חישוביות (20365) סמסטר א2006 - קווים לפתרון בחינה לדוגמה מס' 1

1. נסמן לכל $0 \le i \le 100$: $y_i = f(i)$.

נגדיר את f לפי מקרים :

$f(x) = y_i$ אם $x = i$, $0 \le i \le 100$ (יש כאן 101 מקרים) ;

$f(x) = x^2$ אם $x > 100$.

כעת משתמשים במסקנה 3.5.5 (הגדרה לפי מקרים) כדי להוכיח ש-f היא פרימיטיבית רקורסיבית : הפרדיקטים שבהם משתמשים להבחנה בין המקרים הם כולם פרדיקט השוויון שהוא פרימיטיבי רקורסיבי. בדיקת השוויון נעשית מול מספרים, כלומר, מול פונקציות קבועות שהן פרימיטיביות רקורסיביות. הפונקציות שבהן משתמשים בהגדרה הן פונקציות קבועות שהן פרימיטיביות רקורסיביות והפונקציה x^2 שגם היא פרימיטיבית רקורסיבית. לכן, לפי מסקנה 3.5.5, f היא פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית.

2. B נל"ר : התכנית הבאה עוצרת על x אם ורק אם x שייך ל-B :

$$Z \leftarrow \Phi(0, X)$$

כדי להוכיח שלכל קבוצה נל"ר C מתקיים $C \le_m B$, נוכיח ש- $K \le_m B$. (על K ידוע שהיא m-שלמה).

אפשר להראות שהרדוקציה של הוכחת משפט 4.6.6 היא רדוקציה של K ל-B.

3. כדי להוכיח ש-C איננה נל"ר, נראה רדוקציה של EMPTY ל-C :

נבחר מספר אחד x_0 ב-EMPTY (x_0 הוא מספר של תכנית שלא עוצרת על אף קלט).

הפונקציה של הרדוקציה היא $f(n) = \langle n, x_0 \rangle$.

הפונקציה f ניתנת לחישוב.

מתקיים : $n \in \text{EMPTY}$ אם ורק אם $f(n) \in C$.

4. נניח בשלילה שקיים אלגוריתם כזה. נראה שבעזרתו אפשר להכריע את בעיית העצירה של מכונות טיורינג.

תהי M מכונת טיורינג ותהי w מילה. נניח שאנו מעונינים לדעת האם M עוצרת בריצתה על w או לא.

נבנה מכונה M' שעל הסרט הריק כותבת את w ומריצה את M על w. (על כל קלט אחר אפשר להחליט מה שרוצים ביחס לפעולתה של M').

M' עוצרת כאשר היא מתחילה לפעול על סרט ריק אם ורק אם M עוצרת על w.

5. שייכות ל-**NP**: מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית תסמן באופן לא דטרמיניסטי מספר לא גדול מ-k של איברים של S. לאחר מכן המכונה תעבור על כל הקבוצות החלקיות C_i ותוודא שבכל תת-קבוצה כזו יש איבר מסומן. אם נמצאה תת-קבוצה שאין בה איבר מסומן, המכונה תיכנס ללולאה אינסופית. אם בכל תת-קבוצה יש איבר מסומן, המכונה תעצור.

זמן הריצה של השלב הראשון (סימון האיברים) לינארי בגודל הקלט.

זמן הריצה של השלב השני אינו גדול מגודל הקלט בשלישית (לכל איבר של ה-C_i-ים, משווים בינו לבין כל אחד מן האיברים המסומנים).

לכן המכונה שתיארנו מקבלת את השפה בזמן פולינומיאלי לא דטרמיניסטי. זה מוכיח שהשפה שייכת ל-**NP**.

רדוקציה פולינומיאלית של VERTEX-COVER:

הקבוצה S תהיה קבוצת הצמתים של הגרף G.

לכל צלע $e_i = (u, v)$ בגרף נגדיר תת-קבוצה $C_i = \{u, v\}$.

ברור שהבנייה המתוארת ניתנת לביצוע בזמן פולינומיאלי בגודל של הגרף G.

כדי להשלים את ההוכחה, מראים שיש בגרף כיסוי קדקודים בגודל $\leq k$ אם ורק אם יש תת-קבוצה T של S כך ש- $|T| \leq k$ ולכל i, $T \cap C_i \neq \emptyset$.