Cálculo
1º Grado en Ingeniería Informática
Segundo Parcial
Curso 2017/2018

Calificación del Primer Parcial:

1. **(3 puntos)** Calcula:

   a) $\displaystyle\int x^2 \log(1+x^2)\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\,dx$

   Solución:

   a) Aplicamos el método de integración por partes:

$$\int x^2 \log(1+x^2)\,dx = \begin{bmatrix} u = \log(1+x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\ dv = x^2\,dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{x^3}{3}\log(1+x^2) - \frac{2}{3}\int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx\,.$$

   La integral que nos queda es de tipo racional. Comenzamos por escribir el integrando haciendo uso del algoritmo de división de polinomios:

$$\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

   Por tanto,

$$\int x^2 \log(1+x^2)\,dx = \frac{x^3}{3}\log(1+x^2) - \frac{2}{3}\int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\log(1+x^2) - \frac{2x^3}{9} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\arctan(x) + C\,.$$

   b) Para calcular la integral dada vamos a calcular, en primer lugar, una primitiva del integrando. Se trata de una primitiva de tipo trigonométrico, donde el integrando es una función racional en $\cos(x)$, y no es par. Por tanto, aplicamos el cambio de variable adecuado a este tipo de integrandos. Esto es, $t = \tan(x/2)$:

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\,dx = \begin{bmatrix} t = \tan(x/2) \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix}$$
$$= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt$$

Para resolver esta última primitiva, que es racional, dividimos los polinomios y seguimos así:

$$\begin{aligned}\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt &= \int \frac{2}{1+t^2}\,dt - \int dt = 2\arctan(t) - t + C\\ &= 2\arctan(\tan(x/2)) - \tan(x/2) + C\\ &= x - \tan(x/2) + C\end{aligned}$$

Calculamos ya la integral que nos piden:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\,dx = [x - \tan(x/2)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

2. **(2 puntos)** Elige uno de los siguientes apartados:

   a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \operatorname{arc\,sen}(t^2)\,dt}{\sqrt{x}\,\operatorname{sen}(x)}$.

   b) Sea $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} e^{-t^2}\,dt$.

      1) Estudia los intervalos de monotonía de f.

      2) Sabiendo que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calcula $f(\mathbb{R}^+)$.

Solución:

a) Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que la función $\left(f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \operatorname{arc\,sen}(t^2)\,dt\right)$ es continua y derivable ya que el integrando, $f(t) = \operatorname{arc\,sen}(t^2)$, es una función continua. Además, gracias también al Teorema Fundamental del Cálculo, podemos calcular la derivada de f :

$$f'(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2\sqrt{x}}$$

Si calculamos el límite en cero del numerador, es decir, de f:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \int_0^0 \operatorname{arc\,sen}(t^2)\,dt = 0$$

Estamos ante una indeterminación del tipo "$0/0$" .Por tanto, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{2\sqrt{x}}}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{\operatorname{sen}(x) + 2x\cos(x)} \ .$$

Vuelve a presentarse una indeterminación del tipo "$0/0$" , por lo que volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x) + 2\cos(x) - 2x\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(3\cos(x) - 2x\operatorname{sen}(x))}$$

Concluimos entonces que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \operatorname{arc\,sen}(t^2)\,dt}{\sqrt{x}\,\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{3}$$

b) 1) La función f es derivable gracias al teorema fundamental del cálculo (es composición de funciones derivables en el dominio dado). Y su derivada es:

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \frac{(-1)}{x^2}$$

Esta función no se anula nuca, por lo que f es estrictamente monónota. Además, f' es siempre negativa, y entonces f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$.

2) El apartado anterior nos asegura que, al ser f continua y decreciente, su imagen es el intervalo siguiente:

$$f\left(\mathbb{R}^+\right) = f\left(]0,+\infty[\right) =]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)[$$

Calculamos cada uno de estos límites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_0^0 e^{-t^2}\, dt = 0 \;;$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \;.$$

Por tanto, $f\left(]0,+\infty[\right) =]0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}[$.

