Cálculo

1^{o}E Grado en Ingeniería Informática

Primer Parcial (Tipo I)

Curso 2015/2016

1. **(3 puntos)** Calcula:

   a) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2\cos(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

   b) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{e^{-x}}$.

Solución:

a) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Parta resolver dicha indeterminación aplicamos la regla de L’Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1,$$

donde, en este último límite, hemos aplicado un resultado ya presentado en clase. Por lo tanto, el límite pedido presenta una indeterminación del tipo “1^∞”.

Aplicamos ahora la regla del número e. Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2\cos(x)}{x^2}\right)^{1/x^2}=e^L \iff \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{2-2\cos(x)}{x^2}-1\right]=L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{2-2\cos(x)}{x^2}-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos(x)-x^2}{x^4}$$

aplicamos la regla de L’Hôpital, ya que que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Nos queda entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(x)-2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)}{12x}=-\frac{1}{12}$$

Obsérvese que hemos aplicado la regla de L’Hôpital tres veces consecutivas.

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2\cos(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-1/12}\ .$$

b) En este límite se presenta una indeterminación del tipo "∞^0". Aplicamos la fórmula del número e para resolverlo; esto es:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{e^{-x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\log(\sqrt{x^2+1})} \ .$$

Escribimos el límite del exponente como el límite de un cociente de la forma siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\log(\sqrt{x^2+1}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\sqrt{x^2+1})}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\log(x^2+1)}{e^x}$$

Este último límite presenta una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$", por lo que aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces consecutivas:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2(x^2+1)e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x^2+1)e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x\,e^x+(x^2+1)e^x} = 0$$

Por tanto, el límite original es:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{e^{-x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\log(\sqrt{x^2+1})} = e^0 = 1 \ .$$

2. **(2 puntos)** Demuestra que la desigualdad siguiente es cierta en $]0,1[$:

$$\operatorname{arc\,sen}(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

Solución: Para probar la desigualdad planteada, establecemos esta otra que es equivalente a ella; es decir,

$$\operatorname{arc\,sen}(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ , \ \forall x\in]0,1[\iff \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arc\,sen}(x) > 0 \ , \ \forall x\in]0,1[\ .$$

Consideramos entonces la función $f\colon\,]0,1[\to\mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arc\,sen}(x)$. Tenemos que probar que $f(x) > 0$, $\forall x\in]0,1[$.

Se trata de una función derivable en todo el dominio dado. Vamos a estudiar sus extremos, calculando los puntos críticos.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{(1-x^2)+x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} \end{aligned}$$

Observamos que la derivada nunca se anula en $]0,1[$, ya que el único punto que anula a la derivada es $x = 0$ que queda descartado al no ser un punto interior al dominio. Por tanto, sabemos, como consecuencia del teorema del valor medio, que la función es estrictamente monótona. En concreto, como $f'(x) > 0$, $\forall x \in]0,1[$, la función f es estríctamente creciente. Sólo nos queda estudiar el comportamiento de f en el cero:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{arc\,sen}(x) = 0 \ .$$

Al ser f es estrictamente creciente y en el cero tender a cero, concluimos que $f(x) > 0$, $\forall x \in]0,1[$, como se quería demostrar.

3. **(2 puntos)** Determina el número de soluciones de la ecuación:

$$e^{|x|} = x + 7 \ .$$

Solución: Para determinar el número de soluciones de la ecuación dada, vamos a buscar el número de ceros de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{|x|} - x - 7 = \begin{cases} e^x - x - 7 & , \text{ si x > 0} \\ -6 & , \text{ si x =0} \\ e^{-x} - x - 7 & , \text{ si x < 0} \end{cases}$$

Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, pero, es derivable en $\mathbb{R}^*$. Y al escribirla a trozos, nos va a ser más fácil calcular la derivada de f.

En primer lugar, vamos a ver el comportamiento de f en los extremos del dominio:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} e^{-x} - x - 7 = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{x} - x - 7 = +\infty$$

Por ahora, no podemos aplicar el teorema de Bolzano por lo que aún no tenemos garantizado que haya algún cero.

