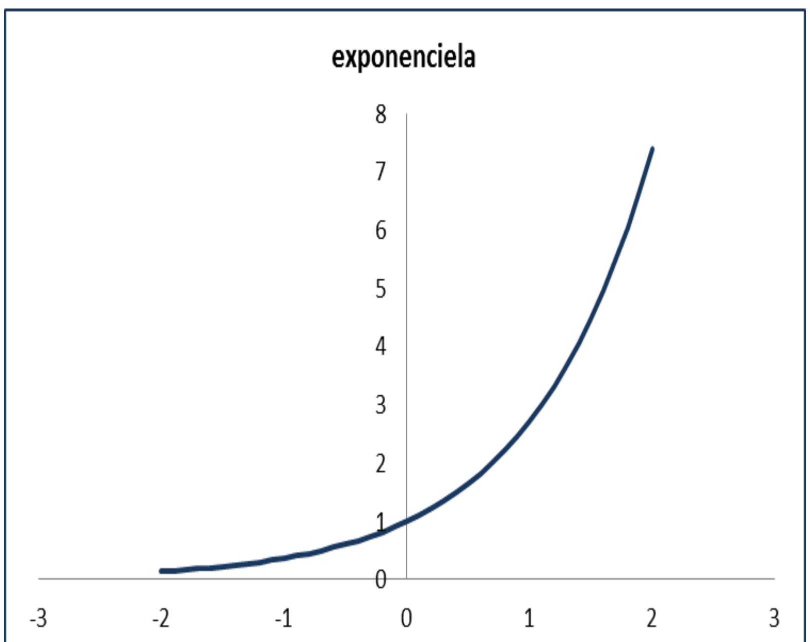
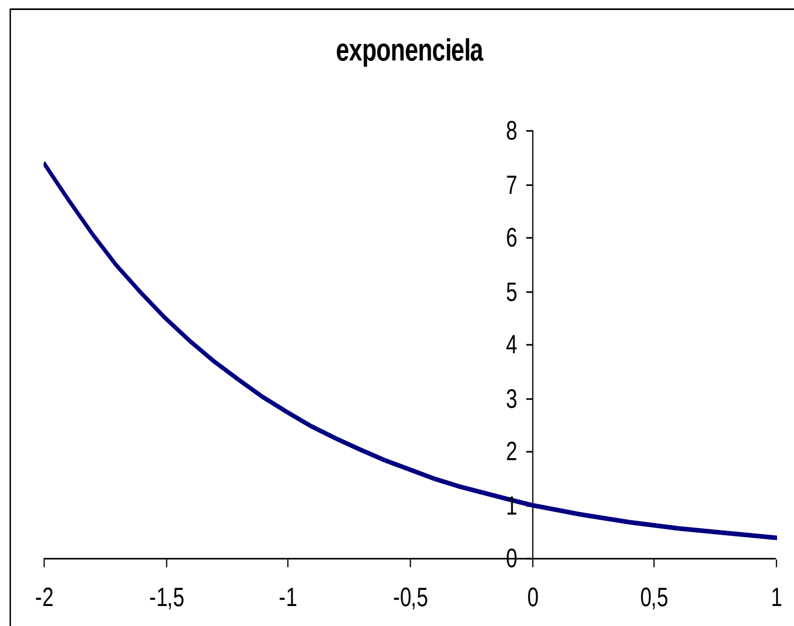
Exponenciální funkce.

$y = f(x) = e^{x}$
D (f) = **R**
R (f) = $(0, +\infty)$
f je rostoucí na svém definičním oboru,
$f(+\infty) = +\infty$, $f(-\infty) = 0$
$f(0) = e^{0} = 1$
e = 2, 78…. Eulerova konstanta

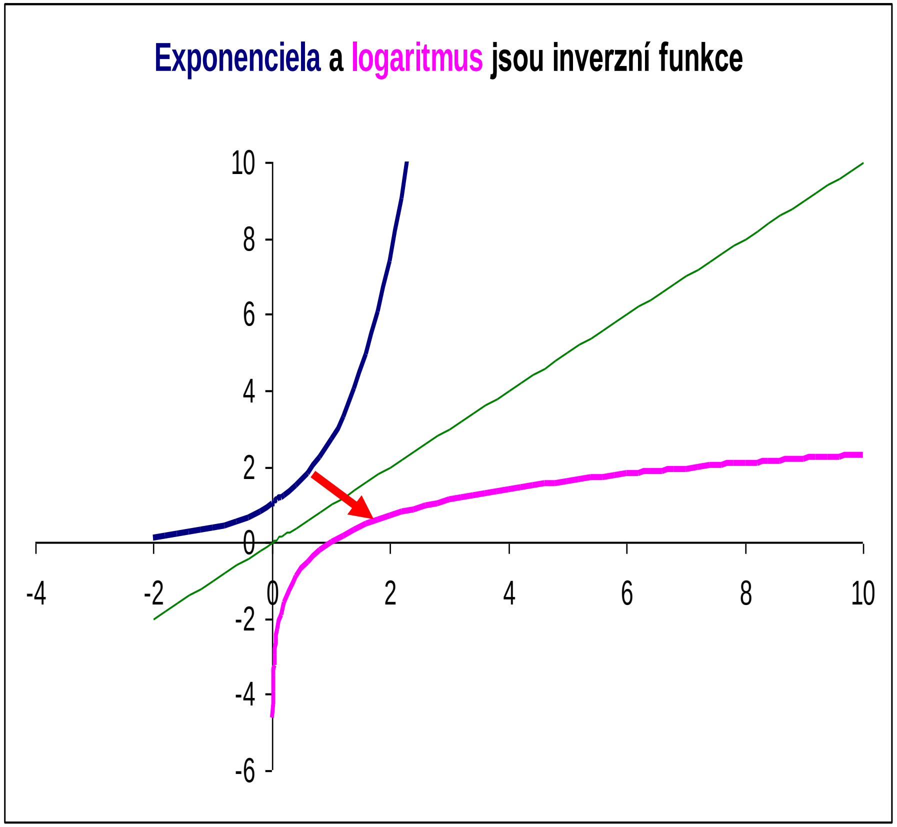
$y = f(x) = e^{-x} = 1 / e^{x}$
D (f) = **R**
R (f) = $(0, +\infty)$
f klesající na svém definičním oboru,
$f(+\infty) = 0$, $f(-\infty) = +\infty$
$f(0) = e^{0} = 1$
e = 2, 78…. Eulerova konstanta

