FUNDAMENTOS LÓGICOS DE LA PROGRAMACIÓN

Convocatoria Junio 2012

Alumno:____ **DNI:**____________

(05/07/2012)

I. Informática I.T.I. Gestión I.T.I. Sistemas

Ejercicio 1. ¿Cuál de las siguientes interpretaciones

1. $I(a) = 1$, $I(b) = 1$, $I(c) = 0$, $I(d) = 0$,
2. $I(a) = 0$, $I(b) = 1$, $I(c) = 0$, $I(d) = 1$,
3. $I(a) = 1$, $I(b) = 0$, $I(c) = 0$, $I(d) = 0$,
4. $I(a) = 0$, $I(b) = 1$, $I(c) = 1$, $I(d) = 0$,

nos muestra que la implicación

$$\{(a \vee d) \to (\neg b \vee c);\ \neg a \leftrightarrow (b \vee (c \wedge \neg d));\ \neg(a \to d) \wedge (b \leftrightarrow c)\} \vDash ((b \to \neg a) \to \neg c) \wedge d$$

es falsa?

Solución:

Llamemos α_1, α_2 y α_3 a las tres fórmulas del conjunto y llamemos β a la fórmula $((b \to \neg a) \to \neg c) \wedge d$. Es decir, $\alpha_1 = (a \vee d) \to (\neg b \vee c)$, $\alpha_2 = \neg a \leftrightarrow (b \vee (c \wedge \neg d))$, $\alpha_3 = \neg(a \to d) \wedge (b \leftrightarrow c)$.

Entonces, si la implicación anterior es falsa es porque hay una interpretación I tal que $I(\alpha_1) = 1$, $I(\alpha_2) = 1$, $I(\alpha_3) = 1$ e $I(\beta) = 0$. Buscamos, de las cuatro interpretaciones que nos dan la que cumpla estas condiciones.

Puesto que $\alpha_3 = \neg(a \to d) \wedge (b \leftrightarrow c)$ e $I(\alpha_3)$ debe valer 1, entonces $I(b \leftrightarrow c)$ debe valer 1, luego $I(b)$ tiene que ser igual a $I(c)$. Esto nos descarta las opciones 1 y 2. También $I(\neg(a \to d))$ tiene que valer 1, luego $I(a \to d)$ tiene que ser igual a cero. Esto implica que $I(a) = 1$ e $I(d) = 0$. La única opción que nos queda es la 3.

Es decir, la interpretación que nos piden debe ser la dada por $I(a) = 1$, $I(b) = 0$, $I(c) = 0$ e $I(d) = 0$. Vamos a comprobarlo. Con esa interpretación:

$I(a \vee d) = 1$ e $I(\neg b \vee c) = 1$, luego $I(\alpha_1) = 1$.

$I(\neg a) = 0$, $I(c \wedge \neg d) = 0$, luego $I(b \vee (c \wedge \neg d)) = 0$, y de ahí se tiene que $I(\alpha_2) = 1$.

Ya hemos visto que $I(\alpha_3) = 1$.

$I(d) = 0$ luego $I(\beta) = 0$.

Ejercicio 2. Sea γ la fórmula $((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$. Entonces:

a) γ es tautología.

b) γ es satisfacible y refutable.

c) γ es una contradicción.

d) $\gamma \wedge \alpha$ es tautología.

Solución:
Vamos transformando γ en fórmulas lógicamente equivalentes:

$$((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \to \neg\alpha$$
$$\neg((\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta) \vee \neg\alpha$$
$$\neg((\neg\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta) \vee \neg\alpha$$
$$(\neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg\neg\beta) \vee \neg\alpha$$
$$((\neg\neg\alpha \wedge \neg\beta) \vee \beta) \vee \neg\alpha$$
$$(\alpha \wedge \neg\beta) \vee \beta \vee \neg\alpha$$
$$(\alpha \vee \beta \vee \neg\alpha) \wedge (\neg\beta \vee \beta \vee \neg\alpha)$$

Y puesto que $(\alpha \vee \beta \vee \neg\alpha)$ es una tautología (nos aparece $\alpha \vee \neg\alpha$) y $\neg\beta \vee \beta \vee \neg\alpha$ también (nos aparece $\neg\beta \vee \beta$), vemos que γ es equivalente a la conjunción de dos tautologías, luego γ es una tautología.

