

Transformada de Laplace

Transformación integral [$k(s,t)$ = kernel] :

$$\mathcal{T}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) k(s, t) dt ; \quad s \in \mathbb{C}$$

Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt ; \quad s \in \mathbb{C}$$

Muy efectiva para resolver ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes con condiciones iniciales.

Si $f(t)$ es de clase $A \Rightarrow \exists$ su transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$.

1

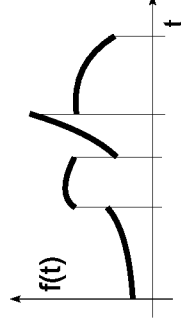
FFT

Una función es de clase A , si:

- $f(t)$ es seccionalmente continua en todos los intervalos finitos $\forall t \geq 0$
- $f(t)$ es de orden exponencial cuando $t \rightarrow \infty$

$f(t)$ es seccionalmente continua en un intervalo $[a,b]$, si ese intervalo puede subdividirse en un número finito de intervalos cerrados $[c,d]$ en los que:

- $f(t)$ sea continua en el intervalo abierto (c,d)
- \exists límite de $f(t)$ cuando $t \rightarrow c$ y cuando $t \rightarrow d$



$f(t)$ es de orden exponencial cuando $t \rightarrow \infty$, si existen ctes. M y b , y un t_0 tal que:

$$|f(t)| < M e^{bt} \quad \forall t \geq t_0$$

3

Transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s) e^{st} ds$$

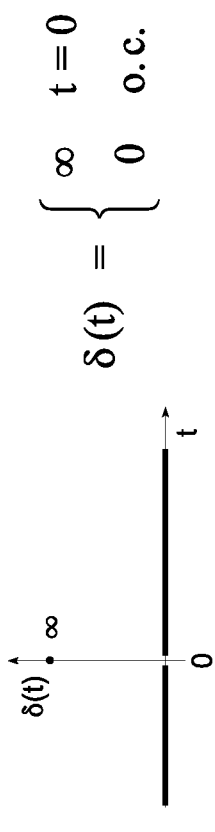
La transformada inversa de Laplace no es única.

Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ difieren en un conjunto finito de puntos, sus transformadas son iguales: $F_1(s) = F_2(s)$.

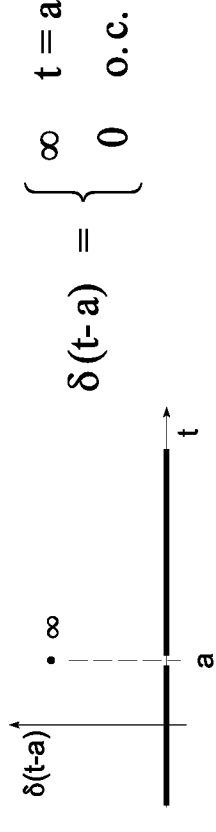
2

4

Función delta de Dirac,
o función impulso:



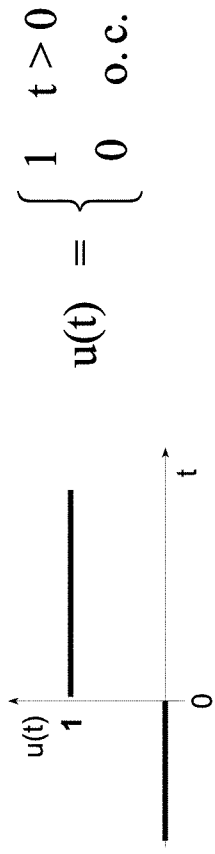
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & \text{o. c.} \end{cases}$$



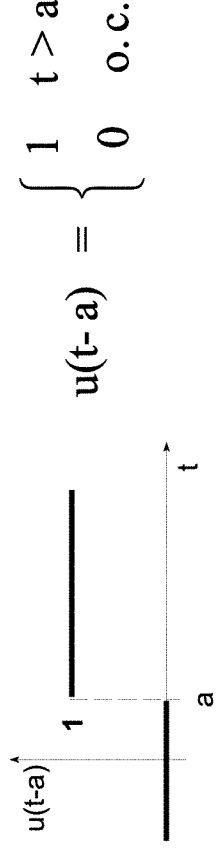
$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & t = a \\ 0 & \text{o. c.} \end{cases}$$

$$\int_c^d \delta(t-a) dt = 1 \text{ si } a \in [c,d], \text{ en otro caso sería } 0$$

