TOPOLOGÍA I. Examen del Tema 3
– Grado en Matemáticas –
Curso 2011/12

<u>**Nombre:**</u>

Razonar todas las respuestas

1. Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas.
   (a) $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.
   (b) En un espacio (X, τ), si $A \subset X$ es conexo, también lo es $\overset{\circ}{A}$.
2. En la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, \tau_S)$, estudiar si $[0, 1]$ es conexo y si es compacto.
3. Sea $(\mathbb{N}, \tau = \{A_n; n \in \mathbb{N}\}) \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, con $A_n = \{1, \ldots, n\}$. Estudiar qué subconjuntos son conexos y cuáles son compactos.
4. Sea $O = (0, 0)$, $p_n = (1, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ y $X = \{(1, 0)\} \cup_{n=1}^{\infty} [O, p_n]$. Estudiar si es conexo y si es compacto.

Soluciones

1. (a) No son homeomorfos. Supongamos que f es un homeomorfismo entre $X = (\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{R})$ e $Y=\mathbb{R}^2$. Entonces $f: X-\{(0,0)\}\to Y-\{f(0,0)\}$ es un homeomorfismo. Sin embargo el dominio no es conexo pues

$$\{(X-\{(0,0)\})\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x+y>0\}, (X-\{(0,0)\})\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x+y<0\}\}$$

es una partición no trivial del espacio. Por otro lado, $Y-\{f(0,0)\}$ es conexo (es homeomorfo a $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$, que lo es).

(b) No es cierto. En $\mathbb{R}^2$ consideramos $A=\overline{B_1(-1,0)}\cup\overline{B_1(1,0)}$. Este conjunto es conexo pues $B_1(\pm1,0)$ es un convexo, su adherencia es conexa y $\overline{B_1(-1,0)}\cap\overline{B_1(1,0)}=\{(0,0\}$. Sin embargo $\mathring{A}=B_1(-1,0)\cup B_1(1,0)$, que no es conexo pues

$$\mathring{A}=(\mathring{A}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x>0\})\cup(\mathring{A}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x<0\})$$

es una partición por abiertos no trivial.

2. El conjunto $[0,1]$ no es conexo, pues $[0,1]=[0,1/2)\cup[1/2,1]$ es una partición no trivial por abiertos (el conjunto $[1/2,1]$ es abierto en $[0,1]$ pues $[1/2,1]=[1/2,\infty)\cap[0,1]$).

El conjunto $[0,1]$ no es compacto, pues

$$[0,1]\subset\cup_{n\in\mathbb{N}}[0,1-\frac{1}{n})\cup[1,2)$$

y si hubiera un subrecubrimiento finito (en el cual necesariamente estaría a $[1,2)$ pues es el único abierto que contiene a $x=1$), se tendría

$$[0,1]\subset\cup_{i=1}^m[0,1-\frac{1}{n_i})\cup[1,2)=[0,1-\frac{1}{k})\cup[1,2)\quad k=\max\{n_i; 1\leq i\leq m\}$$

lo cual no es posible.

3. Todo subconjunto B de $\mathbb{N}$ es conexo. Sea $m=\min(B)$ (que siempre existe). Como $A_n\cap B$ es vacío o contiene a m, entonces dos abiertos relativos de B y no triviales siempre se intersecan, probando que B es conexo.

Tomamos $B\subset\cup_n A_n$. Si el espacio es compacto, existe un subrecubrimiento finito: $B\subset A_{n_1}\cup\ldots\cup A_{n_m}$, pero la unión de la izquierda es A_k, con $k=\max\{n_i; 1\leq i\leq m\}$. En particular, B es finito. Y como todo conjunto finito es compacto, se tiene que los únicos compactos de $\mathbb{N}$ son los conjuntos finitos.

4. Cada segmento es conexo y la intersección de todos es O. Por tanto $\cup_{n=1}^{\infty}[O, p_n]$ es conexo. Por otro lado, $(1,0) \in \overline{\cup_{n=1}^{\infty}[O, p_n]}$ pues $p_n \to (1,0)$. Como al añadir puntos adherentes a un conjunto conexo sigue siendo conexo, nuestro espacio es conexo.

   El conjunto no es cerrado, luego no es compacto (es evidente que el espacio está acotado: $|p| \leq 2$, para todo $p \in X$). Concretamente, $\overline{X} = X \cup ([O, (1,0)]$. Ya que sólo hay que probar que no es cerrado, observemos que $(\frac{1}{2}, 0)$ es adherente ya que si llamamos $q_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}) \in [O, p_n]$, entonces $q_n \to (\frac{1}{2}, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 0) \notin X$.