TEMA 1

Conjuntos, aplicaciones y relaciones.

Ejercicio 1. Dados los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, d, e, f, g\} \\ B &= \{e, f, g, h, i, j\} \\ C &= \{a, e, i, o, u\} \end{aligned}$$

Describe explícitamente los siguientes conjuntos:

$$A \cup B \cup C, A \cap B \cap C, A \setminus B, A \setminus (B \cup C), (A \cap B) \cup C, C \cap (A \setminus B).$$

Ejercicio 2. Dado el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y los subconjuntos $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{6, 7, 9\}$, $C = \{3, 8\}$, $P = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y $T = \{0, 3, 6, 9\}$. calcula los siguientes subconjuntos de X:

$$[\overline{(A \cap (B \cup A)) \cup C}];\ P \cup T;\ P \cap T;\ \overline{P};\ \overline{T};\ \overline{P} \cap T;\ P \cap \overline{T};\ \overline{\overline{P} \cap T}.$$

Calcula también los siguientes subconjuntos de $X \times X$:

$$\begin{gathered} P \times T;\ \overline{P} \times \overline{P};\ \overline{P} \times \overline{T};\ \overline{P \times T};\ \overline{P} \times T; \\ (P \times \overline{T}) \cap (P \times \overline{P});\ (P \cap T) \times (\overline{P} \cap \overline{T}). \end{gathered}$$

Ejercicio 3. Da un ejemplo de conjuntos X_1, X_2, Y_1, Y_2 verificando

$$(X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2) \neq (X_1 \cup X_2) \times (Y_1 \cup Y_2)$$

Ejercicio 4. Sea X un conjunto. En $\mathcal{P}(X)$ tenemos definida la operación **diferencia simétrica**

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Demuestra que para cualesquiera $A, B, C \subset X$ se tiene:

1. $A \Delta B = B \Delta A$.
2. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
3. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
4. $A \Delta A = \emptyset$.
5. $A \Delta \emptyset = A$.
6. $A \Delta X = \overline{A}$.
7. $A \Delta \overline{A} = X$.
8. $\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Ejercicio 5. Estudia si las siguientes identidades son verdaderas o falsas:

1. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,
2. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$,
3. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$,
4. $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$,
5. $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$,
6. $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$.
7. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
8. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Ejercicio 6. Dado un conjunto X no vacío, y $A, B \subseteq X$, se define la aplicación $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ por la fórmula

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin A \\ 1 \text{ si } x \in A \end{cases}$$

Prueba que:

1. $\chi_A = \chi_B$ si, y sólo si, $A = B$.
2. $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$.
3. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.
4. $\chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B$.
5. $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$.

Ejercicio 7. Sean A, B, C tres conjuntos. Demuestra que

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B \subseteq A \cap C \\ A \cup B \subseteq A \cup C \end{array}\right\} \Longrightarrow B \subseteq C$$

Ejercicio 8. Sean X e Y dos conjuntos. Sean A, B subconjuntos de X y C, D subconjuntos de Y. Demuestra que:

1. $(A \cap B) \times C = A \times C \cap B \times C$.
2. $(A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C$.
3. $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
4. $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$. Da un ejemplo que muestre que en general no se da la igualdad.
5. $(A \times C) \setminus (B \times D) = (A \times (C \setminus D)) \cup ((A \setminus B) \times C)$.

Ejercicio 9. Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = n + 1$.
2. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = |x| + 1$.
3. $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{3x+2}{4}$
4. $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2^x 3^y$

5. $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f(x, y) = 2^x(2y + 1)$

6. $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x, y) = 2x + 3y$

7. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n + (-1)^n$

8. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(n) = \frac{n}{2n+1}$

9. $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(x, y) = (x - 1, x + y + 1)$

Ejercicio 10. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y sea $f : X \to X$ la aplicación que cumple que $f(x)$ es el resto obtenido al dividir $3x + 5$ entre 8. ¿Es f inyectiva?, ¿sobreyectiva?, ¿biyectiva?.

Ejercicio 11. Dada la aplicación $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ definida por $f(n) = n^2$, demuestra que tiene más de una inversa por la izquierda, y ninguna inversa por la derecha. Calcula dos inversas por la izquierda.

Ejercicio 12. Sean $X = \{0, 1, \dots, 4\}$, $Y = \{0, 1, \dots, 9\}$ y $Z = \{0, 1, \dots, 9\}$. Sea $f : X \to Y$ la aplicación que cumple que $f(x)$ es el resto obtenido al dividir x^2 entre 10, y sea $g : Y \to Z$ la aplicación que cumple que $g(x)$ es el resto obtenido al dividir $9x - x^2$ entre 10. ¿Es f inyectiva?, ¿es g inyectiva?, ¿es $g \circ f$ inyectiva?.

