Integración

1 Teorema Fundamental del Cálculo

Ejercicio 1. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^3(t)\,dt$,

b) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)}\,dt$,

c) $F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)}\,dt$.

Solución 1.

a) $F'(x) = \operatorname{sen}^3(x)$

b) $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2+\operatorname{sen}^2(x)}$

c) $F'(x) = \int_a^b \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)}$

Ejercicio 2. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\log(1+t))\,dt$,

b) $F(x) = \int_{x^2}^1 \operatorname{sen}^3(t)\,dt$,

c) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos^3(t)\,dt$.

Solución 2.

a) $F'(x) = \operatorname{sen}\left(\log(1+x^2)\right)2x$,

b) $F'(x) = -\operatorname{sen}^3\left(x^2\right)2x$,

c) $F'(x) = \cos(x^3)3x^2 - \cos(x^2)2x$.

Ⓔ **Ejercicio 3.** Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2}\,dt.$$

Como consecuencia, estudiar los extremos relativos de dicha función.

Solución 3. La función f es derivable con $f'(x) = e^{-(x^3-x^2)^2}(3x^2-2x)$. Por tanto, los únicos puntos críticos son $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$. Como $f'\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ y $f'(2) > 0$, f es estrictamente decreciente en $\left]0, \frac{2}{3}\right]$ y estrictamente creciente en $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$. En consecuencia f alcanza su mínimo absoluto (y relativo) en $x = \frac{2}{3}$.

Ejercicio 4. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_{x^2+x}^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\, dt}{\operatorname{sen}^2(x)}.$$

Solución 4. Se trata de un límite que presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$" ya que el denominador es claro que tiende a cero cuando $x \to 0$, asi como el numerador, ya que:

$$\lim_{x\to 0} \int_{x^2+x}^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\, dt = \int_0^0 e^{-t^2}\, dt = 0$$

Además, tanto el numerador como el denominador son funciones derivables. El primero es derivable gracias al teorema fundamental del Cálculo y el segundo, por ser la función seno elevada al cuadrado. Entonces, haciendo uso de la siguiente regla de derivación (consecuencia del teorema fundamental del Cálculo y de la regla de la cadena):

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt\right)'(x) = f(h(x))\, h'(x) - f(g(x))\, g'(x)$$

y de la primera regla de L'Hôpital, el límite que tenemos que estudiar es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen}(x)^2} \cos(x) - e^{-(x^2+x)^2} (2x+1)}{2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)}$$

Este límite vuelve a presentar en el cero la misma indeterminación que teníamos al principio, así que vamos a volver a aplicar la regla de L'Hôpital. Pero antes separamos el límite en dos factores: el primero no va a darnos ningún problema, mientras que el segundo va a ser en el que vamos a aplicar dicha regla. Esto es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen}(x)^2} \cos(x) - e^{-(x^2+x)^2} (2x+1)}{2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos(x)} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen}(x)^2} \cos(x) - e^{-(x^2+x)^2} (2x+1)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Nos ocupamos entonces del segundo factor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)^2 e^{-\operatorname{sen}(x)^2} - \operatorname{sen}(x) e^{-\operatorname{sen}(x)^2} 2(x^2+x)(2x+1)^2 e^{-(x^2+x)^2} - 2e^{-(x^2+x)^2}}{\cos(x)} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Por tanto, como $\lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos(x)} = 1/2$, el límite que nos piden es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{x^2+x}^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\, dt}{\operatorname{sen}^2(x)} = -2/2 = -1.$$

Ejercicio 5. Calcula el máximo absoluto de la función $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{x-1} (e^{-t^2} - e^{-2t})\, dt.$$

Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} - 1)$, calcula el mínimo absoluto de f.

Solución 5.

a) Estudiamos la monotonía de la función f. Para ello veamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = e^{-(x-1)^2} - e^{-2(x-1)} = 0 \iff (x-1)^2 = 2(x-1) \iff x = 1, 3.$$

Por tanto, f es estrictamente monótona en $[1,3]$ y en $[3,+\infty]$. Como $f'(2) > 0$ y $f'(4) < 0$, se tiene que f es estrictamente creciente en $[1,3]$ y estrictamente decreciente en $[3,+\infty]$. En particular, la función alcanza su máximo absoluto en 3.

b) Dado que $f(1) = 0 < \lim_{x\to+\infty} f(x)$, f alcanza su mínimo absoluto en 1.

