יש לפתור **ארבע** מחמש השאלות.

שאלה 1 (25 נקודות)

ברצוננו להרחיב את מבנה הנתונים של ערימה בינומית כך שיתמוך בפעולה חדשה:

BINOMIAL_HEAP_SUBSTRUCT(H) אשר מקבלת ערימה בינומית H בגודל n ומחזירה ערימה בינומית בגודל $n - 1$ (שים לב, אין חשיבות לזהות האיבר הנמחק).

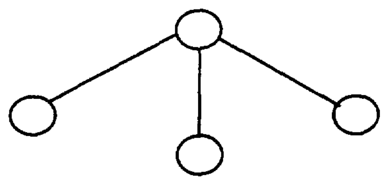
עלותה של הפעולה החדשה צריכה להיות $O(\log n)$.

כתוב אלגוריתם למימוש הפעולה החדשה. הוכח את נכונותו ונתח את סיבוכיותו.

שים לב – עליך לבצע פעולה זאת באופן ישיר, כלומר, אינך יכול להשתמש לצורך מימוש פעולה זו בשגרה BINOMIAL_HEAP_DECREASE_MIN או BINOMIAL_HEAP_DELETE או BINOMIAL_HEAP_UNION.

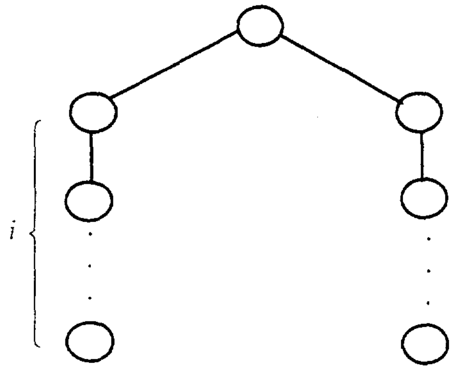
שאלה 2 (25 נקודות)

א. האם ניתן להגיע, בעזרת הפעולות המותרות על ערימת פיבונצ'י, לערימת פיבונצ'י מהצורה הבאה?



אם כן, הראה כיצד. אם לא, הוכח.

ב. האם ניתן להגיע, לכל i טבעי, בעזרת הפעולות המותרות על ערימת פיבונצ'י, לערימת פיבונצ'י מהצורה הבאה?



אם כן, הראה כיצד. אם לא, הוכח.

שאלה 3 (25 נקודות)

ידוע כי רשת מיון בעלת n קלטים מכילה בהכרח לפחות משווה אחד בין הקו האופקי ה-i לקו האופקי ה-$i+1$ עבור כל $1 \le i \le n-1$ (ראה תרגיל 28.2-5 בספר הקורס).

נניח כי נתונה רשת מיון בעלת n קלטים ואנו מורידים ממנה משווה אחד המחבר בין הקו האופקי ה-i לקו האופקי ה-$i+1$ (עבור איזשהו $1 \le i \le n-1$).

האם בהכרח לכל סדרת קלט $a_1 \ldots a_n$ המקיימת $a_i \le a_{i-1}$ תתקבל סדרת פלט ממויינת?
(במלים אחרות, האם בהכרח הרשת תדע למיין נכון את כל סדרות הקלט $a_1 \ldots a_n$ המקיימות $a_i \le a_{i+1}$?) הוכח את תשובתך.

שאלה 4 (25 נקודות)

איה ובועז מחזיקים בשני עותקים של אותו בסיס נתונים גדול, אורכו בסיביות יסומן n. כמו כן, נסמן $N = 2^n$ ונסמן ב- M_a ו- M_b את הערך המספרי של בסיסי הנתונים המוחזקים ע"י איה ובועז בהתאמה (כאשר מתעלמים מהמבנה הפנימי שלהם ומתייחסים אליהם כאל רצף סיביות בבסיס 2).

אחת לפרק זמן מסוים איה ובועז מבצעים בדיקה לוודא שהעותקים שברשותם זהים. כדי להימנע מהעברת בסיס הנתונים כולו, הם מבצעים את הפרוטוקול הבא:

יהי k השלם הקטן ביותר כך שמכפלת k הראשוניים הקטנים ביותר גדולה מ- N. (כלומר, k הוא השלם הקטן ביותר המקיים: $\prod_{1 \le i \le k} p_i \ge N$ כאשר p_i הוא הראשוני ה-i עפ"י הסדר הטבעי).

1. איה בוחרת באקראי מספר ראשוני p_j. כאשר j נבחר באקראי בתחום $1, \ldots, 2k$.
2. איה מחשבת $m = M_a (\text{mod } p_j)$ ושולחת לבועז את m ו- j.
3. בועז מחשב את p_j ובודק האם $M_b (\text{mod } p_j) = m$. בועז שולח לאיה את תוצאת ההשוואה.

א. בהנחה שעותקי בסיס הנתונים זהים, מה תהיה תוצאת הפרוטוקול?

ב. בהנחה שעותקי בסיסי הנתונים שונים, עבור כמה (לכל היותר) מ- $2k$ הראשוניים הקטנים ביותר יתקיים התנאי $M_a \equiv M_b (\text{mod } p_j)$? הוכח!
הסק מהי ההסתברות לכל אחת מהתוצאות שבועז שולח (בצעד 3) במקרה זה.

שאלה 5 (25 נקודות)

הראה כיצד ניתן בהינתן שני מצולעים קמורים P ו- Q בעלי n קדקודים כל אחד, שחיתוך שפותיהם אינו ריק, למצוא את הקמור של איחודם בזמן $O(n)$.

סוף!