Geometría III. (8 de febrero de 2012).

1. Teorema de Pappus. Enunciado, demostración y versiones.

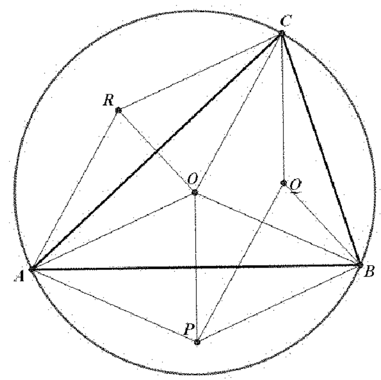
2. Sea ABC un triángulo acutángulo inscrito en una circunferencia $\mathcal{C}(O,\rho)$ con $AC > BC$ y sean P, Q, R puntos tales que $AOBP$, $AOCR$ y $COPQ$ son paralelogramos.

   Demostrar:

   a) $R \vee O$ es la mediatriz del segmento $\overline{AC}$ y $C \vee Q$ es una altura de ABC.

   b) BPQ y OAR son semejantes.

   c) $BQRO$ es un paralelogramo y Q es el ortocentro de ABC.

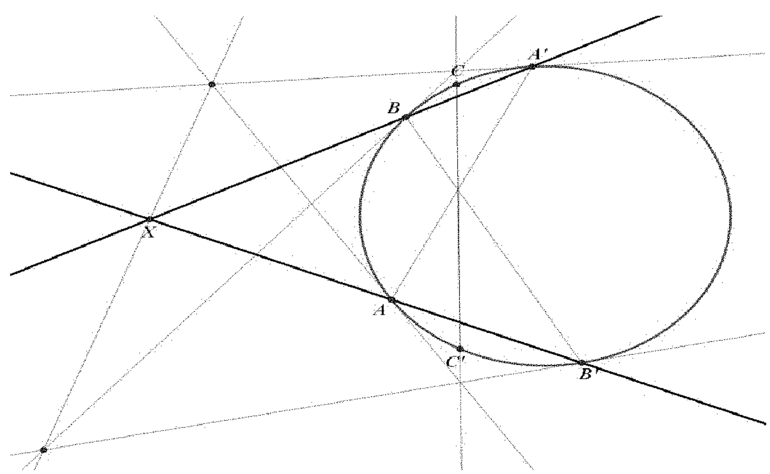


3. Teorema. Si $ABA'B'$ es un cuadrilátero inscrito en una cónica propia $\mathcal{C}$, entonces los puntos $r_A \cap r_{A'}$, $r_B \cap r_{B'}$, $A \vee B \cap A' \vee B'$ y $A \vee B' \cap A' \vee B$ están alineados.

   a) Enunciar razonadamente el teorema dual.

   b) Demostrar que la recta polar r_X de $X = A \vee B' \cap A' \vee B$ respecto a $\mathcal{C}$ pasa por los puntos $A \vee A' \cap B \vee B'$ y $r_A \cap r_{B'}$.

   c) Probar que si $r_X \cap \mathcal{C} = \{C, C'\}$, entonces existe una versión afín donde los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen lados homólogos paralelos.



4. Clasificar proyectiva y afínmente las cónicas que pasan por los puntos $(1,1)$ y $(1,-1)$, con tangentes $x = y$, $x = -y$.

Puntuación: 1^o) y 4^o) 2 puntos, 2^o) y 3^o) 3 puntos.