También podemos llegar a la respuesta correcta mediante tablas de verdad.

α	β	$\alpha \to \beta$	$\neg\beta$	$(\alpha \to \beta) \wedge \neg\beta$	$\neg\alpha$	γ
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1

Y al ser la última columna todo *unos*, la fórmula γ es una tautología.

Ejercicio 3. Sea $\alpha = \neg a \vee b \rightarrow (a \leftrightarrow c)$ y $\beta = \neg(b \wedge (a \rightarrow \neg c))$. Entonces, para cualquier interpretación I se tiene que $I(\alpha \wedge \beta)$ vale:

a) $1 + I(b) \cdot I(c) + I(a) \cdot I(b)$.

b) $I(a) + I(b) + I(a) \cdot I(b) \cdot I(c)$.

c) $1 + I(a) + I(c) + I(a) \cdot I(b) \cdot I(c)$.

d) $1 + I(b) + I(c) + I(a) \cdot I(c) + I(b) \cdot I(c)$.

Solución:

Una forma de resolver este ejercicio es calcular el polinomio de Gegalkine de la fórmula $\alpha \wedge \beta$, y ver con cual coincide. Para calcularlo, iríamos calculando los polinomios de Gegalkine de las subfórmulas. Tendríamos:

$I(a \leftrightarrow c) = 1 + I(a) + I(c)$.

$I(\neg a \vee b) = I(\neg a) + I(b) + I(\neg a)I(b) = 1 + I(a) + I(b) + (1 + I(a))I(b) = 1 + I(a) + I(a)I(b)$.

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= 1 + I(\neg a \vee b) + I(\neg a \vee b)I(a \leftrightarrow c) = \\
&= 1 + 1 + I(a) + I(a)I(b) + (1 + I(a) + I(a)I(b))(1 + I(a) + I(c)) = \\
&= I(a) + I(a)I(b) + (1 + I(a) + I(a)I(b))(1 + I(a) + I(c)) = \\
&= I(a) + I(a)I(b) + 1 + I(a) + I(c) + I(a) + I(a)^2 + I(a)I(c) + I(a)I(b) + I(a)^2I(b) + I(a)I(b)I(c) = \\
&= 1 + I(a) + I(a) + I(a) + I(a)^2 + I(c) + I(a)I(b) + I(a)I(b) + I(a)^2I(b) + I(a)I(c) + I(a)I(b)I(c) = \\
&= 1 + I(c) + I(a)I(b) + I(a)I(c) + I(a)I(b)I(c).
\end{aligned}$$

$I(a \rightarrow \neg c) = 1 + I(a) + I(a)I(\neg c) = 1 + I(a) + I(a)(1 + I(c)) = 1 + I(a) + I(a) + I(a)I(c) = 1 + I(a)I(c)$.

$I(b \wedge (a \rightarrow \neg c)) = I(b)I(a \rightarrow \neg c) = I(b)(1 + I(a)I(c)) = I(b) + I(a)I(b)I(c)$.

