

---

# Límites y continuidad

---

## 1 Límites elementales

**Ejercicio 1.** Calcular los siguientes límites

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{7x+4}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{2x^2+1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+4}{x-2}$

**Solución 1.**

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{7x+4} = \frac{1}{7}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{2x^2+1} = 0$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x+2 = 4$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+4}{x-2} = +\infty$

**Ejercicio 2.** Calcular los siguientes límites.

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{x-4} \right),$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{3x^3+2x^2+x},$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{|x-1|},$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|},$

**Solución 2.**

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{x-4} \right) = -\frac{1}{16}.$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{3x^3+2x^2+x} = 0.$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{|x-1|} = +\infty.$

d) No existe  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|}$  ya que los límites laterales no coinciden. Más concretamente,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{|x-1|} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x}},$$

que, dependiendo de por dónde nos acerquemos a 1 tiende a  $\frac{1}{2}$  o  $-\frac{1}{2}$ .

**Ejercicio 3.** Calcular los siguientes límites

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1-x} - 1}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+3}{\sqrt[3]{26+x}-3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$

**Solución 3.**

a) Multiplicamos y dividimos por el conjugado,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1.$$

b) Multiplicamos por los conjugados de numerador y denominador,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1-x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1-x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} \cdot \frac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1-x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = -1.$$

c) No hay ninguna indeterminación:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+3}{\sqrt[3]{26+x}-3} = \frac{3}{\sqrt[3]{26}-3}$ .

d) Multiplicamos y dividimos por el conjugado,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

**Ejercicio 4.** Calcular los siguientes límites

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2+x}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{|x-1|}$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x+6}{x^2-4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2-2^{1/x}}$   
 e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{1/x}+1}$

**Solución 4.**

a) Estudiamos los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x+1} = -1.$$

b) Calculamos los límites por la derecha y por la izquierda.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2.$$

c) El límite por la izquierda vale  $-\infty$  y el límite por la derecha  $+\infty$ .

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2-2^{1/x}} &= 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2-2^{1/x}} = \frac{1}{2}. \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{1/x}+1} &= 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{1/x}+1} = 1. \end{aligned}$$

## 2 Límites y continuidad

**Ejercicio 5.** Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[3]{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de  $f$  y  $g$  y la existencia de límites de  $f$  y  $g$  en  $+\infty$  y  $-\infty$ .

**Solución 5.**

a) En primer lugar estudiemos la continuidad de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

El carácter local de la continuidad nos da que  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^*$ . Veamos qué ocurre en el origen. Para ello estudiamos los límites laterales en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0, \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1.$$

Por tanto  $f$  no es continua en el origen. Por último

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}, \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{2}.$$

b) La función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[3]{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  por el carácter local. Veamos los límites laterales en 0 y 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

y, por tanto,  $g$  no puede ser continua en 0. Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{x} = 1 = g(1),$$

$g$  es continua en 1. Por último, los límites en infinito valen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0, \text{ y}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x} = +\infty.$$

**Ejercicio 6.** Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x^{\frac{1}{\log(x)-1}}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$ . Estudiar el comportamiento de  $f$  en 0,  $e$ ,  $+\infty$ .

**Solución 6.**

a) Veamos en primer lugar el comportamiento en 0:  $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\log(x)-1} = 0$ , por tanto tenemos una indeterminación del tipo  $0^0$ . Tomemos logaritmos para resolverla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log \left( x^{\frac{1}{\log(x)-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x)}{\log(x)-1} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = e^1 = e.$$

b) En  $e$  vamos a estudiar los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow e^-} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = "e^{-\infty}" = 0, \text{ y } \lim_{x \rightarrow e^+} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = "e^{+\infty}" = +\infty.$$

c) Por último, en  $+\infty$  de nuevo tomamos logaritmos para resolver la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left( x^{\frac{1}{\log(x)-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{\log(x)-1} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{\log(x)-1}} = e^1 = e.$$

**Ejercicio 7.** Sea  $f : ]0, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \left( \frac{1}{\tan(x)} \right)^{\sin(x)}$ . Probar que  $f$  tiene límite en los puntos 0 y  $\frac{\pi}{2}$  y calcular dichos límites.

