חישוביות (20365) סמסטר א2006 - קווים לפתרון בחינה לדוגמה מס' 2

.1 $Perm(x,y) \Leftrightarrow (x>0) \wedge (y>0) \wedge (Lt(x) \geq Lt(y)) \wedge (\forall t)_{\leq Lt(x)} \left[\sum_{k=1}^{Lt(x)} \left((x)_k = (x)_t \right) = \sum_{k=1}^{Lt(x)} \left((y)_k = (x)_t \right) \right]$

ערכו של הפרדיקט הוא 1 אם ורק אם x ו-y גדולים מ-0 (0 איננו מספר גדל של אף סדרה); האורך של הסדרה הקצרה ביותר ש-x מייצג איננו קטן מן האורך של הסדרה הקצרה ביותר ש-y מייצג; ולכל איבר i בסדרה ש-x מייצג, מספר המופעים של i בסדרה ש-x מייצג שווה למספר המופעים של i בסדרה ש-y מייצג (מתייחסים ל-y כמייצג סדרה באורך של הסדרה הקצרה ביותר ש-x מייצג).

כעת מראים שכל הרכיבים של הביטוי הזה הם פונקציות פרימיטיביות רקורסיביות.

.2 נגדיר פונקציה של שני משתנים $g(x, y)$: ערך הפונקציה הוא 0 אם x שווה ל-y או ל-y^2 או ל-y^3.
לכל ערך אחר של x הפונקציה לא מוגדרת.
g היא פונקציה רקורסיבית חלקית (מוכיחים על-ידי כתיבת תכנית שמחשבת את g).
לכן, לפי משפט הרקורסיה, יש מספר e כך שהתכנית שמספרה הוא e מחשבת את הפונקציה של משתנה אחד $g(x, e)$. פונקציה זו מוגדרת רק על e, על e^2 ועל e^3. לכן W_e, שהיא קבוצת הקלטים שעליהם עוצרת התכנית שמספרה הוא e, שווה ל- $\{e, e^2, e^3\}$.

.3 כל קבוצה נל"ר ניתנת לרדוקציה ל-K (K היא m-שלמה).
אפשר להראות שהרדוקציה של הוכחת משפט 4.6.6 היא רדוקציה של K ל-TOT.
לכן, לפי משפט 4.6.3, כל קבוצה נל"ר ניתנת לרדוקציה ל-TOT.

TOT איננה m-שלמה כי היא לא נל"ר.

.4 נניח בשלילה שקיים אלגוריתם כזה. נראה שבעזרתו אפשר להכריע את בעיית העצירה של מכונות טיורינג.
תהי M מכונת טיורינג ותהי w מילה. נניח שאנו מעונינים לדעת האם M עוצרת בריצתה על w או לא.
נבנה מכונה M' שלכל מילת קלט שלה v, מוחקת את v, כותבת את w, ומריצה את M על w.
אם M עוצרת על w, אז M' עוצרת על כל קלט **שלה**, ובפרט היא עוצרת לפחות על חמש מילות קלט.
אם M לא עוצרת על w, אז M' לא עוצרת על אף קלט שלה, ובפרט היא עוצרת על פחות מחמש מילות קלט.
לכן M' עוצרת לפחות על חמש מילות קלט אם ורק אם M עוצרת על w.

5. מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית יכולה, על קלט n, לכתוב על הסרט שלה באופן לא דטרמיניסטי שני מספרים בינריים קטנים מ-n וגדולים מ-1. (המכונה תכתוב באופן לא דטרמיניסטי שתי מחרוזות של ספרות בינריות. אם אחת מהן מייצגת מספר שאינו קטן מ-n או שאינו גדול מ-1, המכונה תיכנס ללולאה אינסופית). לאחר מכן המכונה תכפול את שני המספרים שהיא כתבה, ותשווה את התוצאה לקלט n. אם התוצאה שווה ל-n, המכונה תעצור; אחרת, היא תיכנס ללולאה אינסופית.

מראים שזמן הריצה של המכונה הזו פולינומיאלי בגודל הקלט (כלומר, במספר הספרות הדרושות לייצוג המספר n בבסיס 2), ושהמכונה אכן מקבלת את שפת המספרים הפריקים המיוצגים בבסיס 2.