GEOMETRÍA I. Examen del Tema 1
– Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas –
Curso 2012/13

Nombre:

Razonar todas las respuestas

1. En cada caso, probar la afirmación o dar un ejemplo de que es falsa
   (a) Si una matriz A satisface $A = 2A^t$, entonces $A = 0$.
   (b) Si $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tiene todos los menores de orden 2 nulos, entonces $|A| = 0$.
   (c) Sea A una matriz tal que existen matrices regulares P y Q y PAQ es una matriz escalonada reducida por filas y columnas. Entonces $PA = H_f(A)$

2. Según el valor de a, hallar las formas de Hermite por filas y por columnas de
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ a & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
y en el caso de que sea regular, hallar la matriz inversa usando el método de Hermite (o Gauss).

3. Hallar el determinante de la primera matriz y el rango de la segunda
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & b & a \\ 0 & 0 & c & c \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Discutir y resolver en su caso, y según los valores de a y b, los siguientes sistemas (el primero por Gauss, el segundo por determinantes/Cramer)
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 0 \\ 4x + ay + z & = & 2 \\ y - z & = & b \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} ax + y & = & a \\ x + by & = & b \\ x + y & = & a \end{array} \right.$$

Soluciones:

1. (a) Verdadero. Haciendo 'traspuesta' en $A = 2A^t$, tenemos $A^t = 2(A^t)^t = 2A$. Por tanto, $A = 2A^t = 2(2A) = 4A$, luego $3A = 0$, es decir, $A = 0$.

   (b) Verdadero. (Primera forma) Como todos los menores de orden 2 son nulos, el rango de A es menor o igual que 1, en particular, no es 4. Esto quiere decir que la matriz no es regular, y así, $|A| = 0$.

   (Segunda forma). Desarrollando A por una fila, aparecen sumandos que son producto de números por menores de orden 3. Desarrollando cada menor de orden 3 por una fila, aparecen sumando que son producto de números por menores de orden 2. Cómo éstos son 0, entonces todos los menores de orden 3 son también nulos, y de aquí, que también lo será el determinante de A.

   (c) Falso. Basta tomar $P = I_n$, A una matriz cualquiera regular y que no sea reducida por filas y $Q = A^{-1}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Hacemos primero la forma de Hermite por filas. Distinguimos si a es 0 o no. Si $a \neq 0$,

$$A \ \to \ \xrightarrow{F_{12}} \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(1)} \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(1/a), F_2(1/2), F_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_{12}(-2/a), F_{13}(-2/a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $H_f(A) = I_3$, entonces A es regular, luego su forma de Hermite por columnas también es I_3.

Si $a = 0$,

$$A \xrightarrow{F_{21}(-1), F_{31}(1)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(1/2), F_2(1/2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para la forma de Hermite por columnas, pasamos la primera columna a la tercera y empezamos con la transformación $C_1(1/2)$:

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_2(1/2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \overset{C_{12}(-1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la inversa, sólo se hace para $a \neq 0$, haciendo las mismas transformaciones (por filas o por columnas) a la matriz identidad. Tomando las transformaciones por filas, tenemos:

$$I_3 \quad \overset{F_{12}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_{32}(1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_1(1/a),F_2(1/2),F_3(-1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{12}(-2/a),F_{13}(-2/a)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{2}{a} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que es la matriz inversa

(a) (Primera forma) Llamando A_n a la matriz, donde n es el orden de la misma, y desarrollando por la primera fila, se tiene $|A_n| = 2|A_{n-1}| - |A_{n-2}|$. Esta formula nos permite calcular $|A_n|$ sin más que calcular los primeros dos valores: $|A_1| = 2$ y $|A_2| = 3$. Por tanto, $|A_3| = 2 \cdot 3 - 2 = 5$, y así sucesivamente, $|A_n| = n + 1$.

