Cálculo

1ºE Grado en Ingeniería Informática

Segundo Parcial

Curso 2015/2016

1. **(3 puntos)** Se considera la función $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\, dt.$

   a) Estudia los intervalos de monotonía de f, así como la existencia de extremos relativos.

   b) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

   Solución:

   a) Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que la función $(f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} dt$ es continua y derivable en $\mathbb{R}^+$ ya que el integrando, $f(t) = \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}$, es una función continua. Además, gracias también al Teorema Fundamental del Cálculo, podemos calcular la derivada de f en $\mathbb{R}^+$:

   $$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}$$

   Observamos que la derivada de f es positiva en todo el dominio; por tanto, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$.

   b) Si calculamos el límite en cero del numerador:

   $$\lim_{x\to 0} f(x) = \int_0^0 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}\, dt = 0$$

   Estamos ante una indeterminación del tipo "$0/0$" . Por tanto, aplicando la regla de L'Hôpital:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 0$$

   Concluimos entonces que:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

2. **(1 punto)** Calcula $\displaystyle\int x^2 \arctan(x)\, dx$.

Solución: Aplicamos el método de integración por partes:

$$\int x^2 \arctan(x)\,dx = \begin{bmatrix} u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = x^2\,dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{x^3}{3}\arctan(x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx.$$

La integral que nos queda es de tipo racional. Comenzamos por escribir el integrando haciendo uso del algoritmo de división de polinomios:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

Por tanto,

$$\int x^2 \arctan(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\arctan(x) - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\arctan(x) - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log(x^2+1)\,.$$

3. **(2 puntos)** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$x_1 = 1/2$$
$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}\,,\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   a) Comprueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona y acotada.

   b) Calcula el límite de $\{x_n\}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \sqrt{2+1/2} = \sqrt{5/2} > x_1 = 1/2$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 < x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n < x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} < x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n < x_{n+1} \;\Rightarrow\; 2+x_n < 2+x_{n+1} \;\Rightarrow\; \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+x_{n+1}}$$
$$\Rightarrow x_{n+1} < x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

b) Al ser creciente ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por el $x_1 = 1/2$. Veamos que está acotada superiormente por 2. Esto es, que $x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Nuevamente lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 1 \leq 2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \leq 2$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \leq 2$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \leq 2 \Rightarrow 2 + x_n \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \leq 2$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

c) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ con lo que nos queda: $x = \sqrt{2+x}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{2+x} \Rightarrow x^2 = 2 + x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 2$ y $x = -1$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que $1/2$. El motivo es que $1/2 \leq x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 2$.

4. **(4 puntos)** Estudia la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{-n^3}$

b) $\displaystyle\sum \frac{n(n+2)}{(n+1)^n}$.

c) $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n}{4^n} - \frac{2^n}{3^{n+1}}\right)$. Si es convergente, calcula su suma.

Solución:

a) Aplicamos el criterio de la raíz.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{-n^3}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{-n^2}$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo "1^∞"; por tanto, aplicamos la regla del número e:

$$-n^2\left[\frac{n^2-1}{n^2+1}-1\right]=-n^2\left[\frac{n^2-1-n^2-1}{n^2+1}\right]$$
$$=-n^2\frac{-2}{n^2+1}=\frac{2n^2}{n^2+1}\to 2$$

Con lo que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{-n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{-n^2}=e^2>1\,,$$

de lo que se deduce que la serie dada no es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente. Así, si llamamos $a_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^n}$ tenemos que estudiar el límite del cociente siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^{n+1}}\frac{(n+1)^n}{n(n+2)}=\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)^2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n\to 0\cdot(1/e)=0<1$$

de lo que se deduce que la serie es convergente.

c) La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{(-1)^n}{4^n}-\frac{2^n}{3\,3^n}\right)=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{-1}{4}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{4}|<1$ y $|\frac{2}{3}|<1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\right)$, nos queda entonces:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{4^n}-\frac{2^n}{3\,3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{5/4}-\frac{1}{3}\frac{1}{1/3}=\frac{4}{5}-1=-\frac{1}{5}$$

Granada, 21 de enero de 2016