TÉMA – RELACE

Množina

- Teorie množin – samostatný obor, přístup **intuitivní** (G. Cantor), **axiomatický** (např. Zermelova-Fraenkelova teorie množin, ZF - základ pro většinu oborů matematiky)

Intuitivní přístup

- Množina – soubor rozlišitelných objektů - prvků (intuitivní přístup neříká co je objekt)
- Značení: $a \in A$, $a \notin A$
- Množina – konečná, nekonečná, počet prvků konečné množiny A označíme např. $|A|$
- Zadání množiny:
  - výčtem prvků $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots\}$,
  - charakteristickou vlastností $C = \{x \in N, x = 2k, k \in N\}$
- $A = \mathrm{B}$ množina A se rovná množině B, když $(\forall a) a \in A \Leftrightarrow a \in B$
- $A \subset \mathrm{B}$ množina A je podmnožinou B, když $(\forall a) a \in A \Rightarrow a \in B$ (množiny A, B mohou být shodné), A je vlastní podmnožinou B, když navíc $A \neq \mathrm{B}$
  Pozor: Je-li např. $A = \{1, \{2\}\}$, pak platí, že $1 \in A$, ale nemá smysl zápis $1 \subset \mathrm{A}$.
  Podobně platí, že $\{1\} \subset \mathrm{A}$, ale nemá smysl psát $\{1\} \in A$.
  Platí, že $\{2\} \in A$, ale neplatí, že $\{2\} \subset A$. Naopak platí, že $\{\{2\}\} \subset A$.
- Prázdná množina **Ø** nebo {} neobsahuje žádné prvky a je podmnožinou každé množiny.
  Platí, že $\emptyset \subset \emptyset$, ale neplatí, že $\emptyset \in \emptyset$ (protože prázdná množina neobsahuje žádné prvky).
- Potenční množina množiny A je množina P_A, která obsahuje všechny podmnožiny mn. A.
- Pro grafické znázornění se používají Vennovy diagramy
- Operace s množinami:
  - průnik $A \cap \mathrm{B}$ je množina, která obsahuje všechny společné prvky množin A, B a neobsahuje žádné jiné prvky
  - sjednocení $A \cup \mathrm{B}$ je množina, která obsahuje všechny prvky alespoň jedné z množin A, B a neobsahuje žádné jiné prvky
  - rozdíl množin $A \backslash \mathrm{B}$ nebo také $A - \mathrm{B}$ je množina, která obsahuje všechny prvky množiny A, které nejsou obsaženy v B a neobsahuje žádné jiné prvky
  - symetrický rozdíl množin A, B je množina $(A - B) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A})$
- Doplněk množiny A v množině B je množina $A_B = B \backslash A$ za předpokladu, že $A \subset \mathrm{B}$
- Platí de Morganovy zákony
- (princip inkluze a ekluze)

Příklady:

1. Určete počet *k* prvkových podmnožin *n* prvkové množiny.
2. Určete počet všech podmnožin *n* prvkové množiny.
3. Vypište všechny podmnožiny množiny $\{1,2,3\}$.
4. Určete doplněk množiny racionálních čísel v množině reálných čísel.
5. Vypište všechny prvky množiny $A = \{1, \{2\}, \{1,2\}\}$.
6. Napište potenční množinu množiny $A = \{1, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Kartézský součin množin

- Kartézský součin množin A, B je množina $A \times B = \{\forall[a,b], a \in A \wedge b \in B\}$

Příklady:

1. Vytvořte kartézský součin množin $A = \{1,2\}, B = \{3,4\}$. Načrtněte kartézský graf.
2. Načrtněte kartézský graf kartézského součinu $A \times B$, kde $A = (-1;3), B = \{3,4\}$.
3. Načrtněte kartézský graf kartézského součinu $A \times B$, kde $A = [2;5), B = [-1;7)$.
4. Načrtněte kartézský graf kartézského součinu $R \times N$.
5. Načrtněte kartézský graf kartézského součinu $Z \times N$.

