חישוביות ומבוא לסיבוכיות – א2006 - פתרונות לשאלות ממ״ן 12

שאלה 2

הרעיון של הוכחת משפט 4.2.1 הוא להראות שאם מניחים שהפרדיקט HALT הוא פרדיקט ניתן לחישוב, אז אפשר לבנות תכנית שלא קיימת. זה כמובן בלתי אפשרי.

התכנית P של הוכחת המשפט ($[A]$ IF HALT(X, X) GOTO A) היא תכנית ששונה מכל התכניות, ולכן אין תכנית כזו. (כל תכנית שווה לפחות לעצמה).

P מתנהגת אחרת מכל תכנית x על הקלט x: אם x עוצרת על x, אז P על x לא עוצרת, ולכן P ו-x מתנהגות אחרת על הקלט x. אם x לא עוצרת על x, אז P על x כן עוצרת, ולכן שוב P ו-x מתנהגות אחרת על הקלט x.

(הנקודה החשובה כאן היא שכדי ששתי תכניות תהיינה שונות, די שהן יתנהגו באופן שונה על קלט אחד).

א. לא. כאן התכנית P על זוג הקלטים (x_1, x_2) מתנהגת שונה מן התכנית x_2 על הקלט x_1. זה לא מוכיח ש-P שונה מן התכנית x_2. (תוצאת ריצת P על שני קלטים נקבעת לפי תוצאת ריצת x_2 על קלט אחד. עדיין ייתכן ש-x_2 על שני קלטים זהה ל-P).

ב. כן. כאן התכנית P על הקלט x מתנהגת שונה מן התכנית $x+1$ על הקלט x. (אם התכנית $x+1$ עוצרת על x, אז P לא עוצרת על x, ולהפך). לכן התכנית P שונה מכל תכנית $x+1$. מכיוון ש-P איננה התכנית שמספרה 0, התכנית P שונה מכל התכניות, ולכן אין תכנית כזו.

ג. לא. כאן התכנית P מתנהגת על x אחרת מן התכנית x על $x–1$. (אם התכנית x עוצרת על $x–1$, אז P לא עוצרת על x, ולהפך). זה לא מראה ש-P שונה מן התכנית x. (ייתכן ש-P מתנהגת כמו x לכל קלט. מה שהראינו הוא ש-P על x מתנהגת שונה מ-x על $x–1$. כלומר, התנהגות שונה על קלטים שונים. זה לא אומר ש-P איננה x).

שאלה 5

א. (a) אם f שייכת למחלקת C PRC, אז f היא פונקציה שלמה.

$$y \in \mathrm{gr}(f) \iff \mathrm{Lt}(y) \le n+1 \ \& \ (y)_{n+1} = f((y)_1,\ldots,(y)_n)$$

(b) הנה תכנית המחשבת את f:

$[A]$ IF $[X_1, \ldots, X_n, Y] \in \mathrm{gr}(f)$ GOTO E

$Y \leftarrow Y + 1$

GOTO A

(c) נניח ש-f היא הפונקציה שאיננה מוגדרת על אף $(x_1,\ldots,x_n)$.

f היא פונקציה לא רקורסיבית, אבל $\mathrm{gr}(f) = \varnothing$ היא קבוצה רקורסיבית.

ב. $$f(x) = \begin{cases} 1 & if\ HALT(x,x) \\ \uparrow & otherwise \end{cases}$$

במקרה זה, $\mathrm{gr}(f) = \{[x, 1] \mid \mathrm{HALT}(x, x)\}$. $\mathrm{gr}(f)$ לא רקורסיבית, כי אחרת על-ידי הבדיקה האם $[x, 1]$ שייך ל-$\mathrm{gr}(f)$ אפשר היה לדעת האם $\mathrm{HALT}(x, x)$.

ג. נניח ש-f רקורסיבית חלקית. נכתוב תכנית שעוצרת על x אם ורק אם $x \in \mathrm{gr}(f)$:

$[A]$ IF $\mathrm{Lt}(X) > n+1$ GOTO A

$Z \leftarrow f((X)_1, \ldots, (X)_n)$

IF $Z \neq (X)_{n+1}$ GOTO A

נניח ש- $\mathrm{gr}(f)$ היא קבוצה נל״ר. נכתוב תכנית שמחשבת את $f(x_1, \ldots, x_n)$.

יהי p המספר של תכנית שעוצרת על x אם ורק אם $x \in \mathrm{gr}(f)$.

$[A]$ $Z \leftarrow [X_1, \ldots, X_n, Y]$

IF $\mathrm{STP}^{(1)}(Z, p, T)$ GOTO E

$Y \leftarrow Y + 1$

IF $Y \le T$ GOTO A

$T \leftarrow T + 1$

$Y \leftarrow 0$

GOTO A

התכנית מחפשת מספר y כך ש- $(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathrm{gr}(f)$.

אם נמצא y כזה, אז זהו $f(x_1, \ldots, x_n)$.

שאלה 7

א. (a) התכנית הבאה עוצרת על x אם ורק אם $x \in A$:

$$\begin{array}{ll} & Z \leftarrow \Phi(X, X) \\ [A] & \text{IF } Z > X \text{ GOTO } E \\ & \text{GOTO } A \end{array}$$

(b) נסמן: $p(x) \Leftrightarrow \Phi(x, x)\downarrow \ \& \ \Phi(x, x) > x$

אז $A = \{x \in N \mid p(x)\}$

נניח בשלילה ש-A רקורסיבית. אז $p(x)$ ניתן לחישוב.

תהי P התכנית הבאה:

$$\begin{array}{ll} [A] & \text{IF } p(X) \text{ GOTO } A \\ & Y \leftarrow X + 1 \end{array}$$

אז $p(\#(P)) \Leftrightarrow \sim p(\#(P))$.

ב. הראינו ש-A נל״ר. נראה רדוקציה של K ל-A:

תהי P התכנית הבאה:

$$\begin{array}{l} Z \leftarrow \Phi(X_2, X_2) \\ Y \leftarrow X + 1 \end{array}$$

ויהי $p = \#(P)$.

לפי משפט הפרמטר, $\Phi^{(2)}(X_1, X_2, p) = \Phi^{(1)}(X_1, S_1^{\,1}(X_2, p))$.

מתקיים: $z \in K$ אם ורק אם $S_1^{\,1}(z, p) \in A$.

הפונקציה $S_1^{\,1}(z, p)$ ניתנת לחישוב. לכן $K \leq_m A$.

שאלה 9

מראים רדוקציה $K \leq_m B$: הרדוקציה שמופיעה בהוכחת משפט 4.6.6 בספר (EMPTY איננה נל״ר) מעתיקה את איברי K ל-TOT ואת איברי $\overline{K}$ ל-EMPTY. לכן נכון גם לומר שהיא מעתיקה את איברי K ל-B ואת איברי $\overline{K}$ ל- $\overline{B}$.