Ejercicio 13. Calcula $g \circ f$ y $f \circ g$ cuando sea posible para cada uno de los siguientes pares de aplicaciones:

1. $\begin{array}{c} \mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{c} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{array}$

2. $\begin{array}{c} \mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{Q} \\ x \mapsto \frac{3x+2}{4} \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{c} \mathbb{Q} \xrightarrow{g} \mathbb{Q} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \cup \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & +\sqrt{x} \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

Ejercicio 14. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación $f(x) = 2x + 3$. Calcula, si existe, una aplicación $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(x) = 16x^2 - 1$.

Ejercicio 15. Sean f y g dos aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces

a) f puede ser la aplicación $f(x) = x + \sqrt{2}$

b) g puede ser la aplicación $g(x) = x^2$

c) f no es inyectiva

d) $(f \circ g)(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 16. Estudia en que casos existe una aplicación satisfaciendo las condiciones que se exigen:

1. $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4$, $f([x]_8) = [x]_4$.

2. $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8$, $f([x]_4) = [x]_8$.

3. $f : \mathbb{Z}_8/R_g \to \mathbb{Z}_4$, $f(\overline{[x]_8}) = [x]_4$, donde $g : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$ verifica $g([x]_8) = [x]_8^2$.

4. $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_8$, $f([x]_4) = [x^2]_8$.

5. $f : \mathbb{Z}_8/R_g \to \mathbb{Z}_2$, $f(\overline{[x]_8}) = [x]_2$ y g es la misma aplicación del apartado 3.

6. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $f(\frac{a}{b}) = a + b$.

7. $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f([x]_5) = [E(\frac{x}{2})]_5$, donde E es la función *parte entera.*

8. $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6$, $f([x]_3) = [x^2]_6$.

Ejercicio 17. ¿Cuál de las siguientes reglas define una aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?

(a) $f(n) = n^2 - 1$.

(b) $f(n) = n^2 - 60n + 800$.

(c) $f(n) = \frac{n^3+6n^2+8n}{3}$.

(d) $f(n) = \frac{n^3+5n^2+6n}{6}$.

Justifica los cuatro casos.

Ejercicio 18. Dados los conjuntos A y B tales que $|A \times B| = 112$ y $|\mathcal{P}(A)| = 256$, entonces $|B|$ vale

a) 12 b) 17 c) 9 d) 14

Ejercicio 19. Sean A y B dos conjuntos tales que $|A| = 8$ y $|B| = 9$. De los siguientes cuatro conjuntos, ¿cuál tiene cardinal distinto de los restantes?

a) $\mathcal{P}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$

b) El conjunto de todas las aplicaciones de A en $\mathcal{P}(\mathcal{B})$

c) $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \times \mathcal{P}(\mathcal{B})$

d) El conjunto de todas las aplicaciones de B en $\mathcal{P}(\mathcal{A})$

Ejercicio 20. Sean los conjuntos $A = \{2k|k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}\}$ y $B = \{2k+1|k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}\}$ Entonces el cardinal del conjunto

$$((\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})) \setminus (A \times B)$$

es

a) infinito b) 4 c) 9 d) 6

Ejercicio 21. Sea X un conjunto con 7 elementos y A un subconjunto de X tal que $\emptyset \neq A \neq X$. Entonces el cardinal del conjunto $\mathcal{P}(A \times \overline{A})$ **no** puede ser:

a) 2^6 b) 2^7 c) 2^{10} d) 2^{12}

Ejercicio 22. En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales definimos la siguiente relación:

$$xRy \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

1. Prueba que R es una relación de equivalencia.

2. Describe el conjunto cociente $\mathbb{R}/R$.

Ejercicio 23. Sea $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y $P = \{2,3,5,7\}$. En $\mathcal{P}(X)$ definimos la relación de equivalencia

$$A\ R\ B \text{ si, y sólo si, } A \setminus P = B \setminus P$$

Describe el conjunto cociente.

Ejercicio 24. Sea $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. En $X \times X$ definimos la relación:

$$(a, b)R(c, d) \text{ si } |a| + |b| = |c| + |d|.$$

¿Es una relación de equivalencia? En caso afirmativo calcula el cardinal del conjunto cociente.

Ejercicio 25. Sea $X = \big\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\big\}$. Para cada $A \subseteq X$ llamamos ΣA a la suma de los elementos de A, es decir, $\Sigma\big\{-3, -2, 0, 4\big\} = -1$ por ejemplo. Convenimos también que $\Sigma\varnothing = 0$. Sea R la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$ definida por $A\ R\ B$ si y sólo si $\Sigma A = \Sigma B$.

1. Prueba que R es una relación de equivalencia.
2. Describe el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R$.

Ejercicio 26. Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea R la siguiente relación sobre X

$$xRy \iff x + y \leq 6.$$

1. Describe explícitamente el conjunto $R \subseteq X \times X$ que define la relación binaria.
2. ¿Es R una relación reflexiva?, ¿es R una relación simétrica?, ¿es R una relación antisimétrica?, ¿es R una relación transitiva?

Ejercicio 27. En $\mathbb{Z}$ definimos la relación de equivalencia xRy si $9 \mid (x^2 - y^2)$. Describe $\mathbb{Z}/R$.

