Každá z následujících úloh je za 1 bod. Pro splnění první části domácího úkolu je nutné získat alespoň 9 bodů.

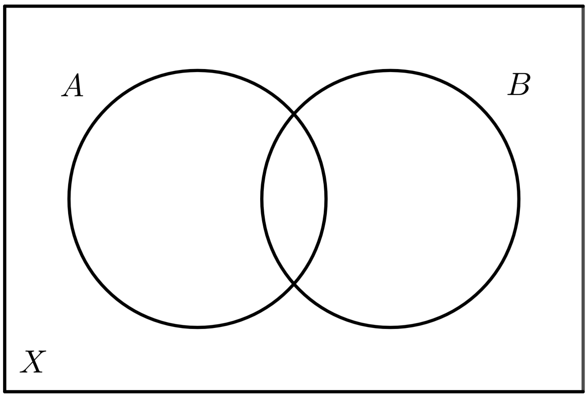
U všech úloh uvádějte podrobné postupy řešení a zdůvodnění. U úloh na kombinatorické počítání není podstatný číselný výsledek, můžete jej však uvést pro úplnost.

1. Dokažte de Morganova pravidla pro dvě množiny A, B - nejprve obrázkem, poté úvahou z definice množinových operací (jako jsme dělali na první přednášce):

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B),$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B),$$

kde X značí základní množinu, $A, B \subset X$, viz obrázek.



2. Matematickou indukcí dokažte vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

3. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

4. Dokažte, že platí

$$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2.$$

Důkaz proveďte dvojím způsobem - nejprve z algebraicky z definice kombinačního čísla; poté kombinatoricky (přes počty dvouprvkových podmnožin).

[*Poznámka:* u druhého způsobu je potřeba rozepsat hodnotu $\binom{n}{2}$, ale hodnotu $\binom{n+1}{2}$ ne.]

5. Kolik čísel zbude z

$$500, 501, \ldots, 1000$$

po vyšrtání všech násobků čísel 2, 3, 5, 6 a 7?

6. Určete absolutní člen (tj. člen neobsahující x) binomického rozvoje

$$\left(2x^3 + \frac{3}{2x}\right)^{12}.$$

7. (*Narozeninový problém.*) Do třídy chodí 30 studentů. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň dva studenti mají narozeniny ve stejný den? (Předpokládejme přitom, že všech 366 možných dní je stejně pravděpodobných.)

8. Mistrovství Evropy v jachtingu se zúčastnilo 50 posádek z 16 zemí. Dokažte, že na mistrovství byly alespoň 4 posádky ze stejné země.

9. Vybereme 38 kladných sudých čísel, z nichž každé je menší 1000. Dokažte, že rozdíl dvou z nich bude nejvýše 26.

10. Na konferenci vystoupí šest přednášejících: Luděk Berec, Jan Eisner, Jana Kalová, Vlastimil Křivan, Michaela Zahradníková a Lenka Zalabová. Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení, jestliže

    a) M. Zahradníková má vystoupit po J. Eisnerovi;

    b) L. Berec má vystoupit bezprostředně před V. Křivanem.

11. a) Máme sedm různých figurek a tři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit?

    b) Máme sedm stejných figurek a tři různé barvy. Kolik existuje možností, jak *některé* z nich obarvit?

12. Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Maďary a 3 Slováky tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili jeden souvislý blok?