3. **(1.5 puntos)** Estudia la convergencia y, en su caso, el límite de la sucesión definida por recurrencia de la siguiente forma:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución: Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \sqrt{3x_1+4} = \sqrt{10} \geq x_1 = 2$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, comprobamos por inducción que $x_n \leq x_{n+1}$,$\forall n \in \mathbb{N}$:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 \leq x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}
x_n \leq x_{n+1} &\Rightarrow\ 3x_n \leq 3x_{n+1} \text{ (es cierto ya que los números son positivos)}\\
&\Rightarrow\ 3x_n + 4 \leq 3x_{n+1} + 4\\
&\Rightarrow\ \sqrt{3x_n+4} \leq \sqrt{3x_{n+1}+4}\\
&\Rightarrow\ x_{n+1} \leq x_{n+2}\ .
\end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por el $x_1 = 2$. Veamos que está acotada superiormente por 4. Esto es, que $x_n \leq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nuevamente lo hacemos por inducción:

- Para $n=1$, es evidente que $x_1 = 2 \leq 4$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 4$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 4$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \leq 4 \;\Rightarrow\; 3x_n \leq 12 \;\Rightarrow\; 3x_n + 4 \leq 16$$

$$\Rightarrow\; \sqrt{3x_n+4} \leq \sqrt{16} = 4 \Rightarrow \quad x_{n+1} \leq 4$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

Para calcular el límite de $\{x_n\}$, partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \sqrt{3x+4}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{3x+4} \;\Rightarrow\; x^2 = 3x+4 \;\Rightarrow\; x^2 - 3x - 4 = 0 \;\Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \;\Rightarrow\; x = -1 \;\text{ ó }\; x = 4\,.$$

Como la sucesión es creciente y comienza en 2, el límite no puede ser negativo, por lo que , $\lim\{x_n\} = 4$.

4. **(2 puntos)** Estudia la convergencia de las series:

   a) $\displaystyle\sum \left(\frac{5n^2+1}{5n^2+n}\right)^{-n^2}$.

   b) $\displaystyle\sum \frac{2^n(n+2)!}{n^n}$.

   Solución:

   a) Aplicamos el criterio de la raíz.

   $$\sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+1}{5n^2+n}\right)^{-n^2}} = \left(\frac{5n^2+1}{5n^2+n}\right)^{-n}$$

   Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo "1^∞"; por tanto, aplicamos la regla del número e:

   $$(-n)\left[\frac{5n^2+1}{5n^2+n} - 1\right] = (-n)\left[\frac{5n^2+1-5n^2-n}{5n^2+n}\right]$$
   $$= (-n)\frac{(-n+1)}{5n^2+n} = \frac{n^2-n}{5n^2+n} \to 1/5$$

   Con lo que:

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+1}{5n^2+n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+1}{5n^2+n}\right)^{-n} = e^{1/5} > 1\;,$$

   de lo que se deduce que la serie dada es divergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente. Así, si llamamos $a_n = \frac{2^n(n+2)!}{n^n}$ tenemos que estudiar el límite del cociente siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+3)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{(n)^n}{2^n(n+2)!} = \frac{2(n+3)}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 2\cdot(1/e) = \frac{2}{e} < 1$$

de lo que se deduce que la serie es convergente.

5. **(1.5 puntos)** Estudia la convergencia de la siguiente serie y calcula su suma, si existe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{6^{n+1}}.$$

Solución: La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n + 2^n}{6^{n+1}} = \frac{1}{6}\left(\sum_{n\geq 1}\left(\frac{-1}{6}\right)^n + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{6}\right)^n\right) = \frac{1}{6}\left(\sum_{n\geq 1}\left(\frac{-1}{6}\right)^n + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{6}| < 1$ y $|\frac{1}{3}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente por ser el producto de una constante $(1/6)$ por la suma de dos series convergentes. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$, nos queda:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{6^{n+1}} &= \frac{1}{6}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{6}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{6}\right)^n - 1\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{-1}{6}} - 1\right) + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{1+\frac{1}{6}} - 1\right) + \left(\frac{1}{\frac{2}{3}} - 1\right)\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{6}{7} - 1 + \frac{3}{2} - 1\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{-1}{7} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{5}{14}\right] = \frac{5}{84}
\end{aligned}$$

Granada, a 20 de diciembre de 2017