האוניברסיטה הפתוחה

מדעי המחשב

30 ביוני 06

אל: הסטודנטים בקורס "חישוביות" (20365) - ב2006

מאת: אלעזר בירנבוים (מרכז ההוראה)

שלום רב.

מצורפים פתרון הבחינה לדוגמה שבסוף חוברת המטלות ושתי בחינות נוספות לדוגמה.

חלק מן התשובות אינן מפורטות דיין, אלא רק מצביעות על דרך פתרון אפשרית.

קווים לפתרון השאלות של שתי הבחינות הנוספות לדוגמה יפורסמו באתר האינטרנט של הקורס ביום ראשון 16 ביוני 06.

הצלחה בבחינות

אלעזר

פתרון הבחינה לדוגמה

1. א. נגדיר פונקציה של שני משתנים $H(x,y)$:

$$H(x,0) = x$$

$$H(x, y+1) = \begin{cases} f(H(x,y)) & if\ \ y\ is\ even \\ g(H(x,y)) & if\ \ y\ is\ odd \end{cases}$$

H היא פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית (הוכיחו!).

כמו כן, $h(x) = H(x,x)$, ולכן גם h היא פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית.

ב. נגדיר את הפונקציות הבאות :

$$F(x,0) = x$$

$$F(x, y+1) = f(F(x,y))$$

(למעשה, $F(x,y) = f^{(y)}(x)$).

$$H(x) = F(x,x)$$

(למעשה, $H(x) = f^{(x)}(x)$).

$$G(x,0) = H(x)$$

$$G(x, y+1) = g(G(x,y))$$

(למעשה, $G(x,y) = g^{(y)}(f^{(x)}(x))$).

וכעת, $k(x) = G(x,x)$.

2. א. הנה תכנית שעוצרת על $x \in N$ אם ורק אם $x \in A$:

$$[\mathrm{A}]\ \ \mathrm{Z} \leftarrow \Phi(n,n)$$

$$\mathrm{IF}\ \ \mathrm{Z} \neq 0\ \ \mathrm{GOTO\ A}$$

באופן דומה אפשר לכתוב תכנית שעוצרת על $x \in N$ אם ורק אם $x \in B$. לכן A ו-B נל"ר.

ברור ש-A ו-B אינסופיות, כי יש אינסוף תכניות שמחשבות את הפונקציה הקבועה 0, ומספרה של כל תכנית כזו שייך ל-A, ויש אינסוף תכניות שמחשבות את הפונקציה הקבועה 1, ומספרה של כל תכנית כזו שייך ל-B.

ב. בהינתן מספר n של תכנית, אפשר לכתוב תכנית Q שלכל קלט x **שלה** תריץ את התכנית שמספרה n על הקלט n, ואם התכנית שמספרה n עצרה על הקלט n, התכנית Q תשים 0 (1) במשתנה Y ותעצור.

מספרה של התכנית Q שייך לקבוצה A (B), אם ורק אם המספר n שייך לקבוצה K.

הראינו רדוקציה של K ל-A ול-B, ולכן A ו-B אינן רקורסיביות.

ג. ברור ש-A ו-B זרות. נניח בשלילה שהן ניתנות להפרדה רקורסיבית. אז יש קבוצה רקורסיבית C כך ש- $A \subseteq C$ ו- $B \cap C = \varnothing$.

תהי P תכנית המחשבת את הפונקציה האופיינית של C, ויהי p המספר של התכנית P.

נשאל: מה מחזירה P על p?

אם היא מחזירה 1, אז p שייך ל-C (כי P מחשבת את הפונקציה האופיינית של C). אבל אז p שייך גם ל-B (כי $\Phi(p, p)=1$), וזה סותר את הנתון שהחיתוך של B ו-C ריק.

אם היא מחזירה 0, אז p איננו שייך ל-C, אבל כן שייך ל-A, וזה סותר את הנתון ש-A מוכלת ב-C.

בכל מקרה אנו מגיעים לסתירה, ומכאן ש-A ו-B אינן ניתנות להפרדה רקורסיבית.

3. לא תמיד $A \equiv_m B$.

אם $B=N$ או $B=\varnothing$ (כזכור, אלה קבוצות רקורסיביות) ו- $A \neq N$, $A \neq \varnothing$, אז לא קיימת פונקציה f כך ש- $x \in A$ אם ורק אם $f(x) \in B$, ולכן לא מתקיים $A \leq_m B$, ולכן לא מתקיים $A \equiv_m B$.

4. אם S היא קבוצה נל"ר, אז יש תכנית P כך ש-P עוצרת על x אם ורק אם $x \in$ S.

יהי p המספר של P.

