Prueba de clase 31 de Marzo de 2014

Alumno:______________________________ **D.N.I.:**______________

Ejercicio 1. *Sean* $X = \{0, a, b, 1\}$ *e* $Y = \{0, x, y, 1\}$ *dos conjuntos. Definimos las siguientes operaciones en* X *y en* Y*:*

- *En* X*:*

$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

- *En* Y*:*

$\vee$	0	x	y	1
0	0	x	y	1
x	x	x	y	1
y	y	y	y	1
1	1	1	1	1

$\wedge$	0	x	y	1
0	0	0	0	0
x	0	x	x	x
y	0	x	y	y
1	0	x	y	1

Estudia cual o cuales de los conjuntos X *e* Y*, con las operaciones dadas, es un álgebra de Boole.*

Solución:

Comprobamos en primer lugar que X es un álgebra de Boole. Para esto tomamos el álgebra de Boole $\mathbb{B}^2$, y renombramos sus elementos como sigue:

$$(0,0) \mapsto \mathbf{0}, \qquad (1,0) \mapsto \mathbf{a}, \qquad (0,1) \mapsto \mathbf{b}, \qquad (1,1) \mapsto \mathbf{1}.$$

Con estos cambios, escribimos las tablas de las operaciones $\vee$ y $\wedge$ en $\mathbb{B}^2$:

$\vee$	**0**	**a**	**b**	**1**
0	**0**	**a**	**b**	**1**
a	**a**	**a**	**1**	**1**
b	**b**	**1**	**b**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

$\wedge$	**0**	**a**	**b**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**0**
a	**0**	**a**	**0**	**a**
b	**0**	**0**	**b**	**b**
1	**0**	**a**	**b**	**1**

Y vemos que se corresponde con las operaciones del conjunto X. Por tanto, X es un álgebra de Boole.

Sin embargo, Y no es un álgebra de Boole. De serlo, todo elemento tendría complemento, y el elemento x no tiene. Si tuviera complemento, éste sería un elemento $z \in Y$ tal que $x \vee z = 1$ y $x \wedge z = 0$. Pero no hay ningún elemento que cumpla ambas cosas simultáneamente.

Por tanto, Y no es un álgebra de Boole.

También podríamos haberlo visto calculando los átomos de Y. El único átomo es x (y no es átomo pues $y \geq x$, ya que $x \wedge y = x$). De ser un álgebra de Boole, tendría $2^1 = 2$ elementos, y no 4 como tiene.

Ejercicio 2. *Sea* $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ *la función booleana*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x + \overline{x}\,y & si\ z = 0 \\ \overline{x} + y & si\ z = 1 \end{cases}$$

Escribe la función f *con una sola fórmula y usando únicamente los operadores* suma *y* complementario.

Solución: Elaboramos la tabla de la función f y con ella hacemos un diagrama de Karnaugh.

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}$		1	1	1
z	1	1	1	

Por lo que $f(x,y,z) = y + \overline{x}\,z + x\,\overline{z}$. Ahora sólo nos falta sustituir los dos productos que tenemos por otras expresiones donde solo intervengan la suma y el complementario. Tenemos que $\overline{x}\,z = \overline{\overline{\overline{x}\,z}} = \overline{x + \overline{z}}$ mientras que $x\,\overline{z} = \overline{\overline{x\,\overline{z}}} = \overline{\overline{x} + z}$ luego:

$$f(x,y,z) = y + \overline{x + \overline{z}} + \overline{\overline{x} + z}$$

También podría haberse obtenido una expresión de f como $f(x,y,z) = \overline{z}(x + \overline{x}\,y) + z(\overline{x} + y)$, pues

- Si $z = 0$ se tiene que $f(x,y,z) = f(x,y,0) = \overline{0}(x + \overline{x}\,y) + 0(\overline{x} + y) = x + \overline{x}\,y$.
- Si $z = 1$ tenemos que $f(x,y,z) = f(x,y,1) = \overline{1}(x + \overline{x}\,y) + 1(\overline{x} + y) = \overline{x} + y$.

