

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20365 - חישוביות ומבוא לסיבוכיות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1-3

מספר השאלות: 7 משקל המטלה: 6 נקודות

סמסטר: 2006א מועד אחרון להגשה: 25 בנוב' 05

אנא שימו לב:

מלאו בדיוקנות את הטופס המלווה לממ"ן בהתאם לדוגמה שלפני המטלות.
העתיקו את מספר הקורס ומספר המטלה הרשומים לעיל.

שאלה 1 (10% - סעיף א 3%; סעיף ב 7%)

א. הוכיחו באינדוקציה: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}$.

ב. הוכיחו באינדוקציה: אם x ו- y הן שתי מחרוזות המקיימות $xy = yx$, אז יש מחרוזת z ויש

מספרים טבעיים i ו- j כך ש- $x = z^{[i]}$ ו- $y = z^{[j]}$.

שימו לב, ההוכחות חייבות להיות באינדוקציה!

שאלה 2 (20%)

כתבו תכניות בשפה S לחישוב הפונקציות הבאות. על התכניות להיות קצרות וברורות.
כתיבת התכניות צריכה להיות מדויקת, ועל פי כל כללי התחביר של השפה.
הוסיפו לכל תכנית הסבר קצר על אופן פעולתה.

א. $f(x) = 3x - 5$. אל תשתמשו במקרוס. שימו לב ש- f היא פונקציה חלקית. ערכו של המשתנה X יהיה 0 בסיום ריצת התכנית. כתבו תכנית עם 9 הוראות לכל היותר.

ב. x אי זוגי $\Leftrightarrow p(x)$ (כלומר, $p(x) = 0$ אם x זוגי; $p(x) = 1$ אם x אי זוגי).
אל תשתמשו במקרוס. ערכו של המשתנה X בסיום ריצת התכנית יהיה זהה לערכו בתחילת הריצה. כתבו תכנית עם 13 הוראות לכל היותר.

ג. $g(x) = \left\lfloor \sqrt[3]{x} \right\rfloor$.

ד. $h(x_1, x_2) = \log_5(x_1 + x_2)$.

בסעיפים ג ו-ד אתם רשאים להשתמש במקרוס מפרק 2 בספר ובמדריך הלמידה (כולל התרגילים).

שאלה 3 (14%)

א. תרגיל 2.4.6 בספר (עמוד 32).

ב. תרגיל 2.4.7 בספר (עמוד 32).

שאלה 4 (8%)

תרגיל 2.5.6 בספר (עמוד 36).

שאלה 5 (12%)

תרגיל 3.4.10 בספר (עמוד 48).

שאלה 6 (20%)

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן **פרימיטיביות רקורסיביות**.

א. $\min(x, y, z)$ (המספר המינימלי מבין שלושת המספרים)

ב. $\varphi(x)$ (מספר המספרים הטבעיים הקטנים מ- x וזרים לו)

ג. $f(x) = \lfloor \log_2(x+1) \rfloor$

ד. $g(x) = \left\lceil \sqrt[5]{x} \right\rceil$

שאלה 7 (16%)

עיינו בספר בסעיף 3.8.

נניח שנגדיר את הפונקציה $\langle x, y \rangle$ כך: $\langle x, y \rangle = x + \sum_{k=1}^{x+y} k$.

א. הוכיחו שאם z הוא מספר טבעי כלשהו, אז יש x ו- y יחידים כך ש- $\langle x, y \rangle = z$.

(שימו לב שעליכם להוכיח **שני** דברים, **שקיימים** x ו- y כאלה ושהם **יחידים**).

ב. נסמן: $x = l(z)$; $y = r(z)$.

הוכיחו את משפט 3.8.1 (בעמוד 60 בספר) ביחס לפונקציות $\langle x, y \rangle$ ו- $l(z)$ ו- $r(z)$ שהגדרנו.