**Solución 7.** En primer lugar, veamos el límite en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\tan(x)} \right)^{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)^{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)^{\sin(x)}}{\sin(x)^{\sin(x)}} = \frac{1}{1} = 1,$$

ya que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)^{\sin(x)} = 1$ , usando que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$ .

En  $\frac{\pi}{2}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\tan(x)} \right)^{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)^{\sin(x)}}{\sin(x)^{\sin(x)}} = \frac{0}{1} = 0.$$

**Ejercicio 8.** Sea  $f : ]0, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = (1 + \sin(x))^{\cotan(x)}$ . Estudiar la continuidad de  $f$  y su comportamiento en 0 y  $\pi/2$ .

**Solución 8.** La función  $f$  es continua en  $]0, \frac{\pi}{2}[$  ya que  $1 + \sin(x)$  es una función continua y positiva en dicho intervalo y,  $\cotan(x)$  también es una función continua en este intervalo.

Veamos el comportamiento en  $\frac{\pi}{2}$ :  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin(x))^{\cotan(x)} = 2^0 = 1$ .

En 0,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\cotan(x)} = "1^\infty"$  con lo que aplicamos la regla del número  $e$  para resolverlo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cotan(x)(1 + \sin(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\cotan(x)} = e.$$

**Ejercicio 9.** Estudiar el comportamiento en cero de las funciones  $f, g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x) = \arctan\left(\frac{7}{x}\right) - \arctan\left(\frac{-5}{x}\right), \quad g(x) = xf(x).$$

**Solución 9.** Comencemos con la función  $f$ . Dado que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7}{x} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-5}{x} = -\infty$ , se tiene que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$  y, análogamente,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$ . La función  $f$  está acotada (es suma de dos funciones acotadas) y, por tanto,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , por ser producto de algo que tiende a cero y algo acotado.

**Ejercicio 10.** Probar que existe un número real positivo  $x$  tal que  $\log(x) + \sqrt{x} = 0$ .

**Solución 10.** Consideremos la función  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = \log(x) + \sqrt{x}$ . La función  $f$  es continua y está definida en un intervalo. Además

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

Por tanto  $f$  cambia de signo y tiene que anularse en  $\mathbb{R}^+$ .

**Ejercicio 11.** Probar que la ecuación  $x + e^x + \arctan(x) = 0$  tiene una sola raíz real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

**Solución 11.** Consideremos  $f(x) = x + e^x + \arctan(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .  $f$  es una función continua definida en un intervalo, además  $f(-1) < 0 < f(0)$  y por tanto  $f$  se anula en el intervalo  $] -1, 0[$ . Para comprobar que sólo se anula en un punto basta observar que  $f$  es una función estrictamente creciente, en particular inyectiva, por ser suma de tres funciones estrictamente crecientes.

**Ejercicio 12.** Determinar la imagen de la función  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \arctan(\log |x|)$ .

**Solución 12.** Como la función es par,  $f(x) = f(-x)$ , se tiene que  $f(\mathbb{R}^*) = f(\mathbb{R}^+)$ . En este caso,  $f$  es la composición de la función arcotangente y la función logaritmo neperiano. Dado que ambas son estrictamente crecientes, su composición también lo es. Por tanto

$$f(\mathbb{R}^*) = f(\mathbb{R}^+) = \left] \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

**Ejercicio 13.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua en  $[0, 1]$ . Pruébese que  $f$  tiene un punto fijo:  $\exists x \in [0, 1] : f(x) = x$ .

**Solución 13.** Consideremos la función  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $g(x) = f(x) - x$ . La función  $g$  es continua por ser diferencia de funciones continuas, además  $g(0) = f(0) \geq 0$  y  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ . Si se da la igualdad en 0 o en 1 ya hemos encontrado un punto fijo, en caso contrario la función  $g$  cambia de signo y el Teorema de los ceros de Bolzano nos asegura la existencia de un cero de  $g$  o, lo que es mismo, un punto fijo de  $f$ .