Luego $f(x,y,z) = x\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,z + y\,z$ que podemos transformarla en:

$$f(x,y,z) = \overline{\overline{x} + z} + \overline{x + \overline{y} + z} + \overline{x + \overline{z}} + \overline{\overline{y} + \overline{z}}$$

Otra posibilidad habría sido calcular la forma canónica conjuntiva de f. En este caso, esa expresión es muy sencilla, ya que f es producto de dos maxterm. Concretamente, de M_0 y M_5. En tal caso:

$$f(x,y,z) = (x + y + z)(\overline{x} + y + \overline{z}) = \overline{\overline{(x + y + z)(\overline{x} + y + \overline{z})}} = \overline{\overline{x + y + z} + \overline{\overline{x} + y + \overline{z}}}$$

Ejercicio 3. *Sea $g : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función booeana dada por*

$$g(x,y,z,t) = \begin{cases} 0 & si\ z \leq t \\ x+\overline{y} & si\ z > t \end{cases}$$

Encuentra una expresión minimal de la función g como suma de productos.

Solución: Al igual que antes, calculamos la tabla de f. Luego aplicaremos el algoritmo de Quine-McCuskley

x	y	z	t	f(x,y,z,t)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

$\sim$ 1110	1−10
$\sim$ 1010	−010
$\sim$ 0010	

Nos quedan dos implicantes primos: $x\,z\,\overline{t}$ e $\overline{y}\,z\,\overline{t}$

	$\overline{x}\,\overline{y}\,z\,\overline{t}$	$x\,\overline{y}\,z\,\overline{t}$	$x\,y\,z\,\overline{t}$
$x\,z\,\overline{t}$		X	X
$\overline{y}\,z\,\overline{t}$	X	X	

Y vemos que los dos son necesarios para cubrir todos los minterm de f.

Por lo que la expresión optimizada de f es $f(x,y,z,t) = x\,z\,\overline{t} + \overline{y}\,z\,\overline{t}$.
También podemos obtener esta expresión mediante un diagrama de Karnaugh:

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}\,y$	$x\,y$	$x\,\overline{y}$
$\overline{z}\,\overline{t}$				
$\overline{z}\,t$				
$z\,t$				
$z\,\overline{t}$	1		1	1

Y nos da la misma expresión para f.
Por último, también se podría haber hecho tomando una expresión para la función booleana $(z,t) \mapsto z > t$, que podría ser $z\,\overline{t}$, en cuyo caso tendríamos:

$$f(x,y,z,t) = z\,\overline{t}(x+\overline{y}) = x\,z\,\overline{t} + \overline{y}\,z\,\overline{t}$$

Ejercicio 4. *Utiliza el algoritmo de Davis-Putnam para determinar si el siguiente conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible.*

$$\Sigma = \{a,\ \neg a \vee d \vee \neg e,\ a \vee d,\ \neg a \vee \neg b \vee d \vee e,\ a \vee c \vee d,\ \neg a \vee \neg d \vee e,\ \neg a \vee \neg d \vee \neg e,\ c \vee b \vee d\}$$

Solución:

$$\{a,\ \neg a \vee d \vee \neg e,\ a \vee d,\ \neg a \vee \neg b \vee d \vee e,\ a \vee c \vee d,\ \neg a \vee \neg d \vee e,\ \neg a \vee \neg d \vee \neg e,\ c \vee b \vee d\}$$

$$\Big| \lambda = a$$

$$\{d \vee \neg e,\ \neg b \vee d \vee e,\ \neg d \vee e,\ \neg d \vee \neg e,\ c \vee b \vee d\}$$

$$\Big| \lambda = c$$

$$\{d \vee \neg e,\ \neg b \vee d \vee e,\ \neg d \vee e,\ \neg d \vee \neg e\}$$

$$\Big| \lambda = \neg b$$

$$\{d \vee \neg e,\ \neg d \vee e,\ \neg d \vee \neg e\}$$

$$\begin{array}{ccc}
\lambda = d \swarrow & & \searrow \lambda = \neg d \\
\{e,\ \neg e\} & & \{\neg e\} \\
\lambda = e \Big| & & \Big| \lambda = \neg e \\
\{\square\} & & \emptyset
\end{array}$$

Puesto que hay una rama que llega al conjunto vacío, el conjunto de cláusulas es satisfacible. Además, para encontrar una interpretación que haga ciertas todas las cláusulas basta con recorrer esta rama, y buscar la interpretación que haga ciertas todos los literales que hemos ido utilizando en el desarrollo del algoritmo. Esta interpretación sería:

$$I(a) = 1; \qquad I(b) = 0; \qquad I(c) = 1; \qquad I(d) = 0; \qquad I(e) = 0.$$