Ejercicio 6. Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{2x} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))\, dt}{x^2}.$$

Solución 6. Tenemos un cociente de funciones derivables, ambas con límite cero en el origen y la derivada del denominador no se anula (salvo en el origen). Estamos en condiciones de aplicar la primera regla de L'Hôpital para resolver dicho límite. Nos queda el siguiente cociente

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2x)) - \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{2x},$$

que sigue presentando una indeterminación de la forma "$\frac{0}{0}$". Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\cos(\operatorname{sen}(2x))\cos(2x) - \cos(\operatorname{sen}(x))\cos(x)}{2} = \frac{3}{2}. \tag{1}$$

(E) **Ejercicio 7.** Se considera la función $f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2}\, dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Encuentra los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f en $\mathbb{R}$.

b) Calcula los extremos relativos de f.

c) Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{\operatorname{sen}(x^3 - x^2)}$.

Solución 7.

a) La función integral f es una integral indefinida cuyo integrando es e^{-t^2}. En concreto, se puede escribir como:

$$f(x) = \int_0^{g(x)} e^{-t^2}\, dt$$

donde $g(x) = x^3 - x^2$ es un polinomio y, por tanto, derivable. Al ser el integrando una función continua y, aplicando el teorema fundamental del cálculo, tenemos que la función f es derivable, y además su derivada vale

$$f'(x) = e^{-g(x)^2} g'(x) = e^{-(x^3-x^2)^2}(3x^2 - 2x) \quad, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar los intervalos de monotonía de f tendremos que analizar el signo de la derivada. Para ello factorizamos la función derivada:

$$f'(x) = e^{-(x^3-x^2)^2}\, x(3x-2).$$

Como la función exponencial es siempre positiva, la función derivada se anulará siempre y cuando $x = 0$ o $x = 2/3$; concretamente:

$$f'(x) = e^{-(x^3-x^2)^2}\, x(3x-2) = 0 \iff x(3x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = \frac{2}{3}.$$

Tenemos entonces que f tiene dos puntos críticos que nos van a permitir descomponer el dominio de f de la forma siguiente:

i) Si $x < 0$, entonces $f'(x) > 0$ (se puede evaluar f' en un punto cualquiera negativo) y, por tanto, f es estrictamente creciente en $]-\infty, 0[$.

ii) Si $0 < x < 2/3$, entonces $f'(x) < 0$ y, por tanto, f es estrictamente decreciente en $]0, 2/3[$.

iii) Si $x > 2/3$, $f'(x) > 0$ y, por tanto, f es estrictamente creciente en $]2/3, +\infty[$.

b) Con la información que tenemos del apartado anterior podemos concluir que f alcanza un máximo relativo en 0 (la función pasa de ser creciente a decreciente) y un mínimo relativo en 2/3 (pasa de ser decreciente a creciente).

c) El límite planteado presenta una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$" y, como es posible aplicar la regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\cos(x^3-x^3)(3x^2-2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-(x^3-x^2)^2}(3x^2-2x)}{\cos(x^3-x^3)(3x^2-2x)}$$

Simplificamos el cociente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-(x^3-x^2)^2}}{\cos(x^3-x^2)} = \frac{1}{1} = 1 \implies \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x^3-x^2)} = 1$$

donde hemos tenido en cuenta que $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ y que $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$.

2 Cálculo de primitivas

2.1 Integrales inmediatas y cambio de variable

Ejercicio 8. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int 5\,x^6 dx$

b) $\int x(x+1)(x-2)dx$

c) $\int (2+3\,x^3)^2 dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

e) $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx$

f) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$

Solución 8.

a) $\int 5\,x^6 dx = \frac{5}{7}x^7$

b) $\int x(x+1)(x-2)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$

c) $\int (2+3x^3)^2 dx = 4x + 3x^4 + \frac{9}{7}x^7$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \frac{x^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}$

e) $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx = a^2 x - \frac{9}{5}a^{4/3}x^{5/3} + \frac{9}{7}a^{2/3}x^{7/3} - \frac{x^3}{3}$

f) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx = x + \frac{x^2}{2} + 2\log(-1+x)$

Ejercicio 9. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\log(x)}}{x} dx$ b) $\int \frac{dx}{e^x+1}$ c) $\int x(2x+5)^{10} dx$

