Kapitola 3

Predikátová logika

3.1 Formule predikátové logiky

3.1.1 Příklad. Napište formule predikátové logiky odpovídající následujícím větám. Použijte k tomu predikátových symbolů uvedených v textu.

a) Někdo má hudební sluch (S) a někdo nemá hudební sluch.

b) Některé děti (D) nerady čokoládu (C).

c) Nikdo, kdo nebyl poučen o bezpečnosti práce (P), nesmí pracovat v laboratořích (L).

d) Ne každý talentovaný malíř (T) vystavuje obrazy v Národní galerii (G).

e) Pouze studenti (S) mají nárok na studené večeře (V).

f) Ne každý člověk (C), který má drahé lyže (D), je špatný lyžař (S).

Výsledek: a) $(\exists x\, S(x)) \wedge (\exists x\, \neg S(x))$;
b) $\exists x\, (D(x) \wedge \neg C(x))$;
c) $\forall x\, (\neg P(x) \Rightarrow \neg L(x))$;
d) $\neg(\forall x\, (T(x) \Rightarrow G(x)))$;
e) $\forall x\, (V(x) \Rightarrow S(x))$;
f) $\neg[\forall x\, ((C(x) \wedge D(x)) \Rightarrow S(x))]$.

3.1.2 Příklad. Pro následující věty popište jazyk predikátové logiky (tj. predikáty, konstantní symboly a funkční symboly), který potřebujete k formalizaci a napište formule odpovídajících vět.

a) Karel viděl Shakespearovu hru Hamlet.

b) Karel viděl některou Shakespearovu hru.

c) Někdo viděl Shakespearovu hru Hamlet.

d) Někdo viděl některou Shakespearovu hru.

e) Ne každý viděl některou Shakespearovu hru.

f) Karel viděl pouze hry od Shakespeara.

g) Lucernu nenapsal Shakespeare.

Výsledek: Naše universum U tvoří lidé a hry. Pro první čtyři věty by stačil tento jazyk $\mathscr{L}$: $\mathsf{Pred} = \{V\}$, kde V je ternární predikátový symbol, kde $V(x, y, z)$ má význam: „osoba x viděla hru y od autora z“. (Tj. na druhém místě trojice (x, y, z) musí být hra, na prvním a třetím musí být osoba.) Dále $\mathsf{Konst} = \{k, h, s\}$, kde k je osoba Karel, h je hra Hamlet a s je Shakespeare. Formule mají tvar:
a) $V(k, h, s)$; b) $\exists y\, V(k, y, s)$; c) $\exists x\, V(x, h, s)$; d) $\exists x\, \exists y\, V(x, y, s)$.

Chceme-li popsat všechny věty, zavedeme jiné predikátové symboly: Naše universum U je stejné. $\mathsf{Pred} = \{H, O, V, N\}$, kde H a O jsou unární predikáty, H znamená „být hrou“, O znamená „být osobou“, $V(x, y)$ a $N(x, y)$ jsou binární predikáty: $V(x, y)$ znamená „osoba x viděla hru y“ a $N(x, y)$ znamená „osoba x napsala hru y“. Dále $\mathsf{Konst} = \{k, h, s, l\}$, kde k je „Karel“, h je „Hamlet“, s je „Shakespeare“ a l je „Lucerna“. Formule mají tvar:
a) $N(s, h) \wedge V(k, h)$;
b) $\exists x\, (H(x) \wedge V(k, x) \wedge N(s, x))$;
c) $\exists x\, (O(x) \wedge V(x, h) \wedge N(s, h))$;
d) $\exists x\, \exists y\, (O(x) \wedge H(y) \wedge V(x, y) \wedge N(s, y))$;
e) $\neg[\forall x\, (O(x) \Rightarrow (\exists y\, (H(y) \wedge V(x, y) \wedge N(s, y)))]$;
f) $\forall x\, [(H(x) \wedge V(k, x)) \Rightarrow N(s, x)]$;
g) $\neg N(s, l)$.