Función escalón unitario,
o de Heaviside:



$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & \text{o. c.} \end{cases}$$



$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & \text{o. c.} \end{cases}$$

Nomenclatura

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) \qquad \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0} = f'(0)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = f''(t) \qquad \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} = f''(0)$$

Linealidad

$$a f(t) + b g(t) \rightarrow L \rightarrow a F(s) + b G(s)$$

Más propiedades, y las tablas de transformadas en el PDF

Relaciones útiles:

$$\text{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\text{cos}(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\text{sen}^2(a) + \text{cos}^2(a) = 1$$

par cos(-a) = cos(a)

impar sen(-a) = -sen(a)

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\text{cos}(b) + \text{cos}(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{cos}(a+b) = \text{cos}(a)\text{cos}(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b)$$

$$\text{sen}(a)\text{sen}(b) = \frac{1}{2} [\text{cos}(a-b) - \text{cos}(a+b)]$$

$$\text{cos}(a)\text{cos}(b) = \frac{1}{2} [\text{cos}(a-b) + \text{cos}(a+b)]$$

$$\text{sen}(a)\text{cos}(b) = \frac{1}{2} [\text{sen}(a-b) + \text{sen}(a+b)]$$

$$\text{sen}^2(a) = \frac{1}{2} [1 - \text{cos}(2a)]$$

$$\text{cos}^2(a) = \frac{1}{2} [1 + \text{cos}(2a)]$$

<div>Ejercicios</div> <div>Cálculo de la transformada de Laplace</div> <div>Cálculo de la transformada inversa de Laplace</div> <div> <div>— Directas</div> <div>— b²=4c y b²<4c</div> <div>— b²>4c</div> </div> <div>Resolución de ecuaciones diferenciales</div> <div>9</div>	<div>Ejercicios</div> <div>Cálculo de la transformada de Laplace</div> <div> $t^2 + 4t - 5$ $\cos^2(\omega t)$ </div> <div> $t^3 - t^2 + 4t$ $\sin^2(\omega t)$ </div> <div> $e^{-2t} + 4e^{-3t}$ $\sin(\omega t) \cos(\omega t)$ </div> <div> $3e^{4t} - e^{-2t}$ $\sin(3t) \sin(t)$ </div> <div> $e^{2t} + 3te^{-3t} + 5t^2e^{-6t}$ $e^{-at} - e^{-bt}$ </div> <div>10</div>
<div>Soluciones</div> <div> $\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{5}{s}$ $\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2}$ $\frac{5s+11}{(s+2)(s+3)}$ $\frac{2s+10}{(s-4)(s+2)}$ $\frac{1}{(s-2)} + \frac{3}{(s+3)^2} + \frac{10}{(s+6)^3}$ </div> <div> $\frac{(s^2 + 2\omega^2)}{s(s^2 + 4\omega^2)}$ $\frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$ $\frac{\omega}{(s^2 + 4\omega^2)}$ $\frac{1}{2} \left[\frac{s}{s^2 + 2^2} - \frac{s}{s^2 + 4^2} \right]$ $\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$ </div> <div>11</div>	<div>Ejercicios</div> <div>Cálculo de la transformada inversa de Laplace</div> <div>— Directas</div> <div> $\frac{4}{s} + \frac{6}{s^2} + \frac{8}{(s+2)^3}$ $\frac{12}{s^4} + \frac{24}{(s+2)^4}$ $\frac{3}{(s+3)} + \frac{4}{(s+4)^2} - \frac{6}{s^4}$ $\frac{s}{(s+4)^2}$ </div> <div> $\frac{(s+2)}{(s+3)^3}$ $\frac{(s+2)}{s^3}$ $\frac{(s+3)}{(s^2+9)}$ </div> <div> $\frac{s^2+6s-9}{(s^2+9)^2}$ $\frac{s^2}{(s-1)^4}$ $\frac{2s+3}{(s+4)^3}$ </div> <div>12</div>