Solución 9.

a) Hacemos el cambio de variable $1 + \log(x) = y$,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\log(x)}}{x} dx = \int y^{1/3}\, dy = \left(\frac{3}{4} + \frac{3\log(x)}{4}\right)(1+\log(x))^{1/3}$$

b) Sumamos y restamos e^x,

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = x - \log\left(1+e^x\right).$$

c) Hacemos el cambio de variable $2x + 5 = y$,

$$\begin{aligned}\int x(2x+5)^{10}\, dx =& \left[2x+5 = y \implies x = \frac{1}{2}(y-5)\right] = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(y-5)y^{10}\, dy\\ =&\frac{1}{4}\int y^{11} - 5y^{10}\, dy = \frac{1}{4}\left(\frac{y^{12}}{12} - \frac{5y^{11}}{11}\right)\\ =&\frac{1}{4}\left(\frac{(2x+5)^{12}}{12} + \frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right).\end{aligned}$$

2.2 Integración por partes

Ejercicio 10. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \log(x) dx$
b) $\int \arctan(x) dx$
c) $\int \operatorname{arcsen}(x) dx$
d) $\int x\operatorname{sen}(x) dx$
e) $\int xe^{-x} dx$
f) $\int x^2 e^{3x} dx$
g) $\int x\operatorname{sen}(x)\cos(x) dx$

Solución 10.

a) Integrando por partes

$$\int \log(x)\, dx = \left[\begin{array}{l} u = \log(x) \implies du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = dx \implies v = x\end{array}\right] = x\log(x) - \int dx = x\log(x) - x.$$

b) Integrando por partes

$$\int \arctan(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \arctan(x) \implies du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \implies v = x \end{bmatrix}$$
$$= x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right).$$

c) Integrando por partes

$$\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arcsen}(x) \implies du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \implies v = x \end{bmatrix}$$
$$= x\operatorname{arcsen}(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2}.$$

d) Integrando por partes

$$\int x\operatorname{sen}(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = x \implies du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(x)\,dx \implies v = -\cos(x) \end{bmatrix}$$
$$= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x).$$

e) Integrando por partes

$$\int x e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x \implies du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx \implies v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}(1+x).$$

f) Integrando por partes

$$\int x^2 e^{3x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \implies du = 2x\,dx \\ dv = e^{3x}\,dx \implies v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\,dx$$
$$= \begin{bmatrix} u = x \implies du = dx \\ dv = e^{3x}\,dx \implies v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x}.$$

g) Integrando por partes

$$\int x\operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int x\operatorname{sen}(2x)\,dx = \begin{bmatrix} u = x \implies du = dx \\ dv = \operatorname{sen}(2x)\,dx \implies v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx\right) = -\frac{x\cos(2x)}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x).$$

2.3 Integración de funciones racionales

Ejercicio 11. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

b) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

c) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

d) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$

e) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

Solución 11.

a) Puesto que numerador y denominador tienen el mismo grado, comenzamos dividiendo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx &= \int 1+\frac{3}{x^2-5x+6}\,dx\\ &= x+3\int\frac{dx}{x^2-5x+6}\end{aligned}$$

descomponemos en fracciones simples y usamos el apartado anterior,

$$\begin{aligned}&= x+3\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}\\ &= x+3\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)\\ &= x+3\log|-3+x|-3\log|-2+x|\,.\end{aligned}$$

b) Dividimos y descomponemos en fracciones simples,

$$\begin{aligned}\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx &= \int\left(5+\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}\right)dx\\ \Gamma &= \int\left(5+\frac{1}{2x}-\frac{7}{3(x-1)}+\frac{161}{6(x-4)}\right)dx\\ &= 5x+\frac{161}{6}\log(-4+x)-\frac{7}{3}\log|-1+x|+\frac{\log|x|}{2}\,.\end{aligned}$$

c) Descomponemos en fracciones simples e integramos:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x(x+1)^2} &= \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx\\ &= \frac{1}{1+x}+\log|x|-\log|1+x|\,.\end{aligned}$$

d) Descomponemos en fracciones simples y resolvemos,

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)} &= \int\left(\frac{4x+15}{130(x^2+4x+5)}-\frac{1}{20(x-1)}+\frac{1}{52(x-3)}\right)dx\\ &= \frac{7}{130}\arctan(2+x)+\frac{1}{52}\log|-3+x|-\frac{1}{20}\log|-1+x|\\ &\quad+\frac{1}{65}\log\left|5+4x+x^2\right|\,.\end{aligned}$$

e) Descomponemos en fracciones simples, $\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{(b-a)(x+a)} + \frac{1}{(a-b)(x+b)}$ y sustituimos

$$\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \int\frac{1}{(b-a)(x+a)}dx+\int\frac{1}{(a-b)(x+b)}dx = \frac{\log|a+x|}{-a+b}+\frac{\log|b+x|}{a-b}\,.$$