$I(\beta) = I(\neg(b \wedge (a \rightarrow \neg c))) = 1 + I(b \wedge (a \rightarrow \neg c)) = 1 + I(b) + I(a)I(b)I(c)$.

$$\begin{aligned}
I(\gamma) &= I(\alpha)I(\beta) = (1 + I(c) + I(a)I(b) + I(a)I(c) + I(a)I(b)I(c))(1 + I(b) + I(a)I(b)I(c)) \\
&= 1 + I(c) + I(a)I(b) + I(a)I(c) + I(a)I(b)I(c) \\
&\quad + I(b) + I(b)I(c) + I(a)I(b)^2 + I(a)I(b)I(c) + I(a)I(b)^2I(c) \\
&\quad + I(a)I(b)I(c) + I(a)I(b)I(c)^2 + I(a)^2I(b)^2I(c) + I(a)^2I(b)I(c)^2 + I(a)^2I(b)^2I(c)^2 \\
&= 1 + I(c) + I(a)I(b) + I(a)I(c) + I(a)I(b)I(c) \\
&\quad + I(b) + I(b)I(c) + I(a)I(b) + I(a)I(b)I(c) + I(a)I(b)I(c) \\
&\quad + I(a)I(b)I(c) + I(a)I(b)I(c) + I(a)I(b)I(c) + I(a)I(b)I(c) + I(a)I(b)I(c) \\
&= 1 + I(b) + I(c) + I(a)I(c) + I(b)I(c).
\end{aligned}$$

Y vemos que coincide con la opción d). Pero este camino es muy largo. Como sabemos que hay tres respuestas incorrectas y una correcta, elegimos distintas interpretaciones y vamos descartando posibles respuestas.

Si tomamos $I(a) = 0$, $I(b) = 0$, $I(c) = 0$, vemos que $I(\alpha) = 1$, $I(\beta) = 1$, luego $I(\gamma) = 1$.

Si sustituimos en el polinomio que nos dan en la opción b), vemos que nos sale cero. Por tanto, la opción b) no es correcta.

Tomamos ahora $I(a) = 0$, $I(b) = 1$ e $I(c) = 0$. Se tiene que $I(\alpha) = 1$ e $I(\beta) = 0$, luego $I(\gamma) = 0$. Sustituimos en las diferentes opciones:

Opción a): $1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1$. Esto nos descarta esta opción.

Opción c): $1 + 0 + 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0 = 1$. Esto nos descarta la opción tercera.

Por tanto, la única opción posible es la opción d).

Ejercicio 4. Sean $\alpha = \forall x(P(x) \rightarrow \exists y(Q(y, a) \wedge Q(f(y), x)))$, y sean las estructuras:

- Estructura 1:
  Dominio: $\mathbb{N}$.
  Constantes: $a = 1$.
  Funciones: $f(x) = 2x$.
  Predicados: $P(x) \equiv x$ es primo, $Q(x, y) \equiv x$ es múltiplo de y.
- Estructura 2:
  Dominio: $\mathbb{Z}_5$.
  Constantes: $a = 2$.
  Funciones: $f(x) = x^2 + x$.
  Predicados: $P(x) \equiv x^2 = 1$, $Q(x, y) \equiv x^2 + y = 3$.

Entonces:

1. α se interpreta como cierta en las dos estructuras.
2. α se interpreta como cierta en la primera estructura y como falsa en la segunda.
3. α se interpreta como falsa en la primera estructura y como cierta en la primera.
4. α se interpreta como falsa en las dos estructuras.

Solución:

Vamos a interpretar la fórmula en la primera estructura. Para eso, nos vamos a fijar en la subfórmula $\exists y(Q(y, a) \wedge Q(f(y), x))$. En la estructura dada, esa fórmula significa:

existe y tal que y es múltiplo de 1, y $2y$ es múltiplo de x

Sea quien sea x, esa fórmula es verdadera, ya que existe y (el propio x) que es múltiplo de 1 (todo número lo es), y $2x$ es múltiplo de x.

Por tanto, independientemente de que x sea o no primo, la fórmula $P(x) \rightarrow \exists y(Q(y, a) \wedge Q(f(y), x))$ se interpreta como verdadera en la estructura primera. Eso nos dice que α es cierta en esa estructura.

Interpretamos ahora la fórmula en la segunda estructura.

Los valores que hacen que $P(x)$ sea cierta son $x = 1$ y $x = 4$. Vamos a estudiar el valor de verdad de la fórmula $\exists y(Q(y, a) \wedge Q(f(y), x))$ para una valoración en la que x tome el valor 1.