3.1.3 Příklad. Pro následující věty popište jazyk predikátové logiky (tj. uveďte predikáty, konstantní symboly a funkční symboly) který potřebujete k formalizaci a napište formule odpovídajících vět.

a) Eva mluví anglicky i francouzsky.

b) Každý, kdo mluví německy, mluví i anglicky.

c) Každý mluví anglicky nebo německy.

d) Někdo mluví anglicky i německy.

e) Někteří studenti neumí ani německy ani anglicky.

Výsledek: Naše universum U je množina všech lidí. $\mathsf{Pred} = \{A, N, F, S\}$, kde A znamená „mluvit anglicky“, N znamená „mluvit německy“, F znamená „mluvit francouzsky“, S znamená „být studentem“. Všechny predikáty jsou unární. $\mathsf{Konst} = \{e\}$, kde e znamená „Eva“.
a) $A(e) \wedge F(e)$;
b) $\forall x\, (N(x) \Rightarrow A(x))$;
c) $\forall x\, (A(x) \vee N(x))$;
d) $\exists x\, (A(x) \wedge N(x))$;
e) $\exists x\, (S(x) \wedge \neg N(x) \wedge \neg A(x))$.

3.1.4 Příklad. Pro následující věty popište jazyk predikátové logiky (tj. uveďte predikáty, konstantní symboly a funkční symboly) který potřebujete k formalizaci a napište formule odpovídajících vět.

a) Každé nezralé ovoce je nezdravé.

b) Žádné ovoce, které roste ve stínu, není zralé.

c) Toto jablko rostlo ve stínu a je zralé.

d) Matka Jany je malířka.

e) Něčí matka je malířka.

f) Existuje dívka, jejíž otec je hudebník a matka malířka.

g) Každý nemá otce hudebníka.

Výsledek: Pro věty a) až c): Universum jsou kusy ovoce. $\mathsf{Pred} = \{Z, S, D\}$, kde všechny predikátové symboly jsou unární a Z znamená „být zralé“, S znamená „růst ve stínu“, D znamená „být zdravé“; $\mathsf{Konst} = \{j\}$, kde j je „toto jablko“.

a) $\forall x\,(\neg Z(x) \Rightarrow \neg D(x))$;
b) $\forall x\,(S(x) \Rightarrow \neg Z(x))$;
c) $S(j) \wedge Z(j)$.

Pro věty d) až g): Universum je množina lidí. $\mathsf{Pred} = \{M, H, D\}$, kde všechny predikátové symboly jsou unární a M znamená „být malířkou“, H znamená „být hudebníkem“, D znamená „být dívkou“; $\mathsf{Func} = \{o, m\}$, kde oba jsou unární funkční symboly a $o(x)$ je otec osoby x, $m(x)$ je matka osoby x; $\mathsf{Konst} = \{j\}$, kde j je „Jana“.

d) $M(m(j))$;
e) $\exists x\, M(m(x))$;
f) $\exists x\,(D(x) \wedge H(o(x)) \wedge M(m(x)))$;
g) $\neg(\forall x\, H(o(x)))$, nebo té« $\exists x\, \neg H(o(x))$.

3.1.5 Příklad. Popište interpretaci, kterou potřebujete, abyste zformalisovali následující věty jako sentence predikátového počtu.

a) Čtverec lichého čísla je vždy liché číslo.

b) Je-li libovolné číslo dělitelné šesti, je dělitelné i třemi.

c) Existují čísla a, b, c taková, že součet čtverců a a b je roven čtverci c.

d) Každý čtyřúhelník, který má stejné úhlopříčky, je kosočtverec.