Ejercicio 12. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{dx}{x^3+1}$
b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$
c) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$

Solución 12.

a) Descomponemos en fracciones simples e integramos,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3+1} &= \int \left(\frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \frac{\arctan\left(\frac{-1+2x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\log|1+x| - \frac{1}{6}\log\left|1-x+x^2\right| .\end{aligned}$$

b) Utilizando la descomposición

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \int \left(\frac{b_0}{x+1} + \frac{b_1+b_2x}{x^2+1} \right) dx$$

se demuestra que

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4(1+x^2)} + \frac{\arctan(x)}{4} + \frac{1}{2}\log|1+x| - \frac{1}{4}\log(1+x^2).$$

c) Como $(x^4-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2$, tenemos la descomposición

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} + \int \left(\frac{b_0}{x+1} + \frac{b_1}{x-1} + \frac{b_2+b_3x}{x^2+1} \right) dx.$$

Derivando y calculando los coeficientes se obtiene que

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{x}{4(-1+x^4)} + \frac{3\arctan(x)}{8} - \frac{3}{16}\log|-1+x| + \frac{3}{16}\log|1+x|.$$

2.4 Integración de funciones trigonométricas

Ejercicio 13. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \cos^3(x)dx$
b) $\int \operatorname{sen}^5(x)dx$

c) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)dx$
d) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)dx$
e) $\int \cos^6(3x)dx$
f) $\int \frac{\cos^5(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}dx$

Solución 13.

a) Utilizando el cambio de variable $\operatorname{sen}(x) = t$ la integral queda

$$\int \cos^3(x)\,dx = \int \left(1-t^2\right)\,dt = t - \frac{t^3}{3} = \operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}(x)^3}{3}.$$

b) Utilizando el cambio de variable $\cos(x) = t$, la integral es

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5(x)\,dx &= -\int \left(1-t^2\right)^2\,dt = -\int t^4 - 2t^2 + 1\,dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} - t\\ &= -\frac{\cos^5(x)}{5} + \frac{2\cos^3(x)}{3} - \cos(x).\end{aligned}$$

c) Utilizamos el cambio de variable $\operatorname{sen}(x) = t$,

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)\,dx = \int t^2\left(1-t^2\right)\,dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5(x)}{5}.$$

d) Utilizando que $2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x)$,

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)\,dx = \int \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2x)\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(4x)}{2}\,dx = \frac{1}{32}\left(4x - \operatorname{sen}(4x)\right).$$

e) Utilizando repetidamente que $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$ y el cambio de variable $3x = t$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int \cos^6(3x)\,dx &= \frac{1}{3}\int \cos^6(t)\,dt = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)^3\,dt\\ &= \frac{1}{24}\int 1 + 3\cos(2t) + 3\cos^2(2t) + \cos^3(2t)\\ &= \frac{1}{576}\Big(180x + 45\operatorname{sen}(6x) + 9\operatorname{sen}(12x) + \operatorname{sen}(18x)\Big).\end{aligned}$$

f) Utilizamos el cambio de variable $\operatorname{sen}(x) = t$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^5(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}\,dx &= \int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^3}\,dt = \int t^{-3} + t - 2t^{-1}\,dt = -\frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{2}t^2 - 2\log|t|\\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2(x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x) - 2\log|\operatorname{sen}(t)|.\end{aligned}$$

Ejercicio 14. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx$
b) $\int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}dx$
c) $\int \frac{dx}{1+\cos^2(3x)}$
d) $\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}^2(x)+5\cos^2(x)}$
e) $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}dx$

Solución 14.

a) Hacemos el cambio $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}\,dx &= \int \frac{1-y^2}{1+y^2}\,dy \\ &= \int \left(\frac{2}{1+y^2} - 1\right) dy = 2\arctan(y) - y \\ &= x - \tan\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

b) Como la función es par en seno y coseno, utilizamos el cambio $\tan(x) = t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)} dx &= \int \frac{1+t}{(1-t)(1+t^2)}\,dt \\ &= \int \left(\frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t-1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\tan^2(x)+1\right) - \log\left(\tan(x)-1\right).\end{aligned}$$

c) El integrando es par pero antes de hacer el cambio $y = \tan(x)$ lo "arreglamos" un poco.