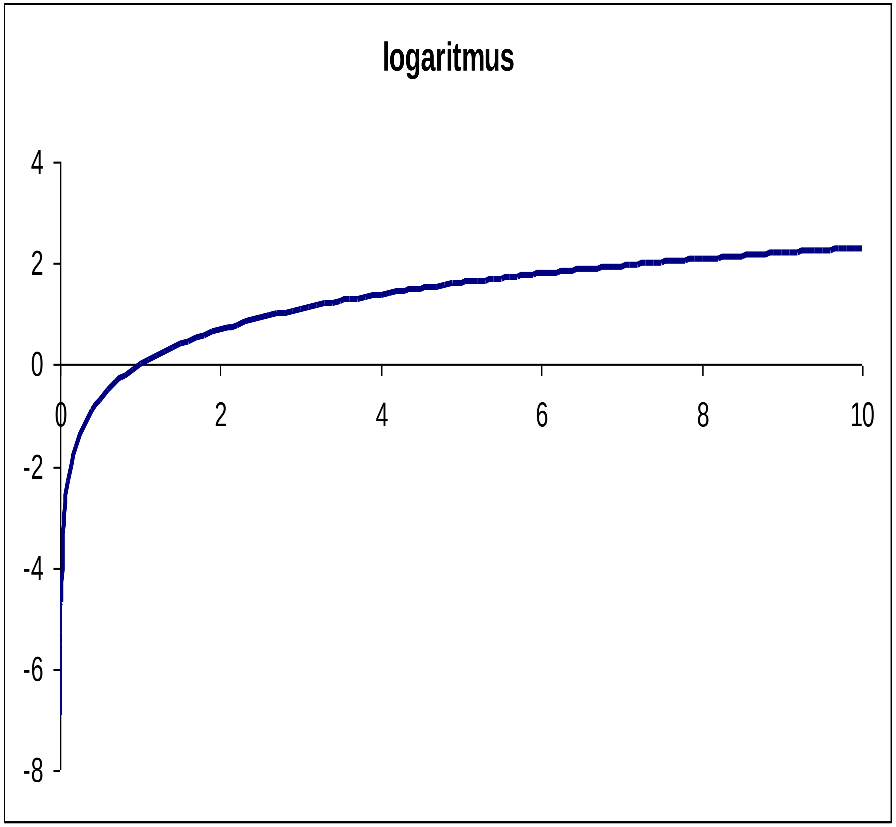




Funkce logaritmus.

$y = f(x) = \log(x)$
$D(f) = (0, +\infty)$
$R(f) = \mathbf{R}$
f je rostoucí na svém definičním oboru,
$f(x) \to +\infty$, pro $x \to +\infty$
$f(x) \to -\infty$, pro $x \to 0$
$f(1) = \log 1 = 0$





Funkce obecná mocnina = mocninná funkce.

$y = f(x) = a^x$, $a > 0$
$\boldsymbol{a^x = e^{x \log a}}$
$D(f) = \mathbf{R}$
$R(f) = (0, +\infty)$
f je rostoucí na svém definičním oboru pro $a > 1$,
f je klesající na svém definičním oboru pro $a < 1$
$f(0) = a^0 = 1$

$y = f(x) = a^{-x} = 1/a^x$
$D(f) = \mathbf{R}$
$R(f) = (0, +\infty)$
f klesající na svém definičním oboru pro $a > 1$,
f rostoucí na svém definičním oboru pro $a < 1$
$f(0) = 1/a^0 = 1$

Inverzní funkcí k funkci
$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$,
je funkce logaritmus při základu a
$y = \log_a x$

Speciálně:
Dekadický logaritmus $y = \log_{10} x$
přirozený logaritmus $y = \log_e x$

Pravidla pro počítání s logaritmy a mocninami.

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{x-y} = a^x / a^y$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^0 = 1$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^b) = b \log_a x$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

Příklady.

$$x^{-1} = x^{0-1} = \frac{x^0}{x^1} = \frac{1}{x}$$

$$\log \frac{1}{x} = \log(x^{-1}) = -\log x$$

nebo

$$\log \frac{1}{x} = \log 1 - \log x = -\log x$$

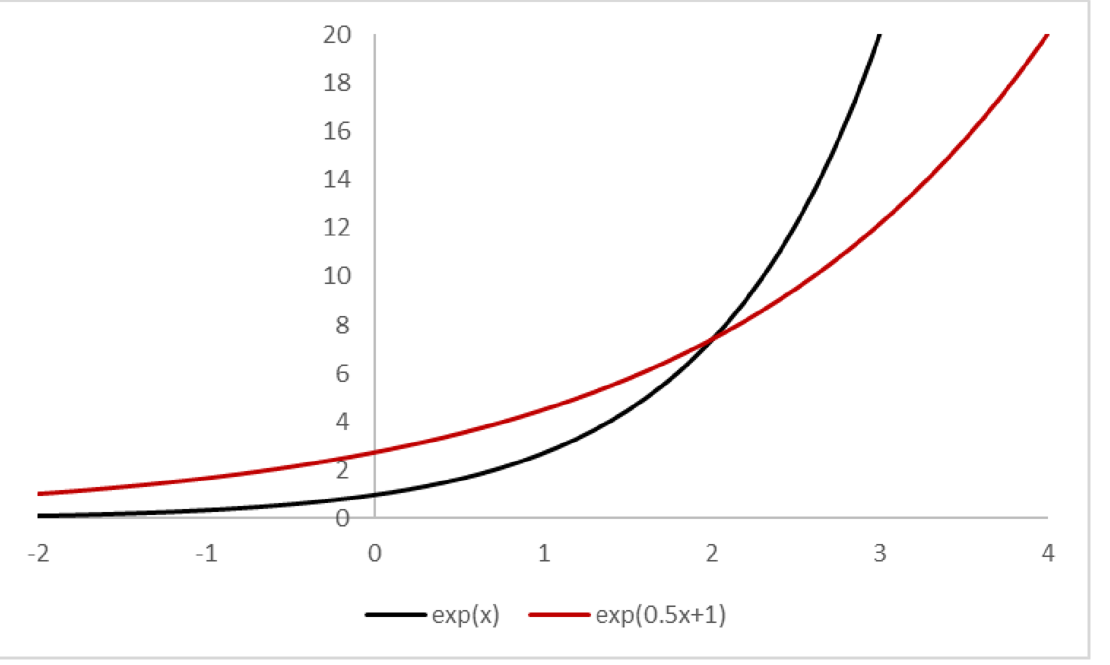
Příklady.

$$e^{ax+b} = e^b e^{ax} = e^b (e^x)^a$$

Sčítání se mění na násobení,
Násobení se mění na mocninu.

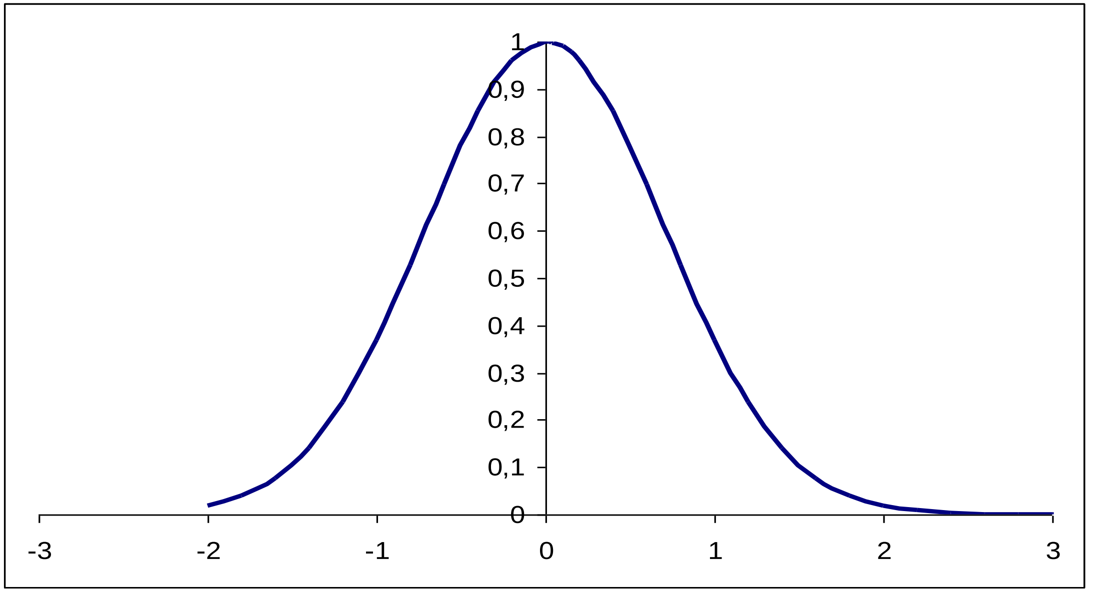
Posun po ose *x* v exponentu má multiplikativní účinek Na funkční hodnotu.

