

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio.

[3] Ejercicio 1.- Sea $A \in M_N(\mathbb{R})$ y denotemos A^* su matriz traspuesta. Demuestra que:

1. $(e^{At})^* = e^{A^*t}$.
2. Si A es antisimétrica, es decir, $A^* = -A$, entonces e^{At} es ortogonal para todo $t \in \mathbb{R}$.¹
3. Si A es antisimétrica y $x(t)$ es una solución del sistema $x' = Ax$, entonces

$$|x(t)| = |x(0)|, \quad t \in \mathbb{R}.^2$$

[4] Ejercicio 2.- Se considera el sistema lineal

$$x' = Ax, \tag{1}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Discute cuál es la forma canónica real de Jordan de la matriz asociada al sistema (1) en función del valor de a .
2. Calcula la solución de (1) cuando $a = 1$.
3. ¿Tiene (1) alguna solución periódica para algún valor de a ? En caso afirmativo, pon un ejemplo de término independiente $b \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para el cual el sistema $x' = -A^*x + b(t)$ con ese valor de a NO admite solución 2π -periódica.