מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרק 15

מספר השאלות: 7 משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: א2006 מועד אחרון להגשה: 10 בפבר׳ 66

: אנא שימו לב

מלאו בדייקנות את הטופס המלווה לממיין בהתאם לדוגמה שלפני המטלות. העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

(12%) שאלה 1

- . $\lfloor \log_3 n \rfloor$ ו- ו ו . א. השוו את קצב הגידול של הפונקציות
 - n^{10} ו- $n^{\lfloor \log_5 n \rfloor}$ ו- $n^{\log_5 n \rfloor}$ ו- השוו את קצב הגידול של הפונקציות
- . $\log_b n = O(\log_a n)$ וגם $\log_a n = O(\log_b n)$, a,b > 1 ג. הוכיחו שלכל $\log_b n = \log_a n$ ול- $\log_a n$ יש אותו קצב גידול).

(12%) שאלה 2

כזכור, **הפונקציה המאפיינת** של שפה $f:A^* \to \{0,1\}$ היא הפונקציה ב A^* שמחזירה 1 אם $f:A^* \to \{0,1\}$ שמייכת ל-A. מחזירה 0 אם A לא שייכת ל-A.

הוכיחו: שפה L שייכת למחלקה P אם ורק אם הפונקציה המאפיינת של L ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

(שימו לב שעליכם להוכיח שני כיוונים. יש כאן טענת ייאם ורק אםיי).

שאלה 3 (10%)

פסוק C בתחשיב הפסוקים נקרא **טאוטולוגיה**, אם לכל השמה של ערכי אמת במשתנים שלו, ערך האמת של הפסוק הוא T.

הוכיחו ששפת הפסוקים בתחשיב הפסוקים שהם טאוטולוגיה שייכת למחלקה co-NP.

(המחלקה co-NP מוגדרת בתרגיל 15.2.10 בעמוד 450 בספר).

(20%) שאלה 4

תהיינה L ו-Q שתי שפות.

נאמר ש-Q ניתנת לרדוקצית Cook ל-C אם יש אלגוריתם A_Q בעל זמן ריצה פולינומיאלי שמכריע על בייכות ל- A_L והאלגוריתם A_L מבצע מספר פולינומיאלי של קריאות לאלגוריתם A_L שמכריע שייכות ל- A_L (בחישוב זמן הריצה של האלגוריתם A_L נספרת כצעד שייכות ל- A_L (בחישוב זמן הריצה של האלגוריתם A_L האחד).

$Q \leq_{\mathrm{c}} L:$ סימון

הגדרה קצת יותר פורמלית: $Q \leq_{\mathrm{c}} L$, אם יש אלגוריתם A_Q שמכריע ביחס לכל מילה w האם היא שייכת ל-Q או לא, כך שביחס לכל מילה w,

- A_L יכול לבצע לכל היותר מספר פולינומיאלי (בגודל של w) של קריאות לאלגוריתם A_Q (שמכריע ביחס לכל מילה v האם היא שייכת ל-L או לא), כאשר כל קריאה כזו מתבצעת על מילה v שאורכה לכל היותר פולינומיאלי באורך של w
- בנוסף לקריאות לאלגוריתם A_{Q} , האלגוריתם A_{Q} יכול לבצע לכל היותר מספר פולינומיאלי (בגודל של של פעולות נוספות.
 - .P-א אייכת עם Q אייכת ל- $Q \leq_{\mathrm{c}} L$, ו- P-אייכת שאם שייכת ל-
 - ב. נאמר ששפה L היא Cook-NP ב.
 - .NP-שייכת לL
 - $Q \leq_{\mathsf{c}} L$, NP-ם לכל שפה Q = -
 - .P = NP אז ,P שלמה במחלקה -Cook-NP ג. הוכיחו שאם יש שפה
 - . האם כל שפה \mathbf{NP} -שלמה היא גם \mathbf{Cook} - \mathbf{NP} -שלמה הוכיחו את תשובתכם.
- אבל $Q \leq_{
 m c} L$ אינכת ל- $Q \leq_{
 m c} L$ אויכת ל- $Q \leq_{
 m c} L$ אבל אויכת ל- $Q \leq_{
 m c} L$ אבל אויכת ל- $Q \leq_{
 m c} L$ אינכת ל- $Q \leq_{
 m c} L$

(המחלקה co-NP מוגדרת בתרגיל 15.2.10 בעמוד 600 בספר).

(15%) שאלה 5

תרגיל 15.4.12 בספר (עמוד 463).

(שימו לב שביצוע המשימות הוא סדרתי. ברגע שמסתיים הביצוע של משימה אחת, מתחיל הביצוע של המשימה הבאה).

(15%) שאלה 6

: בעיית THREE-CYCLES בעיית

.G = (V, E) הקלט: גרף

, כלומר, האם האם האם האם האם האם האם האם בקדקודים, זרים בקדקודים מעגלים את ב-G שמכסים את האם ניתן לחלק את קדקודיG לשלוש קבוצות, כך שהקדקודים בכל קבוצה מהווים מעגל פשוט (מעגל שבו כל קדקוד מופיע פעם אחת ויחידה), וכל קדקוד שייך לקבוצה אחת ויחידה?

הוכיחו שהבעיה הזו היא בעיה NP-שלמה.

 $-\mathbf{NP}$ - הדרכה: כדי להוכיח שהיא \mathbf{NP} - קשה, הראו רדוקציה פולינומיאלית של אחת הבעיות ה- \mathbf{NP} - שלמות המופיעות בספר בסוף סעיף 15.4.

(16%) שאלה 7

נעיין בשפה הבאה PREFIX-FACTOR זוהי שפת הזוגות ($k,\ l$) אוהי שפת יזוהי וות בינריות, כך ידוא פרישה וות המספר הבינרי שמחלק את המספר הבינרי שמחלק את המספר הבינרי שמחלק את המספר הבינרי שמיוצג על-ידי k.

דוגמה : הזוג (1001, 1) שייך לשפה, כי 1 היא תחילית של המחרוזת 11 שמייצגת את 3 בבסיס בינרי, ו-3 מחלק את 9 שמיוצג על-ידי המחרוזת הבינרית 1001.

הזוג (1001, 111) לעומת זאת, לא שייך לשפה.

א. הוכיחו שהשפה PREFIX-FACTOR שייכת למחלקה

ב. הוכיחו : אם $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, אז אפשר לפרק כל מספר טבעי לגורמים ראשוניים בזמן פולינומיאלי.