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2(3x)} = [3x = t] = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+\cos^2(t)} = [\tan(t) = y] = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{2+y^2}$$

eliminamos el 2 del denominador buscando un arcotangente,

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{3}\int \frac{dy}{2\left(1+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \left[y = \sqrt{2}z\right] \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan(3x)}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

d) Aprovechamos que el integrando es una función par en seno y coseno para realizar el cambio de variable $\tan(x) = t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3\,\mathrm{sen}^2(x) + 5\cos^2(x)} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}\,dx}{5+3\tan^2(x)} = [\tan(x) = t] \\ &= \int \frac{dt}{5+3t^2} = \int \frac{dt}{5\left(1+\frac{3}{5}t^2\right)} = \left[y = \sqrt{\tfrac{3}{5}}t\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{15}}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\tan(x)\right)\end{aligned}$$

e) Utilizamos las fórmula del ángulo doble, y hacemos el cambio de variable $y = \mathrm{sen}^2(x)$,

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \int \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \int \frac{dy}{1+y} = \log|1+y| = \log\left(1+\operatorname{sen}^2(x)\right).$$

2.5 Integración de funciones irracionales

Ejercicio 15. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

d) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

Solución 15.

a) Hacemos el cambio de variable $x-1=t^2$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx = 2\int (t^2+1)^3\,dt = \sqrt{-1+x}\left(\frac{32}{35}+\frac{16x}{35}+\frac{12x^2}{35}+\frac{2x^3}{7}\right).$$

b) Hacemos el cambio de variable $x+1=t^2$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan(t) = 2\arctan\left(\sqrt{x+1}\right).$$

c) Utilizando el cambio de variable $x=t^6$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx &= \int \frac{6t^3}{t+1}\,dt = 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt\\ &= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\log|t+1|\right)\\ &= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}-\log\left|\sqrt[6]{x}+1\right|.\end{aligned}$$

d) Hacemos el cambio de variable $x+1=t^2$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{2t(t+2)}{t^4-t}\,dt = \int\left(\frac{-2t-2}{t^2+t+1}+\frac{2}{t-1}\right)dt\\ &= -\log\left(t^2+t+1\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+2\log(t-1)\\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{3}}\right)+2\log\left(\sqrt{x+1}+1\right)-\log\left(\sqrt{x+1}+x+2\right)\end{aligned}$$

Ejercicio 16. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

b) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$

c) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

d) $\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Solución 16.

a) Como $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$,

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = [x - ½ = t] = \int \frac{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}}\,dt$$

hacemos el cambio de variable $t = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{senh}(y)$,

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{senh}(y) + \frac{1}{2}\right)^2 dy \\ &= 2\sqrt{3}\cosh(y) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{2y}}{2} - \frac{e^{-2y}}{2} - 2y\right) + y\Gamma \end{aligned}$$

y se deshacen los cambios.

b) Utilizamos el cambio de variable $x = \sec(t)$,

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2 - 1}} = \int \cos^4(t)\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}t + \mathrm{sen}(2t) + \frac{1}{8}\,\mathrm{sen}(4t)\right).$$

Para terminar, basta deshacer el cambio realizado.

c) Hacemos el cambio de variable $x = \mathrm{sen}(t)$,

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \int \mathrm{sen}^5(t)\,dt = -\frac{1}{5}\cos^5(t) + \frac{2}{3}\cos^3(t) - \cos(t)\Gamma,$$

y se deshacen los cambios.

d) Hacemos el cambio de variable $x = \mathrm{senh}(t)$,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx &= \int \mathrm{senh}^6(t)\,dt = \int \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^6 dt \\ &= \frac{1}{2^6}\int \left(e^{6t} + \binom{6}{1}e^{4t} + \binom{6}{2}e^{2t} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4}e^{-2t} + \binom{6}{5}e^{-4t} + e^{-6t}\right) dt \\ &= \frac{1}{64}\left(\frac{e^{6t} - 9\,e^{4t} + 45\,e^{2t}}{6} - \frac{e^{-6t}\left(45\,e^{4t} - 9\,e^{2t} + 1\right)}{6} - 20\,t\Gamma\right) \end{aligned}$$

y se deshacen los cambios.

