Математика Страхования

Опр. $\{(T_j, C_j),\ j=1,\dots,M\}$ – обобщенный фин. поток

M – н.б. случайной

где $T_1 < T_2 \dots < T_M \in R^1_+$

$C_j \in R$ $\quad C_j < 0$ – расходы

$\quad C_j > 0$ – поступления

2.1

Оценка фин. потоков

$S(0,t) = S_0 \exp\left(\int_0^t \delta(u)\,du\right) := S_0 \cdot A(0,t)$

интенсивность интереса; аккумулирующий фактор

$A(z,t) = A(z,s)\cdot A(s,t) \quad \forall z \le s \le t \quad \Rightarrow \quad A(s,t) = \exp\left(\int_s^t \delta(u)\,du\right) \quad s\le t$

Лемма 1 $A(s,t) \in D$, >0. Если верно, то

Пусть $A(z,t) = A(z,s)\cdot A(s,t)$ выполняется для $A(s,t)$

$A(z,t) = A(z,z)\cdot A(z,t) \Rightarrow A(z,z) = 1$

$$\left.\frac{\partial A(t,z)}{\partial z}\right|_{z=t} \equiv \delta(t)$$

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0} \frac{A(t,t+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{A(t,t+h)\cdot A(0,t) - A(0,t)}{h\cdot A(0,t)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{A(0,t+h) - A(0,t)}{h\cdot A(0,t)} = g'(t)$$

где $g(t) = \ln(A(0,t))$

$\Rightarrow \int_0^t \delta(s)\,ds + C = \ln A(0,t) \Rightarrow A(s,t) = \exp\left(\int_s^t \delta(u)\,du\right)$

Зам. Пусть $T = T_0$ (младенца)

T_x – ост. пр. жизни г-на возр. x

$S_x(t) = {}_t p_x = P(T_x > t) = P(T > x+t \mid T > x)$

Условие ${}_t p_x = {}_s p_x \cdot {}_{t-s} p_{x+s}$, $s<t$

$\Rightarrow$ в силу Л1 ${}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu(x+u)\,du\right)$

где $\mu(x+u) = \mu_x(u)$ – интенсивность смерти

Аккумулированная стоимость в мом. вр-ни s
дет. фин. потока $c = \{ (t_j, c_j), t_j < s, j = \overline{1, m} \}$

$$AVal_s(c) = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot A(t_j, s)$$

Дисконт. стоимость — // —

$$DVal_s(c) = \sum_{j=1}^{n} c_j V(s, t_j), \quad \text{где } V(s,t) = \exp\left(-\int_s^t \delta(u)\, du\right), s<t$$

Для непр. ф. п. $c(t)$, $t \in [0, T]$:

$$Val_t(c) = AVal_t(c_{[0,t]}) + DVal_t(c_{[t,T]})$$

$$AVal_t(c_{[0,t]}) = \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t \delta(u)\, du\right) c(\tau)\, d\tau$$

$$DVal_t(c_{[t,T]}) = \int_t^T \exp\left(-\int_t^\tau \delta(u)\, du\right) c(\tau)\, d\tau$$

При фикс. инт. интереса $\delta = \ln(1+i)$: $Val_t(i) = NPV_t(i)$

2.1.16. $a = (a_0, \ldots, a_n)$, $b = (b_0, \ldots, b_n)$

Пусть $\sum_{i=0}^{j} a_i \geq \sum_{i=0}^{j} b_i$, $\forall j = \overline{0, n}$

тогда $NPV(a) \geq NPV(b)$, $\forall\, r \in (0; \infty)$

▷ при $n=1$ очевидно

пусть верно для n

если $a_{n+1} \geq b_{n+1} \Rightarrow NPV(a) - NPV(b) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{(1+i)^k} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{b_k}{(1+i)^k} \geq 0$

пусть $a_{n+1} < b_{n+1} \Rightarrow NPV(a) - NPV(b) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k - b_k}{(1+i)^k} =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k - b_k}{(1+i)^k} + \frac{a_n - b_n}{(1+i)^n} + \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{(1+i)^{n+1}} \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k - b_k}{(1+i)^k} + \frac{a_n - b_n + a_{n+1} - b_{n+1}}{(1+i)^n} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{a'_k - b'_k}{(1+i)^k}}_{\geq 0}, \text{ где } \begin{array}{l} a'_k = a_k;\ b'_k = \ldots \\ a'_n = a_n + a_{n+1} \end{array}$$

≥ 0 в силу предп. индукции

$$\sum_{i=0}^{n} a'_i \geq \sum_{i=0}^{n} b'_i$$

$NPV(a) \geq NPV(b)$

(2.2) Ипотека

$$L - \sum_{j=1}^{k} A(t_j, t) c_j = \sum_{k+1}^{n} V(t, t_j)\, c_j = PVal_t(c) \quad , t \in (t_k, t_{k+1})$$

↑ оставшийся долг

Дисконт. период выплат (discounted pay-back period)

$T_+ = \inf [t \geq 0 : AVal_t(c) \geq 0]$

(Если инв. проект фин. с пом. денежного кредитора, то пост. от проекта исп-ся для выплаты займа до T_+, когда баланс впервые меняется от отр. к пол.; в этот момент долг считается выплаченным и дальн. пост. от проекта яв. доходом) ← до T_+ на долг выплач. интерес

после T_+ интерес пост. в пользу проекта

(ex) 2.19. Цепь Маркова ↗ 1 "жизнь" ↘ 0 "смерть"

инт. перехода $1 \longrightarrow 0 = \lambda$

в теч. жизни клиент получает бенефит $= 1$

μ = интенсивность инфляции

Пусть $T_1 \sim Exp(\lambda)$ - момент смерти

$T_2 \sim Exp(\mu)$ – нез. с.в.

