UNIVERSIDAD DE GRANADA DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA ECUACIONES DIFERENCIALES I GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE. 15 de septiembre de 2015

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.

[3] Ejercicio 1.- Sea $A \in M_N(\mathbb{R})$ y denotemos A^* su matriz traspuesta. Demuestra que:

- 1. $(e^{At})^* = e^{A^*t}$.
- 2. Si A es antisimétrica, es decir, $A^* = -A$, entonces e^{At} es ortogonal para todo $t \in \mathbb{R}$.
- 3. Si A es antisimétrica y x(t) es una solución del sistema x' = Ax, entonces

$$|x(t)| = |x(0)|, t \in \mathbb{R}.^2$$

[4] Ejercicio 2.- Se considera el sistema lineal

$$x' = Ax, (1)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$

- 1. Discute cúal es la forma canónica real de Jordan de la matriz asociada al sistema (1) en función del valor de a.
- 2. Calcula la solución de (1) cuando a = 1.
- 3. ¿Tiene (1) alguna solución periódica para algún valor de a? En caso afirmativo, pon un ejemplo de término independiente $b \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para el cual el sistema $x' = -A^*x + b(t)$ con ese valor de a NO admite solución 2π -periódica.
- [3] Ejercicio 3.- Sabiendo que la ecuación de Riccati

$$x' = \frac{x}{t} + tx^2 - t^3$$

admite una solución que es un polinomio de grado uno, halla la solución que cumple x(1) = 0 y determina el mayor intervalo en el que está definida.

¹Se dice que $B \in M_N(\mathbb{R})$ es ortogonal $\overline{\text{si } B^{-1} = B^*}$

²Recuerda que dada $B \in M_N(\mathbb{R}), \langle x, By \rangle = \langle B^*x, y \rangle, x, y \in \mathbb{R}^N.$