התכנית הבאה מחשבת פונקציה .p.c ש-S היא גם תחום הגדרתה וגם הטווח שלה.

$$Z \leftarrow \Phi(X,p)$$

$$Y \leftarrow X$$

5. ראשית עלינו להראות שבעיית הקבוצה הבלתי-תלויה (INDEPENDENT-SET) שייכת ל-**NP**:

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ומספר טבעי k, יכולה מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית M לנסות לסמן k קדקודים ב-V באופן לא דטרמיניסטי. אם M סימנה פחות מ-k קדקודים ב-V, היא תיכנס ללולאה אינסופית. אם M הצליחה לסמן k קדקודים ב-V, היא תבדוק ביחס לכל זוג קדקודים מסומנים האם הם קשורים על-ידי צלע ב-E. אם נמצא זוג קדקודים הקשורים על-ידי צלע, M תיכנס ללולאה אינסופית. אם M עברה על כל זוגות הקדקודים, ולא נמצא אף זוג שקשור על-ידי צלע, M תעצור.

קל לראות ש-M יכולה לבצע את כל הפעולות הנזכרות בזמן פולינומיאלי בגודל הגרף G, וש-M מקבלת את (G, k) אם ורק אם יש ב-G קבוצה בלתי תלויה בגודל k. לכן בעיית הקבוצה הבלתי-תלויה שייכת ל-**NP**.

כעת נראה רדוקציה: COMPLETE-SUBGRAPH $\leq_p$ INDEPENDENT-SET

בהינתן גרף $G=(V,E)$ ומספר טבעי k, ומעוניינים לדעת האם יש ב-G תת-גרף שלם בגודל k, מכונת טיורינג דטרמיניסטית M יכולה בזמן פולינומיאלי לבנות את הגרף המשלים לגרף G.

לגרף G יש תת-גרף שלם בגודל k, אם ורק אם בגרף המשלים יש קבוצה בלתי-תלויה בגודל k.

חישוביות (20365) - בחינה לדוגמה מס' 1

בבחינה חמש שאלות. עליכם לענות על כולן.

1. $f: N \to N$ היא פונקציה **שלמה**. לכל $x > 100$, $f(x) = x^2$.
הוכיחו : f היא פונקציה **פרימיטיבית רקורסיבית** (בלי תלות בערכי $f(x)$ עבור $x \leq 100$).

2. Bהיא קבוצה נל"ר, $\text{TOT} \subseteq B$, $\text{EMPTY} \subseteq \overline{B}$.
הוכיחו : B היא קבוצה m-שלמה.

3. הוכיחו (בעזרת רדוקציה) שהקבוצה המשלימה ל-TOT **איננה נל"ר**.

4. הוכיחו **בעזרת רדוקציה של בעיית עצירה של מכונות טיורינג** שלא קיים אלגוריתם המכריע לכל מכונת טיורינג M, האם M עוצרת כאשר היא מתחילה לפעול על סרט ריק.

5. בעיית HITTING-SET היא הבעיה הבאה :

הקלט : 1. אוסף סופי $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ של קבוצות חלקיות של קבוצה סופית S.
(כלומר, לכל $1 \leq i \leq m$, $C_i \subseteq S$).
2. מספר טבעי k.

השאלה : האם קיימת תת-קבוצה T של S כך ש- $|T| \leq k$, ולכל $1 \leq i \leq m$, $T \cap C_i \neq \emptyset$.

הוכיחו כי HITTING-SET היא בעיה **NP**-שלמה.

הדרכה : כדי להוכיח שהיא **NP**-קשה, הראו רדוקציה של VERTEX-COVER.

חישוביות (20365) - בחינה לדוגמה מס׳ 2

בבחינה חמש שאלות. עליכם לענות על כולן.

1. נגדיר את הפרדיקט $Perm(x,y)$: ערכו של פרדיקט זה הוא 1, אם ורק אם הסדרה באורך Lt(x) ש-y הוא מספר גדל (Gödel) שלה היא **תמורה של הסדרה ש-x הוא מספר גדל שלה**.
(כלומר, ערכו של הפרדיקט הוא 1, אם ורק אם y מייצג סדרה שהיא תמורה של הסדרה הקצרה ביותר ש-x מייצג (כלומר, ללא אפסים בסוף הסדרה). אם Lt(y)>Lt(x) ערכו של הפרדיקט הוא 0).

   הוכיחו : הפרדיקט $Perm(x,y)$ הוא **פרימיטיבי רקורסיבי**.

   זכרו שבסדרה איבר יכול להופיע יותר מפעם אחת.

2. הוכיחו שיש מספר טבעי e כך ש- $W_e = \{e, e^2, e^3\}$.

3. הוכיחו שלכל קבוצה נל״ר B, $B \le_m TOT$.
האם TOT היא קבוצה m-שלמה? הסבירו את תשובתכם.

4. הוכיחו **שלא קיים אלגוריתם** המכריע לכל מכונת טיורינג M, האם M **עוצרת לפחות על חמש מילות קלט**.

   הדרכה : רדוקציה של בעיית העצירה של מכונות טיורינג.

5. הוכיחו ששפת המספרים הפריקים (המספרים שאינם ראשוניים) המיוצגים בבסיס 2 שייכת למחלקה **NP**.