UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
ECUACIONES DIFERENCIALES I
GRADO EN MATEMÁTICAS
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE. 10 de septiembre de 2015

Todos los ejercicios tienen la misma puntuación máxima.

Ejercicio 1.- Fijado $x_0 \in \mathbb{R}$, sea $x(t;x_0)$ la solución del p.v.i. para la ecuación de Bernouilli

$$x' = -x + e^t x^2, \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

y denotemos $(\alpha(x_0), \omega(x_0))$ el mayor intervalo donde está definida esta solución. Determinar $x(t, x_0)$, especificando $\alpha(x_0)$ y $\omega(x_0)$ para cada x_0 y calcular, si es posible,

$$\lim_{t \to \omega(x_0)^-} x(t; x_0).$$

Ejercicio 2.- Se considera la ecuación diferencial

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{2}$$

donde $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ y $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ son continuas y T-periódicas.

1. Probar que si $x(t)$ es una solución de (2) también lo es $x(t+T)$.
2. Probar que una solución de (2) $x(t)$, es T-periódica si y solo si $x(0) = x(T)$.
3. Probar el siguiente apartado del Teorema de Alternativa de Fredholm: Si la ecuación homogénea asociada no tiene soluciones T-periódicas distintas de la trivial, entonces (2) tiene una única solución T-periódia.

Ejercicio 3.- Se considera el P.V.I.

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Hallar una matriz fundamental de la ecuación homogénea asociada. (Sugerencia: trasformar la ecuación homogénea en una ecuación de Euler de segundo orden).
2. Hallar la solución del P.V.I. y el mayor intervalo donde está definida.