$$e^{0.5x+1} = e e^{0.5x}$$



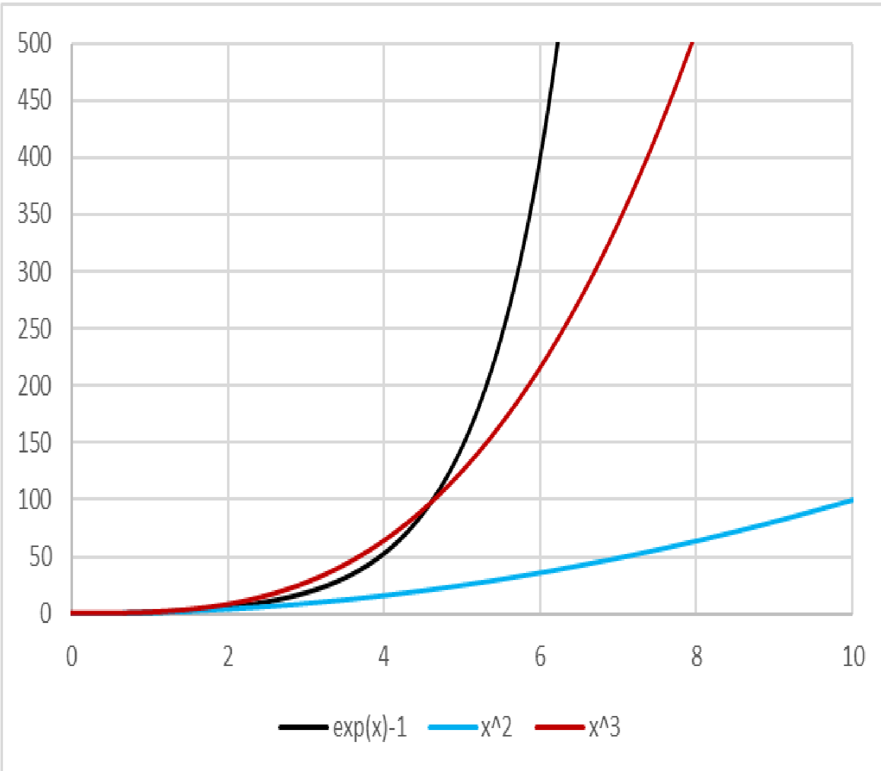
$$e^{-x^2}$$

Graf je symetrický podle osy *y*.

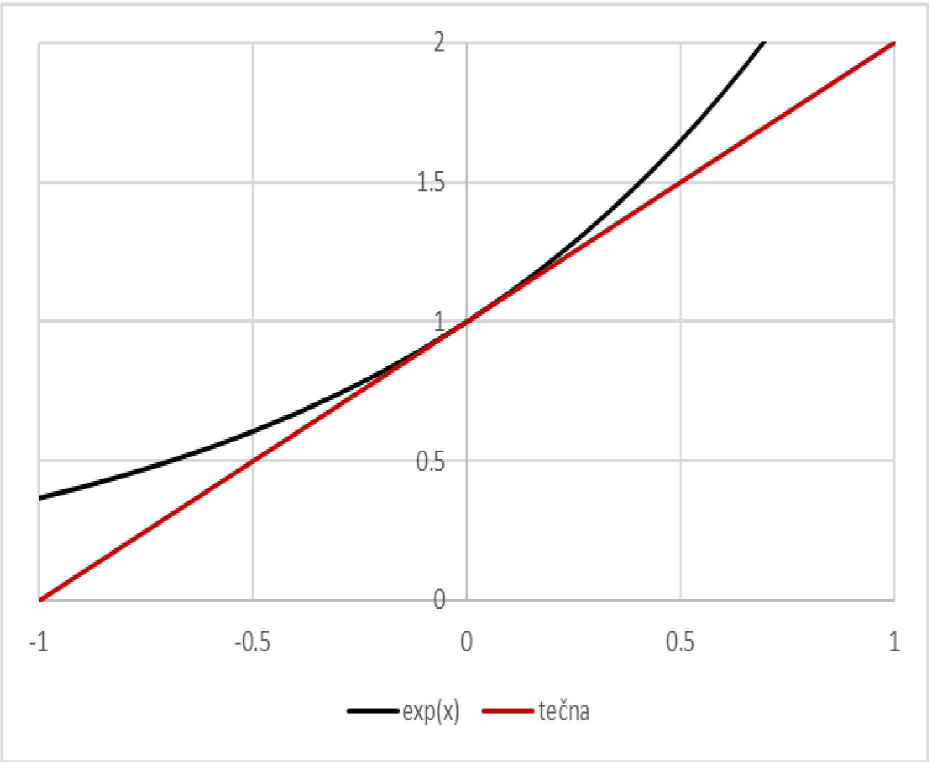


Příklady.

Srovnání exponenciely a polynomů.



Tečna k exponenciele.



Pro $x \approx 0$ platí $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ neboli

$e^x \approx 1 + x$ neboli $\frac{e^x - 1}{x} \approx 1$

Příklady.

Předpokládejme, že velikost populace v čase *t* je *N*(*t*), *t* ≥ 0 a že platí:

$$N(t) = N(0)e^{-at}$$

Víme, že *N*(0) = 100 a *N*(10) = 1
Vypočtěte *a.*

$$\log N(t) = \log N(0) - at$$

$$\log N(10) = \log 100 - 10a$$

$$\log 1 = \log 100 - 10a$$

$$\log 100 = 10a$$

$$a = \log(100)^{0,1}$$

$$a = 0{,}46$$

Periodické funkce – goniometrické funkce.

