

# Vyvažované stromy

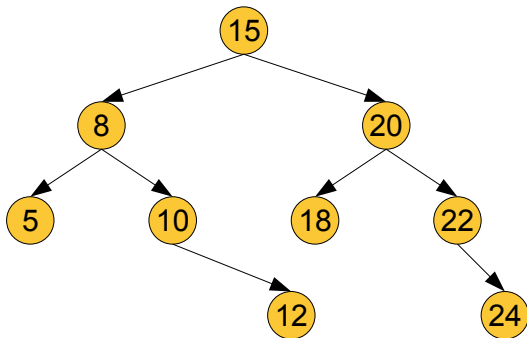
# Obsah přednášky

- ▶ BST výhody a nevýhody
- ▶ AVL stromy
- ▶ Červeno-černé stromy

# Binární vyhledávací strom

## ► Binární strom s vlastnostmi

- Uzly obsahují klíče, u kterých lze určit relace  $<$ ,  $>$ ,  $=$
- Klíče uzlů  $U$  ležících nalevo od kořene  $K$  jsou menší než klíč kořene  $K$
- Klíče uzlů  $U$  ležících napravo od kořene  $K$  jsou větší než klíč kořene  $K$

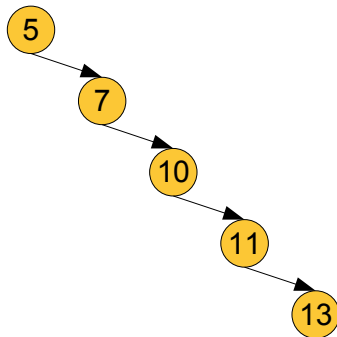


# Problémy

- ▶ Co se stane když budou vrcholy vkládány v „nešikovném“ pořadí

# Problémy

- ▶ Co se stane když budou vrcholy vkládány v „nešikovném“ pořadí
- ▶ Příklad: 5 7 10 11 13
  - ▶ jaká je složitost vyhledávání?
  - ▶ co se s tím dá vymyslet?

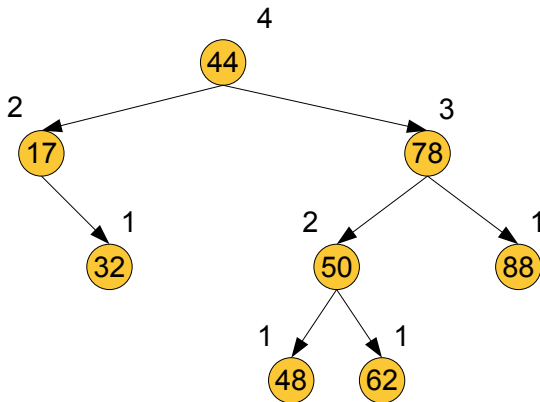


# Vyvažování stromu

- ▶ Snažit se zamezit tomu, aby některá z větví byla mnohem delší než ostatní
  - ▶ AVL stromy
  - ▶ red-black stromy
  - ▶ splay stromy
  - ▶ ...
- ▶ Cena vyvažování nesmí být příliš vysoká

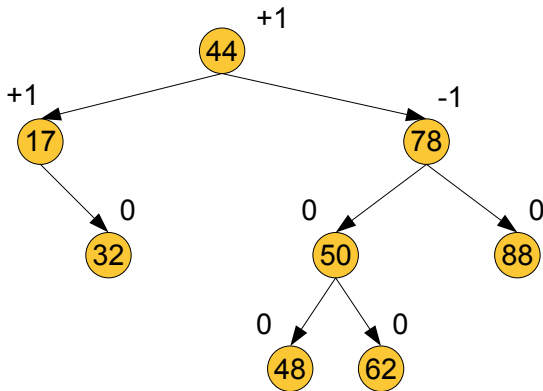
# AVL stromy

- ▶ Aby byl strom vyvážený, musí platit:
  - ▶ pro každý uzel stromu se hloubka jeho dětí může lišit maximálně o 1
  - ▶ přestože jde o lokální vlastnost, zajišťuje globální vyváženost