Si x toma el valor 1, la fórmula, lo que nos dice es:

Existe y tal que $y^2 + 2 = 3$ e $(y^2 + y)^2 + 1 = 3$

Los únicos valores de y que hacen cierto que $y^2 + 2 = 3$ son $y = 1$ e $y = 4$. Cuando $y = 1$, el valor de $(y^2 + y)^2 + 1$ es 0, distinto de 3; mientras que cuando $y = 4$ el valor de $(y^2 + y)^2 + 1$ es 1, también distinto de 3.

Luego no existe ningún valor de y para el que $y^2 + 2 = 3$ e $(y^2 + y)^2 + 1 = 3$.

En resumen, si $x = 1$ la fórmula $P(x)$ es verdadera, mientras que la fórmula $\exists y(Q(y, a) \wedge Q(f(y), x)))$ es falsa. Por tanto, la fórmula $P(x) \rightarrow \exists y(Q(y, a) \wedge Q(f(y), x)))$ es falsa cuando $x = 1$.

Esto nos dice que la fórmula α se interpreta como falsa en esta estructura.

La respuesta correcta es entonces la 2.

Ejercicio 5. Sean $\alpha = \forall x(P(x,a) \rightarrow \exists y Q(x, g(y)))$ y $\beta = \forall x(P(x,a) \rightarrow Q(x, g(f(x))))$. Entonces:

1. $\alpha \models \beta$.
2. $\beta \models \alpha$.
3. $\beta \rightarrow \alpha$ es satisfacible y refutable.
4. α y β son lógicamente equivalentes.

Solución:

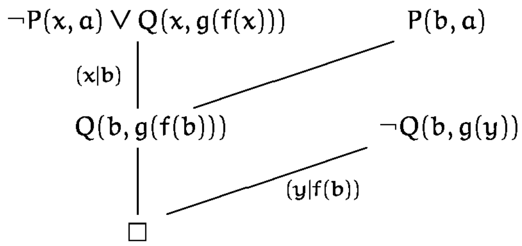
Si la respuesta 4 fuera correcta, también lo serían la 1 y la 2. Por tanto, descartamos la respuesta 4. Vamos a ver que $\beta \models \alpha$. Eso es lo mismo que ver que $\{\beta, \neg\alpha\}$ es insatisfacible. Para esto, calculamos las formas clausulares de β y $\neg\alpha$.

$$
\begin{array}{ll}
\forall x(P(x,a) \rightarrow Q(x, g(f(x)))) & \neg\forall x(P(x,a) \rightarrow \exists y Q(x, g(y))) \\
\forall x(\neg P(x,a) \vee Q(x, g(f(x)))) & \exists x \neg(\neg P(x,a) \vee \exists y Q(x, g(y))) \\
 & \exists x(P(x,a) \wedge \neg\exists y Q(x, g(y))) \\
 & \exists x(P(x,a) \wedge \forall y \neg Q(x, g(y))) \\
 & \exists x \forall y(P(x,a) \wedge \neg Q(x, g(y))) \\
 & \forall y(P(b,a) \wedge \neg Q(b, g(y)))
\end{array}
$$

Lo que tenemos es que comprobar que el conjunto de cláusulas

$$\{\neg P(x,a) \vee Q(x, g(f(x))); \; P(b,a); \; \neg Q(b, g(y))\}$$

es insatisfacible. Para eso, buscamos una deducción de la cláusula vacía.



Ejercicio 6. La fórmula $\alpha = \forall x P(x) \to \neg\forall y \exists x \neg Q(x, y)$ es equivalente a:

1. $\exists x \forall y (P(x) \to Q(y, x))$.
2. $\exists x \forall z \exists y (P(x) \to Q(z, y))$.
3. $\exists x \forall y (P(x) \to Q(x, y))$.
4. $\forall y (P(a) \to Q(y, b))$.