Funkce f se nazývá periodická s periodou T, jestliže

- když $x \in D(f)$, pak $x + T \in D(f)$
- $f(x) = f(x + T)$

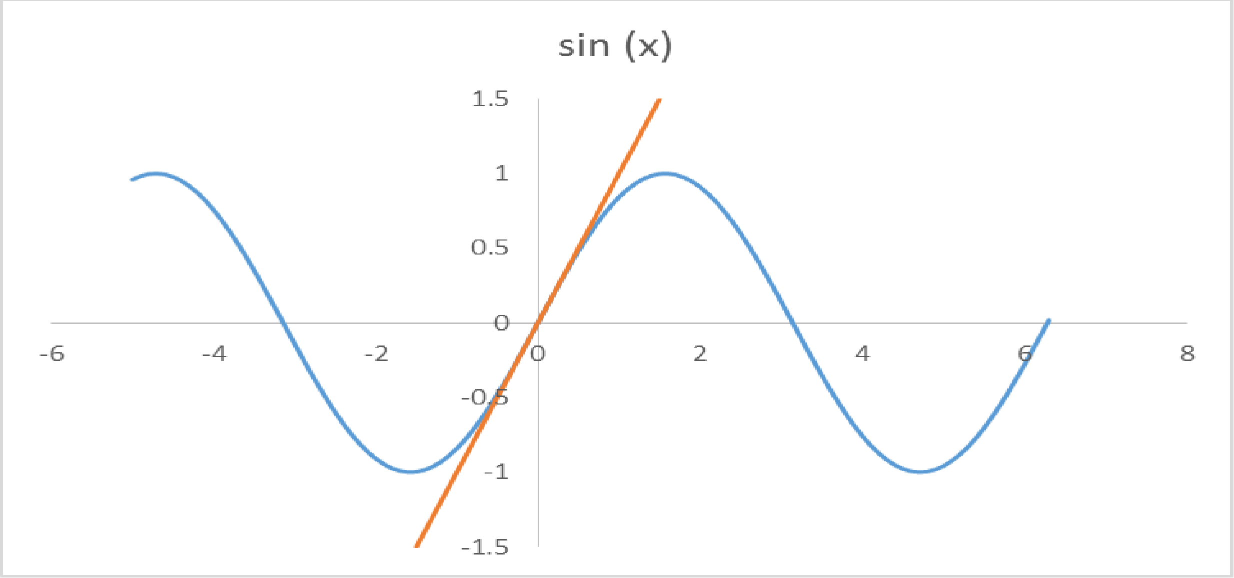
Funkce $y = f(x) = \sin x$.

$D(f) = \mathbf{R}$

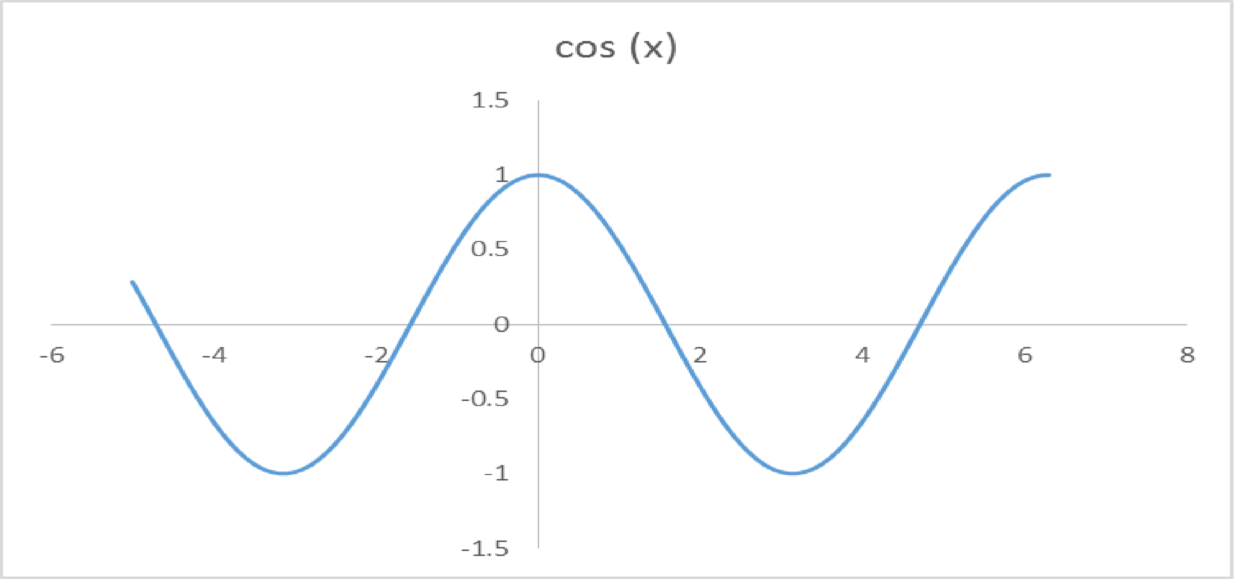
$R(f) = \langle -1, 1 \rangle$

f je periodická na svém definičním oboru s periodou 2π,

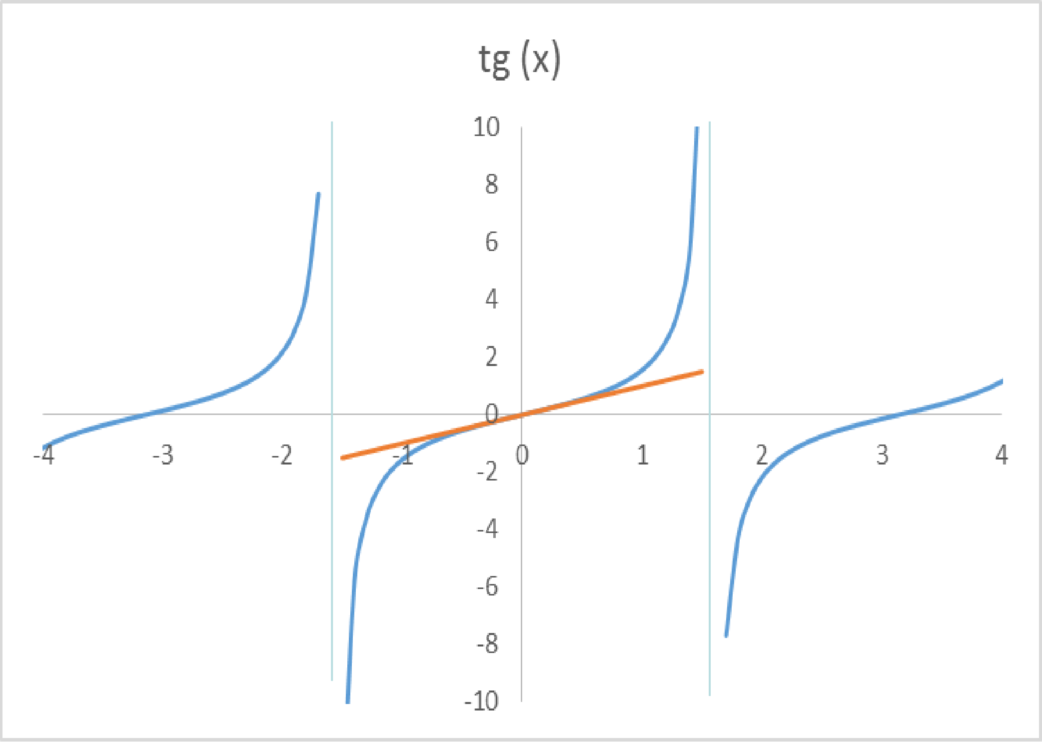
$f(0) = 0$



Funkce $y = f(x) = \cos x$.
D (*f*) = **R**
R (*f*) = <-1, 1>
f je periodická na svém definičním oboru s periodou 2π,
$f(0) = 1$



Funkce $y = f(x) = \mathrm{tg}\, x = \sin x / \cos x$.
D (f) = $\mathbf{R} \setminus \{(2k + 1)\, \pi/2,\ k \in \mathbf{Z}\}$
R (f) = $(-\infty, +\infty)$
f je periodická na svém definičním oboru s periodou π,
$f(0) = 0$
Na intervalech $((2k - 1)\, \pi/2, (2k + 1)\, \pi/2)$ je funkce rostoucí



Funkce $y = f(x) = \text{cotg}\, x = \cos x / \sin x$.

