Relace

Osnova

Relace ekvivalence

Definice

Ekvivalence na množině A je relace R na množině A, která je

- reflexivní
  $(\forall x \in A) \Rightarrow [x, x] \in R$
- symetrická
  $(\forall x, y \in A)[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$
- tranzitivní
  $(\forall x, y, z \in A)[x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \Rightarrow [x, z] \in R$

Relace ekvivalence

Příklad

Rovnoběžnost přímek
Nechť A je množina všech přímek v rovině.
Relace R je definována předpisem $[a, b] \in R \Leftrightarrow a, b$ jsou rovnoběžky.
Dokažte, že R je ekvivalence.

Relace ekvivalence

Příklad

Kongruence modulo p

- *Kongruence modulo p (p je celé číslo)* je relace $\equiv$ definovaná na množině celých čísel Z:
- $x \equiv y \Leftrightarrow p \mid (x - y) \qquad p \mid (x - y) \Leftrightarrow x - y = k \cdot p, k \in Z$

Dokažte, že $\equiv$ je relace ekvivalence.

- $(\forall x \in Z) x \equiv x$, tedy $p \mid (x - x)$ reflexivnost
- $(\forall x, y \in Z) x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$, tedy
  $x - y = k \cdot p \Rightarrow y - x = (-k) \cdot p$ symetrie
- $(\forall x, y, z \in Z) x \equiv y \wedge y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$, tedy
  $x - y = k \cdot p \wedge y - z = l \cdot p, (k, l, p \in Z) \Rightarrow$
  $x - z = (x - y) + (y - z) = kp + lp = (k + l)p$ tranzitivita

Rozklad množiny na třídy

Definice

Nechť A, I jsou množiny (I je indexová množina).
Soubor podmnožin $\{A_i; i \in I\}$ množiny A je rozklad množiny A, jestliže množiny A_i jsou neprázdné, navzájem disjunktní a jejich sjednocením je celá množina A.
Množiny A_i nazýváme třídy rozkladu $\{A_i; i \in I\}$.

Relace ekvivalence na množině A jednoznačně odpovídají rozkladům na množině A.

Rozklad množiny na třídy

Příklad

Relace $x \equiv y (mod \quad p)$ je ekvivalence.
Každá z p tříd této ekvivalence je tvořena všemi čísly, která při dělení číslem p dávají stejný zbytek.
Tyto třídy se označují *zbytkové třídy modulo p*.

Rozklad množiny na třídy

Příklad

Nechť na množině celých čísel Z je definována ekvivalence $\sim$ následovně:
$(x \sim y) \Leftrightarrow (\exists k \in Z)(y = x + 4k)$.
Popište rozklad množiny Z na třídy.

- Zbytky po dělení čtyřmi.

Rozklad množiny na třídy

Příklad

Nechť na množině $Z \setminus \{0\}$ je definována relace R:
$(xRy) \Leftrightarrow x \cdot y > 0$.
Dokažte, že R je relace ekvivalence a popište rozklad množiny $Z \setminus \{0\}$ na třídy.

- Relace je reflexivní, symetrická, tranzitivní.
- Rozklad: Z^+, Z^-.