Examen de Análisis Matemático II

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

1. Elíjase y desarróllese uno de los siguientes Temas (4 puntos)

   Tema 1. Derivación y convergencia uniforme en sucesiones de funciones, series de funciones y series de potencias

   Tema 6. Teoremas de Fubini y Tonelli

2. (1.5 puntos) Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medible. Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles de Ω en $\mathbb{R}$ tal que, para cada natural n,

$$\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq f_n(\omega)\}) < \frac{1}{n^2}.$$

   Pruébese que $\{f_n\}$ converge a f c.p.d.

   [Indicación: Para cada natural n, considérese

$$A_n = \{f(\omega) \neq f_n(\omega)\} \quad \text{y} \quad B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

   Pruébese que si $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ entonces $\mu(B) = 0$ y que $\{f_n\}$ converge a f en B^c.]

3. (1.5 puntos) Calcula los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que existe

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^n e^{ax}\, dx .$$

4. (1.5 puntos) Probar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x}{1+e^x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2} .$$