<div data-bbox="44 1982 79 2150">Soluciones</div> <div data-bbox="124 1877 164 2134"> $4 + 6t + 4t^2 e^{-2t}$ </div> <div data-bbox="177 1176 282 1794"> $\left(t - \frac{1}{2}t^2\right)e^{-3t} \quad t[\cos(3t) + \sin(3t)]$ </div> <div data-bbox="311 1919 351 2134"> $2t^3 + 4t^3 e^{-2t}$ </div> <div data-bbox="351 1238 464 1760"> $t + t^2 \quad e^t \left(t + t^2 + \frac{t^3}{6}\right)$ </div> <div data-bbox="469 1848 510 2139"> $3e^{-3t} + 4te^{-4t} - t^3$ </div> <div data-bbox="564 1238 700 2134"> $e^{-4t}(1 - 4t) \quad \cos(3t) + \sin(3t) \quad e^{-4t} \left(2t - \frac{5}{2}t^2\right)$ </div> <div data-bbox="748 1191 770 1216" data-label="Page-Footer"> <p>13</p> </div>	<div data-bbox="49 896 79 1041">Ejercicios</div> <div data-bbox="87 813 186 985"> $\frac{1}{s^2 + 4s + 4}$ </div> <div data-bbox="221 492 341 990"> $s \quad \frac{15}{s^2 + 4s + 13}$ </div> <div data-bbox="363 147 461 990"> $\frac{s + 3}{s^2 + 2s + 1} \quad \frac{3s + 1}{s^2 + 6s + 13}$ </div> <div data-bbox="497 147 738 990"> $\frac{1}{s^2 - 4s + 8} \quad \frac{s}{s^2 + 6s + 13} \quad \frac{s + 1}{s^2 + 6s + 25}$ </div> <div data-bbox="748 82 770 109" data-label="Page-Footer"> <p>14</p> </div>
<div data-bbox="842 1982 877 2150">Soluciones</div> <div data-bbox="909 1998 940 2087"> $t e^{-2t}$ </div> <div data-bbox="924 1624 963 1816"> $5e^{-2t} \sin(3t)$ </div> <div data-bbox="1015 1917 1061 2089"> $e^{-2t}(1 - 2t)$ </div> <div data-bbox="1027 1460 1066 1825"> $e^{-2t}[3\cos(3t) - 2\sin(3t)]$ </div> <div data-bbox="1145 1919 1190 2089"> $(1 + 2t)e^{-t}$ </div> <div data-bbox="1121 1485 1203 1825"> $e^{-3t}[\cos(2t) - \frac{3}{2}\sin(2t)]$ </div> <div data-bbox="1254 1899 1343 2089"> $\frac{1}{3}\sin(3t)e^{-t}$ </div> <div data-bbox="1249 1214 1324 1563"> $e^{2t}[2\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)]$ </div> <div data-bbox="1423 1886 1516 2101"> $\frac{1}{2}\sin(2t)e^{2t}$ </div> <div data-bbox="1377 1216 1532 1561"> $e^{-3t}[3\cos(2t) - 4\sin(2t)]$ $e^{-3t}[\cos(4t) - \frac{1}{2}\sin(4t)]$ </div> <div data-bbox="1546 1191 1568 1216" data-label="Page-Footer"> <p>15</p> </div>	<div data-bbox="847 896 877 1041">Ejercicios</div> <div data-bbox="925 797 1040 985"> $\frac{2}{s^2 - 3s + 2}$ </div> <div data-bbox="1077 801 1190 985"> $\frac{1}{s^2 - 5s + 6}$ </div> <div data-bbox="1243 779 1369 985"> $\frac{2s}{s^2 - 4s + 3}$ </div> <div data-bbox="1423 792 1543 985"> $\frac{2s - 5}{s^2 - 5s + 4}$ </div> <div data-bbox="847 103 914 743"> <div data-bbox="847 103 877 743">Cálculo de la transformada inversa de Laplace</div> <div data-bbox="890 253 914 351">— $b^2 > 4c$</div> </div> <div data-bbox="991 291 1015 423">Soluciones:</div> <div data-bbox="1037 203 1093 423"> $2e^{2t} - 2e^t$ </div> <div data-bbox="1168 232 1232 423"> $e^{3t} - e^{2t}$ </div> <div data-bbox="1307 181 1374 423"> $-e^t + 3e^{3t}$ </div> <div data-bbox="1444 230 1505 423"> $e^t + e^{4t}$ </div> <div data-bbox="1546 82 1568 109" data-label="Page-Footer"> <p>16</p> </div>

