האוניברסיטה הפתוחה

תיקונים ותוספות למדריך הלמידה בקורס "חישוביות ומבוא לסיבוכיות מופשטת" (20365)

הערה: בכמה מקומות במדריך הלמידה מופיעים תיקונים לדברים הכתובים בספר. התיקונים האלה נכתבו למהדורה קודמת של הספר. אם במהדורה שלפניכם הדברים בספר מתוקנים, התעלמו מן הנאמר במדריך.

- בפתרון תרגיל 1.2.4 (עמוד 16 במדריך) בסעיפים ג ו-ד צריך להיות $f(0)\uparrow$ ולא $f(0)\downarrow$.
- בפתרון תרגיל 2.5.4 (עמוד 35 במדריך) כתוב בטעות Y במקום V.
- בפתרון תרגיל 3.6.4 (עמוד 61 במדריך) צריך להיות הסימן $\Leftrightarrow$ במקום סימן השוויון.
- בפתרון תרגיל 3.8.5 (עמוד 64-65 במדריך) נפלו טעויות. נא התעלמו מהפתרון שבמדריך.
- בהמשך מכתב זה מופיעים מילות סיכום לפרקים 2 ו-3 ותמונה של עולם הפונקציות הנלמדות בפרקים אלה.
- יש למחוק את השורה הראשונה בעמוד 78 במדריך הלמידה. (מה שכתוב שם על תרגיל 4.3.1 איננו נכון).
- בעמוד 81 בשורות 8 ו-9 צריך להוסיף בתוך הסוגריים y_0 לאחר $x_1,...,x_n$.
- בעמוד 83 בשורה העשירית מלמטה בסוף צד ימין של הגרירה צריך להוסיף: $x > 0 \wedge$.
  בסוף הפסקה שלאחר מכן יש להוסיף: הדרישה $x > 0$ מבטיחה ש-x מייצג מספר גדל.
- בתחילת עמוד 85 במדריך הלמידה ניתן להוסיף את הפסקה הבאה:
  הסדרה $W_0,W_1,W_2,...$ מהווה מנייה של כל הקבוצות נל"ר. שים לב שכל קבוצה מופיעה בסדרה זו אינסוף פעמים.
- בתחילת עמוד 86 במדריך הלמידה ניתן להוסיף את הפסקה הבאה:
  הפרדיקט שבו משתמשים בהוכחת המשפט (משפט 4.4.8) הוא הפרדיקט $STP^{(1)}(x,n,t)$, כאשר $B=W_n$. מכיוון ש-n הוא מספר קבוע, הפרדיקט $STP^{(1)}(x,n,t)$ הוא פונקציה של x ו-t בלבד, והוא פרדיקט דו-מקומי, כמו שנדרש במשפט.
- בפתרון תרגיל 4.3.3 בעמוד 117 בשורה החמישית צריך להיות NEWNUM(i, n).
  בסוף הפתרון של התרגיל, בהגדרה של counter(n), צריך לחסר 1 באגף ימין.
- בפתרון תרגיל 4.4.1 (בעמוד 117) השורה הראשונה בתכנית *Q* צריכה להיות:
  $$[A]\ \ \text{IF}\ \ Lt(X)>m \vee X=0\ \ \text{GOTO}\ A$$
- בהמשך מכתב זה מופיעים פתרון לתרגיל 4.6.12 בספר (עמוד 95) ופתרון מדויק לתרגיל 4.7.5 במדריך הלמידה (תרגיל 4.7.8 בספר בעמוד 97).
- ניתן לפסוח על הדוגמה המופיעה בספר בעמוד 101.
- ניתן להוסיף בתחילת עמוד 106 במדריך הלמידה את הדברים הבאים: התכנית Q_n לא בהכרח מחשבת פונקציה .c, כי התכנית שמספרה n לא בהכרח עוצרת על g(x).
- בעמוד 107 בשורה השישית מלמטה צריך לתקן את "מסתכמת" ל"מסתמכת".
- בסעיף 4.9 בספר, די להבין את רעיון ההוכחה באופן כללי. אין צורך להבין בעמקות את כל הפרטים של ההוכחה.
- בפתרון תרגיל 5.1.2 (בעמוד 141) בסעיף (a) יש להחליף את 3^2 ב-32.
- בעמוד 198 בשורה 18 יש להחליף את 11 ב-12.
- בעמוד 205 בתחילת הפסקה השלישית צריך להיות: שים לב, לכל מספר **פריק** n, ...

מילות סיכום לפרקים 2 ו- 3

בפרק 2 היכרנו את המודל החישובי הראשון - השפה *S*. שפה זו שקולה בכוח החישוב שלה לכל שפת תכנות מוכרת, אם אנו מתעלמים מן המגבלות של גודל הזיכרון (הוכח טענה זו!).

פונקציה $f(x_1,\ldots,x_n)$ הוגדרה כ**ניתנת לחישוב באופן חלקי** (פונקציה .p.c), אם קיימת תכנית בשפה *S* שמחשבת את f.