Диск. значение сумм. бенефита (2 варианта)

$$J_1 = \int_0^{T} e^{-\mu u} du = \frac{1}{\mu}(1 - e^{-\mu T_1})$$

$$J_2 = \int_0^{T_1 \wedge T_2} du = T_1 \wedge T_2 \quad , \quad T_1 \wedge T_2 \sim Exp(\lambda + \mu)$$

$$E[J_1] = E[J_2] = \frac{1}{\lambda + \mu} \qquad Var[T_1 \wedge T_2] = \frac{1}{(\lambda+\mu)^2}$$

$$Var[J_1] = \frac{1}{\mu^2} Var[e^{-\mu T_1}] = \frac{1}{\mu^2}\left[M_{T_1}(-2\mu) - M_{T_1}(-\mu)^2\right] = \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2(\lambda+2\mu)}$$

$M_{T_1}(s) = \frac{\lambda}{\lambda - s}$ ~~ПРМ~~ для T_1

$Var[J_1] < Var[J_2]$

В общем для $\forall$ неотриц. инт. ин $r(t)$ и $T \sim Exp(\mu)$

$J_1 = \int_0^{\infty} e^{-\mu u} r(u) du$

$J_2 = \int_0^{T} r(u) du$

$E[J_1] = E[J_2]$; $Var[J_1] \leq Var[J_2]$

2.3 Yields

При зад. потоке c

$i \longrightarrow \psi(i,0) := [i - Val_0(c)] = 0$ имеет ед. корень на $(-1;\infty)$

то этот корень наз. его доходностью $y(c)$

ex. 2.2.1. Пусть $c_0 = -\$1000$ $c_1 = +\$400$ $c_2 = +\$770$

$\Rightarrow$ $1000(1+i)^2 - 400(1+i) - 770 = 0$ $\Rightarrow$ $y(c) = 0{,}1$

$$\varphi^+(i,t) = [i - AVal_t(c)]$$

$$\varphi^-(i,t) = [i - DVal_t(c)]$$

$$\psi(i,t) = [i - Val_t(c)] = \varphi^+(i,t) + \varphi^-(i,t)$$

Зам1. Если в ф. потоке c все поступления (in-flows) предшествуют всем выплатам (out-flows), то всегда $\exists\, y(c)$

Зам2 Если $\varphi^+(i_0,t)$ при вып. интересе i_0 меняет знак только 1 раз, то $\exists$ ед. корень $i \geq i_0$

ex. 2.2.5 $c = [-1500, 250, -500, 500, 500, 500, 500]$
$t=1$ ... $t=7$

NSolve $[x^6 + x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 3 == 0, x, Reals]$

$x = 0{,}967678$

$i = 3{,}34019\,\%$ $(x^{-1} - 1)$

(2.4) Упорядочивание рисков

(ex) 2.3.1 В случае см-ти М: $X = 1$ (\$10 000)

Ж: $Y = 2$ (\$20 000)

$P(X=0) = 1 - q_x$

$P(Y=0) = 1 - q_y$

Пусть q_x, q_y – известны, q_{xy} – нет

	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	$1 - q_x - q_y + q_{xy}$	$q_x - q_{xy}$
$Y=2$	$q_y - q_{xy}$	q_{xy}

Найти верх. гран. $Var[X+Y]$ для выпл. $X+Y$ в наих. сценарии

$\to \max\limits_{q_{xy}} Var[X+Y]$?

▷ $E[X+Y] = (q_x + 2q_y)\cdot 10^4$

Пусть $Z = q_{xy}$

$\forall f$ – вып. ф-ия : $f(3) - f(2) \geq f(1) - f(0)$

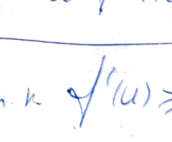
$$Ef(X+Y) = f(0)(1 - q_x - q_y) + f(1)\, q_x + f(2)\cdot q_y + \Big[\underbrace{\underbrace{f(0) - f(1)}_{-\int_0^1 f'(u)du} \underbrace{- f(2) + f(3)}_{\int_2^3 f'(u)du}}_{>0,\ \text{т.к. } f'(u) \geq 0}\Big] q_{xy}$$

Для того, чтобы $\max\limits_{q_{xy}} Var[X+Y]$

выбираем $Z = q_{xy} = \min[q_x, q_y]$

(настолько возможно большим)

Пусть $q_x < q_y$ и $X=1 \Rightarrow Y=2$ $\quad \{ \overset{*}{u}(x)$ – risk-averse



(т.е. смерти более сильного влечет быстр. смерть слабого)

Модель $Z = q_{xy} = \min[q_x, q_y]$ явл. выпукл. максимальной для полной выплаты $X+Y$ $\Rightarrow$

дает верх. оценку для $Var[X+Y]$ при всех возм. сценар.

Лемма $X \le_{\substack{st \\ (0)}} Y$ (X стохастически меньше, чем Y)

если $\exists\ (X', Y')$: $X \sim X'$, $Y \sim Y'$ и $P(X' \le Y') = 1$

- $X \le_{(0)} Y$ iff $F_X(x) \ge F_Y(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $X \le_{(0)} Y$ iff $E[u(-X)] \ge E[u(-Y)]$, $\forall u' > 0$

$\triangleright$ $F_X, F_Y \in C$ $\quad F_X', F_Y' > 0$

$X' = F_X^{-1}(F_Y(Y)) \quad \Rightarrow \quad F_Y(Y) \sim U[0,1]$

$F_X^{-1}(U) \sim X$

$X' \le Y$

для АСВ : $f(u) = x$, if $F_X(x-0) < u \le F_X(x)$

$g(u) = y$, if $F_Y(x-0) < u \le F_Y(x)$

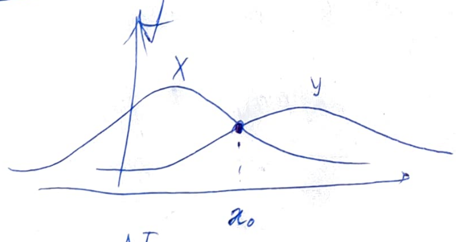
для $U \sim U[0,1]$ $\quad f(U) \sim X$

$g(U) \sim Y$

из $F_X(x) \ge F_Y(x) \Rightarrow f(u) \le g(u)$ $\forall u$

$P(f(U) \le g(U)) = 1$

Зам. Плотности, пересекающиеся один раз ст-ки упорядоч.

