TOPOLOGIA (Matemáticas) , Examen Final , Septiembre 2004

Apellidos, nombre Grupo

1. (a) Demostrar que

$$d(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

define una distancia en $\mathbb{R}$.

(b) Encontrar una condición necesaria y suficiente para que una sucesión de números reales sea convergente con la distancia anterior.

2. Demostrar brevemente o dar un contraejemplo, según convenga:

a) Un conjunto compacto es siempre cerrado.

b) Si A y B son compactos, $A \cup B$ es compacto.

c) Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ no son continuas, entonces $g \circ f : X \to Z$ tampoco es continua.

d) Existe una distancia en $\mathbb{R}$ que induce la topología cofinita.

3. Estudiar si son homeomorfos los siguientes espacios:

$A = S^1 \cup \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1\}$ $\qquad B = S^1 \cup \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq t \leq 2\}$

$C = S^1 \cup \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq t < 2\}$ $\qquad D = ([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$

4. Supongamos que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ es una colección de abiertos de $\mathbb{R}^2$ que cubre el segmento $[0,1] \times \{0\}$. Demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $[0,1] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \cup_{i \in I} \mathcal{U}_i$.