(Segunda forma) Hacemos $F_{21}(-1/2)$, el determinante no cambia, obteniendo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Ahora hacemos $F_{32}(-3/2)$, consiguiendo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Siguiendo con el proceso,

$$|A| = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \frac{n+1}{n} \end{pmatrix}.$$

Como la matriz es triangular superior, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$|A| = 2\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1.$$

(b) Ya que la segunda columna y última fila son de ceros, se pueden quitar y el rango no cambia:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ 0 & c & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Si todos los elementos son 0, el rango es 0. Supongamos a partir de ahora que alguno no es cero. Haciendo $C_{31}(-1)$ y luego $C_{32}(-1)$ conseguimos

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

y $r(A) = r(B)$. El determinante es acd (también es escalonada), luego si no es cero, el rango es 3. Por tanto, los casos que tenemos son:

i. Si $a, c, d \neq 0$, $r(A) = 3$.

ii. Supongamos $a = 0$. Entonces si $c, d \neq 0$, el rango es 2 por que es escalonada con 2 pivotes.

A. Si $c = 0$, entonces $r(A) = 2$ si $b, d \neq 0$ por tener 2 pivotes. Si $b = 0$ y $d \neq 0$, $r(A) = 1$ por tener un único pivote (el d), y lo mismo pasa si $b \neq 0$, $d = 0$.

B. Si $c \neq 0$, el rango es 2 si $d \neq 0$ por tener 2 pivotes, c y d; y si $d = 0$, el rango es 1 por tener dos filas proporcionales.

iii. Supongamos $c = 0$. Si $a, d \neq 0$, el rango es 2 por tener dos pivotes. Si $d = 0$, sólo hay un pivote (b o a) y el rango es 1

iv. Supongamos $d = 0$. El caso que queda es $c, d \neq 0$. Entonces el rango es 2 por tener dos pivotes, c y d.

3. (a)

$$A|b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 4 & a & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & a-2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & 2-b(a-2) \end{pmatrix}.$$

i. Si $a - 1 \neq 0$, $r(A) = r(A|b) = 3$ y el sistema es compatible. Las soluciones son:

$$z = \frac{2 - b(a-2)}{a-1}, \; y = b + z = \frac{b+2}{a-1}, x = -\frac{b+2}{2(a-1)}.$$

ii. Si $a - 1 = 0$ $(a = 1)$ y $b + 2 \neq 0$, el término $(3, 4)$ no es 0, luego $r(A) = 2$, $r(A|b) = 3$ y el sistema es incompatible.

iii. Si $a - 1 = 0$ $(a = 1)$ y $b + 2 = 0$, $r(A) = r(A|b) = 2$ y el sistema es indeterminado con dimensión de las soluciones 1. Ya que los pivotes eran los elemenos $(1, 1)$ y $(2, 2)$, se toma z como parámetro, obteniendo

$$z = \lambda \in \mathbb{R}, y = 2 + \lambda, x = \frac{2+\lambda}{2}.$$

(b) Aquí

$$A|b = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & b & b \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Empezamos por el menor $(3,1)$, que es 1. Ampliamos con la primera y segunda fila y segunda columna:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a-1, \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-b$$

i. Si $a-1 \neq 0$, entonces $r(A) = 2$. Calculamos el determinante de $A|b$, que es $b(a-1)^2 = 0$, luego

A. $b = 0$. Entonces $r(A|b) = 2$. El sistema es compatible determinado. Las soluciones son

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0, y = \frac{\begin{vmatrix} a & a \\ 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = a.$$

B. $b \neq 0$. Entonces $r(A|b) = 3$ y el sistema es incompatible.

ii. Supongamos $a = 1$. Tenemos dos casos:

A. Caso $b \neq 1$. Entonces $r(A) = 2$ y $r(A|b) = b(a-1)^2 = 0$. El sistema es compatible y se escribe como $x + by = b$, $x + y = a$. La solución es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b & b \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1.$$

B. Caso $b = 1$. Entonces $r(A) = 1$ y $r(A|b) = 1$. Sistema indeterminado con $y = \lambda \in \mathbb{R}$ y $x = |1-\lambda|/|1| = 1-\lambda$.