# Vyvážení stromu

- ▶ Faktor vyvážení
  - ▶ rozdíl hloubky levého a pravého podstromu





# Jak to zajistit?

# Jak to zajistit?

- ▶ Úprava operace vložení

# Jak to zajistit?

- ▶ Úprava operace vložení
- ▶ Úprava operace mazání

# Jak to zajistit?

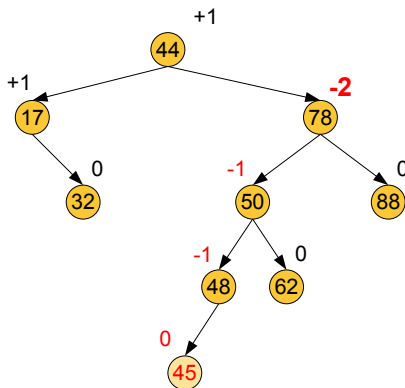
- ▶ Úprava operace vložení
- ▶ Úprava operace mazání
- ▶ Po provedení vložení/mazání nutno zkontrolovat splnění podmínky vyváženosti, v případě nesplnění strom vyvážit

# Operace vkládání

- ▶ Operace vložení probíhá standardním způsobem
  - ▶ nalézt vhodné umístění nového uzlu
  - ▶ vložit uzel
- ▶ Pro zajištění vyváženosti
  - ▶ cestou zpět ke kořeni opravovat hloubky uzlů
  - ▶ pokud cestou zpět existuje nevyvážený uzel, musí se provést restrukturalizace stromu operací *rotace*

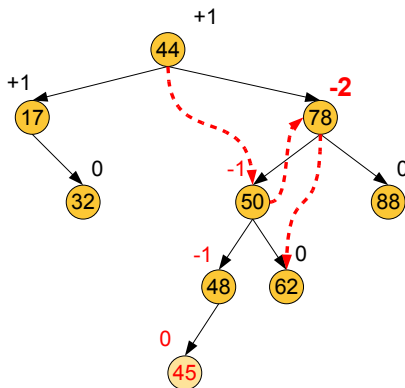
# Operace vkládání – jednoduchá rotace

- ▶ přidání uzlu 45
  - ▶ znaménko nevyváženého uzlu a kořene většího podstromu je stejné



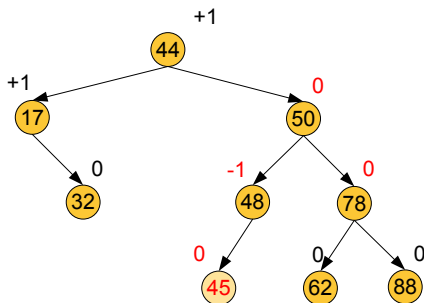
# Operace vkládání – jednoduchá rotace

- ▶ přidání uzlu 45
  - ▶ znaménko nevyváženého uzlu a kořene většího podstromu je stejné
- ▶ provedení rotace
  - ▶ kořen většího podstromu a nevyvážený uzel si prohodí rodinné vztahy



# Operace vkládání – jednoduchá rotace

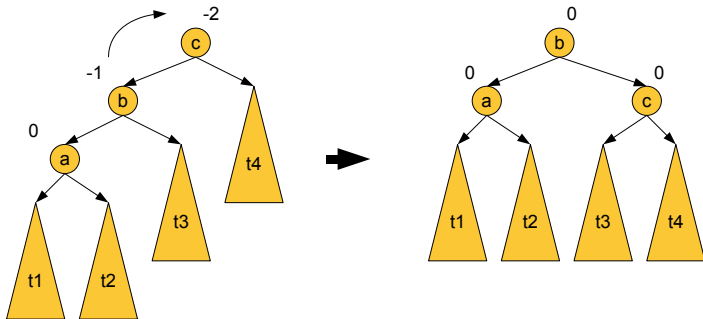
- ▶ přidání uzlu 45
  - ▶ znaménko nevyváženého uzlu a kořene většího podstromu je stejné
- ▶ provedení rotace
  - ▶ kořen většího podstromu a nevyvážený uzel si prohodí rodinné vztahy
- ▶ přepočítání hloubky stromu





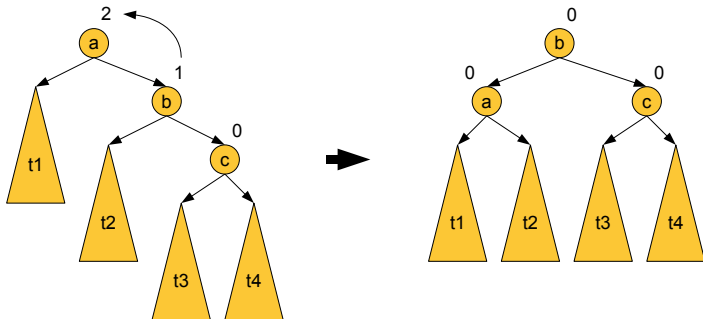
# Operace vkládání – jednoduchá rotace

- Zobecněný postup
  - rotace doprava



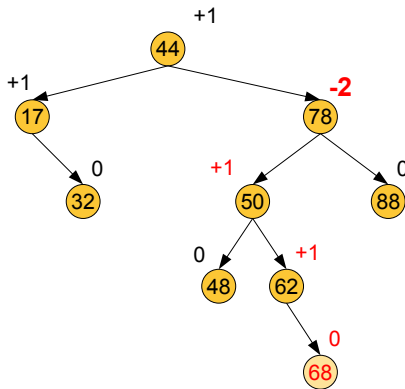
# Operace vkládání – jednoduchá rotace

- Zobecněný postup
  - rotace doleva (symetrická)