<div>Más ejercicios</div> <div>Obtener las soluciones de la derecha</div> <div> <div> <div> <div>7 t² e^{3t} + 9 sen(4 t) e^{-5t}</div> <div> <div>2 s-1</div> <div>s²-2 s+1</div> </div> </div> <div> <div>6 s-4</div> <div>s²-4 s+20</div> </div> </div> <div> <div> <div>1</div> <div>s³(s²+1)</div> </div> <div> <div> <div> <div>2 e^t + t e^t</div> <div>2 e^{2t}[3 cos(4 t) + sen(4 t)]</div> </div> <div> <div> <div>t²</div> <div>-1 + $\frac{t}{2}$ + cos(t)</div> </div> </div> </div> </div></div></div>	<div>Ejercicios</div> <div>Resolución de ecuaciones diferenciales</div> <div> <div>Soluciones:</div> <div> <div>y' = e^{2t} ; y(0) = $\frac{1}{2}$</div> <div>y = 2 e^t - 3</div> </div> <div> <div>y' + y = e^{2t} ; y(0) = 0</div> <div>y = $-\frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}$</div> </div> <div> <div>y' - y = e^{-t} ; y(0) = 1</div> <div>y = $\frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$</div> </div> <div> <div>y' = e^t ; y(0) = 2</div> <div>y = e^t + 1</div> </div> </div>	<div>17</div> <div>18</div>
<div>Ejercicios</div> <div>Resolución de ecuaciones diferenciales</div> <div> <div>Soluciones:</div> <div> <div>y'' + a² y = 0 ; y(0) = 1 y'(0) = 0</div> <div>y = cos(at)</div> </div> <div> <div>y'' + a² y = 0 ; y(0) = 0 y'(0) = a</div> <div>y = sen(at)</div> </div> <div> <div>y'' + y = e^{-t} ; y(0) = y'(0) = 0</div> <div>y = $\frac{1}{2}[\text{sen}(t) - \text{cos}(t) + e^{-t}]$</div> </div> <div> <div>y'' - 3 y' + 2 y = e^{3t} ; y(0) = y'(0) = 0</div> <div>y = $\frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$</div> </div> <div> <div>y'' - 2 y' = -4 ; y(0) = 0 y'(0) = 4</div> <div>y(t) = e^{2t} + 2 t - 1</div> </div> <div> <div>y'' + y' - 2 y = -4 ; y(0) = 2 y'(0) = 3</div> <div>y = 2 + e^t - e^{-2t}</div> </div> </div>	<div>Ejercicios</div> <div>Resolución de ecuaciones diferenciales</div> <div> <div>Soluciones:</div> <div> <div>y'' + y = 1 ; y(0) = 2 y'(0) = 0</div> <div>y(t) = 1 + cos(t)</div> </div> <div> <div>y'' + 2 y' + y = 3 t e^{-t} ; y(0) = 4 y'(0) = 2</div> <div>y(t) = $\frac{1}{2}t^3 e^{-t} + 4 e^{-t} + 6 t e^{-t}$</div> </div> </div>	<div>19</div> <div>20</div>

Transformada de Laplace



FFT

Granada granada.net78.net

24-X-2011
S.O.: Win95
Res.: 800x600
Col.: 16bit

FIN