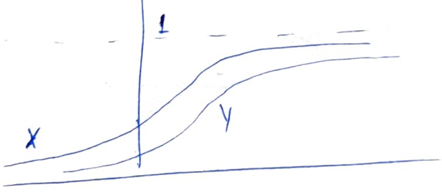


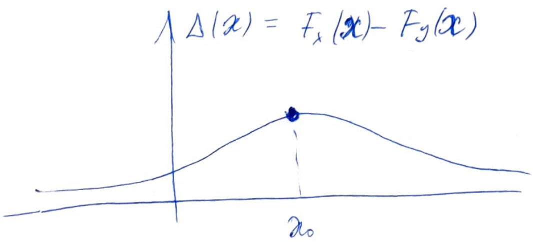
$\exists\ x_0$: $f_X(x) \ge f_Y(x)$ $\forall x < x_0$

$f_X(x) \le f_Y(x)$ $\forall x \ge x_0$

$\Rightarrow F_X(x) \ge F_Y(x)$

$X \le_{(0)} Y$





Опр. $X \leq_{\substack{se \\ (1)}} Y$ (в смысле stop-loss)

$\sim E[u(-X)] \geq E[u(-Y)]$ $\quad \forall u' > 0,\ u'' > 0$

или

$\forall u'' > 0$ при рав-ве средних

Пусть $\begin{matrix} X \sim F_1 \\ Y \sim F_2 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $F_1 \leq_{(1)} F_2$ iff $E(X-d)_+ \leq E(Y-d)_+, \forall d$

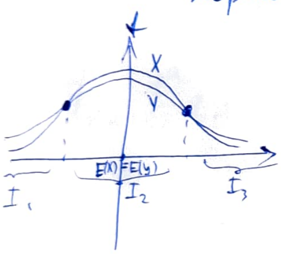
Зам. Если $F_1 \leq_{(1)} F_2$, $u' > 0$, $u'' > 0$,

то $E[u(-X)] \geq E[u(-Y)]$

Если $E[X] = E[Y]$,

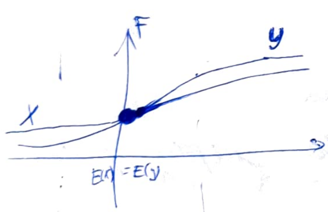
то $E[u(-X)] \geq E[u(-Y)]$ выполн. для $\forall u : u'' > 0$

Лемма Если плотности пересекаются два раза, то ФРВ пересекаются один раз



$X, Y : \quad E[X] = E[Y]$

$f_X(x) \neq f_Y(x)$

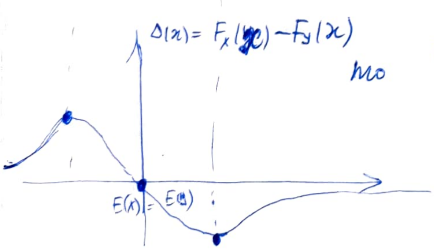


Если $\exists\ I_1, I_2, I_3 : \quad I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [0; \infty)$

I_2 между I_2, I_3:

$f_X(x) \leq f_Y(x)$ на I_1, I_3

$f_X(x) > f_Y(x)$ на I_2



то F_X и F_Y пересекаются только 1 раз

$\Leftrightarrow \quad X \leq_{(1)} Y$

$\triangleright$ $\Delta(x) = F_X(x) - F_Y(x)$ пересекает ось x один раз

Если ФРВ единств. пересечение, то соотв. с. в. упор. в смысле stop-loss

$E[\max[d, X]] = d + \int_0^\infty (1 - F_X(v))\,dv = d + E[(X-d)_+]$

$\Rightarrow X \leq_{(1)} Y \iff E[\max[d, X]] \leq E[\max[d, Y]]$

Пусть $F_X(x) = F_Y(x)$ при $x \in [x_1, x_2]$

$F_X(x) \geq F_Y(x)$ при $x > x_1$

$\Rightarrow E[\max[x, X]] \leq E[\max[x, Y]]$ при $x \geq x_1$

$E[\min(x, X)] \geq E[\min[x, Y]]$ при $x \leq x_2$

$\Rightarrow E[\max[x, X]] \leq E[\max[x, Y]]$ при $\forall x$

т.к.

$E[\max[d, X]] + E[\min[d, X]] = E[X] + d$

Лемма $X_k = \sum_{i=1}^{N_k} Y_i$, $k = 1, 2$

Y_i — НОР с.в.

$N_k : p(N_k = n) = \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{n!} e^{\lambda} \, d W_k(\lambda)$

где $W_1 \leq_{(1)} W_2$

$\Rightarrow X_1 \leq_{(1)} X_2$

Сл. ~~.....~~ $Pois(\lambda) \leq_{(1)} NB(r, \tilde{p})$

где $\mu = \lambda = \frac{r\tilde{q}}{\tilde{p}}$

Зад. 2.3.8. Коэф. вариации не является непротиворечивой мерой риска

$X_1 = \sum_{i=1}^{N_1} Y_i$, $X_2 = \sum_{i=1}^{N_2} Z_i$

$N_1 \sim NB(10, 9/10)$ $Y_i \sim Exp(\lambda)$

$N_2 \sim NB(1, 1/10)$ $Z_i \sim Pareto(\mu, 8/3)$

$CV(X) = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$

$CV(N_1) = 1 < CV(N_2) = \sqrt{10/9}$

$CV(Y) = 1 < CV(Z) = 2$

$CV(X_1) = \sqrt{19/10} > CV(X_2) = \sqrt{14/9}$

$\triangleright$ $E[N_1] = 10/9$ $Var[N_1] = 100/81$ $CV(Y) = 1$

$E[N_2] = 9$ $Var[N_2] = 90$ $CV(Z) = \sqrt{8/3}\,\mu \Big/ \frac{5}{3}\sqrt{8/3 - 2} \cdot {}^{8/3 - 1}\!/_{\mu} = 2$