Výsledek: a) $U = \mathbb{Z}$, $\mathsf{Pred} = \{L\}$, kde L znamená „být lichý“, $\mathsf{Func} = \{o\}$, kde $o(x)$ je čtverec čísla x. Formule má tvar $\forall x\,(L(x) \Rightarrow L(o(x)))$.

b) $U = \mathbb{Z}$, $\mathsf{Pred} = \{P, Q\}$, kde P znamená „být dělitelný 6“, Q znamená „být dělitelný 3“. Formule má tvar $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$.

c) $U = \mathbb{Z}$, $\mathsf{Pred} = \{R\}$, R je binární predikátový symbol a má význam rovnosti, $\mathsf{Func} = \{o, s\}$, kde $o(x)$ je unární a znamená čtverec čísla x a $s(x, y)$ je binární a znamená součet čísel x a y. Formule má tvar $\exists x\, xistsy\, \exists z\, R(s(o(x), o(y)), o(z))$. (Kdybychom zavedli rovnost jako predikátový symbol $=$, který má vždy význam rovnosti, mohli bychom formuli psát ve tvaru: $\exists x\, xistsy\, \exists z\, s(o(x), o(y)) = o(z)$.)

d) U je množina všech mnohoúhelníků, $\mathsf{Pred} = \{C, U, K\}$, kde C znamená „být čtyřúhelník“, U znamená „mít stejné úhlopříčky“ a K znamená „být kosočtverec“. Formule má tvar $\forall x\,(C(x) \Rightarrow (U(x) \Rightarrow K(x)))$.

3.1.6 Příklad. V následujících formulích označte všechny vázané výskyty proměnných a všechny volné výskyty proměnných. Které z formulí jsou sentence a které otevřené formule?

a) $\forall x\, \exists y\, Q(x, y)$;

b) $Q(f(a, b), y) \Rightarrow (\exists y\, P(s(y)))$;

c) $Q(a, b) \vee (\forall x\, Q(a, x))$;

d) $Q(x, y) \Rightarrow Q(y, x)$;

e) $Q(a, b) \wedge (\exists x\, \exists y\, Q(x, y))$;

f) $(\forall x\, Q(a, x)) \Rightarrow (\forall x\, \exists y\, Q(y, x))$.

3.2 Sémantika predikátové logiky

3.2.1 Příklad. Vyslovte výroky, které odpovídají negacím následujících výroků:

a) Každá ryba dýchá žábrami.

b) Každý sportovec má dobrou fyzickou kondici.

c) Někteří studenti nejsou pilní.

d) Žádné schody nevedou do nebe.

e) Každý se snaží dostudovat.

f) Každé liché číslo je prvočíslo.

g) Každý, kdo jede do Anglie, umí anglicky.

h) Není šprochu, aby na něm nebylo pravdy trochu.

Výsledek: a) Některé ryby nedýchají žábrami.
b) Někteří sportovci nemají dobrou fyzickou kondici.
c) Každý student je pilný.
d) Některé schody vedou do nebe.
e) Někdo se nesnaží dostudovat.
f) Některá lichá čísla jsou složená (nejsou prvočísla).
g) Někdo jede do Anglie i když anglicky neumí.

3.2.2 Příklad. Speciální symboly jazyka $\mathscr{L}$ predikátové logiky jsou tyto: $\mathsf{Pred} = \{P, Q\}$, kde P a Q jsou unární predikátové symboly, $\mathsf{Func} = \{f, g\}$, kde f a g jsou unární funkční symboly.

Je dána interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, kde U je množina všech lidí,
f odpovídá otci, tj. $[\![f]\!]$ přiřazuje osobě x jejího otce,
g odpovídá matce, tj. $[\![g]\!]$ přiřazuje osobě x její matku,
P odpovídá vlastnosti „hrát na piano“, Q odpovídá vlastnosti „hrát na kytaru“.

Napište věty, kterým v této interpretaci odpovídají následující formule:

a) $\forall x\, (P(f(x)) \vee Q(g(x)))$;

b) $\exists x\,(P(g(x)) \wedge Q(f(x)))$;

c) $\forall x\,((P(f(x)) \vee Q(g(x))) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x)))$;

d) $\exists x\,(P(g(f(x)))$;

e) $\exists y\,(P(y) \wedge \neg Q(f(g(y))))$;

Výsledek: a) Každý má otce pianistu nebo matku kytaristku.
b) Někdo má matku pianistku a otce kytaristu.
c) Jestliže má někdo otce pianistu nebo matku kytaristku, pak sám hraje na piano nebo na kytaru.
(Uvědomte si, že tady má slovo „někdo“ význam „každý“.)
d) Něčí babička z otcovy strany je kytaristka.
e) Někdo je sám pianista navzdory tomu, že jeho dědeček z matčiny strany si na klavír ani nebrnkl.