Solución:
Vamos transformando α en fórmulas equivalentes hasta llegar a una de las respuestas.

$$\begin{aligned}
&\forall x P(x) \to \neg\forall y \exists x \neg Q(x, y)\\
&\neg\forall x P(x) \vee \neg\forall y \exists x \neg Q(x, y)\\
&\exists x \neg P(x) \vee \exists y \forall x \neg\neg Q(x, y)\\
&\exists x \neg P(x) \vee \exists y \forall x Q(x, y)\\
&\exists x \neg P(x) \vee \exists x \forall y Q(y, x)\\
&\exists x (\neg P(x) \vee \forall y Q(y, x))\\
&\exists x \forall y (\neg P(x) \vee Q(y, x))\\
&\exists x \forall y (P(x) \to Q(y, x))
\end{aligned}$$

Y vemos que es la respuesta 1.

Ejercicio 7. Dado el conjunto de cláusulas

$$\{P(x, f(x)) \lor \neg Q(f(a));\ \neg P(x, b) \lor Q(f(a)) \lor \neg R(f(x), x);\ \neg Q(f(x))\}$$

1. $f(f(a))$ pertenece al universo de Herbrand, y $\neg Q(f(a))$ pertenece a la base de Herbrand.
2. $P(b, f(b)) \lor \neg Q(f(a))$ pertenece al sistema de Herbrand y $P(f(b), b)$ a la base de Herbrand.
3. $\neg Q(f(a))$ pertenece tanto a la base como al sistema de Herbrand.
4. $\neg P(a, b) \lor Q(f(a)) \lor \neg R(f(b), b)$ pertenece al sistema de Herbrand.

Solución:

Tanto b como $f(b)$ pertenecen al universo de Herbrand, y puesto que P es un predicado binario que aparece en las cláusulas, tenemos que $P(f(b), b)$ es un elemento de la base de Herbrand.

Si en la primera cláusula sustituimos x por b nos queda $P(b, f(b)) \lor \neg Q(f(a))$. Por tanto, eso es un elemento del sistema de Herbrand.

La respuesta correcta es entonces la 2.

Ejercicio 8. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de cláusulas es satisfacible?

(a) $\{P(x, y, z);\ \neg P(x, f(a), g(f(x))) \vee \neg P(f(x), g(b), f(x))\}$.

(b) $\{P(x, f(x), y);\ \neg P(f(x), y, y) \vee \neg P(z, y, g(z))\}$.

(c) $\{P(x, f(x), g(x));\ \neg P(x, f(x), y) \vee \neg P(z, y, g(z))\}$.

(d) $\{P(x, a, f(x));\ \neg P(b, x, f(b)) \vee \neg P(x, x, f(a))\}$.

Solución:
Para la opción (a) tenemos:

$$\begin{array}{lll}
\neg P(x, f(a), g(f(x))) \vee \neg P(f(x), g(b), f(x)) & & P(x', y', z') \\
\quad\Big| & (x'|x;\ y'|f(a);\ z'|g(f(x))) & \\
\neg P(f(x), g(b), f(x)) & & P(x', y', z') \\
\quad\Big| & (x'|f(x);\ y'|g(b);\ z'|f(x)) & \\
\quad\square & &
\end{array}$$

Luego el conjunto es insatisfacible. Para la opción (b)

$$\begin{array}{lll}
\neg P(f(x), y, y) \vee \neg P(z, y, g(z)) & & P(x', f(x'), y') \\
(y|f(f(x)))\ \Big| & (x'|f(x);\ y'|f(f(x))) & \\
\neg P(z, f(f(x)), g(z)) & & P(x', f(x'), y') \\
(z|f(x))\ \Big| & (x'|f(x);\ y'|g(f(x))) & \\
\quad\square & &
\end{array}$$