$E[X_1] = \frac{10}{9\lambda}$ $\quad Var[X_1] = \frac{1}{\lambda^2}\cdot\left(\frac{20}{9} + \frac{110}{81}\right) - \frac{100}{81}\frac{1}{\lambda^2} = \frac{190}{81\lambda^2}$ $\quad CV(X_1) = \sqrt{\frac{19}{10}}$

$E[X_2] = \frac{3}{50}\cdot 90\mu$ $\quad Var[X_2] = \mu^2\left(\frac{5\cdot 90}{50} + \frac{9}{250}\cdot 2\cdot 81\cdot 10 - \frac{9}{50^2}\cdot 90^2\right) = \mu^2\cdot\frac{2413400}{2500}$ $\quad CV(X_2) = \sqrt{\frac{14}{3}}$

Зад. 2.3.9. $\mu = E[X]$ $\quad Var[X] < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(E(X-t)_+ - (\mu - t)_+\right) dt = 1/2\ Var[X] \quad (*)$$

Из $X \leq_{(1)} Y$ $\quad E[X] = E[Y]$, $Var[X] = Var[Y]$ $\Rightarrow X = Y$ п.н.

$\triangleright$ $X \geq 0$, f_X по т. Фубини

$$\int_R E[(X-t)_+ - (\mu-t)_+]_+ dt = \int_R\int_{R_+} (x-t) f_X(x) 1_{x\geq t}\, dx\, dt =$$

$$- \int_R\int_{R_+} 1_{x\geq t}(\mu - t) f_X(x)\, dt\, dx = \int_R\int_{R_+} [1_{x\geq t} - 1_{\mu\geq t}]\, dt\, dx =$$

$$= \int_R\int_{R_+} (x-t) 1_{\{\mu\leq t\leq x\}} f_X(x)\, dx\, dt = \int_{R_+}\int_R 1_{\{\mu\leq t\leq x\}}\, dt\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{R_+}\int_\mu^x (x-t)\, dt\, f_X(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{R_+}(x-\mu)^2 f_X(x)\, dx = 1/2\ Var[X]$$

Из $(*)$ и $E[(X-t)_+] \leq E[(Y-t)_+]$ $\Rightarrow X = Y$ п.н.

Зад. Из ст. пор. $E[(X-d)_+^k] \leq E[(Y-d)_+^k]$

для $\forall d$ вытекает такой же ст. порядок для $\forall l > k$

Зад. 2.3.10
2.3.11.

2.5 Стох. порядок связанный со смертностью

<u>Опр.</u> Пусть $X>0$, $F_x(t) = \dfrac{F(x+t) - F(x)}{\overline{F}(x)}$ – распр. ост. пр. жизни

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)} \quad \text{– инт. см-ти}$$

Считаем, что X принадлежит классу NBU (new better than used), если $F_x \leq_{(0)} F$, что эквивалентно $F_x(t) \geq F(t)$

или

$$\overline{F}(x+t) \leq \overline{F}(x)\,\overline{F}(t)$$

<u>Опр.</u> Пусть $T_x \sim F_x$ – ост. пр-ть жизни в возр. x

Считаем, что X принадл. классу NBUE (NBU in ~~expect~~ average)

если $E[T_x] \leq E[X] \quad \forall x$

экв. $\int_0^\infty \overline{F}(x+t)\,dt \leq \overline{F}(x) \int_0^\infty \overline{F}(t)\,dt \quad \forall x$

<u>Опр.</u> $F \in IFR$ (increasing failure rate) iff для $\forall\, 0 \leq x_1 \leq x_2 < \infty$ выполняется $F_{x_2} \leq_{(0)} F_{x_1}$

<u>Опр.</u> $F \in IFR$ (IFR in average) iff $\left(-t^{-1} \ln \overline{F}(t)\right)'_t > 0$

экв. $\overline{F}(\alpha t) > \overline{F}^{\alpha}(t) \quad \forall\, 0 < \alpha < 1$

экв. $\overline{F}(t)^{1/t} \leq \overline{F}(\alpha t)^{1/\alpha t} \quad \forall\, 0 < \alpha < 1$

Задачи 2.3.13

— 2.3.18

\+ леммы

(2-б) Средняя продолж. ост. жизни

Опр. T_x с ФРВ F_x: $m(x) = \mathring{e}_x$ — ср. продолж. ост. жизни

$$\mathring{e}_x(F) = E[T-x \mid T>x] = \frac{1}{\bar F(x)} \int_x^\infty \bar F(y)\,dy, \quad x>0$$

ф-ла обращения $\bar F(x) = \dfrac{\mathring{e}_0(F)}{\mathring{e}_x(F)} \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{\mathring{e}_u(F)}\,du\right), \quad x>0$

Если $E[T]<\infty$, то выбор. версия:

$$\mathring{e}_{F_n}(x) = \frac{\sum_{i:\, i\le n;\, X_i > x} (X_i - x)}{\#\{i\le n: X_i > x\}} \longrightarrow \mathring{e}_x(F), \quad n\to\infty$$

2.3.20

(3.7) Порядок стоп-лосс и перестраховки

Stop-loss order связан с популярной формой контракта перестр-я с превышением барьера, кот. явл. в нек. смысле оптимальной? (по теореме далее)

stop-loss премия:

$$\pi_X(d) = E[(X-d)_+] = \int_d^\infty [1 - F_X(x)]\,dx$$

т.е. $\pi_X'(d) = F_X(d) - 1$

Стр. 30 Thm 2.3.21

—

Стр 33 Опр. 2.3.28

Def. $X \le_{lor} Y$ iff $L_X(u) \ge L_Y(u)$ $\forall u \in [0;1]$

где $L_X(u) = \int_0^u F_X^{-1}(t)\,dt \Big(\underbrace{\int_0^1 F_X^{-1}(t)\,dt}_{E[X]}\Big)^{-1}$