Ejercicio 5. *De entre los siguientes problemas de consecuencia lógica ¿cuáles son ciertos?*

a) $\{a \to (b \wedge c)\} \vDash (\neg c \to a) \to (b \wedge a)$

b) $\{a \to (b \wedge c)\} \vDash (c \vee a) \to (b \vee a)$

c) $\{(a \vee \neg b) \to (b \wedge \neg c)\} \vDash (a \to c) \to b$

Solución:

a) Por el teorema de la deducción queda que este problema es equivalente a

$$\{a \to b \wedge c,\ \neg c \to a\} \vDash b \wedge a$$

Y ahora, esta implicación semántica es equivalente a comprobar que el conjunto

$$\{a \to b \wedge c,\ \neg c \to a,\ \neg(b \wedge a)\}$$

es insatisfacible. Calculamos la forma clausular de cada fórmula:

$$\begin{array}{rcl} a \to b \wedge c \equiv \neg a \vee (b \wedge c) & \equiv & (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \\ \neg c \to a & \equiv & c \vee a \\ \neg(b \wedge a) & \equiv & \neg b \vee \neg a \end{array}$$

con lo que nos queda que hay que comprobar la insatisfacibilidad del conjunto de cláusulas

$$\{\neg a \vee b,\ \neg a \vee c,\ a \vee c,\ \neg b \vee \neg a\}$$

Lo hacemos por el algoritmo de Davis-Putnam.

$$\begin{array}{c} \{\neg a \vee b,\ \neg a \vee c,\ a \vee c,\ \neg b \vee \neg a\} \\ \Big|\ \lambda = c \\ \{\neg a \vee b,\ \neg a \vee \neg b\} \\ \Big|\ \lambda = \neg a \\ \emptyset \end{array}$$

Al haber llegado al conjunto vacío, el conjunto de cláusulas es satisfacible (no es necesario calcular la otra rama). Por tanto, la implicación semántica es falsa.

b) Actuando igual que antes, el problema b) lo transformamos en comprobar que el conjunto de fórmulas

$$\{a \to b \wedge c,\ c \vee a,\ \neg(b \vee a)\}$$

es insatisfacible. La forma clausular de $\neg(b \vee a)$ es $\neg a \wedge \neg b$, y de la primera fórmula ya la hemos calculado. por tanto hemos de comprobar que el conjunto de cláusulas

$$\{\neg a \vee b,\ \neg a \vee c,\ c \vee a,\ \neg b,\ \neg a\}$$

es insatisfacible. Lo hacemos por el algoritmo de Davis-Putnam.

$$
\begin{array}{c}
\{\neg a \vee b,\ \neg a \vee c,\ c \vee a,\ \neg b,\ \neg a\} \\
\Big| \lambda = \neg a \\
\{c,\ \neg b\} \\
\Big| \lambda = \neg b \\
\{c\} \\
\Big| \lambda = c \\
\emptyset
\end{array}
$$

y como hemos llegado al conjunto vacío el conjunto es satisfacible. Por tanto, en este caso, la implicación semántica es falsa.

c) El problema que nos piden es equivalente a comprobar que el conjunto de fórmulas

$$\{(a \vee \neg b) \to (b \wedge \neg c),\ a \to c,\ \neg b\}$$

es insatisfacible.

Calculamos la forma clausular de la primera fórmula:

$$(a\vee\neg b) \to (b\wedge\neg c) \equiv \neg(a\vee\neg b)\vee(b\wedge\neg c) \equiv (\neg a\wedge b)\vee(b\wedge\neg c) \equiv (\neg a\vee b)\wedge(\neg a\vee\neg c)\wedge(b\vee b)\wedge(b\vee\neg c)$$

La forma clausular de la segunda es $\neg a \vee c$, luego lo que tenemos que probar es que es insatisfacible el siguiente conjunto de cláusulas

$$\{\neg a \vee b,\ \neg a \vee \neg c,\ b,\ b \vee \neg c,\ \neg a \vee c,\ \neg b\}$$

Vemos que tenemos las cláusulas b y $\neg b$. El conjunto es entonces insatisfacible, luego la implicación semántica es en este caso verdadera.