פונקציה $g(x_1,\ldots,x_m)$ הוגדרה **כניתנת לחישוב** (פונקציה .c), אם היא שלמה (מוגדרת לכל $(r_1,\ldots,r_m)$ ב-N^m), וקיימת תכנית בשפה *S* שמחשבת אותה.

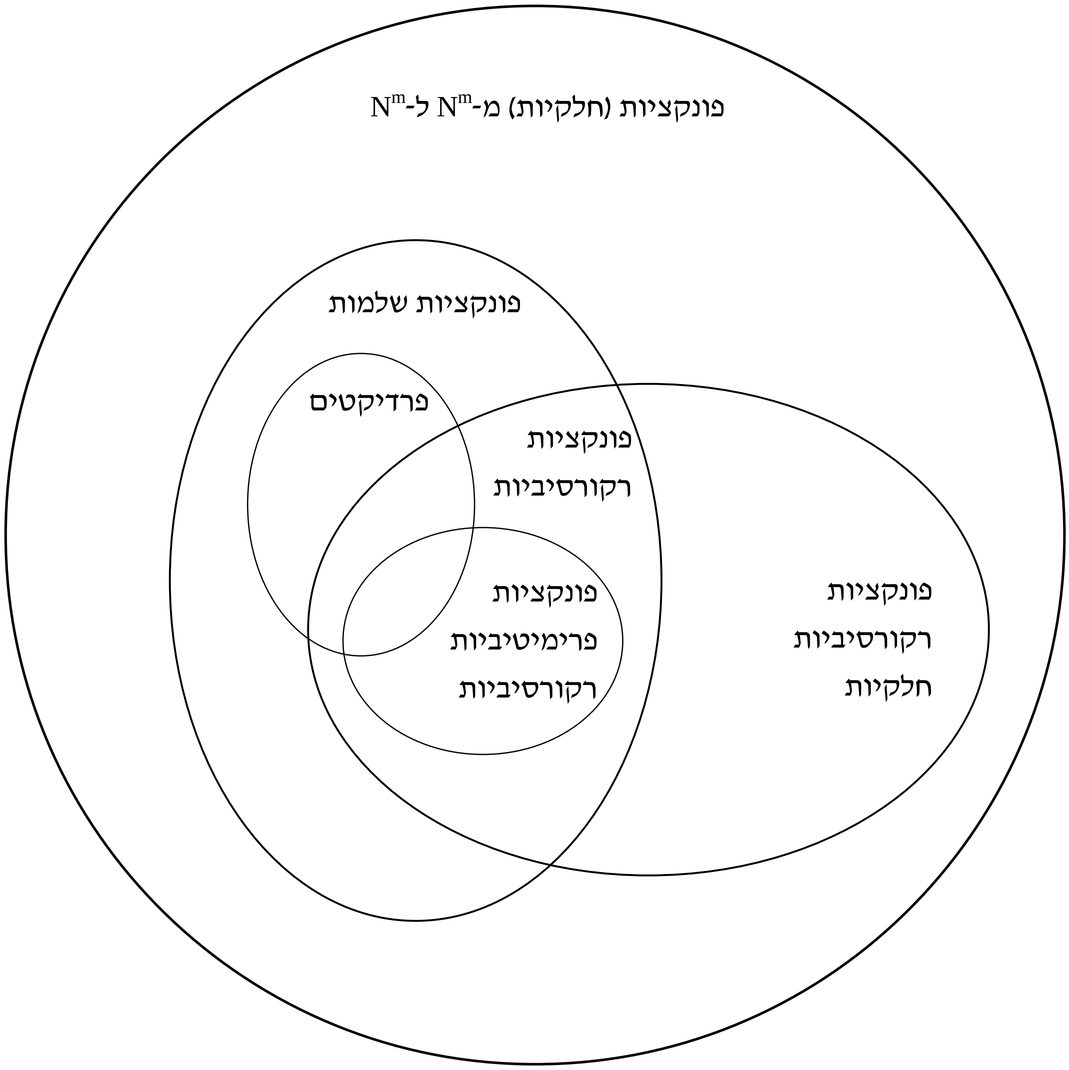
ההבדל בין פונקציה הניתנת לחישוב ופונקציה הניתנת לחישוב באופן חלקי הוא רק בתחום ההגדרה של הפונקציה, ולא באיכות התכנית המחשבת את הפונקציה. (אולי היה עדיף לקרוא לפונקציה .p.c פונקציה חלקית הניתנת לחישוב). ההבדל בין תכנית המחשבת פונקציה .c לתכנית המחשבת פונקציה .p.c הוא שתכנית המחשבת פונקציה .p.c לא בהכרח עוצרת על כל קלט.