мера неравенства (доля и % доходы/ держим. части населения)

$X \le_{lor} Y$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{X}{E[X]} \le_{cv} \dfrac{Y}{E[Y]}$, т.е. $E\,u\left(\dfrac{X}{E[X]}\right) \le E\,u\left(\dfrac{Y}{E(Y)}\right)$

$\forall u$: $u'' > 0$ $u \in C^{(2)}$

Лемма: если (X, Y) более зав. чем (X', Y')

то $X + Y \ge_{cv} X' + Y'$

в смысле вып. порядка

2.3.3. Средняя продолж. оставшейся жизни

$$m(x) = \mathring{e}_x(F) = E[\overbrace{T - x}^{T_x} \mid T > x] = \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^\infty \bar{F}(y)\,dy, \quad x > 0$$

— ср. прод. ост. жизни T_x с фрв F_x

Пусть $\mathring{e}_x = E[T_x]$

$$m(x) = \int_x^\infty (1 - F(t))\,dt$$

тогда $m(x) = E[X] \cdot \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{\mathring{e}_t}\,dt\right)$

• Если $E[T] < \infty$

$$\mathring{e}_{F_n}(x) = \frac{\sum_{i : i \le n : X_i > x} (X_i - x)}{\#\{i \le n : X_i > x\}}$$

выборочная версия сходится к пределу $\forall x > 0$

$$\mathring{e}_x(F_n) \longrightarrow \mathring{e}_x(F) \text{ п.н. при } n \to \infty$$

2.3.4. Stop-loss и перестраховка

$$\pi_X(d) = E[(X - d)_+] = \int_d^\infty [1 - F_X(x)]\,dx$$

↳ стоп-лосс премия

$$\pi_X'(d) = F_X(d) - 1$$

Thm Пусть $E[I(X)] = E[(X - d)_+]$

$$\Rightarrow \quad Var[X - I(X)] \ge Var[X - (X - d)_+]$$

Пусть $X \le_{(s)} Y$, если $\forall d$:

$$E[(X - d)_+] \le E[(Y - d)_+] \quad (1)$$

$$E[(d - X)_+] \le E[(d - Y)_+] \quad (2)$$

Если $E[X] = E[Y]$, то $(1) \Rightarrow (2)$
$(2) \Rightarrow (1)$

т.к. $E[(X - d)_+] - E[(d - X)_+] = E[X] - d$

2.4. Принципы формир-е премии

$U(t) = U(t-1) + c^* - S(t) - iu$; $U_0 = u$

заемный капитал

$c = c^* - iu$

$U(t) > b > u$

↳ после пр. кот. фирма будет пол. выплачен кредит

Trade-off ↗ $p \geq 1 - \varepsilon$ выживания компании

↘ сохранять премию ↓ для конкурентосп-ти

$\Rightarrow u \downarrow$, чтобы контр. дом компании

Если NPBC (Net positive balance condition)

$E[S(t)] < ct$

компания не поп. в красн. зону $U(t) < 0$

при выполнении NPC $P(\text{разорения}) \leq e^{-Ru}$

коэф. Ландберга ↓ опр. как единств. пол. решение уравнения

нач. кап.

$E[e^{RS}] = e^{Rc}$

+

усл. $P(\text{не разор.}) \geq 1 - \varepsilon$

$\Rightarrow R = \frac{1}{u} |\ln \varepsilon|$; $c = \frac{1}{R} \ln E[e^{RS}] = \Pi(S)$

~~[illegible]~~ при фикс. ε и $u \to \infty$

$$\pi[S] \approx \frac{1}{R} K_S(R) = \frac{1}{R}\left(E[S]R + \frac{1}{2}\mathrm{Var}[S]R^2 + \dots\right)$$

$\uparrow$

произв.
ф-я
кумулянтов

с учетом выплат дивидендов акционерам

$$\pi[S] = E[S] + \frac{|\ln\varepsilon|}{2u}\mathrm{Var}[S] + iu \longrightarrow \min_u$$

$$u^* = \sigma(S)\sqrt{|\ln\varepsilon|/2i}$$

$$\pi[S] = E[S] + \sigma(S)\sqrt{2i\,|\ln\varepsilon|}$$

$i\uparrow \quad u^*\downarrow \quad iu^*\uparrow$

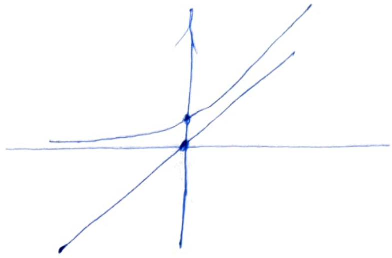
$$\pi[S_j] = E[X_j] + R\,\mathrm{Var}[S_j],$$

$$R = \frac{|\ln\varepsilon|}{u^*}$$

$$\pi_h(\lambda) = \int_0^\infty \int_0^\infty x \cdot e^{hx} \cdot f_{X, e^{hX}}(x, e^{hx})\, dx\, dx$$

$x = g^{-1}(y)$ $\qquad x = \ln y / h$

$y = g(x)$ $\qquad y = \exp(hx)$



$$P(Y < x) = P(e^{hX} < x) =$$

$$= P(X < (\ln x)/h)$$

$$f_Y(x) = \frac{1}{xh} \cdot f_X(\ln x / h)$$

$$E[e^{hX}] = \int_0^\infty e^{hx} \cdot f_X(x)\, dx$$

$$E[e^{hX}] = \int_0^\infty e^{hx} \cdot f_{e^{hX}}(x)\, h e^{hx}\, dx$$

$$E[Xe^{hX}] = E[Xe^{h}$$

2.4.3. $\pi_h[X] = \dfrac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]}$, $h > 0$

a) $\pi_h[X] = \dfrac{Cov[X, e^{hX}]^{\geq 0}}{\underbrace{E[e^{hX}]}_{\geq 0}} + E[X]$