Binární relace

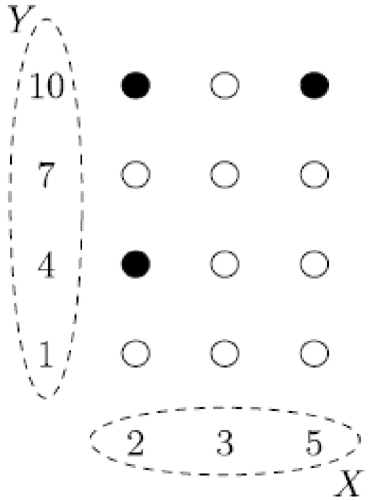
- Binární (protože určuje vztah mezi dvojicemi objektů) relace z množiny X do množiny Y je libovolná podmnožina T kartézského součinu $X \times Y$
  $T = \{[x,y], x \in X \wedge y \in Y\}$
- Levý (první) obor relace T tvoří všechny prvky $x \in X$, ke kterým existuje nějaké $y \in Y$
- Pravý (druhý) obor T tvoří všechny prvky $y \in Y$, ke kterým existuje nějaké $x \in X$
- Znázornění relací – kartézské a grafové
- Inverzní relace k relaci $T \subset X \times Y$ je relace $T^{-1} \subset Y \times X$,
  kde $T^{-1} = \{[y,x], y \in Y \wedge x \in X\}$
- V grafovém znázornění se inverzní relace zobrazí v osové souměrnosti podle svislé osy, v kartézském znázornění v osové souměrnosti podle vedlejší úhlopříčky (přímka *y*=*x*).
- (skládání relací)
- Vlastnosti relací: reflexivní, symetrická, tranzitivní, antisymetrická

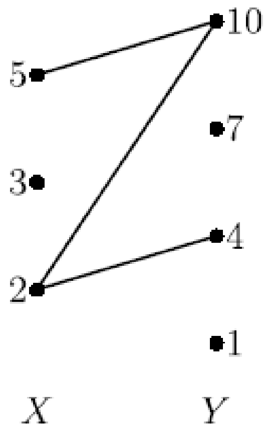
Příklady:

1. Znázorněte relaci $T = \{[2,4],[2,10],[5,10]\}$. Určete první a druhý obor relace.
2. Kolik je všech binárních relací z *X* do *Y*, kde *X* je *m* prvková a *Y* je *n* prvková množina?
3. Jak z grafového a z kartézského znázornění poznáte levá a pravý obor relace?
4. Jsou dány množiny $A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,4,5,6\}$. Zapište výčtem relaci T, která je dána charakteristickou vlastností $T = \{[x,y], x \geq y,\ x \in X,\ y \in Y\}$. Relaci pak znázorněte grafově i kartézsky.

Řešení:

1. kartézské znázornění   grafové znázornění





První obor relace je množina $X = \{2{,}5\}$, druhý obor relace je množina $Y = \{4{,}10\}$.

2. |X|=*m*, |Y|=*n*
   - počet prvků kartézského součinu je $m \cdot n$
   - počet všech podmnožin *k* prvkové množiny je 2^k ,
   (protože podle binomické věty je $\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \cdots + \binom{k}{k} = (1+1)^k$)

   Počet všech binárních relací je tedy $2^{m \cdot n}$.

4. $T = \{\,[3{,}3], [4{,}3], [4{,}4]\,\}$

Zobrazení

- Zobrazení *Z* množiny *X* do množiny *Y* je nějaká relace $X \times Y$. Pro *Z* platí, že pro každý prvek $x \in X$ existuje **právě jeden** prvek $y \in Y$ a $[x, y] \in Z$.
  Tedy: $Z = \{[x, y], x \in X \,\wedge\, y \in Y \,\wedge (\forall\, x\,)(\exists!\, y)\}$
- Funkce je zobrazení v oboru reálných čísel
- Vlastnosti zobrazení: prosté (injekce), na množinu (surjekce), vzájemně jednoznačné (bijekce)

- **Zobrazení:** $\{[x, y], x \in A, y \in B, (\forall x)(\exists! y)\}$
- **Prosté zobrazení,** INJEKCE: $(\forall x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2)$
  - různým vzorům přiřazuje různé obrazy
  - lze vytvořit inverzní zobrazení
- **Zobrazení množiny A na množinu B,** SURJEKCE: $(\forall y)(\exists x)$
- **Vzájemně jednoznačné zobrazení,** BIJEKCE: injekce a surjekce zároveň (zobrazení prosté i na)
  - existuje-li mezi množinami A, B bijekce, pak A,B mají stejnou kardinalitu (tj. stejný počet prvků)

Příklady:

Rozhodněte, zda relace představuje zobrazení, injekci, surjekci, bijekci.