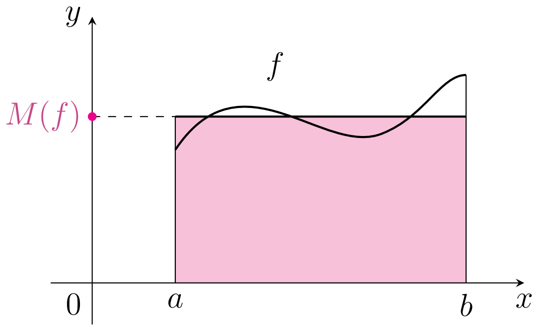

Рис. 3.

Упражнение 5. Докажите, что если a, b, c, d — действительные числа, сумма которых равна 0, то

$$|a|+|b|+|c|+|d| \geq |a+d|+|b+d|+|c+d|. \quad (4)$$

Решение. Если в (3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ заменить их проекциями на какую-нибудь ось («Геометрия 9»), получится (4). Возникает идея: доказать (3), рассматривая проекции данных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ на всевозможные оси. Попробуем ее реализовать.

Пусть $\vec{p}$ — вектор. Введем вспомогательную функцию p следующим образом: фиксируем некоторую ось l_0; обозначим через $p(\alpha)$ проекцию вектора $\vec{p}$ на ось l, образующую с осью l_0 угол α (рис. 4). Если φ — угол между вектором $\vec{p}$ и осью l_0, то $p(\alpha) = |\vec{p}| \cos(\varphi - \alpha)$.

Рассмотрим среднее значение $M(|\vec{p}|)$ функции $\alpha \to |p(\alpha)|$ на отрезке $[0; 2\pi]$. Из определения (2)

$$\begin{aligned} M(|p|) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |p(\alpha)|\, d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |p||\cos(\varphi - \alpha)|\, d\alpha = \\ &= \frac{|\vec{p}|}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\cos(\varphi - \alpha)|\, d\alpha. \qquad (5) \end{aligned}$$

Покажем существование такого $k \neq 0$, что для любого вектора $\vec{p}$ справедливо равенство

$$M(|p|) = k\,|\vec{p}|. \qquad (6)$$

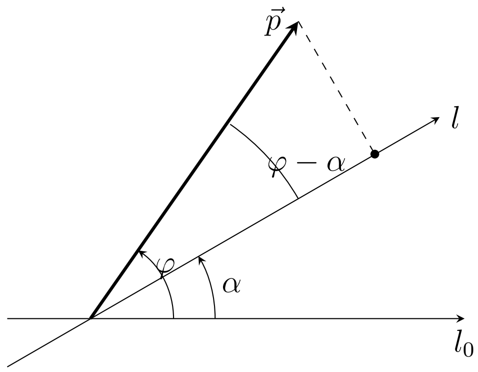

Рис. 4.

В силу (5) достаточно доказать, что интеграл $\int\limits_0^{2\pi} |\cos(\varphi - \alpha)|\, d\alpha$ не зависит от вектора $\vec{p}$, то есть не зависит от угла φ.

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^{2\pi} |\cos(\varphi - \alpha)|\, d\alpha = \int\limits_0^{2\pi} |\cos(\alpha - \varphi)|\, d\alpha = \\ &= \int\limits_{0-\varphi}^{2\pi-\varphi} |\cos\alpha|\, d\alpha = \int\limits_{-\varphi}^{2\pi-\varphi} |\cos\alpha|\, d\alpha = \\ &= \int\limits_{-\varphi}^{0} |\cos\alpha|\, d\alpha + \int\limits_{0}^{2\pi-\varphi} |\cos\alpha|\, d\alpha = \\ &= \int\limits_{2\pi-\varphi}^{2\pi} |\cos(\alpha - 2\pi)|\, d\alpha + \\ &+ \int\limits_{0}^{2\pi-\varphi} |\cos\alpha|\, d\alpha = \int\limits_{2\pi-\varphi}^{2\pi} |\cos\alpha|\, d\alpha + \\ &+ \int\limits_{0}^{2\pi-\varphi} |\cos\alpha|\, d\alpha = \int\limits_{0}^{2\pi-\varphi} |\cos\alpha|\, d\alpha + \\ &+ \int\limits_{2\pi-\varphi}^{2\pi} |\cos\alpha|\, d\alpha = \int\limits_{0}^{2\pi} |\cos\alpha|\, d\alpha. \qquad (7) \end{aligned}$$

В этой выкладке использованы два свойства интегралов:

$$\int\limits_a^b f(x+p)\, dx = \int\limits_{a+p}^{b+p} f(x)\, dx,$$

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx$$