Comenzamos el estudio de la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & , \text{ si x > 0} \\ -e^{-x} - 1 & , \text{ si x < 0} \end{cases}$$

Para $x < 0$, la derivada es siempre negativa, por lo que en el intervalo $]-\infty, 0[$ podemos ya asegurar que la función es estrictamente decreciente. Sin embargo, para $x > 0$, tenemos que

$$f'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff x = 0 \,,$$

con lo que obtenemos un punto crítico que descartamos al no estar en $]0, +\infty[$. Por tanto, la función es también estrictamente monótona en los positivos y como $f'(x) > 0$ en ese tramo, deducimos que f es estrictamente creciente en $]0, +\infty[$. Concluimos, entonces, que, aunque en el punto cero no hay derivabilidad, como la función pasa de ser decreciente a creciente, f alcanza un mínimo relativo en $x = 0$, que, además, es el punto de mínimo absoluto. Como además, $f(0) = -6$, la función tiene dos ceros: uno en los negativos y otro en los positivos (hemos aplicado el teorema de Bolzano en $\mathbb{R}^-$ y en $\mathbb{R}^+$).

4. **(1 punto)** Determina el rectángulo paralelo a los ejes inscrito en el triángulo rectángulo de vértices (0,0), (2,2) y (2,0) y de área máxima .

Solución: Llamemos (x, y) al vértice del rectángulo inscrito en el triángulo dado que se apoya en la hipotenusa. Observemos que dicha hipotenusa es el segmento de la recta $y = x$ que empieza en $(0, 0)$ y acaba en $(2, 2)$. Sabemos entonces que $y = x$ y que las dimensiones del rectángulo inscrito y cuya área hay que maximizar son, altura$= y = x$, y base$= 2 - x$. Por tanto, la función a maximizar es: $f\colon\, [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (2 - x)x = 2x - x^2 \,.$$

Esta función (un polinomio de grado 2) es derivable. Buscamos posibles puntos de extremos en $]0, 2[$. Para ello, calculamos puntos críticos:

$$f'(x) = 2 - 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$$

Para calcular el máximo absoluto, al ser el dominio un intervalo compacto, sólo nos queda evaluar la función:

$$f(0) = 0 = f(2) < f(1) = 1$$

Por tanto el rectángulo inscrito que tiene área máxima 1 es el definido por los vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 0)$ y $(1, 0)$.

5. **(2 puntos)** El polinomio de Taylor de orden 3 centrado en el origen de una función dada f es:

$$2-3x+x^2-\frac{x^3}{3}$$

Calcula el polinomio de Taylor del mismo orden y centro de la función $g(x)=(f(x)+1)^2$.

Solución: El enunciado del problema nos permite asegurar que:

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=2-3x+x^2-\frac{x^3}{3}$$

Igualando coeficientes deducimos que:

$$f(0)=2\ ,f'(0)=-3\ ,f''(0)=2\ ,f'''(0)=-2$$

Para calcular el polinomio de Taylor de la función g en $a=0$ de orden 3 tenemos que calcular las derivadas sucesivas en el cero hasta la de orden 3. Es decir,

$$\begin{aligned}
g(x)=(f(x)+1)^2 &\Rightarrow g(0)=(2+1)^2=9\\
g'(x)=2(f(x)+1)f'(x) &\Rightarrow g'(0)=-18\\
g''(x)=2f'(x)^2+2(f(x)+1)f''(x) &\Rightarrow g''(0)=18+12=30\\
g'''(x)=4f'(x)f''(x)+2f'(x)f''(x)+2(f(x)+1)f'''(x) &\Rightarrow g'''(0)=-24-12-12=-48
\end{aligned}$$

Entonces, el polinomio de Taylor pedido es:

$$P_3(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\frac{g'''(0)}{3!}x^3=9-18x+15x^2-8x^3$$

Granada, 30 de noviembre de 2015