בפרק 3 היכרנו מחלקת פונקציות נוספת, הפונקציות הפרימיטיביות רקורסיביות. מחלקה זו חלקית **ממש** למחלקת הפונקציות הניתנות לחישוב (דבר זה יוכח בפרק 4). לשם מה אם-כן אנו לומדים על מחלקת הפונקציות הזו? (נזכיר שאנו מעוניינים לברר מה ניתן לחישוב, כלומר לחקור את מחלקת הפונקציות ה-.p.c). יש לכך שתי סיבות:

1. לעתים קרובות קל להוכיח שפונקציה היא פרימיטיבית רקורסיבית, ולא קל לכתוב תכנית בשפה S שמחשבת אותה. מכיוון שהוכחנו שכל פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית היא ניתנת לחישוב, יש לנו כלי נוח להוכיח שפונקציות הן ניתנות לחישוב.

2. בפרק 4 נלמד שאם בנוסף להרכבה ורקורסיה, אנו מרשים שימוש גם במינימליזציה **לא חסומה**, אז מחלקת הפונקציות שמתקבלות מהפונקציות ההתחלתיות על ידי הפעלה של מספר סופי של הרכבות, רקורסיות ומינימליזציות, שווה למחלקת הפונקציות .p.c. זהו המודל של הפונקציות הרקורסיביות, והוא שקול בכוחו למודל של השפה *S*.

תמונת עולם הפונקציות (פרקים 2-3)



<u>פתרון תרגיל 4.6.12 בספר</u>

כדי להוכיח את הנדרש בשאלה, די להוכיח כי $INF \le_m TOT$ ו- $TOT \le_m INF$.

נראה ש- $INF \le_m TOT$. נסביר כיצד בהינתן מספר n של תכנית P בשפה *S*, ניתן לכתוב תכנית Q (ולכן גם לחשב את מספרה), כך ש-

$$\#(P) \in INF \Leftrightarrow \#(Q) \in TOT$$

כלומר, נסביר כיצד ניתן לבנות תכנית Q כזו כך שאם P עוצרת על מספר **אינסופי** של קלטים, אז **Q תעצור על כל קלט**, ואם P עוצרת רק על מספר **סופי** של קלטים, אז **יהיו קלטים ש-Q לא תעצור עליהם**. הפונקציה *f* לחישוב #(Q) מתוך #(P) היא הפונקציה *f* שבהגדרה שבראש עמוד 91 בספר. (לא נציג במפורש את הפונקציה *f*, אלא נסביר כיצד היא פועלת).

נניח אם-כן שנתונה לנו תכנית P בשפה *S*. אם P עוצרת רק על מספר **סופי** של קלטים, אז יש $m \in N$ כך **שלכל** $x \ge m$, **P איננה עוצרת על x**. אם P עוצרת על מספר **אינסופי** של קלטים, אז לכל $m \in N$ **יש** $x \ge m$ כך ש-**P עוצרת על x**.

נבנה תכנית Q שלכל קלט x **שלה** היא מריצה את P x צעדים על x, אחר-כך x+1 צעדים על x ו- x+1 צעדים על x+1, אחר-כך x+2 צעדים על x, x+2 צעדים על x+1 ו- x+2 צעדים על x+2, וכך הלאה, עד ש-P עוצרת על אחד המספרים האלה. אם P איננה עוצרת על אף אחד מהמספרים האלה, Q לא תעצור לעולם (על הקלט x).

כלומר, Q היא התכנית הבאה (n הוא המספר של התכנית P):

$Z \leftarrow X$

$T \leftarrow X$

[A] IF $STP^{(1)}(Z,n,T)$ GOTO E

$Z \leftarrow Z+1$

IF $Z \le T$ GOTO A

$T \leftarrow T+1$

$Z \leftarrow X$

GOTO A

מהדרך ש-Q נבנתה, ברור ש-Q עוצרת על **כל** x אם ורק אם P עוצרת על מספר **אינסופי** של קלטים. כלומר, #(Q) שייך ל-TOT אם ורק אם #(P) שייך ל-INF.

שים לב שהמספר של Q תלוי במספר של P, ושהוא **ניתן לחישוב** מתוך המספר של P. (הפונקציה *f* תחשב את #(Q) מתוך #(P)). זה מוכיח ש- $INF \le_m TOT$.

באופן דומה ניתן להראות ש- $TOT \le_m INF$. (מסתמכים על כך שלתכנית שמחשבת פונקציה **שאיננה** שלמה יש x קטן ביותר שעליו **אין** היא עוצרת).

<u>פתרון תרגיל 4.7.5 במדריך הלמידה</u>

אם R_Γ היא m-שלמה, אז לפי ההגדרה של קבוצה m-שלמה, R_Γ היא נל״ר.

אם Γ מכילה את הפונקציה $\varnothing$, אז לפי ההוכחה של משפט 4.7.1, $K \leq_m \overline{R_\Gamma}$, ולכן $\overline{K} \leq_m R_\Gamma$ (ראה תרגיל 4.6.4), ו-R_Γ איננה נל״ר.

לכן אם R_Γ היא נל״ר, אז Γ איננה מכילה את $\varnothing$, ואז לפי ההוכחה של משפט 4.7.1, $K \leq_m R_\Gamma$.
K היא m-שלמה. לכן אם R_Γ היא נל״ר, אז היא m-שלמה לפי מסקנה 4.6.4.