

Cálculo I

5 de septiembre de 2012

1. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos y sea

$$\sqrt{C} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in A, b \in B \right\}$$

Supongamos que A está mayorado y que $\inf B > 0$. Probar que el conjunto C está mayorado y calcular su supremo.

2. Probar que la sucesión $\{x_n\}$ definida por

$$\sqrt{x_1} = 1, \quad x_{n+1} = \frac{5x_n + 3}{x_n + 5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es convergente y calcular su límite.

3. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de la siguiente serie:

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \sqrt[3]{3}}$$

4. Sea I un intervalo abierto y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Suponiendo que f es continua en un punto $a \in I$, probar que

$$\sup \{f(x) : x \in I, x < a\} = f(a) = \inf \{f(x) : x \in I, x > a\}$$