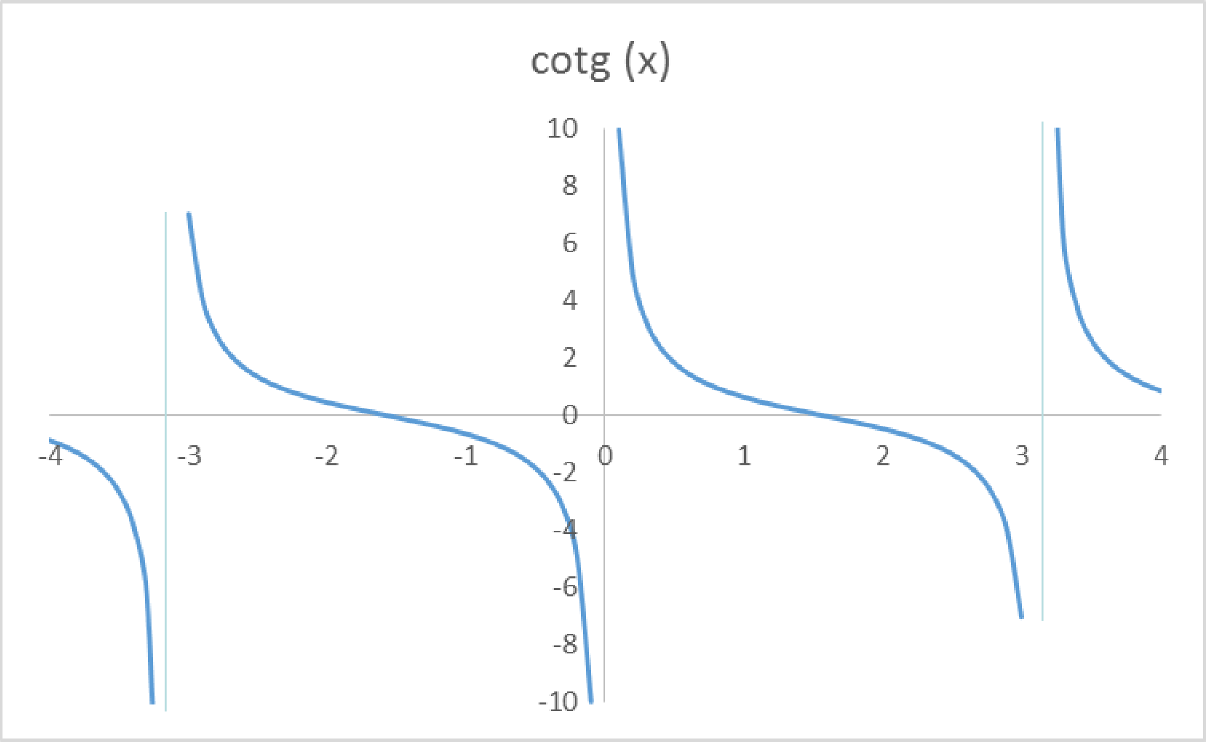
$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

$R(f) = (-\infty, +\infty)$

f je periodická na svém definičním oboru s periodou π,

$f(\pi / 2) = 0$

Na intervalech $(-k\pi, k\pi)$ je funkce klesající



Pravidla pro počítání s goniometrickými funkcemi.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$-\sin x = \cos(x + \pi / 2)$$

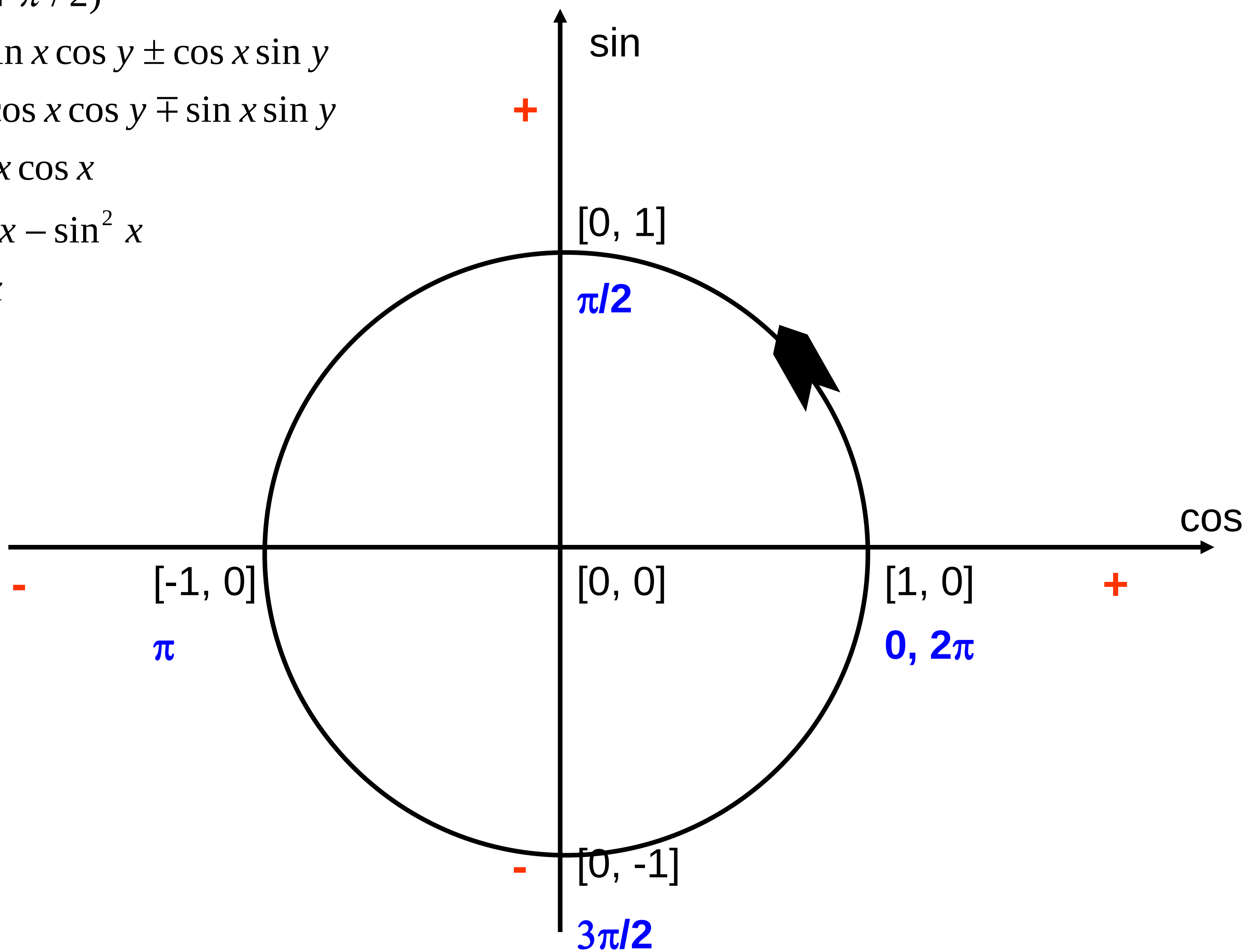
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

