1. Dado un grupo $(G, *)$ y la aplicación $f : G \to G$ definida por $f(a) = a * a$, entonces
   a) f es un homomorfismo de grupos, aunque no es inyectivo.
   b) f es un homomorfismo de grupos, aunque no es sobreyectivo.
   c) f es un isomorfismo de grupos.
   d) f no es necesariamente un homomorfismo de grupos.
2. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros la operación $\odot$ se define mediante la ecuación $a \odot b = ab + 2a + 2b + 2$
   a) La operación $\odot$ no es asociativa.
   b) La operación $\odot$ no tiene elemento neutro.
   c) La operación $\odot$ tiene elemento neutro, pero no todo entero tiene un elemento simétrico o inverso respecto de esta operación.
   d) $(\mathbb{Z}, \odot)$ es un grupo conmutativo.
3. La aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(n) = n + (-1)^n$,
   a) no es inyectiva ni sobreyectiva,
   b) es biyectiva,
   c) es inyectiva, pero no sobreyectiva,
   d) es sobreyectiva, pero no inyectiva.
4. El determinante de la matriz
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$$
   vale

   a) -9 b) -3 c) 0 d) 3

5. Cuántas aplicaciones existen de $\{a, b, c, d\}$ en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

   a) 625 b) 20 c) 9 d) 256

6. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{1, 4\}$ y $D = \{a\}$. El cardinal del conjunto $(A \times B) \setminus (C \times D)$ es

   a) 8 b) 9 c) 10 d) 12

7. El orden de la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

   es

   a) 6 b) 8 c) 12 d) 24

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y)$. La dimensión del núcleo de f es

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

9. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. El subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^3$ verificando que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ es
   a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$.
   b) $W = \{0\}$.
   c) $W = \mathbb{R}^3$.
   d) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{smallmatrix} x-y & =0 \\ x-z & =0 \end{smallmatrix}\right\}$.
10. Dado el sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 3 \end{aligned}$$

   cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
   a) Es compatible determinado.
   b) Es incompatible.
   c) Es compatible indeterminado.
   d) Tiene exactamente 35 soluciones.

11. Los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son

a) $\{1,3,0\}$ b) $\{1,2,3,4,5\}$ c) $\{0,1,2,3\}$ d) No tiene valores propios

12. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$$

una matriz cuyos valores propios son 0 y 1. Los espacios propios de A tienen por ecuaciones

a) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x+2y=0 \\ z=0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+y+2z=0\right\}$

b) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+2y=0\right\}$ y $V_1 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+y+2z=0\right\}$

c) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x+2y=0 \\ x+y+2z=0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x+y+2z=0\right\}$

d) $V_0 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x+2y=0 \\ z=0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x+y=0 \\ z=0 \end{smallmatrix}\right\}$

13. Sea $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_p)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_3$ (p es un número primo). Entonces

a) A es diagonalizable y la base canónica es una base de vectores propios.

b) A es diagonalizable y todos los vectores de $(\mathbb{Z}_p)^3$ son propios.

c) A no es diagonalizable.

d) A es diagonalizable si y sólo si $\lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_3 = 0$.

14. Sea $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \mid \det(A) = 0\}$. Entonces

a) V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 4.

b) V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 0.

c) V es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 3.

d) V no es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

15. Consideremos los subespacios de $(\mathbb{Z}_5)^4$ definidos por las ecuaciones

$$U_1 = \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + y + 4z + t = 0 \end{cases} \text{ y } U_2 = \begin{cases} y + 3t = 0 \\ x + z + 3t = 0 \end{cases}$$

Una base de $U_1 + U_2$ es

a) $\{(1,0,4,0),(1,0,0,3),(0,1,0,0)\}$

b) $\{(1,0,4,0),(1,0,0,3),(0,0,1,3)\}$

c) $\{(1,0,4,0),(1,0,0,3),(1,1,1,3)\}$

d) $\{(1,0,4,0),(1,0,0,3)\}$

16. En $\mathbb{Z}$ definimos la relación de equivalencia $xRy \iff 9 \mid x^2 - y^2$. El cardinal de $\mathbb{Z}/R$ es

    a) 1 b) 4 c) 6 d) 9

17. Sea

$$\begin{aligned} f : \{0, 1, 2, \dots, 14\} &\longrightarrow \mathbb{Z}_{15} \\ a &\longmapsto (2^a \text{ mód } 15) \end{aligned}$$

    El cardinal de $\mathrm{im}(f)$ es

    a) 1 b) 4 c) 10 d) 15

18. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$$

    es

    a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

19. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ dos bases de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ tales que $v_1' = v_1 + 2v_2 + v_3$, $v_2' = -v_2 + v_3$ y $v_3' = -v_1 + v_2 - 5v_3$. Si las coordenadas de x respecto de la base B son $(1, -2, 3)$, entonces las coordenadas de x respecto de B' son:

    a) $(3, 10, 2)$ b) $(-2, 7, -16)$ c) $(0, 5, -18)$ d) $(-9, 4, 2)$

20. Sean $\sigma_1 = (2, 3, 8, 6)(4, 2, 5)$ y $\sigma_2 = (4, 5)(7, 1, 6)(6, 8)(4, 5)$. Entonces la permutación σ que satisface la igualdad $\sigma^7 = \sigma^{-4}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma^{12}$ es
    a) $(3, 4, 5, 2, 8)(7, 1, 6)$
    b) $(1, 6, 8)(2, 5, 4, 7, 3)$
    c) $(2, 5, 1, 8, 7, 3, 4)$
    d) $(7, 5, 2, 1, 6)(8, 3, 4)$