Cálculo

Segundo Parcial
Curso 2016/2017

1. *a*) **(2 puntos)** Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \arctan(t^2)\,dt}{\sqrt{x}\,\operatorname{sen}(x)}$.

   b) **(1.5 puntos)** Calcula $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$.

Solución:

a) Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que la función $(f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \arctan(t^2)\,dt)$ es continua y derivable ya que el integrando, $f(t) = \arctan(t^2)$, es una función continua. Además, gracias también al Teorema Fundamental del Cálculo, podemos calcular la derivada de f :

$$f'(x) = \arctan(x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\arctan(x)}{2\sqrt{x}}$$

Si calculamos el límite en cero del numerador, es decir, de f:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \int_0^0 \arctan(t^2)\,dt = 0$$

Estamos ante una indeterminación del tipo “$0/0$” . Por tanto, aplicando la regla de L’Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\arctan(x)}{2\sqrt{x}}}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{\operatorname{sen}(x) + 2x\cos(x)} \,.$$

Vuelve a presentarse una indeterminación del tipo “$0/0$” , por lo que volvemos a aplicar la regla de L’Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos(x) + 2\,\cos(x) - 2x\,\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x^2)(3\cos(x) - 2x\,\operatorname{sen}(x))}$$

Concluimos entonces que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \arctan(t^2)\,dt}{\sqrt{x}\,\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{3}$$

b) Se trata de una integral de tipo trigonométrico, donde el integrando es una función racional en $\operatorname{sen}(x)$, y es par. Por tanto, aplicamos el cambio de variable adecuado a este tipo de integrandos. Esto es, $t = \tan(x)$:

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \begin{bmatrix} t = \tan(x) \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen}(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{bmatrix}$$
$$= \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\,\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{1+2t^2}\,dt$$

Para resolver esta última integral, que es inmediata, seguimos así:

$$\int \frac{1}{1+2t^2}\,dt = \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}t)^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}t)^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan(x)) + C$$

Calculamos ya la integral que nos piden:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan(x))\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan(x)) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

2. **(2 puntos)** Comprueba que la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$x_1 = 1/2\ ,$$
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+1}{2}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

es convergente y calcula su límite, si existe.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \frac{\frac{1}{4}+1}{2} = \frac{5}{8} > x_1 = 1/2$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, comprobamos por inducción que $x_n \leq x_{n+1}$,$\forall n \in \mathbb{N}$:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 \leq x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq x_{n+1}$.

- Comprobamos que $x_{n+1} \leq x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} x_n \leq x_{n+1} \;&\Rightarrow\; {x_n}^2 \leq {x_{n+1}}^2 \text{ (es cierto ya que los números son positivos)} \\ &\Rightarrow\; {x_n}^2 + 1 \leq {x_{n+1}}^2 + 1 \\ &\Rightarrow\; \frac{{x_n}^2+1}{2} \leq \frac{{x_{n+1}}^2+1}{2} \\ &\Rightarrow\; x_{n+1} \leq x_{n+2} \;. \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por el $x_1 = 1/2$. Veamos que está acotada superiormente por 1. Esto es, que $x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nuevamente lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 1/2 \leq 1$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 1$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 1$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} x_n \leq 1 \;\Rightarrow\; x_n^2 \leq 1 \;\Rightarrow\; x_n^2 + 1 \leq 2 \\ \Rightarrow\; \frac{x_n^2+1}{2} \leq \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \quad x_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

b) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \frac{x^2+1}{2}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{x^2+1}{2} \;\Rightarrow\; 2x = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x + 1 = 0 \;\Rightarrow (x-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1 \;.$$

Por tanto, $\lim\{x_n\} = 1$.

3. **(3 puntos)** Estudia la convergencia de las series:

   a) $\displaystyle\sum \frac{3^n (n+1)!}{n^n}$.

   b) $\displaystyle\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

   a) Aplicamos el criterio del cociente. Así, si llamamos $a_n = \frac{3^n(n+1)!}{n^n}$ tenemos que estudiar el límite del cociente siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}\,(n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \, \frac{(n)^n}{3^n\,(n+1)!} = \frac{3\,(n+2)}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 3 \cdot (1/e) = \frac{3}{e} > 1$$

de lo que se deduce que la serie es no convergente.

b) Aplicamos ahora el criterio de comparación por paso al límite. Si recordamos el límite $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$, este límite nos motiva el comparar con la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$. De hecho,

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\to\log(e)=1\neq 0\,.$$

Por tanto, utilizando el criterio de comparación, ambas series tienen el mismo carácter, es decir, ambas son no convergentes.

4. **(1.5 puntos)** Calcula la suma de la serie siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}-3^n}{6^{n+1}}\,.$$

Solución: La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+2}-3^n}{6^{n+1}}=\frac{1}{6}\left(\sum_{n\geq 1}\left(\frac{-1}{6}\right)^n-\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{6}\right)^n\right)=\frac{1}{6}\left(\sum_{n\geq 1}\left(\frac{-1}{6}\right)^n-\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{6}|<1$ y $|\frac{1}{2}|<1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente por ser el producto de una constante $(1/6)$ por la suma de dos series convergentes. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}\right)$, nos queda:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}-3^n}{6^{n+1}} &= \frac{1}{6}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{6}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\\
&= \frac{1}{6}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{6}\right)^n-1\right)-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)\right]\\
&= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{1-\frac{-1}{6}}-1\right)-\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right)\right]\\
&= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{1+\frac{1}{6}}-1\right)-\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}-1\right)\right]=\frac{1}{6}\left[\frac{6}{7}-1-2+1\right]\\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{-8}{7}\right]=\frac{-8}{42}=\frac{-4}{21}
\end{aligned}$$

Granada, 20 de enero de 2017