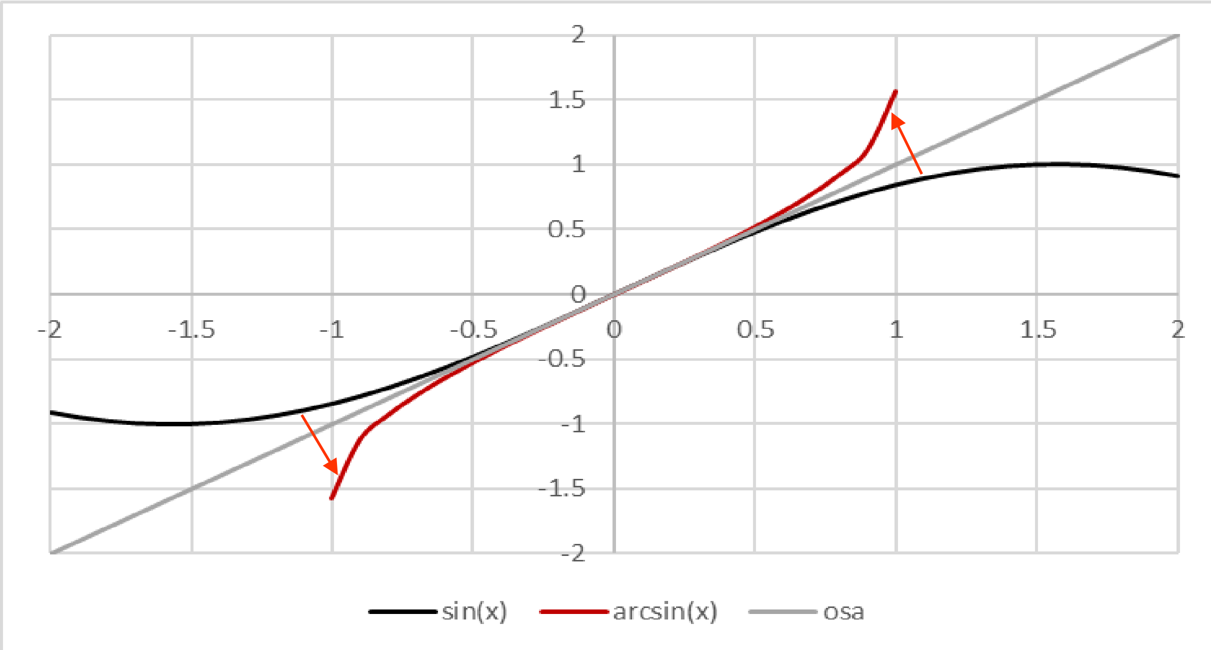
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