$\Rightarrow \pi_h[X] \geq E[X]$

b) $\dfrac{\partial \pi_h(X)}{\partial h} = \dfrac{E[X^2e^{hX}] \cdot E[e^{hX}] - E[Xe^{hX}] \cdot E[Xe^{hX}]}{(E[e^{hX}])^2}$

$= \dfrac{E[X^2e^{hX}]}{E[e^{hX}]} - \left(\dfrac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]}\right)^2$

$\cancel{E[X^2e^{hX}] \cdot E[e^{hX}] \leq E[Xe^{hX}]^2}$

$= \dfrac{\int x^2 e^{hx} f_{h,x}\, dx}{\int e^{hx} f_{h,x}\, dx} - \left(\dfrac{\int x e^{hx} f_{h,x}\, dx}{\int e^{hx} f_{h,x}\, dx}\right)^2$

$\quad\; \| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$dF_{h,x} \qquad\qquad\qquad dF_{h,x}$

$= \int x^2\, dF_{h,x} - \left(\int x\, dF_{h,x}\right)^2 \geq 0$

$\cancel{\Rightarrow}$

2.4.3. $\pi_h[X] = \dfrac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]}$, $h>0$

a) $\pi_h[X] = \dfrac{\overbrace{Cov[X, e^{hX}]}^{\geq 0}}{\underbrace{E[e^{hX}]}_{\geq 0}} + E[X]$

$\Rightarrow \pi_h[X] \geq E[X]$

b) $\dfrac{\partial \pi_h[X]}{\partial h} =$

2.4.3. $\pi_h(X) = \dfrac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]}$

$$\frac{\partial \pi_h(X)}{\partial h} = \frac{E[X^2 e^{hX}] \cdot E[e^{hX}] - E[Xe^{hX}] \cdot E[Xe^{hX}]}{\left(E[e^{hX}]\right)^2}$$

Задача 2.3.16

$$\mathring{e}_x(X) \leq \mathring{e}_x(Y) \quad \forall x \qquad \text{iff} \qquad \left(\frac{m_X(x)}{m_Y(x)}\right)' \leq 0$$

$\triangleright$ $$m(x) = E[X] \exp\left(-\int_0^x \frac{1}{\mathring{e}_t}\,dt\right)$$

$$\ln(m(x)) = \ln E[X] + \left(-\int_0^x \frac{1}{\mathring{e}_t}\,dt\right)$$

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = -\frac{1}{\mathring{e}_x}$$

$$\mathring{e}_x = -\frac{m(x)}{m'(x)}$$

$$\mathring{e}_x(X) \leq \mathring{e}_x(Y)$$

$$-\frac{m_X(x)}{m_X'(x)} \leq -\frac{m_Y(x)}{m_Y'(x)} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{l} m(x) \geq 0 \\ m'(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\frac{-m_Y'(x)\cdot m_X(x) + m_X'(x) m_Y(x)}{\underbrace{\underbrace{m_X'(x)}_{\leq 0}\cdot \underbrace{m_Y'(x)}_{\leq 0}}_{\geq 0}} \leq 0 \qquad \Big|$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{m_X'(x)\cdot m_Y(x) - m_X(x)\cdot m_Y'(x)}{m_Y^2(x)} \leq 0 \qquad \Big| : \underbrace{m_Y^2(x)}_{\geq 0}$$

$$\left(\frac{m_X(x)}{m_Y(x)}\right)' \leq 0$$

$\square$

Пожизненные ренты выпл. с частотой p

- полная пож. рента $\ddot{Y}_x^{(p)}$, $\ddot{a}_x^{(p)}$
- временная пож. рента $\ddot{Y}_{x:\overline{n}|}^{(p)}$, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(p)}$

при $n \to \infty$ $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(p)} \longrightarrow \ddot{a}_x^{(p)}$

1. $t = l/p$, $0 \le l \le np-1$

$$\omega_t = \begin{cases} 1/p, & \text{если } T_x > t \\ 0, & \text{если } T_x \le t \end{cases}$$

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{np-1} v^{l/p} \cdot \mathbb{1}_{\{T_x > l/p\}}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(p)} = E\,\ddot{Y}_{x:\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{l=0}^{np-1} v^{l/p} \cdot P(T_x > l/p)$$

2. $l = kp + j$, $k = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, p-1}$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p-1} v^{k + j/p} \cdot P(T_x > k + j/p)$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n-1} v^k \sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p} P(T_x > k + j/p)$$

3. Гипотеза о равномерном распр. смерти (UDD)

при UDD $P(T_x > k + j/p) = \dfrac{S(x + k + j/p)}{S(x)} =$

$$\overset{\text{лин.к.}}{=} \frac{(1 - j/p)\, S(x+k) + j/p\; S(x+k+1)}{S(x)} =$$

$$= (1 - j/p) \cdot P(T_x > k) + j/p \cdot P(T_x > k+1)$$

$$= P(T_x > k) - j/p\,\big(P(T_x > k) - P(T_x > k+1)\big)$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1} v^k \sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p}\Big(P(T_x>k) - j/p\cdot\big(P(T_x>k) - P(T_x>k+1)\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1} v^k\cdot P(T_x>k)\sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p} - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{n-1} v^k\big(P(T_x>k) - P(T_x>k+1)\big)\cdot\sum_{j=0}^{p-1} j/p\, v^{j/p}$$