3.2.3 Příklad. Speciální symboly jazyka $\mathscr{L}$ predikátové logiky jsou tyto: $\mathsf{Pred} = \{P, Q\}$, kde P je unární a Q je binární predikátový symbol, $\mathsf{Func} = \{f, g\}$, kde f je unární a g je binární funkční symbol, $\mathsf{Konst} = \{a, b, c\}$.

Je dána interpretace $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, kde U je množina přirozených čísel; $[\![a]\!] = 0$, $[\![b]\!] = 1$, $[\![c]\!] = 3$,
$[\![f]\!]\colon n \mapsto n^2$, tj. f odpovídá povýšení na druhou,
$[\![g]\!]\colon (m, n) \mapsto m + n$, tj. g odpovídá součtu,
$[\![P]\!] = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tj. P odpovídá vlastnosti „být sudým“,
$[\![Q]\!] = \{(m, n) \mid m \text{ je dělitelem } n\}$, tj. Q odpovídá relaci „dělitelnosti“.

Rozhodněte o pravdivosti nebo nepravdivosti následujících sentencí:

a) $P(c)$;

b) $P(f(a))$;

c) $P(g(a, f(b)))$;

d) $Q(a, f(b))$;

e) $Q(f(b), a)$;

f) $\forall x\, Q(x, x)$;

g) $\exists x\, Q(f(x), x)$;

h) $\forall x\,(Q(c, x) \Rightarrow Q(b, x))$;

i) $\forall x\,(Q(b, x) \Rightarrow Q(c, x))$;

j) $\exists x\,(P(f(x)) \wedge P(x))$;

k) $\exists x\,\exists y\,(P(x) \wedge P(y) \wedge P(g(x, y)))$;

l) $\exists x\,\exists y\,(\neg P(x) \wedge \neg P(y) \wedge P(g(x, y)))$.

Výsledek: a) Nepravdivá; b) pravdivá; c) nepravdivá; d) nepravdivá; e) pravdivá; f) nepravdivá (protože 0 nedělí 0); g) pravdivá; h) pravdivá; i) nepravdivá; j) pravdivá; k) pravdivá; l) pravdivá.

3.2.4 Příklad. Pro následující sentence rozhodněte, zda se jedná o tautologie, kontradikce nebo splnitelné sentence, které nejsou tautologie. (P je unární predikátový symbol, Q je binární predikátový symbol.)

a) $(\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, \neg P(x))$;

b) $\forall x\, (P(x) \vee \neg P(x))$;

c) $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$;

d) $(\forall x\, P(x)) \wedge (\exists x\, \neg P(x))$;

e) $\forall x\, [\exists y\, Q(x,y) \vee \forall z\, \neg Q(x,z)]$.

Výsledek: a) Tautologie. b) Tautologie.
c) Splnitelná formule, která není tautologie. Zdůvodnění: Sentence $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\forall x\, P(x))$ je pravdivá kdykoli je nepravdivá sentence $\exists x\, P(x)$. Uvažujme interpretaci: U je množina reálných čísel, predikátový symbol P odpovídá vlastnosti „být odmocninou z -1". Protože žádné reálné číslo vlastnost $[\![P]\!]$ nemá, je naše sentence pravdivá v $\langle U, [\![-]\!]\rangle$. Na druhé straně uvažujme interpretaci: U' je množina přirozených čísel, P odpovídá vlastnosti „být sudý". Pak formule $\exists x\, P(x)$ je pravdivá v této interpretaci, protože existuje sudé přirozené číslo. Formule $\forall x\, P(x)$ ovšem pravdivá není, protože ne všechna přirozená čísla jsou sudá. Tedy formule $(\exists x\, P(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x))$ není pravdivá v této interpretaci.
d) Kontradikce. e) Tautologie.

