ALUMNO:________________________________________ DNI:________________ GRUPO: C

# Lógica y Métodos Discretos

## Examen de Teoría

(12/09/2011)

1. Sea mul la función dada por:

$$\mathrm{mul}(a,0) = 0,$$
$$\mathrm{mul}(a,n) = \begin{cases} \mathrm{mul}\left(2a, \frac{n}{2}\right), & \text{si } n \text{ es par} \\ \mathrm{mul}\left(2a, \frac{n-1}{2}\right) + a, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

   *a*) Calcula $\mathrm{mul}(5,8)$, $\mathrm{mul}(7,10)$ y $\mathrm{mul}(10,13)$.

   *b*) Demuestra por inducción que $\mathrm{mul}(a,n) = a \cdot n$, para todo $a, n \in \mathbb{N}$.

2. Sea $u_n$ la sucesión definida por:

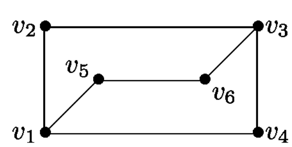
$$u_0 = 1$$
$$u_1 = 4$$
$$u_n = 4(u_{n-1} - u_{n-2}), \text{ si } n \geq 2$$

   Encuentra una expresión para el término general $u_n$ y calcula $u_{25}$.

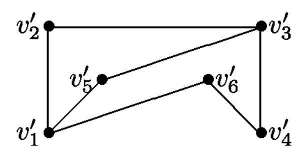
3. Un comité de tres personas toma decisiones por votos, votando sí o no a cada propuesta. Una propuesta prospera cuando recibe al menos dos de los tres votos. Da una función booleana de tres variables que valga 1 cuando, y sólo cuando, prospere la propuesta sobre la que se vota. Simplifica dicha función y diseña un circuito combinacional que la realice.

4. Sean $G$, $G'$, $H$ y $H'$ los grafos siguientes:

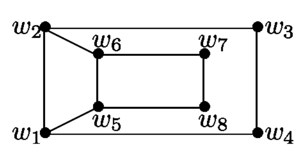
**G** :



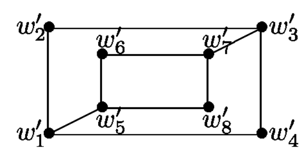

**G'** :




**H** :




**H'** :




   Estudia si los grafos $G$ y $G'$ son isomorfos, y si $H$ y $H'$ son isomorfos.

5. Consideremos todos los números de 0 a 9999 tal y como aparecen actualmente en las matrículas de los automóviles matriculados en España. Responde a las siguentes cuestiones:

   *a*) ¿En cuántos de ellos aparecen cuatro dígitos distintos?

   *b*) ¿En cuántos de ellos aparecen exactamente tres dígitos distintos?

   *c*) ¿En cuántos de ellos aparecen exactamente dos dígitos distintos?

6. Decide si el siguiente conjunto de fórmulas es o no satisfacible:

$$\{\neg a \vee a \vee c;\ b \vee c; \neg a \vee c \vee d \vee e;\ \neg e;\ a \vee \neg c \vee \neg d;\ \neg a \vee \neg d;\ c \vee \neg d;\ a \vee d;\ \neg c \vee d\}$$

   y caso de ser satisfacible, encuentra una valoración (interpretación) que lo satisfaga.

7. Dada la fórmula $\alpha = \forall x \exists y (P(x,y) \to P(y,x)) \to \exists x \exists y (P(y,x) \to \neg P(x,y))$, estudia si $\alpha$ es universalmente válida, es satisfacible y refutable o es una contradicción.

8. Considera las siguientes fórmulas:

   - $\varphi_1 = \exists x(Q(x) \wedge \forall y(P(y) \to R(x,y)))$
   - $\varphi_2 = \forall x(Q(x) \to \exists y(P(y) \wedge S(x,y))$
   - $\varphi_3 = \forall x(\exists y(S(x,y) \wedge R(x,y)) \to T(x))$
   - $\psi = \exists x(T(x) \wedge Q(x))$

   y, demuestra que:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi$$