Es decir, también es insatisfacible. Probamos con la opción (d)

$$\begin{array}{lll}
\neg P(b, x, f(b)) \vee \neg P(x, x, f(a)) & & P(x', a, f(x')) \\
(x|a)\ \Big| & (x'|b) & \\
\neg P(a, a, f(a)) & & P(x', a, f(x')) \\
\quad\Big| & (x'|a) & \\
\quad\square & &
\end{array}$$

Y también es insatisfacible. La respuesta correcta es entonces la (c). Vamos a intentar obtener una deducción de la cláusula vacía a partir del conjunto $\{P(x, f(x), g(x));\ \neg P(x, f(x), y) \vee \neg P(z, y, g(z))\}$,

$$\begin{array}{lll}
\neg P(x, f(x), y) \vee \neg P(z, y, g(z)) & & P(x', f(x'), g(x')) \\
(y|g(x'))\ \Big| & (x'|x) & \\
\neg P(z, g(x'), g(z)) & &
\end{array}$$

Y ahora tendríamos que unificar los literales $P(z, g(x'), g(z))$ y $P(x, f(x), g(x))$, lo cual no es posible, pues nos aparece la ecuación $g(x') = f(x)$. No podemos llegar entonces a la cláusula vacía.

Ejercicio 9. Dado el conjunto de cláusulas

$\{P(x, f(x)) \vee Q(x) \vee \neg R(x);\ S(f(x)) \vee Q(x) \vee \neg R(x);\ T(a);\ R(a);\ T(x) \vee \neg P(a, x);\ \neg Q(x) \vee \neg T(x);\ \neg T(x) \vee \neg S(x)\}$

1. Es insatisfacible, pero no hay una deducción lineal-input de la cláusula vacía por no ser un conjunto de Horn.
2. No es un conjunto de Horn, pero puede transformarse en un conjunto de Horn, y es insatisfacible.
3. No es un conjunto de Horn, pero puede transformarse en un conjunto de Horn, y es satisfacible.
4. No es un conjunto de Horn ni puede transformarse en un conjunto de Horn, luego es satisfacible.

Solución:

El que no sea conjunto de Horn no significa que no pueda haber una deducción lineal-input de la cláusula vacía. Esto nos descarta la opción 1. El que no sea conjunto de Horn ni pueda transformarse en uno de Horn no implica que sea satisfacible. Esto nos descarta la opción 4. Luego tenemos que elegir entre la 2 y la 3. La única diferencia entre ellas es que en una dice que es satisfacible, y en la otra dice que el conjunto es insatisfacible. Vamos a demostrar que es insatisfacible. Para ello, vamos a dar una deducción lineal-input de la cláusula vacía.

$$
\begin{array}{lll}
S(f(x)) \vee Q(x) \vee \neg R(x) & & \neg S(y) \vee \neg T(y) \\
 & \{y|f(x)\} & \\
Q(x) \vee \neg R(x) \vee \neg T(f(x)) & & \neg Q(y) \vee \neg T(y) \\
 & \{y|x\} & \\
\neg R(x) \vee \neg T(f(x)) \vee \neg T(x) & & R(a) \\
 & & \\
\neg T(f(a)) \vee \neg T(a) & & T(x) \vee \neg P(a, x) \\
 & \{x|f(a)\} & \\
\neg T(a) \vee \neg P(a, f(a)) & & P(x, f(x)) \vee Q(x) \vee \neg R(x) \\
 & \{x|a\} & \\
\neg T(a) \vee Q(a) \vee \neg R(a) & & \neg Q(x) \vee \neg T(x) \\
 & \{x|a\} & \\
\neg T(a) \vee \neg R(a) & & T(a) \\
 & & \\
\neg R(a) & & R(a) \\
 & & \\
\square & &
\end{array}
$$

El conjunto puede transformarse en un conjunto de Horn. Para ello, basta sustituir el símbolo de predicado Q por $\neg NQ$ (en cuyo caso, se sustituiría $\neg Q$ por NQ) y el símbolo de predicado S por $\neg NS$.

Notemos que en ese caso, la raíz de la deducción que hemos hecho sería la cláusula negativa.