

## חשוביות ומבוא לסיבוכיות - א2006 - פתרונות לשאלות מממ"ן 13

### שאלה 1

א. נכתוב תכנית שמתייחסת לקלט שלה  $X$  כאל מספר הצעדים להרצת התכנית  $n$  על הקלט  $n$ . אם התכנית  $n$  עוצרת על הקלט  $n$  בתוך  $X$  צעדים, ניכנס ללולאה אינסופית; אחרת, נעצור. כלומר, הפונקציה של הרדוקציה תחשב מתוך מספר טבעי  $n$  את המספר של התכנית הבאה:

$$[A] \text{ IF } STP^{(1)}(n, n, X) \text{ GOTO } A$$

(הקלט לתכנית הזו הוא  $n$ .  $X$  הוא קבוע בתכנית).

אם  $n \in K$ , אז יש קלטים  $X$  שביחס אליהם  $STP^{(1)}(n, n, X)$  יהיה true ולכן התכנית לא תעצור, ולכן מספרה לא שייך ל-TOT.

אם  $n \notin K$ , אז לכל קלט  $X$   $STP^{(1)}(n, n, X)$  יהיה false, ולכן התכנית תעצור על כל קלט, ולכן מספרה שייך ל-TOT.

ב. הרדוקציה של הוכחת משפט 4.6.6 היא גם רדוקציה של  $K$  ל-TOT.

רדוקציה של קבוצה  $A$  לקבוצה  $B$  היא גם רדוקציה של  $\bar{A}$  ל- $\bar{B}$  (תרגיל (4.6.5(b)).

### שאלה 2

בהוכחת משפט Rice מראים רדוקציה של הקבוצה  $K$  לקבוצה  $R_\Gamma$  או לקבוצה המשלימה של  $R_\Gamma$  ( $\bar{R}_\Gamma$ ). רדוקציה של קבוצה  $A$  לקבוצה  $B$  היא גם רדוקציה של  $\bar{A}$  ל- $\bar{B}$  (תרגיל (4.6.5(b)). לכן יש רדוקציה של  $\bar{K}$  ל- $\bar{R}_\Gamma$  או ל- $R_\Gamma$ .

מכיוון ש- $\bar{K}$  איננה נל"ר, הרדוקציה מוכיחה שגם הקבוצה שאליה עושים רדוקציה מ- $\bar{K}$  איננה נל"ר. השאלה האם הקבוצה שאליה עושים רדוקציה מ- $\bar{K}$  היא  $R_\Gamma$  או  $\bar{R}_\Gamma$  תלויה בשאלה האם הפונקציה  $h(x)$  שאיננה מוגדרת על אף קלט שייכת ל- $\Gamma$  או ל- $\bar{\Gamma}$ . אם  $h(x)$  שייכת ל- $\Gamma$ , אז  $R_\Gamma$  איננה נל"ר. אם  $h(x)$  שייכת ל- $\bar{\Gamma}$ , אז  $\bar{R}_\Gamma$  איננה נל"ר.

ייתכן בהחלט ששתי הקבוצות אינן נל"ר. למשל, אפשר להוכיח ש-TOT איננה רקורסיבית בעזרת משפט Rice. במקרה זה TOT תהיה  $R_\Gamma$ . גם היא וגם המשלימה שלה אינן נל"ר.

### שאלה 3

א. אפשר להשתמש במשפט Rice:  $\Gamma$  תהיה קבוצת הפונקציות הרקורסיביות חלקיות שתחום הגדרתן הוא קבוצה בגודל 5.

ב. אי אפשר להשתמש במשפט Rice, כי התכונה שמגדירה את איברי הקבוצה איננה תכונה של הפונקציות שהתכניות מחשבות אלא תכונה של התכניות עצמן.

הוכחה: התכנית הריקה והתכנית שבנויה מ-100 הוראות דמה  $Z \leftarrow Z$  מחשבות שתיהן את הפונקציה הקבועה  $f(x) \equiv 0$ . המספר של התכנית הריקה לא שייך ל- $B$ , ואילו המספר של התכנית שמכילה 100 הוראות דמה  $Z \leftarrow Z$  כן שייך ל- $B$ . לכן אין קבוצה  $\Gamma$  של פונקציות רקורסיביות חלקיות כך ש- $B = R_\Gamma$  (כי מצאנו פונקציה רקורסיבית חלקית שמספר אחד של תכנית שמחשבת אותה שייך ל- $B$  ומספר אחר של תכנית שמחשבת אותה שייך ל- $\bar{B}$ ). לכן משפט Rice איננו ישים.

ג. גם כאן לא ניתן להשתמש במשפט Rice, מסיבות דומות לאלה של הסעיף הקודם.

ד. גם כאן לא ניתן להשתמש במשפט Rice.

### שאלה 5

נניח בשלילה ש-TOT רקורסיבית. אז הפונקציה הבאה רקורסיבית חלקית:

$$g(x, y) = \begin{cases} x & \text{if } y \notin \text{TOT} \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

לפי משפט הרקורסיה, יש מספר טבעי  $e$  כך שהתכנית שמספרה  $e$  מחשבת את הפונקציה  $g(x, e)$ .  
נשאל: האם  $e$  שייך ל-TOT או לא?, ונגיע לסתירה.