קורס "חישוביות ומבוא לסיבוכיות" - פתרון שאלות מן המטלות - סמסטר ב2006

ממ"ן 11 שאלה 7

א. לקבוצת המספרים $\{n_1, n_2, ..., n_k\}$ יותאם המספר $2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_k}$. (לקבוצה הריקה יותאם המספר 0).

ב. נגדיר פונקציות עזר $g_1, g_2, ..., g_n$:

$$g_1(x) = 2^x$$

$$g_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & if\ x_1 = x_2 \\ 2^{x_2} & otherwse \end{cases}$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & if\ x_1 = x_3 \vee x_2 = x_3 \\ 2^{x_3} & otherwise \end{cases}$$

וכך הלאה.

כל אחת מן הפונקציות האלה היא פרימיטיבית רקורסיבית, כי היא מוגדרת בעזרת מקרים, וכל הפרדיקטים והפונקציות המשתתפים בהגדרה הם פרימיטיביים רקורסיביים.

כעת נגדיר:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1) + g_2(x_1, x_2) + \cdots + g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

f מוגדרת בעזרת הרכבה של פונקציות פרימיטיביות רקורסיביות. לכן היא פרימיטיבית רקורסיבית.

ג. נגדיר את הפרדיקט $p(m, k)$:

$$p(m,k) \Leftrightarrow R(k,2^m) \neq R(k,2^{m+1})$$

בהגדרה השתמשנו בפרדיקטים ופונקציות פרימיטיביים רקורסיביים.

ד. נגדיר את הפונקציה $h(x)$ (בעזרת הפרדיקט מן הסעיף הקודם):

$$h(x) = \sum_{m=0}^{x} p(m,x)$$

h מוגדרת בעזרת סכום על פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית. לכן היא פרימיטיבית רקורסיבית.

ממ"ן 12 שאלה 6

א. $f^{-1}(B)$ בהכרח פרימיטיבית רקורסיבית: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

B היא קבוצה פרימיטיבית רקורסיבית; f היא פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית.

לכן ההרכבה $f(x) \in B$ פרימיטיבית רקורסיבית.

$f(B)$ איננה בהכרח פרימיטיבית רקורסיבית.

דוגמה: ניקח $B = N$. אז $f(B)$ היא הטווח של הפונקציה f. הטווח של פונקציה פרימיטיבית רקורסיבית איננו בהכרח קבוצה פרימיטיבית רקורסיבית.

ב. התשובה כמו בסעיף הקודם. מוחקים את המילה "פרימיטיבית" בכל מקום שהיא מופיעה.

ג. $f^{-1}(B)$ בהכרח קבוצה נל"ר: $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

אפשר לכתוב תכנית שעל קלט x תריץ את התכנית שמחשבת את הפונקציה f, ואם התכנית עצרה, אז מריצים על הפלט שלה $f(x)$ את התכנית שעוצרת רק על איברי B. (יש כזו כי B נל"ר). התכנית שתיארנו עוצרת על x אם ורק אם x שייך ל-$f^{-1}(B)$. לכן $f^{-1}(B)$ נל"ר.

$f(B)$ בהכרח קבוצה נל"ר.

אם B ריקה, אז גם $f(B)$ ריקה.

אם B היא קבוצה נל"ר לא ריקה, אז היא טווח של פונקציה רקורסיבית g.

$f(B)$ היא הטווח של הפונקציה הרקורסיבית חלקית $f(g(x))$, ולכן היא נל"ר.

ממ"ן 12 שאלה 8

נניח בשלילה שהפרדיקט p ניתן לחישוב. אז התכנית הבאה היא תכנית חוקית ב-S:

$$[A]\quad \text{IF}\ \ p(x)\ \ \text{GOTO}\ A$$
$$Y \leftarrow Y + 1$$

נקרא לתכנית הזו Q.

נתבונן במטריצה הדו-ממדית האינסופית הבאה:

כל שורה מתאימה לתכנית: השורה ה-i מתאימה לתכנית שמספרה i.

כל עמודה מתאימה לקלט אפשרי: העמודה ה-j מתאימה למספר הטבעי j.

במקום ה-(i, j) במטריצה כתוב "כן" אם התכנית שמספרה i מחזירה 1 על הקלט j, וכתוב "לא" אחרת. (כלומר, התכנית i לא עוצרת על הקלט j, או שהיא עוצרת אך מחזירה מספר שונה מ-1).

אם אכן התכנית Q שכתבנו היא תכנית חוקית ב-S, אז יש לה מספר. נקרא לו q.

נשאל: מה כתוב במטריצה במקום (q, q)?