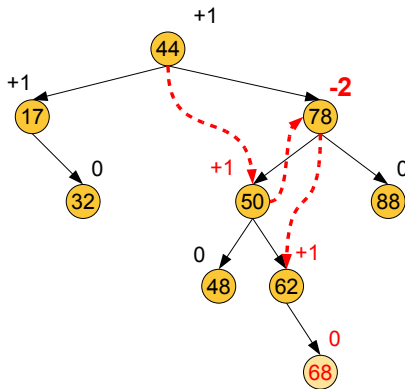
# Operace vkládání

- ▶ Ne vždy stačí na opravu jednoduchá rotace
  - ▶ přidání uzlu 68



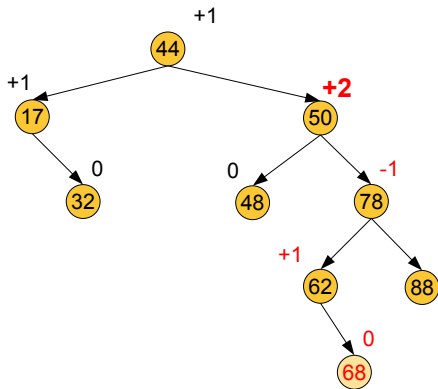
# Operace vkládání

- ▶ Ne vždy stačí na opravu jednoduchá rotace
  - ▶ přidání uzlu 68



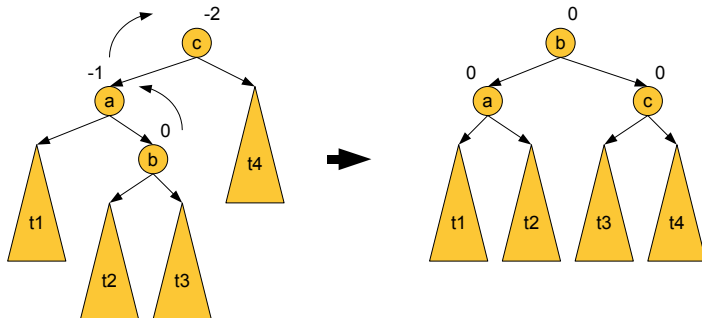
# Operace vkládání

- ▶ Ne vždy stačí na opravu jednoduchá rotace
  - ▶ přidání uzlu 68



# Operace vkládání – dvojitá rotace

- Zobecněný postup (doleva – doprava)



# Operace vkládání – rotace obecně

- ▶ Nalézt první nevyvážený uzel
  - ▶ procházením od listu ke kořenu
  - ▶ vybrat nevyvážený uzel a dva následníky ve směru nejdelší větve
- ▶ Seřadit nalezené uzly podle velikosti klíče
  - ▶ seřazené uzly označit a, b, c
- ▶ Umístit uzel b na pozici nevyváženého uzlu
  - ▶ upravit vazby mezi uzly tak, aby byly zachovány vlastnosti BST

# Operace mazání

- ▶ Probíhá standardním způsobem
  - ▶ vymazat uzel a obnovit BST
- ▶ Cestou zpět ke kořeni kontrolovat vyváženost
  - ▶ pokud je nalezen nevyvážený uzel, provést vyvážení
- ▶ Vyvážení může obecně způsobit další problém
  - ▶ postupně dojít až ke kořenu