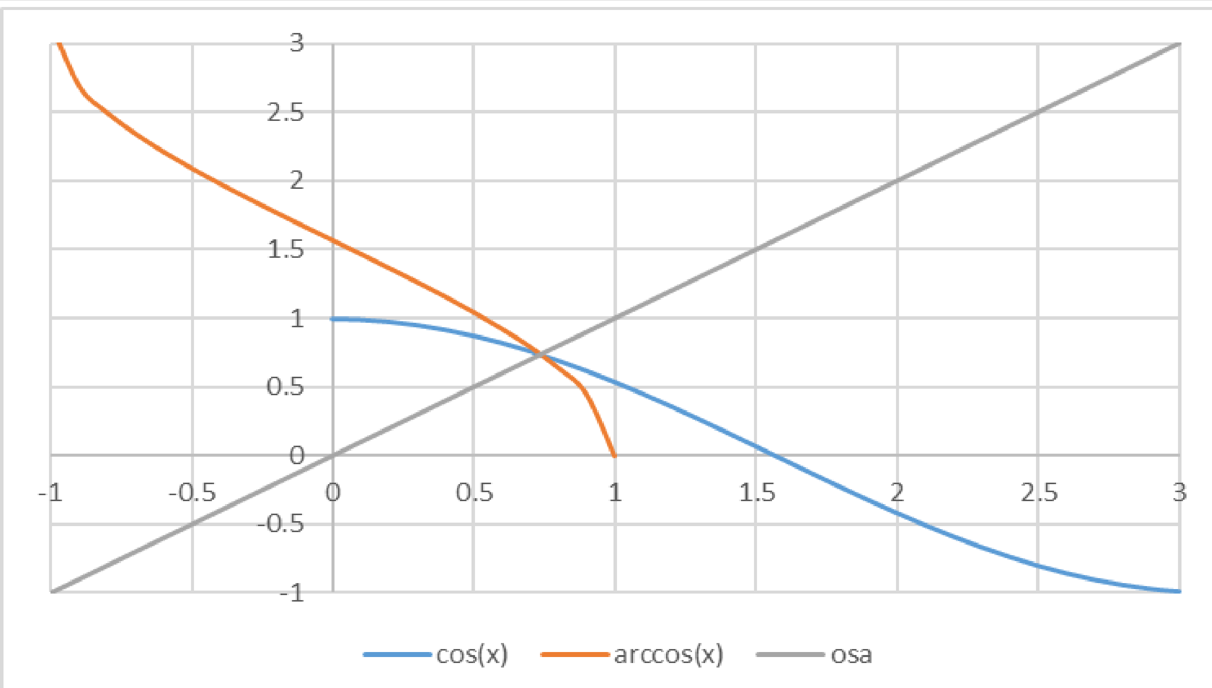
$$\cot gx = 1 / tgx$$

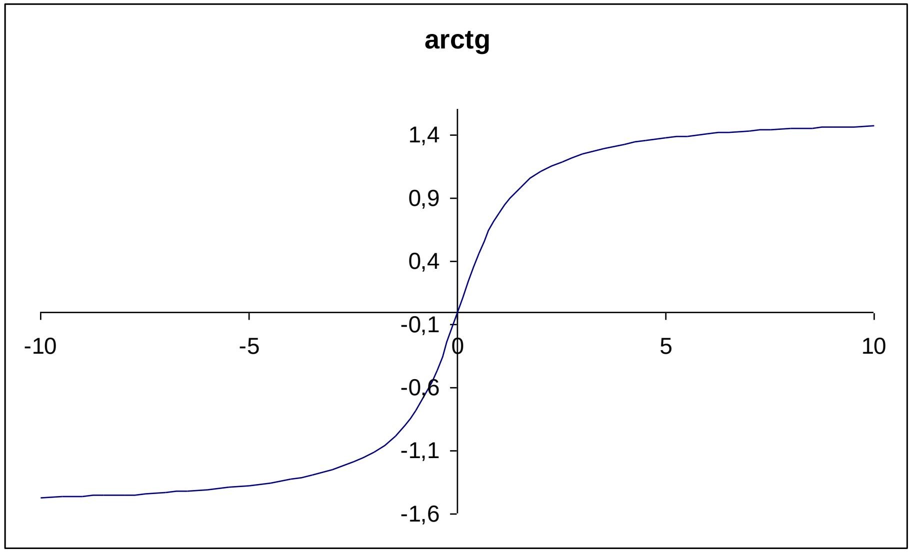


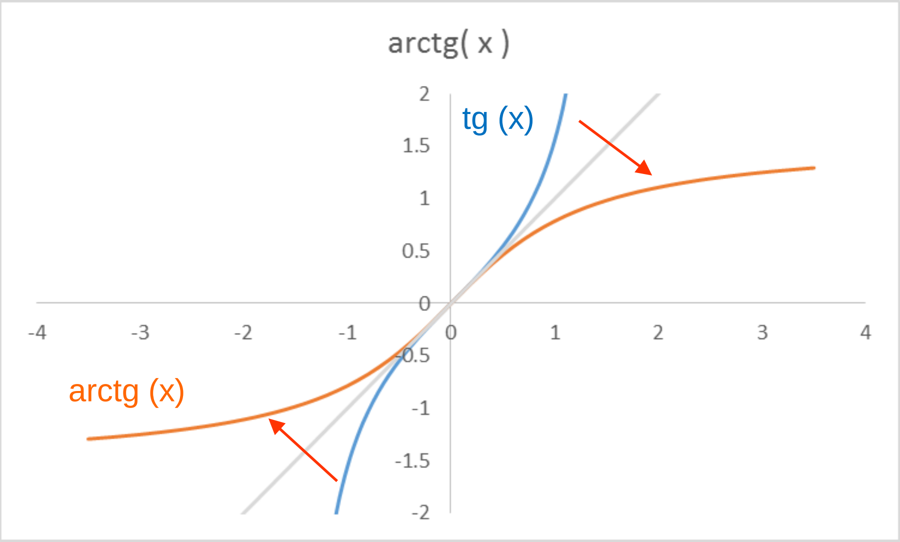
Cyklometrické funkce.

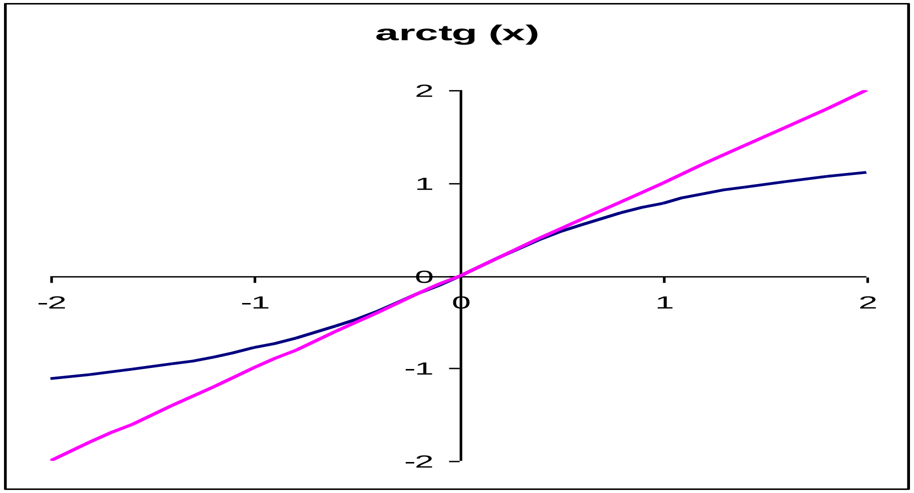
- arcsin *x* je inverzní funkce k funkci sinus na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.
  - $D(\text{arcsin}) = (-1, 1)$
  - $R(\text{arcsin}) = (-\pi/2, \pi/2)$.
- arccos *x* je inverzní funkce k funkci cosinus na intervalu $(0, \pi)$.
  - $D(\text{arccos}) = (-1, 1)$
  - $R(\text{arccos}) = (0, \pi)$.
- arctg *x* je inverzní funkce k funkci tangens na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.
  - $D(\text{arctg}) = (-\infty, +\infty)$
  - $R(\text{arctg}) = (-\pi/2, \pi/2)$
- arccotg *x* je inverzní funkce k funkci tangens na intervalu $(0, \pi)$.
  - $D(\text{arccotg}) = (-\infty, +\infty)$
  - $R(\text{arccotg}) = (0, \pi)$.


