forma cuadrática está dada por:

$$\Phi_\beta(x, y, z) = y^2 + \beta z^2 + 2xy + 2\beta xz.$$

- (a) Clasificar las métricas g_β según los valores de $\beta \in \mathbb{R}$. *signatura y nulidad.*
- (b) Calcular el radical o núcleo de cada g_β .
- (c) Resolver la ecuación $\Phi_0(x, y, z) = 0$. *para qué valores de x, y, z .*

3. Se considera el endomorfismo de \mathbb{R}^3 dado por:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}y - z, \sqrt{2}x + \sqrt{2}z, -x - \sqrt{2}y + z).$$

Demostrar que es una isometría en (\mathbb{R}^3, g_u) , clasificarla y describir sus elementos geométricos.

4. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:

- (a) Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ con $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2$. ¿Es A semejante a una matriz diagonal? Si la respuesta es negativa, mostrar un contraejemplo.
- (b) Probar que si $f : V \rightarrow V$ es una isometría de un espacio vectorial euclídeo (V, g) y $\det(f) = -1$, entonces $\lambda = -1$ es valor propio de f .
- (c) ¿Es cierto que en (\mathbb{R}^3, g_u) ninguna simetría ortogonal respecto a un plano es composición de simetrías ortogonales respecto a rectas?

Duración: 3 horas

Granada, 10 de julio de 2014