Ejercicio 28. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros definimos la siguiente relación:

$$x\,R\,y \Leftrightarrow \text{ el valor absoluto de } x^2 - y^2 \text{ no es un número primo}$$

a) no es reflexiva

b) es relación de equivalencia

c) no es transitiva

d) no es simétrica

Ejercicio 29. Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $S = \{a, c, e\}$. Definimos en $\mathcal{P}(X)$ la relación R_S como sigue:

$$A\ R_S\ B \text{ si, y sólo si, } A\Delta B \subseteq S$$

1. Demuestra que R_S es una relación de equivalencia.
2. Describe las clases de equivalencia de $\emptyset$ y de $\{b\}$.
3. Comprueba que para cualquier $A \in \mathcal{P}(X)$, hay una biyección entre $[A]$ y $\mathcal{P}(S)$.
4. Describe el conjunto cociente $\mathcal{P}(X)/R_S$.
5. Da una biyección entre $\mathcal{P}(X \setminus S)$ y $\mathcal{P}(X)/R_S$.

Ejercicio 30. Dibuja el diagrama de Hasse de $(D(20), |)$.

1. Dado $B = \{4, 10, 2\}$, encuentra sus elementos notables.
2. Encuentra los elementos minimales de $B = D(20) \setminus \{1\}$.

Ejercicio 31. Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Dibuja el diagrama de Hasse de $\mathcal{P}(X)$. Encuentra los elementos minimales y maximales de $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing, X\}$.

Ejercicio 32. Definimos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ las siguientes relaciones binarias:

- $(a, b) \leq_1 (c, d)$ si $(3a+1)2^b \leq (3c+1)2^d$.
- $(a, b) \leq_2 (c, d)$ si $(2a+1)2^b \leq (2c+1)2^d$.
- $(a, b) \leq_3 (c, d)$ si $(2a+1)2^d \leq (2c+1)2^b$.

1. Estudia cual o cuales de las relaciones anteriores es una relación de orden.
2. Estudia cual o cuales de las relaciones anteriores es una relación de orden total.
3. En los casos en que la relación sea un orden, di cómo están ordenados los siguientes conjuntos.

   a) $\{(0,0),\ (1,0),\ (2,0),\ \cdots, (n,0)\}$.
   b) $\{(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ \cdots, (0,n)\}$.
   c) $\{(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ \cdots, (n,n)\}$.

Ejercicio 33. Sean p y q dos números primos distintos. Dibuja el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados: $(D(p^2), |)$, $(D(p^3), |)$, $(D(p \cdot q), |)$, $(D(p^2 \cdot q), |)$, $(D(p^2 \cdot q^2), |)$.

Ejercicio 34. Sean p y q dos números primos distintos, como en el ejercicio anterior. Dibuja el diagrama de Hasse de cada uno de los siguientes conjuntos ordenados: $D(p) \times D(q)$, $D(p^2) \times D(q)$, $D(p^2) \times D(q^2)$ (en cada caso estamos considerando el orden producto).

Compara estos diagramas con los obtenidos en el ejercicio anterior.

Dibuja también los diagramas de Hasse de los anteriores conjuntos ordenados considerando el orden lexicográfico.

Ejercicio 35. Consideramos el conjunto ordenado $D(24) \times D(72)$. Para cada uno de los conjuntos siguientes, indica cuáles serían los elementos distinguidos (máximo, maximales, cotas superiores, etc.)

a) $\{(x, x) : x \in D(24)\}$.

b) $\{(2,1), (12,9), (8,6), (6,12)\}$.

c) $\left\{(x, \frac{72}{x}) : x \in D(24)\right\}$.

d) $\{(x, 3x) : x \in D(24)\}$.

Ejercicio 36. Consideramos en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el orden producto. Para cada uno de los siguientes subconjuntos, halla el máximo, el mínimo, las cotas superiores, las cotas inferiores, el supremo, el ínfimo, los elementos maximales y los elementos minimales.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

b) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$.

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 5\}$.

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{x, y\} \leq 3\}$.

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y \leq 5\}$.

Ejercicio 37. Sea $A = \{(1,2);\ (4,3);\ (3,5);\ (2,7);\ (4,8);\ (6,9);\ (6,7);\ (5,9)\} \subseteq \mathbb{N}^2$. Consideramos en A el orden inducido por el orden producto en $\mathbb{N}^2$, y el orden inducido por el orden lexicográfico.

Calcula las cotas inferiores, elementos minimales, ínfimo, mínimo, supremo, elementos maximales y máximo en ambos casos.

Ejercicio 38. Sea $\emptyset \neq X$ un conjunto y $f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ una aplicación de conjuntos. Definimos en X la siguiente relación binaria $x \leq_f y$ si y sólo si $f(x_1) \leq f(x_2)$.

1. ¿Qué propiedad debe verificar f para que $\leq_f$ sea una relación de orden total?
2. En el caso particular de $X = \mathbb{N}^2$ demuestra que para la función $f(a, b) = 2^a 3^b$, $\leq_f$ es un orden total.