3 Un poco de todo

Ejercicio 17. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + \log\left(\frac{2}{1+e}\right)$

b) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \mathrm{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) - \mathrm{arcsen}\left(\frac{7}{12}\right)$

c) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{\pi}{6}$

e) $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx = \frac{3\pi+\log(2)}{10}$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4} dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$

g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$

Solución 17.

a) Ya sabemos la primitiva de esta función, la calculamos en el Ejercicio 9 b, con lo que

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = [x - \log(1+e^x)]_0^1 = 1 - \log(1+e) + \log(2) = 1 + \log\left(\frac{2}{1+e}\right).$$

b) Teniendo en cuenta que $20 - 8x + x^2 = 36 - (x-4)^2$, y haciendo el cambio de variable $y = x - 4$ se tiene que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{36-(x-4)^2}} = \int_{-4}^{-3.5} \frac{dy}{\sqrt{36-y^2}} = \int_{-4}^{-3.5} \frac{dy}{6\sqrt{1-\left(\frac{t}{6}\right)^2}}$$

hacemos el cambio $t = y/6$,

$$= \int_{-2/3}^{-7/12} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{7}{12}\right)$$

c) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_0^3 \frac{dx}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \left[\frac{x}{3} = y\right] = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}(0) = \frac{\pi}{2}$

d) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \left[y = x^3\right] = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{3} (\operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}(0)) \frac{\pi}{6}$

e) Descomponemos $\frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}$ como suma de fracciones simples:

$$\frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5}$$

Desarrollando se obtiene que $A = -\frac{1}{5}$, $B = \frac{1}{5}$ y $C = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx &= \int \frac{1}{5} \frac{x}{x^2-4x+5} - \frac{1}{x+1} dx \\ &= -\frac{1}{5} \log|x+1| + \frac{1}{5} \int \frac{x}{x^2-4x+5} dx.\end{aligned} \tag{2}$$

Calculamos por separado una primitiva de

$$\int \frac{x}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-4)+4}{x^2-4x+5} dx = \frac{1}{2} \log\left(x^2-4x+5\right) + 2 \int \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

completamos cuadrados $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\log\left(x^2 - 4x + 5\right) + 2\int \frac{dx}{1+(x-2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\log\left(x^2 - 4x + 5\right) + 2\arctan(x-2) \end{aligned} \tag{3}$$

Usando (2) y (3),

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} x - 1x^3 - 3x^2 + x + 5\, dx &= \frac{1}{5}\left[-\log|x+1| + \frac{1}{2}\log\left|x^2 - 4x + 5\right| + 2\arctan(x-2)\right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{5}\left[\log\left(\frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x+1}\right) + \arctan(x-2)\right]_1^{+\infty} = \frac{3\pi + \log(2)}{10}. \end{aligned}$$

f) Utilizando el cambio de variable $y = x^2$ pasamos a una integral sencilla:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{3+y^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\lim_{y\to+\infty} \arctan(y) - \arctan(0)\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}.$$

g) Usamos el cambio de variable $e^x = t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} \arctan(t) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicio 18. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

a) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(x))^2\, dx = 3\pi$

c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}(x)|^3 dx = \frac{4}{3}$

d) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(y)\cos^2(y)\, dy = \frac{\pi}{16}$

Solución 18.

a) Mediante el cambio de variable $x = \operatorname{sen}(t)$, nos queda que

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\,(1+\cos(2t))\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

b) Desarrollamos el cuadrado,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos(x))^2\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2\cos(x) + \cos^2(x)\, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2\cos(x) + \frac{1}{2}(1+\cos(2x))\, dx = 3\pi. \end{aligned}$$

c) Usando que la función seno es impar,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen}(x)|^3 \, dx = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3(x)\, dx = [\cos(x) = t] = -2\int_1^0 1 - t^2\, dt = \frac{4}{3}.$$

d) Utilizando que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$, se tiene que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(y)\cos^2(y)\, dy = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2y)\, dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} 1 - \cos(4y)\, dy = \frac{\pi}{16}.$$