3.2.5 Příklad. K formuli φ nalezněte formuli ψ tautologicky ekvivalentní s formulí $\neg\varphi$ a takovou, že ψ má negace pouze těsně před atomickými formulemi. (P je unární predikátový symbol, R je binární predikátový symbol a a je konstantní symbol.)

a) $\forall x\, [P(x) \Rightarrow (\exists y\, (P(y) \wedge R(x,y)))]$;

b) $P(a) \vee [\exists z\, (P(z) \wedge \forall y\, (R(y,z) \Rightarrow \neg P(y)))]$.

Výsledek: a) $\exists x\, [P(x) \wedge \forall y\, (\neg P(y) \vee \neg R(x,y))]$;
b) $\neg P(a) \wedge [\forall z\, (\neg P(z) \vee (\exists y (R(y,z) \wedge P(y))))]$.

3.2.6 Příklad. Rozhodněte, zda následující množiny sentencí jsou splnitelné nebo nesplnitelné. Zdůvodněte. (P a R jsou unární predikátové symboly, Q je binární predikátový symbol.)

a) $S = \{\forall x\, \exists y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,x)\}$;

b) $M = \{\exists x\, \forall y\, Q(x,y), \forall x\, \neg Q(x,x)\}$;

c) $N = \{\forall x\, (P(x) \vee R(x)), \neg\exists x\, R(x), \neg P(a)\}$.

Výsledek: a) S je splnitelná. Její model je např. tato interpretace: $U = \mathbb{N}$, $[\![Q]\!]$ je relace $<$ na množině $\mathbb{N}$, tj. $[\![Q]\!] = \{(m,n) \mid m < n\}$. Pak pro každé přirozené číslo n existuje číslo větší (např. $n+1$) a žádné přirozené číslo není větší než ono samo.

b) M je nesplnitelná. „Přečtěme si" první formuli: „Existuje prvek, řekněme d, takový, že pro každý prvek y dvojice (d,y) má vlastnost Q." Dosadíme-li za y prvek d, má dvojice (d, d) také vlastnost Q. Tudíž nemůže být pravdivá druhá formule množiny M, která říká: „Pro žádný prvek x dvojice (x, x) nemá vlastnost Q.“

Formálně: Vezměme libovolnou interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, v níž je pravdivá formule $\exists x\, \forall y\, Q(x, y)$. Pak existuje prvek $d \in U$, tak, že pro každý prvek $d' \in U$ dvojice $(d, d') \in [\![Q]\!]$. Proto také $(d, d) \in [\![Q]\!]$. To ovšem znamená, že sentence $\forall x\, \neg Q(x, x)$ není pravdivá v $\langle U, [\![-]\!]\rangle$.

c) N je nesplnitelná. „Přečtěme si“ první a třetí sentenci: „Každý prvek má vlastnost P nebo vlastnost R.“ „Prvek a nemá vlastnost P.“ Jsou-li obě tyto sentence pravdivé v některé interpretaci, pak v této interpretaci musí prvek a mít vlastnost R. To ovšem znamená, že není pravdivá druhá sentence: „Žádný prvek nemá vlasntost R.“

Formálně: Vezměme libovolnou interpretaci $\langle U, [\![-]\!]\rangle$, v níž je pravdivá první a třetí sentence. Pak existuje prvek $d \in U$ $(d = [\![a]\!])$ takový, že $d \notin [\![P]\!]$. Protože je pravdivá sentence $\forall x\, (P(x) \vee R(x))$, musí být pravdivá sentence $P(a) \vee R(a)$. To ale znamená, že je pravdivá i $R(a)$ a tudíž $d = [\![a]\!] \in [\![R]\!]$. Tedy sentence $\forall x\, \neg R(x)$ je nepravdivá v $\langle U, [\![-]\!]\rangle$.