т.к. $\sum_{k=0}^{n-1} v^k\cdot P(T_x>k) = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

$$v = \frac{1}{1+i} \qquad d = \frac{i}{1+i}$$

$$\sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p} \overset{\text{геом. прогр.}}{=} \frac{1-v}{1-v^{1/p}} = \frac{d}{\underbrace{1-(1-d)^{1/p}}_{d_*^{(p)} = d^{(p)}/p}} = \frac{d\cdot p}{d^{(p)}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} v^k\big(P(T_x>k) - P(T_x>k+1)\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^k\, P(T_x>k) - \frac{1}{v}\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\cdot P(T_x>k+1)$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{v}\big(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1 + \underbrace{v^n\cdot P(T_x>n)}_{{}_nE_x}\big)$$

$$= \frac{1-(1-v)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x}{v} =$$

$$= \frac{1 - d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x}{1-d}$$

$$\sum_{j=0}^{p-1} j/p\; v^{j/p-1} = \Big(\sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p}\Big)'_v = \frac{-(1-v^{1/p}) + (1-v)\frac{1}{p}v^{\frac{1}{p}-1}}{\big((1-v)^{1/p}\big)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=0}^{p-1} j/p\, v^{j/p} = v\cdot\frac{p}{p} \qquad = \frac{-(1-d)\cdot p\cdot d^{(p)} + d(p-d^{(p)})}{(d^{(p)})^2}$$

$$= \frac{-p\,d^{(p)} + p\,d\,d^{(p)} + p\,d - d\,d^{(p)}}{(d^{(p)})^2}$$

$$\ddot a^{(p)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{p}\cdot \ddot a_{x:\overline{n}|}\cdot \frac{d\cdot p}{d^{(p)}} +$$

$$-\frac{1}{p}\cdot \frac{1 - d\cdot \ddot a_{x:\overline{n}|} - {}_nE_x}{1-d}\cdot \frac{pd - pd^{(p)} + pdd^{(p)} - dd^{(p)}}{(d^{(p)})^2}$$

$$\alpha(p) = \frac{d}{d^{(p)}} - d\cdot\beta(p)$$

$$\beta(p) = \frac{pd - pd^{(p)} + pdd^{(p)} - dd^{(p)}}{p(1-d)(d^{(p)})^2}$$

т.к. $\frac{d}{1-d} = i$; $\frac{1}{1-d} = 1+i$; $\frac{1}{d^{(p)}} = \frac{1}{i^{(p)}} + \frac{1}{p}$

$$i^{(p)} = \frac{d^{(p)}\cdot p}{p-d^{(p)}}$$

$$\beta(p) = \frac{d(p-d^{p}) - pd^{(p)}(1-d)}{p(1-d)(d^{(p)})^2} =$$

$$= \frac{i\left(\frac{1}{d^{(p)}} - \frac{1}{p}\right) - 1}{d^{(p)}} = \frac{i/i^{(p)} - 1}{d^{(p)}} = \frac{i-i^{(p)}}{i^{(p)}d^{(p)}}$$

$$\alpha(p) = \frac{i^{(p)}d}{i^{(p)}d^{(p)}} + d\cdot\frac{i-i^{(p)}}{i^{(p)}d^{(p)}} = \frac{id}{i^{(p)}d^{(p)}}$$

$$\ddot a^{(p)}_{x:\overline{n}|} = \frac{id}{i^{(p)}d^{(p)}}\cdot \ddot a_x - \frac{i-i^{(p)}}{i^{(p)}d^{(p)}}\cdot \underbrace{(1-{}_nE_x)}_{\to 1}$$

при $n\to\infty$ $\quad \ddot a^{(p)}_x = \frac{id}{i^{(p)}d^{(p)}}\cdot\ddot a_x - \frac{i-i^{(p)}}{i^{(p)}d^{(p)}}$

при $i\to 0$ $\quad \ddot a^{(p)}_x = id$

$$d^{(p)} = p\cdot\left(1-(1-d)^{1/p}\right) = p - p(1-d)^{1/p} \to 0$$

$$d^{(p)} = p\left(1 - \underbrace{(1-d)^{1/p}}_{\sim 1 - d/p}\right) = d$$

$$d^{(p)} \to d \qquad d = \frac{i}{1+i}$$

все приближ. и i и разл. в Тейлора

$$i^{(p)} = \frac{d \cdot p}{p - d} = \cancel{\frac{\frac{i}{i+1}\, p}{p - \frac{i}{i+1}}} =$$

$$\alpha = \frac{i \cdot \cancel{d}}{\frac{d \cdot p}{p-d} \cdot \cancel{d}} = \frac{i\left(p - \frac{i}{i+1}\right)}{\frac{i}{i+1} \cdot p} = \frac{(i+1)\left(p - \frac{i}{i+1}\right)}{p} =$$

$$= \frac{\overbrace{(i+1)}^{\to 1} \cdot p - i^{\to 0}}{p} \longrightarrow 1 \qquad d \to 1$$

$$\beta = \frac{i - \frac{d \cdot p}{p-d}}{\frac{d \cdot p}{p-d} \cdot d} = \frac{(p-d) \cdot i - d \cdot p}{d \cdot p \cdot d} =$$

$$= \frac{\overbrace{\left(p - \frac{i}{i+1}^{\to 0}\right) \cdot i}^{\to 0} - \frac{i}{i+1} \cdot p}{\left(\frac{i}{i+1}\right)^2 \cdot p}$$

Формулы ММС

$$S_x(t) = {}_tp_x = P(T_x > t) = P(T > x+t \mid T > x) = \exp\Big(-\int_0^t \underbrace{\mu(x+u)}_{=\mu_x(u)}\, du\Big)$$

$$\mathring{e}_x(F) = E[T - x \mid T > x] = \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^\infty \bar{F}(y)\, dy, \quad x > 0$$

$$\bar{F}(x) = \frac{\mathring{e}_0(F)}{\mathring{e}_x(F)} \exp\Big(-\int_0^x \frac{1}{\mathring{e}_u(F)}\, du\Big), \quad x > 0$$

$$\mathring{e}_{x:\overline{t|}} = \frac{1}{S(x)} \int_x^{x+t} S(u)\, du$$

Задачі по буд страх. і страх. теорії

3.1.1. $\quad {}_1q_0 = 0{,}15 \quad {}_1q_1 = 0{,}1 \quad {}_1q_2 = 0{,}05 \quad {}_1q_3 = 0{,}01$