# AVL stromy – shrnutí

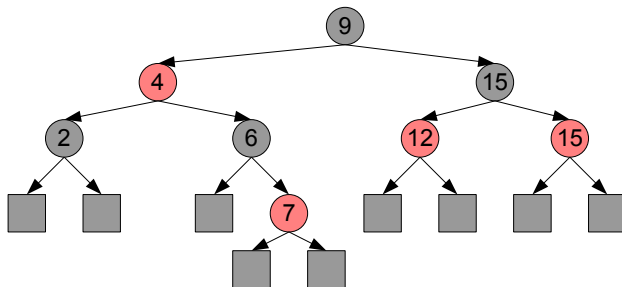
- ▶ Operace vyvážení (jedna)  $O(1)$ 
  - ▶ za předpokladu, že jsou ukazatele na rodiče
- ▶ Operace vyhledání uzlu  $O(\log N)$ 
  - ▶ složitost zajištěna i pro "nepříznivé" případy
- ▶ Operace vkládání  $O(\log N)$ 
  - ▶ vyhledání pozice  $O(\log N)$
  - ▶ vyvážení  $O(1)$
- ▶ Operace odebrání  $O(\log N)$ 
  - ▶ vyhledání pozice  $O(\log N)$
  - ▶ vyvážení  $O(\log N)$  pro nejhorší případ

# Red-Black stromy

- ▶ AVL stromy jsou příliš omezující
  - ▶ vyvážení stromu je  $O(\log N)$
  - ▶ je zajištěno, že rozdíl hloubky dvou podstromů libovolného uzlu je menší než dva
    - ▶ není zaručen poměr největší a nejmenší hloubky
- ▶ Červeno-černé stromy volnější pravidla

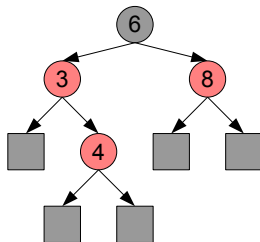
# Pravidla

- ▶ Uzly stromu jsou buď černé nebo červené
- ▶ Musí splňovat
  - ▶ kořen je černý
  - ▶ děti červeného uzlu jsou černé
  - ▶ každý list (prázdný prvek) je černý
  - ▶ "černá" hloubka všech listů je stejná



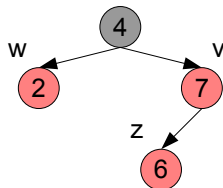
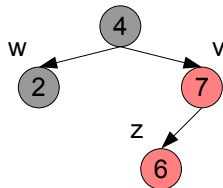
# Operace vkládání

- ▶ Nově vkládaný uzel z je červený
  - ▶ pokud to není kořen
  - ▶ jestliže rodič v uzlu z je černý, pak je vše ok
  - ▶ jinak jsou ve stromě dva po sobě následující červené uzly a je třeba strom opravit
- ▶ Příklad
  - ▶ vložení uzlu 4



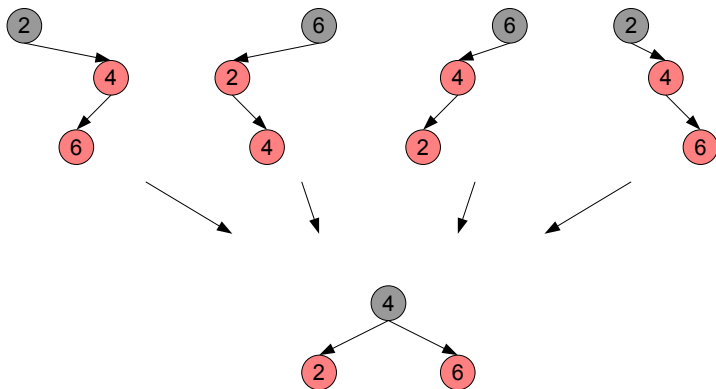
# Opravy

- ▶ Označíme uzly
  - ▶ z - vkládaný uzel
  - ▶ v - rodič vkládaného uzlu
  - ▶ w - sourozenec uzlu v
- ▶ Dvě možné situace
  - ▶ w je černý
    - ▶ restrukturalizace stromu
  - ▶ w je červený
    - ▶ přebarvení stromu



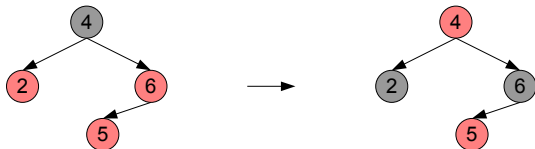
# Restrukturalizace

- ▶ Celkem 4 různé situace
  - ▶ společné řešení



# Přebarvení

- ▶ Rodič a sourozenec se přebarví na černo
- ▶ Prarodič se přebarví na červeně
  - ▶ pokud to není kořen



# Red-Black stromy – shrnutí

- ▶ Nejhorší možná situace
  - ▶ nejmenší hloubka  $h$ , největší hloubka  $2h$ 
    - ▶ počet černých uzlů musí být stejný, červené nemohou být dva po sobě
- ▶ Nižší počet operací vyvážení



# Konec