אם כתוב שם "כן", אז התכנית Q מחזירה 1 בריצתה על q. כלומר, ערכו של $p(q)$ הוא 1. אבל אז, לפי ההגדרה של התכנית Q, היא לא עוצרת על q. כלומר, צריך להיות כתוב "לא".

אם כתוב שם "לא", אז או שהתכנית Q לא עוצרת בריצתה על q, או שהיא עוצרת אך מחזירה מספר שונה מ-1. בכל מקרה, ערכו של $p(q)$ הוא 0. אבל אז, לפי ההגדרה של התכנית Q, היא עוצרת על q ומחזירה 1. כלומר, צריך להיות כתוב "כן".

בכל מקרה הגענו לסתירה.

הראינו שהתכנית Q שכתבנו שונה מכל התכניות החוקיות ב-S. כלומר, היא לא תכנית חוקית ב-S. הסיבה היחידה לכך היא שהפרדיקט p איננו ניתן לחישוב.

ממ"ן 12 שאלה 10

התכנית הבאה עוצרת על x אם ורק אם x שייך ל-A_i:

$$Z \leftarrow \Phi(i, X)$$

זה מוכיח ש-A_i נל"ר.

הרדוקציה של הוכחת משפט 4.6.6 יכולה לשמש גם כרדוקציה של K ל-A_i (לכל i): אם z שייך ל-K, אז התכנית $S_1^1(z, p)$ עוצרת על כל קלט, ולכן המספר שלה שייך ל-A_i. אם z לא שייך ל-K, אז התכנית $S_1^1(z, p)$ לא עוצרת על אף קלט, ולכן המספר שלה לא שייך ל-A_i.

זה מוכיח ש-A_i איננה רקורסיבית.

זה גם מוכיח ש-A_i היא m-שלמה (הראינו ש-A_i נל"ר).

כל שתי קבוצות m-שלמות הן m-שקולות. לכן $A_i \equiv_{\mathrm{m}} A_j$ לכל i ו-j.

ממ"ן 13 שאלה 1

א. נראה רדוקציה של EMPTY:

יהי k מספר ששייך ל-EMPTY. (כותבים תכנית שלא עוצרת על אף קלט ומחשבים את המספר שלה. זה יהיה k).

$$z \in \text{EMPTY} \Leftrightarrow \langle z, k\rangle \in C$$

הפונקציה $\langle x, k\rangle$ היא רקורסיבית. לכן הראינו רדוקציה של EMPTY ל-C. ומכאן ש-C איננה נל"ר.

ב. הקבוצה הבאה היא תת-קבוצה פרימיטיבית רקורסיבית אינסופית של C: $\{\langle n, n\rangle \mid n \in N\}$

ממ"ן 13 שאלה 2

א. הקבוצה פרימיטיבית רקורסיבית:

מספר x שייך לקבוצה אם ורק אם $(\exists p)_{\le x}(\exists n)_{\le x}[Prime(p) \wedge n > 0 \wedge p^n = x]$

ב. הקבוצה נל"ר: התכנית הבאה עוצרת על x אם ורק אם x שייך לקבוצה:

$$[A] \quad \text{IF } \Phi(x, x) \ge x \text{ GOTO } A$$

הקבוצה לא רקורסיבית: רדוקציה של K: הרדוקציה של הוכחת משפט 4.6.6.

ג. הקבוצה לא נל"ר: רדוקציה של המשלימה של K: הרדוקציה של הוכחת משפט 4.6.6.

ממ"ן 13 שאלה 3

א. אפשר להוכיח בעזרת משפט Rice:

Γ - פונקציות רקורסיביות חלקיות של משתנה אחד שתחום הגדרתן קטן מ-5.

$f(x)$ - הפונקציה שאיננה מוגדרת על אף x.

$g(x)$ - הפונקציה שמחזירה x לכל x.

ב. אי אפשר להוכיח בעזרת משפט Rice:

נסתכל על הפונקציה שמחזירה 0 לכל x. אפשר לכתוב שתי תכניות לחישוב הפונקציה הזו: התכנית הראשונה היא התכנית הריקה, התכנית השנייה היא התכנית שבנויה מ-20 הוראות $Z \leftarrow Z$.

המספר של התכנית הראשונה שייך לקבוצה B; המספר של התכנית השנייה לא שייך ל-B.
הראינו שתי תכניות שמחשבות אותה הפונקציה, המספר של אחת שייך לקבוצה והמספר של השנייה לא שייך לקבוצה. מכאן שאי אפשר להוכיח בעזרת משפט Rice שהקבוצה לא רקורסיבית.

