חישוביות ומבוא לסיבוכיות – א2006 - פתרונות לשאלות ממ״ן 11

שאלה 1 סעיף ב

ההוכחה באינדוקציה על $|xy|$ (האורך של המחרוזת xy).

אם $|xy|=0$, אז $x, y = 0$, והטענה מתקיימת.

נניח את נכונות הטענה לכל x ו-y כך ש-$|xy|<n$.

יהיו x ו-y שתי מילים המקיימות $xy = yx$, $|xy|=n$.

בלי הגבלת הכלליות, נניח ש-$|x|\le|y|$.

אם $x = 0$, הטענה מתקיימת.

אחרת, מהשווין $xy = yx$ נקבל $y = tx$, ואז $xtx = txx$, ומכאן $xt = tx$, כאשר $|xt|<n$.

לפי הנחת האינדוקציה, $x = z^{[i]}$, $t = z^{[j]}$ עבור מחרוזת z כלשהי.

$y = tx$, ולכן $y = z^{[i+j]}$, והטענה מתקיימת גם ל-x ו-y המקיימות $|xy|=n$.

שאלה 4

תכנית לחישוב $EX_P(x)$:

```
[A]     IF  Z = X  GOTO D
[B]     IF  P(Z2)  GOTO C
        Z2 ← Z2 + 1
        GOTO B
[C]     Z ← Z + 1
        Z2 ← Z2 + 1
        GOTO A
[D]     Y ← Y + 1
```

מונים במשתנה Z את מספר האיברים z_2 המקיימים $p(z_2)$.

ברגע שמספר זה מגיע ל-x, משימים 1 ב-y ועוצרים.

אם מספר זה קטן מ-x, התכנית לא תעצור.

שאלה 5

(*a*) נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר ההרכבות *p* שבוצעו בהגדרת הפונקציה f :

אם $p=1$, אז f יכולה להיות אחת מן הפונקציות הבאות :

$f(x_1,\dots,x_n)=x_i=x_i+0$ או $f(x)=x+1$ או $f(x)=0$.

בכל אחת מן האפשרויות האלה, הטענה מתקיימת.

כעת נניח שהטענה מתקיימת לכל פונקציה שהתקבלה על-ידי סדרה של *p* או פחות הרכבות.

תהי $f(x_1,\dots,x_n)$ פונקציה שהתקבלה על-ידי $p+1$ הרכבות.

אז $f(x_1,\dots,x_n)=h(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_m(x_1,\dots,x_n))$, ו- $h,g_1,\dots,g_m$ התקבלו על-ידי p או פחות הרכבות.

לפי ההנחה, $h,g_1,\dots,g_m$ כולן מהצורה k או x_i+k .

אם $h(x_1,\dots,x_m)=k$, אז $f(x_1,\dots,x_n)=k$.

אם $h(x_1,\dots,x_m)=x_i+k$ ו- $g_i(x_1,\dots,x_n)=l$, אז $f(x_1,\dots,x_n)=l+k$.

אם $h(x_1,\dots,x_m)=x_i+k$ ו- $g_i(x_1,\dots,x_n)=x_j+l$, אז $f(x_1,\dots,x_n)=x_j+l+k$.

בכל מקרה, הטענה מתקיימת גם עבור $p+1$.

(*b*) תהי $f(x_1,\dots,x_n)$ פונקציה ב-COMP.

אם $f(x_1,\dots,x_n)=k$, אז עבור $y_i\ge x_i$, $f(y_1,\dots,y_n)=k\ge f(x_1,\dots,x_n)$.

אם $f(x_1,\dots,x_n)=x_i+k$, אז $f(y_1,\dots,y_n)=y_i+k\ge x_i+k=f(x_1,\dots,x_n)$.

(*c*) כל פונקציה ב-COMP היא פרימיטיבית רקורסיבית, כי היא מתקבלת מן הפונקציות ההתחלתיות על-ידי סדרה סופית של הרכבות.

כדי להראות שיש פונקציות פרימיטיביות שאינן ב-COMP, די שנראה שיש פונקציות פרימיטיביות רקורסיביות שאינן מונוטוניות.

לדוגמה, $f(x_1,x_2)=x_1\dot{-}x_2$. $f(2,2)=0$, $f(2,1)=1$.

(*d*) תכנית ללא הוראות סיעוף יכולה לחשב רק פונקציות מהצורה $f(x_1,\dots,x_n)=k$.

כל פונקציה כזו ניתנת לקבלה מן הפונקציות ההתחלתיות על-ידי מספר סופי של הרכבות :

$f(x_1,\dots,x_n)=\underbrace{s(s(\dots s}_{k}(n(u_1^n(x_1,\dots,x_n)))\dots))$.

כדי להראות שיש ב-COMP פונקציות נוספות, נראה שיש ב-COMP פונקציה מהצורה $f(x_1,\dots,x_n)=x_i+k$: $f(x_1,\dots,x_n)=u_i^n(x_1,\dots,x_n)=x_i+0$.

שאלה 7

א. יהי z מספר טבעי. נסמן על-ידי m את המספר הטבעי המקסימלי כך ש- $\sum_{k=1}^{m} k \le z$.

אז $x = z - \sum_{k=1}^{m} k$; $y = m - x$.

מכיוון שלכל z יש m יחיד כזה, לכל z יש x ו-y יחידים כנדרש.

ב. 1. הפונקציה $\langle x, y \rangle$ היא פרימיטיבית רקורסיבית, כי בהגדרתה משתמשים בחיבור ובסכום של פונקציות פרימיטיביות רקורסיביות.

נגדיר: $m(z) = \min_{t \le z}(\sum_{k=1}^{t+1} k > z)$. ואז $l(z) = z \dot{-} \sum_{k=1}^{m(z)} k$; $r(z) = m(z) \dot{-} l(z)$.

כל הפונקציות שבהן השתמשנו הן פרימיטיביות רקורסיביות. לכן גם $m(z)$, $l(z)$ ו-$r(z)$ הן פרימיטיביות רקורסיביות.

2. $m(\langle x, y \rangle) = x + y$. לכן $l(\langle x, y \rangle) = (x + \sum_{k=1}^{x+y} k) \dot{-} \sum_{k=1}^{x+y} k = x$; $r(\langle x, y \rangle) = (x + y) \dot{-} x = y$.

3. נסמן: $z = \langle x, y \rangle$. לפי מה שהראינו, $l(z) = x$, $r(x) = y$. לכן $\langle l(z), r(z) \rangle = z$.

4. נסמן: $z = \langle x, y \rangle$. לפי הגדרת הפונקציה, $x, y \le z$. לכן $l(z), r(z) \le z$.