15/Abril/2005

Topología

Apellidos y nombre ....

.... **DNI** (o pasaporte) _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Grupo** _____

---

1) Razónese si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (dando una breve prueba o un contraejemplo).

a) $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.

b) $\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(A)) = \emptyset$.

c) La función $f : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ dada por $f(x) = x$ es continua si $\mathcal{T}_1$ es más fina que $\mathcal{T}_2$.

d) Si $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$, entonces para cualquier $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$, se tiene que $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \{\mathcal{U}\}$ genera la misma topología $\mathcal{T}$.

---

2)

a) Dada una función continua $f : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_2)$ se llama *grafo* de f al espacio $\Gamma = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$ con la topología inducida por la producto en $X \times Y$. Demuéstrese que X y Γ son homeomorfos.

b) Pruébese que el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2\}$ con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$, es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

c) Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ 3x & \text{si } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

estúdiese si f es continua.

Soluciones

---

1) (Puntuación: $1'25 + 1'25 + 1'25 + 1'25$).

a) Falsa. Contraejemplo: $A = (0,1]$, $B = (1,2)$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

$\mathrm{Int}(A) = (0,1)$; $1 \notin \mathrm{Int}(A)$ porque $1 \in (a,b) \;\Rightarrow\; b > 1 \;\Rightarrow\; (a,b) \not\subset A$.

$\mathrm{Int}(B) = B$; porque B es abierto.

$\mathrm{Int}(A \cup B) = A \cup B$; porque $A \cup B$ es abierto.

Así que $1 \in \mathrm{Int}(A \cup B)$ pero $1 \notin \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.

b) Falsa. Contraejemplo: $A = \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} - \mathrm{Int}(A) = \mathbb{R}$; porque $\overline{A} = \mathbb{R}$, ya que todo entorno contiene puntos racionales, mientras que $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$, ya que cualquier entorno tiene puntos irracionales y por tanto no está contenido en A.

c) Verdadera. Demostración: $\mathcal{T}_1$ más fina que $\mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$. Bajo esta hipótesis, $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_2 \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \in \mathcal{T}_1$, y por tanto f es continua.

d) Verdadera. Demostración: Sea $\widetilde{\mathcal{T}}$ la topología generada por $\widetilde{\mathcal{B}}$. Hay que probar $\widetilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}$.

$\supset$) Esto equivale a demostrar que $\forall B(x) \in \mathcal{B}\ \exists \widetilde{B}(x) \in \widetilde{\mathcal{B}}$ con $\widetilde{B}(x) \subset B(x)$. Para ello basta tomar $\widetilde{B}(x) = B(x)$.

$\subset$) Esto equivale a demostrar que $\forall \widetilde{B}(x) \in \widetilde{\mathcal{B}}\ \exists B(x) \in \mathcal{B}$ con $B(x) \subset \widetilde{B}(x)$. Para ello, si $\widetilde{B}(x) \neq \mathcal{U}$ se toma $B(x) = \widetilde{B}(x)$, y si $\widetilde{B}(x) = \mathcal{U}$, algún $B(x) \subset \mathcal{U}$, (siempre existe por ser $\mathcal{U}$ abierto en la topología generada por $\mathcal{B}$).

Errores comunes:

<u>General</u>: Los espacios topológicos no son en general métricos, por lo que argumentos del tipo "consideramos una bola de radio ϵ en un espacio topológico" no son genéricos.

<u>a)</u> $\mathcal{U} \subset A \cup B \not\Rightarrow \mathcal{U} \subset A$ ó $\mathcal{U} \subset B$. Por ejemplo, tómese $\mathcal{U} = (0,3)$, $A = (-\infty, 2)$ y $B = (1, \infty)$.

<u>b)</u> La propiedad $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \mathrm{Int}(A)$ no es cierta. Por ejemplo, con la usual en $\mathbb{R}$ y $A = \mathbb{Q}$, el primer conjunto es el total y el segundo el vacío.

<u>d)</u> Muchos confunden $\mathcal{B}$ con $\mathcal{T}$ y con sus elementos. Una base de una topología está típicamente formada por sólo algunos abiertos (elementos) de $\mathcal{T}$, y $\mathcal{B}$ no tiene por qué satisfacer las propiedades de topología.

---

2) (Puntuación: $2+2+1$).

a) Sea $h : \Gamma \longrightarrow X$ dada por $h(x, f(x)) = x$. Esta función es continua, lo cual se puede probar por ejemplo:

Directamente: $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow h^{-1}(\mathcal{U}) = (\mathcal{U} \times Y) \cap \Gamma$, que es abierto en la inducida (un producto de dos abiertos intersecado con el subespacio).

Usando resultados conocidos: $h = \pi_1 \circ j$ donde $j : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la inclusión y π_1 la proyección sobre la primera coordenada. Se sabe que ambas son continuas.

Sea $g : X \longrightarrow \Gamma$ dada por $g(x) = (x, f(x))$, se cumple $g \circ h = \mathrm{Id}_\Gamma$ y $h \circ g = \mathrm{Id}_X$, esto es, g es la inversa de h (en particular h es biyectiva por tener inversa). Como antes se puede probar la continuidad de g directamente o apelando a resultados conocidos. Para lo primero basta usar que si $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_1$, $\mathcal{V} \in \mathcal{T}_2$, se cumple $g^{-1}((\mathcal{U} \times \mathcal{V}) \cap \Gamma) = \mathcal{U} \in \mathcal{T}_1$.

b) Aplíquese el apartado anterior con $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y las topologías usuales.

Sin usar dicho apartado, se puede definir directamente el homeomorfismo $h : \mathbb{R} \longrightarrow M$ dado por $h(x) = (x, x^2)$ y probar que lo es.

c) Como $(-\infty, 0]$ y $[0, \infty)$ son cerrados, se puede aplicar el *Pasting Lemma* y basta probar que las restricciones $f\big|_{(-\infty,0]}(x) = 2x$ y $f\big|_{[0,\infty)}(x) = 3x$ son continuas, lo cual se puede deducir de resultados conocidos de Cálculo I o de la definición topológica de continuidad y sus propiedades. Por ejemplo, $f_1 = f\big|_{(-\infty,0]} : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua porque $f_1^{-1}\big((a,b)\big) = (a/2, b/2), (a/2, 0], \emptyset$ dependiendo de si $a < b \le 0$, $a < 0 < b$ ó $0 \le a < b$; y los tres son conjuntos abiertos en $(-\infty, 0]$.

También era posible demostrar la continuidad de f directamente (sin el *Pasting Lemma*) probando que $\mathcal{U}$ abierto $\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U})$.

Errores comunes:

a) No tiene sentido afirmar que f es el homeomorfismo entre X y Γ porque f es una función que va de X a Y. Tampoco tiene sentido establecer el homeomorfismo entre espacios generales $X \times Y$ y X. Recuérdese que una función continua puede no aplicar abiertos en abiertos, dicho de otra forma, no tiene por qué ser una aplicación abierta.

b) La función $f(x) = x^2$ no puede establecer un homeomorfismo M y $\mathbb{R}$ porque es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En el enunciado no se pedía hallar un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$, que por otra parte no existe.