ג. אי אפשר להוכיח בעזרת משפט Rice:

התכניות מן הסעיף הקודם טובות גם לסעיף הנוכחי. המספר של התכנית הריקה הוא 0. זהו מספר זוגי ולכן לא שייך לקבוצה C. המספר של התכנית השנייה אי-זוגי. התכנית עוצרת על כל קלט, לכן המספר שלה שייך ל-K. לכן המספר של התכנית השנייה שייך ל-C.

ד. אי אפשר להוכיח בעזרת משפט Rice:

הקבוצה רקורסיבית: $z \in D \iff \sim\mathrm{STP}(r(z), l(z), 1000)$.

ממ"ן 14 שאלה 4

א. בהינתן קלט לבעיית העצירה - מכונת טיורינג M ומילה w, נבנה את המכונה M' הבאה:

על המילה הריקה 0 M' לא עוצרת. על כל מילה אחרת M' מריצה את M על w.

קבוצת הקלטים ש-M' לא עוצרת עליהם היא סופית ולא ריקה (למעשה, היא $\{0\}$), אם ורק אם M עוצרת על w.

ב. בהינתן קלט לבעיית העצירה - מכונת טיורינג M ומילה w, נבנה את המכונה M' הבאה:

על כל קלט u שונה מ-w, M' מריצה את M על u; על w M' לא עוצרת.

השפה ש-M מקבלת מכילה ממש את השפה ש-M' מקבלת אם ורק אם M עוצרת על w.

ממ"ן 14 שאלה 5

תחילה המכונה תבדוק האם הקלט שלה הוא באורך 0 או 1. אם כן, היא תעצור ותקבל את הקלט. (0 ו-1 אינם ראשוניים); אם לא, היא תמשיך.

באופן לא דטרמיניסטי, המכונה תכתוב מעבר לקלט רצף של לפחות שני 1-ים, B, ועוד רצף של לפחות שני 1-ים.

כעת המכונה תחשב את המכפלה של שני המספרים שהיא כתבה. (היא תתייחס לשני הרצפים כאל מספרים בייצוג אונארי).

לבסוף היא תשווה את המכפלה עם מילת הקלט. אם יש אותו מספר 1-ים בשני הרצפים (של הקלט ושל המכפלה), המכונה תעצור (הקלט איננו ראשוני). אם מספר ה-1-ים בשני הרצפים שונה, המכונה תיכנס ללולאה אינסופית (לא נמצאה הוכחה לכך שהקלט איננו ראשוני).

ממ"ן 14 שאלה 7

א. נשנה את שמות המשתנים בשני הדקדוקים כך שקבוצות המשתנים שלהם תהיינה זרות זו לזו.

יהי S_1 המשתנה ההתחלתי של G_1, ויהי S_2 המשתנה ההתחלתי של G_2.

נאחד את כללי השכתוב של G_1 ו-G_2 ונוסיף את הכללים $S \to S_1$ ו- $S \to S_2$ (S הוא משתנה חדש - המשתנה ההתחלתי של שפת האיחוד). הדקדוק המתקבל יוצר את $L_1 \cup L_2$.

ב. כדי שלא ליצור התנגשויות בשימוש בכללי השכתוב של שני הדקדוקים, נבצע את השינויים הבאים בכל אחד מן הדקדוקים:

נשנה את שמות המשתנים בשני הדקדוקים כך שקבוצות המשתנים שלהם תהיינה זרות זו לזו.

נחליף כל מופע של טרמינל (אות אלפבית) בכל אחד מן הדקדוקים במשתנה מיוחד. למשל, את האות a נחליף בדקדוק הראשון בכל מקום במשתנה A (שלא מופיע בשום מקום בשני הדקדוקים), ובדקדוק השני נחליף את האות a בכל מקום במשתנה α (שגם הוא לא מופיע בשום מקום בשני הדקדוקים).

נוסיף לכל משתנה שמחליף טרמינל כלל שכתוב יחיד שמשכתב את המשתנה לטרמינל. (בדוגמה לעיל נוסיף את הכלל $A \to a$ בדקדוק הראשון ואת הכלל $\alpha \to a$ בדקדוק השני).

יהי S_1 המשתנה ההתחלתי של G_1, ויהי S_2 המשתנה ההתחלתי של G_2 (לאחר השינויים שביצענו).

נאחד את כללי השכתוב של G_1 ו-G_2 ונוסיף את הכלל $S \to S_1S_2$ (S הוא משתנה חדש - המשתנה ההתחלתי של שפת השרשור). הדקדוק המתקבל יוצר את L_1L_2.