UMB/750 Diskrétní matematika

2. přednáška

4. října 2024

Cvičení

1. Uvažujme množinu s 5 prvky a množinu s 9 prvky. Která z následujících čísel mohou být mohutností jejich sjednocení: 4, 6, 9, 10, 14, 20?
2. Chceme utvořit sjednocení dvou množin. Víme, že jedna množina má n prvků a druhá m. Co je možné prohlásit o mohutnosti jejich sjednocení?
3. Je pravda, že pro každé dvě množiny X a Y platí $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y)$, právě když $X = Y$?

Počet podmnožin

Kolik podmnožin má n-prvková množina?

$n = 3$: $\quad X = \{a, b, c\}$

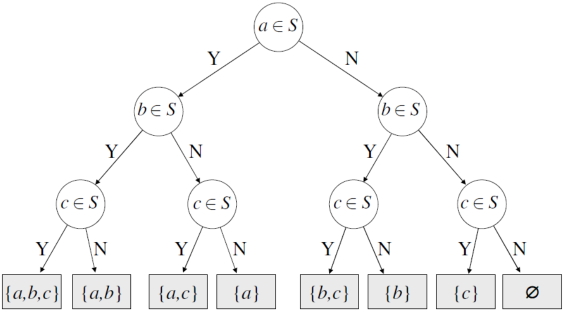
$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

tedy $|\mathcal{P}(X)| = 8$

n	0	1	2	3
$\lvert\mathcal{P}(X)\rvert$				8

Hypotéza: počet podmnožin n-prvkové množiny X je 2^n

Schéma rozhodovacího procesu:



Tvrzení

Libovolná n-prvková množina X má právě 2^n *podmnožin.*

Poznámka: později si dokážeme také pomocí matematické indukce

Cvičení

1. Kolik podmnožin n-prvkové množiny obsahuje pevně zvolený prvek?
2. Ukažte, že neprázdná konečná množina má stejný počet sudých a lichých podmnožin (tj. podmnožin sudé a liché velikosti).

K řešení příkladu 2:

even		odd
$\emptyset$	$\leftrightarrow$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\leftrightarrow$	$\{2\}$
$\{1,3\}$	$\leftrightarrow$	$\{3\}$
$\{1,4\}$	$\leftrightarrow$	$\{4\}$
$\{2,3\}$	$\leftrightarrow$	$\{1,2,3\}$
$\{2,4\}$	$\leftrightarrow$	$\{1,2,4\}$
$\{3,4\}$	$\leftrightarrow$	$\{1,3,4\}$
$\{1,2,3,4\}$	$\leftrightarrow$	$\{2,3,4\}$

Tvrzení

Nechť $n \geq 1$. Každá n-prvková množina má právě 2^{n-1} podmnožin liché velikosti a 2^{n-1} podmnožin liché velikosti.

Podmnožiny s daným počtem prvků

Kolik k-prvkových podmnožin má n-prvková množina?

$$(k \leq n)$$

pokud by záleželo na pořadí prvků v množině:

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}_{k \text{ činitelů}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

u množin ale na pořadí nezáleží: $\{1,2\} = \{2,1\}$

Kolik je možností, jak seřadit k prvků?

$$k \cdot (k-1) \dots 2 \cdot 1 = k!$$

– tolikrát jsme započítali každou k-prvkovou podmnožinu $\Rightarrow$ tímto číslem musíme původní výraz vydělit

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Kartézský součin množin

Definice

Nechť A a B jsou množiny. Symbolem $A \times B$ označíme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

$A \times B$ se nazývá kartézský součin množin A a B.

analogicky pro n množin $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 3$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n$$

speciálně označíme

$$A \times A = A^2$$

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{\text{n-krát}} = A^n$$

Cvičení

1. Nechť $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ a $C = \{\bigcirc\}$. Určete $A \times B$, A^2, $B \times A$, $B \times C$, $B \times C \times A$.

2. Určete počet prvků kartézského součinu dvou konečných množin A, B.

Definice

Binární relace R je množina uspořádaných dvojic. Jsou-li A a B množiny, nazývá se libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times B$ relací mezi A a B.

$A = B$: relace na množině A, tedy $R \subseteq A^2$

Náleží-li dvojice (x, y) relaci R, tj. $(x, y) \in R$, říkáme také, že x a y jsou v relaci R, a zapisujeme též xRy.

Definice

Mějme binární relaci $f \subseteq A \times B$, pro kterou platí, že ke každému $x \in A$ existuje právě jedna uspořádaná dvojice $(x, y) \in f$, kde $y \in B$. Potom relaci f říkáme zobrazení množiny A do množiny B, píšeme

$$f : X \to Y.$$

v diskrétní matematice se zobrazení množiny A do množiny B říká také funkce

Poznámky

- ekvivalentní znění definice zobrazení: *Zobrazení f každému prvku z A přiřadí jednoznačně nějaký prvek z B.*
- Pozor na předložky!

$$\text{zobrazení množiny } A \text{ do množiny } B$$
$$\times$$
$$\text{zobrazení } \textcolor{red}{\text{z}} \text{ množiny } A \text{ do množiny } B$$

- v diskrétní matematice je pojem *funkce* obecnější než v matematické analýze, kde jej užíváme pro zobrazení podmnožiny $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$

$$(x, y) \in f$$

$$f : A \to B$$

$$f : x \mapsto y$$

$$f(x) = y$$

obor hodnot H_f – množina všech prvků z B, na které se zobrazí alespoň jedno $x \in A$

Důležité druhy zobrazení

Definice

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá

- prosté (neboli injektivní), jestliže pro $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$;
- na množinu B (neboli surjektivní), jestliže ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ tak, že $y = f(x)$;
- vzájemně jednoznačné (neboli bijektivní), jestliže je prosté a na

Příklad. Nechť jsou dány konečné neprázdné množiny A a B, přičemž $|A| = n$, $|B| = m$.

1. Kolik existuje zobrazení množiny A do množiny B?
2. Kolik existuje prostých zobrazení množiny A do množiny B?
3. Kolik existuje prostých zobrazení množiny A do A?

Poznámky

- Máme-li množinu M sestávající z m různých předmětů a vybereme-li z nich libovolně uspořádanou n-tici předmětů (tj. při výběru záleží na pořadí; takové výběry se nazývají variace, obšírněji *variace n prvků z n prvků bez opakování*), máme
$$m(m-1)\dots(m-n+1)$$
možností takového výběru. Každý takový výběr můžeme chápat jako volbu prostého zobrazení
$$f : \{1, 2, \dots, n\} \to M,$$
kde $f(1)$ definujeme jako první předmět z vybrané n-tice, $f(2)$ jako druhý atd. Obráceně, volbu prostého zobrazení si můžeme představit jako výběr uspořádané n-tice z množiny, do níž zobrazujeme.
- Prostá zobrazení konečné množiny X do sebe se nazývají permutace množiny X. Taková zobrazení jsou zároveň *na*. Počet permutací n-prvkové množiny je
$$n! = n \cdot (n-1)\dots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$$