تعریف.
یک **گروه** مجموعه‌ای است G با یک عملگر $\cdot$ به‌گونه‌ای که:

۱. G نسبت به این عملگر بسته است.
۲. این عملگر دارای خاصیت شرکت‌پذیری است.
۳. یک عنصر همانی وجود دارد.
۴. هر عنصر دارای معکوس است.

نتیجه.
عنصر همانی در هر گروه یکتا است.

تبصره.
این نتیجه از تعریف گروه‌ها حاصل می‌شود.

مثال.
گروه $(Z, +)$ را در نظر بگیرید، مجموعه اعداد صحیح تحت عمل جمع. عنصر همانی 0 است و هر عنصر $z \in Z$ دارای معکوس $-z$ است.

تمرین ۱.

ثابت کنید قضیه زیر در مورد گروه‌ها.

قضیه.
هیچ گروهی نمی‌تواند به عنوان اجتماع دو زیرگروه خاص خود نوشته شود.

راه حل.

ما با استفاده از برهان خلف، اثبات را ارائه می‌دهیم.

برهان.
فرض کنید دو زیرگروه خاص از گروه G داریم، آنها را H_1 و H_2 بنامیم.
فرض کنید $H_1 \cup H_2 = G$. می‌دانیم که $e \in H_1 \cap H_2$، بنابراین $e \in H_1 \cup H_2$.
بگذارید $h_1 \in G$ به‌گونه‌ای که $h_1 \in H_1 \setminus H_2$.
چون $H_1 \neq H_2 \neq G \neq \emptyset$، عنصری مانند h_1 تنها در $H_1 \setminus H_2$ وجود دارد. به همین ترتیب، عنصری مانند $h_2 \in G$ وجود دارد که $h_2 \in H_2 \setminus H_1$.
اگر $h_1 h_2 \in H_1$ باشد، آنگاه $h_2 \in H_1$ که فرض را نقض می‌کند. بنابراین، $H_1 \cup H_2 \neq G$.