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
sin(x)
arcsin(x)
osa

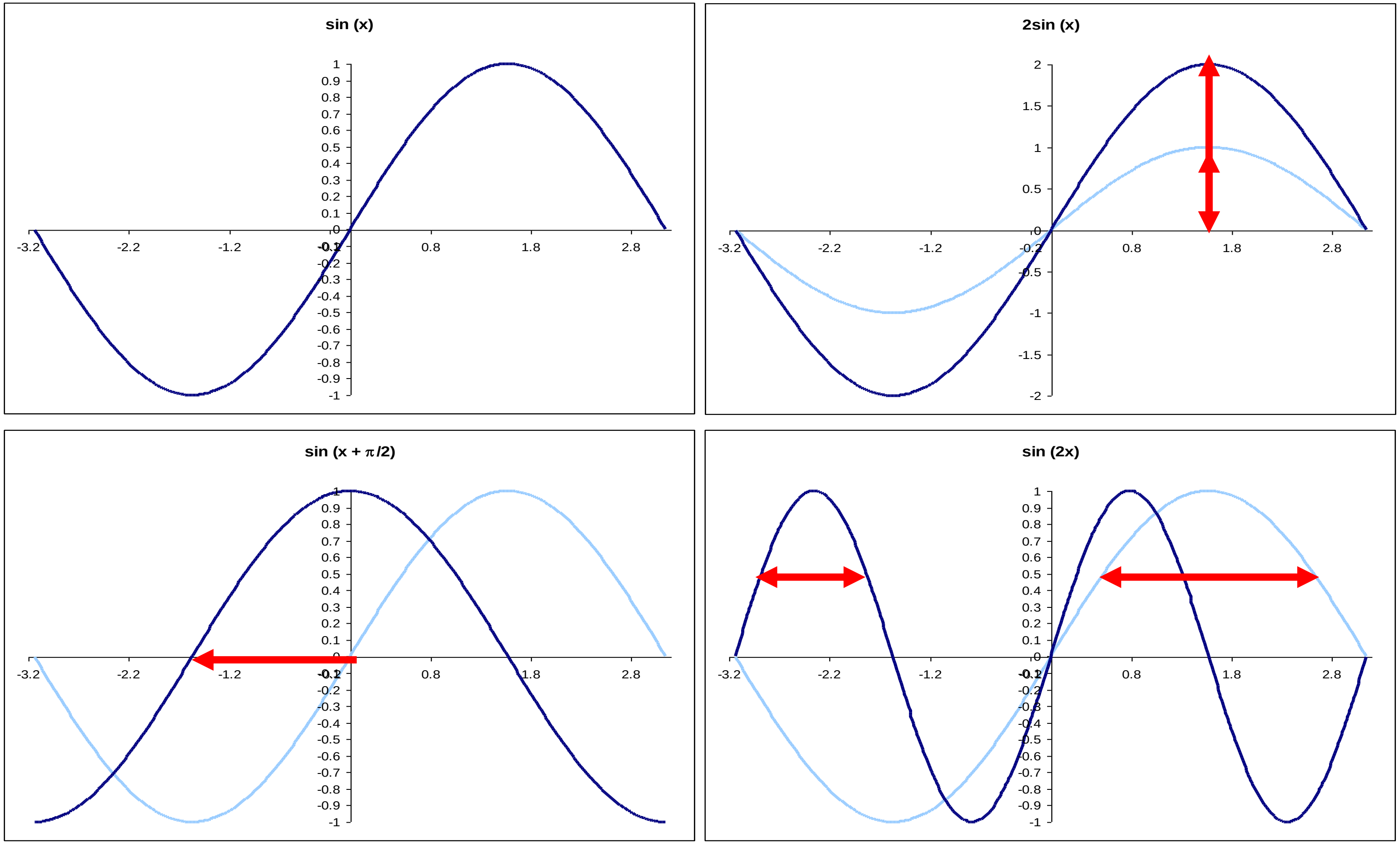

3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
cos(x)
arccos(x)
osa

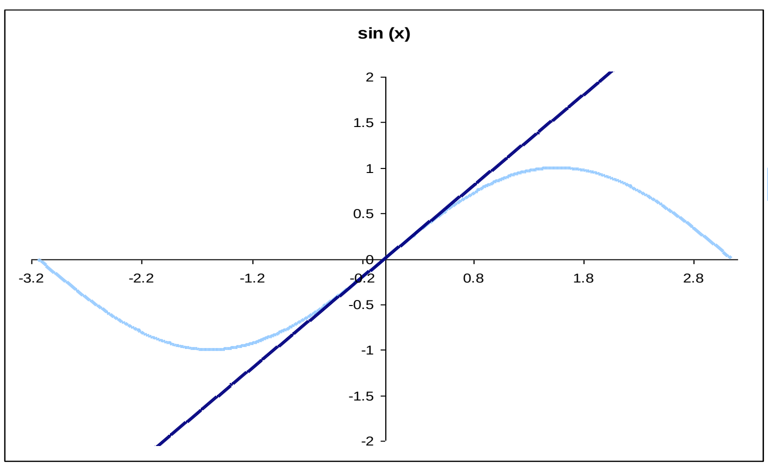






Pro $x \approx 0$ je arctg $(x) \approx x$





Pro $x \approx 0$ je $\sin(x) \approx x$

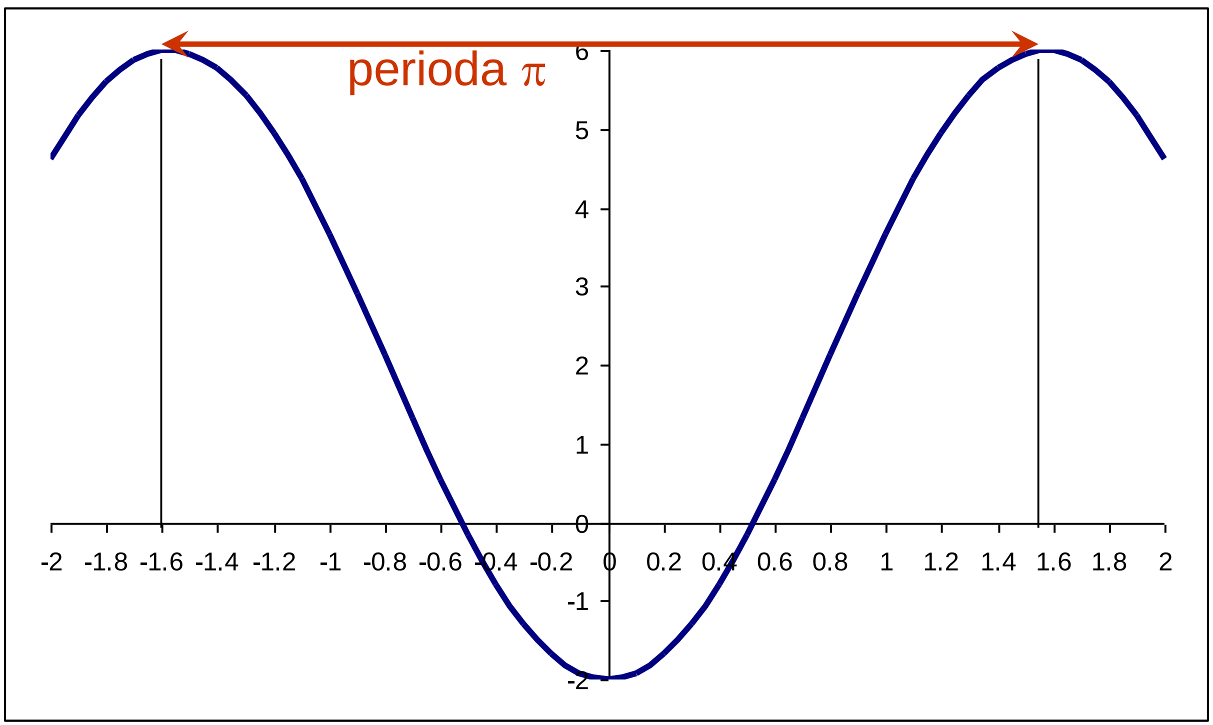
Příklady.

1. Určete periodu funkce, posunutí po osách, obor hodnot a hodnotu v bodě 0. Pak graf funkce nakreslete.

$y = 4\ \cos\ (2x-\pi) + 2 = 4\cos\big(2(x-\pi/2)\big)+2$

Posun o $\pi/2$ po ose *x* do kladných hodnot.

- R(*f*) = $<-2, 6>$
- $0 < 2x - \pi < 2\pi$ určuje základní periodu funkce cosinus.
  Odtud $\pi/2 < x < 3\pi/2$. Perioda je tedy π.
- Pro $x = 0$ je $y = 4\cos(-\pi) + 2 = -2$.



2. Poločas rozpadu C^{14} je 5730 let. Proces rozpadu se řídí funkcí $W_t = W_0 e^{-\lambda t}$

Určete λ.

$$0.5W_0 = W_t = W_0 e^{-\lambda t}$$

$$0.5 = e^{-\lambda t}$$

$$\log 2 = \lambda t$$

$$\lambda = \frac{\log 2}{5730}$$

3. Víme, že povrch krychle S závisí na délce hrany krychle L (S = aL^2)
a objem krychle V závisí na délce hrany L (V = bL^3). Určete zvislost mezi S a V.

$$S = aL^2$$

$$V = b\left(\frac{S}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$V = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} S^{\frac{3}{2}}$$

Položme $k = \dfrac{b}{a^{\frac{3}{2}}}$

Pak $V = kS^{\frac{3}{2}}$