$S(1) = 0{,}85 \quad S(2) = 0{,}765 \quad S(3) = 0{,}72675 \quad S(4) = 0{,}7194825$

$$\mathring{e}_{x:\overline{t}|} = \frac{1}{S(x)} \int_x^{x+t} S(u)\,du \qquad \frac{0{,}765 + 0{,}72675}{2}$$

$$\frac{1}{S(1)} \int_1^{2{,}5} S(u)\,du = \frac{1}{S(1)} \frac{0{,}85 + 0{,}765}{2} \cdot 1 + \frac{0{,}765 + \cancel{0{,}72675}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \left(0{,}8075 + 0{,}3777 1875\right) \cdot \frac{1}{0{,}85} =$$

$$= 1{,}394375$$

3.1.2. $$\ddot{a}^{(p)}_{x:\overline{n}|} = \frac{i d}{i^{(p)} d^{(p)}} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{i - i^{(p)}}{i^{(p)} d^{(p)}} \left(1 - v^n {}_n p_x\right)$$

i номінальна ставка, вимл. p раз в рік

де $\quad i^{(p)} = p\left((1+i)^{1/p} - 1\right)$

$d^{(p)} = p\left(1 - (1-d)^{1/p}\right) \qquad d = 1 - v = \frac{i}{i+1}$

для $\quad i \leqslant 5\% \quad \ddot{a}^{(12)}_{\overline{x}|} = \ddot{a}_{\overline{x}|} - \frac{11}{24} + O(i)$

▷ ~~...~~ Вик. припущ. рівномірного розп. мом. смерті в теч. року

$P(T_x > k + j/p) = P(T_x > k) - j/p \left(P(T_x > k) - P(T_x > k+1)\right)$

$$\ddot{a}^{(p)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n-1} v^k \sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p} P(T(x) > k + j/p)$$

$$= \frac{1}{p} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p} - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{n-1} v^k \left(P(T(x) > k) - P(T(x) > k+1)\right) \sum_{j=0}^{p-1} \frac{j}{p} v^{j/p}$$

$$\sum_{j=0}^{p-1} v^{j/p} = \frac{dp}{d^{(p)}}$$

$$\sum_{j=0}^{p-1} j/p\, v^{j/p} = \frac{-pd^{(p)} + pdd^{(p)} + pd - dd^{(p)}}{(d^{(p)})^2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} v^k \left(P(T(x) > k) - P(T(x) > k+1)\right) = \frac{1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - v^n {}_n p_x}{1-d}$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(p)\, \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \beta(p)\left(1 - {}_n p_x v^n\right)$$

$$\alpha(p) = d/d^{(p)} + \beta(p) \qquad \beta(p) = \frac{-pd^{(p)} + pdd^{(d)} + pd - dd^{(p)}}{(d(p))^2}$$

$$f(p) = \frac{i - i^{(p)}}{i^{(p)} d^{(p)}} \qquad \alpha = \frac{id}{d^{(p)}} + \frac{d(i - i^{(p)})}{i^{(p)} d^{(p)}} = \frac{id}{i^{(p)} d^{(p)}}$$

разл. в ряд Тейлора в окр. $i=0$

даёт: $\ddot{a}^{(12)}_{\overline{x1}} = \ddot{a}_{\overline{x1}} - \frac{11}{24} + O(i)$

$\left(\ddot{a}^{(12)}_x = \ddot{a}_x - \frac{11}{24} \right.$

$\ddot{a}^{(p)}_x = \frac{id}{i^{(p)} d^{(p)}} \cdot \ddot{a}_x - \frac{i - i^{(p)}}{i^{(p)} d^{(p)}}$

Интерполяция:

- РР мом. смерти в теч. года
- пост. инт-ти смерти
- предпол. Балдуччи $x = n+t$

$$\frac{1}{s(n+t)} = \frac{1-t}{s(n)} + \frac{t}{s(n+1)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \ 0 \le t \le 1$$

$$s(n+t) = \frac{s(n+1)}{p_n + t q_n}$$

3.1.3. ПРРМС
(3.1.4)

$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{1 - t q_n} \qquad 0 < t < 1$

Балдуччи

$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{p_n + t q_n} \qquad 0 < t < 1$

пост. инт. см-ти

$\mu_{n+t} = -\ln p_n \qquad 0 < t < 1$

$q_{61} = 0{,}01$
$q_{62} = 0{,}015$

$\left(q_{70} = 0{,}04 \right.$
$\left. q_{71} = 0{,}05 \right)$

$? \ \frac{1}{3} : 1 q_{61} = {}_{\frac{1}{3}}|q_{61} =$

$= \frac{s(61\,{}^1\!/_3) - s(62\,{}^1\!/_3)}{s(61)}$

a) ПРР $s(n+t) = (1-t)s(n) + t s(n+1)$

$$\mu_{n+t} = \frac{s(n) - s(n+1)}{(n+1) s(n) - n s(n+1) - x[s(n) - s(n+1)]} = \frac{q_n}{1 - t q_n}$$

Балдуччи $s(n+t) = \frac{s(n) s(n+1)}{(1-t) s(n+1) + t s(n)} = \frac{s(n+1)}{p_n + t q_n}$

$$\mu_{n+t} = \frac{-s'(x)}{s(x)} = \frac{q_n}{p_n + t q_n}$$

пост. μ $s(n+t) = s(n) p_n^t$

$\mu_{n+t} = -\ln p_n$

${}_{\frac{1}{3}}|q_{61} = 0{,}01161$
$({}_{0,3}|q_{70} = 4{,}4\%)$

${}_{\frac{1}{3}}|q_{61} = 0{,}01164$
$({}_{0,3}|q_{70} = 4{,}42\%)$

${}_{\frac{1}{3}}|q_{61} = 0{,}01163$
$({}_{0,3}|q_{70} = 4{,}41\%)$

3.2.6 $\qquad 4\% \to \frac{11}{24}$

$$12000\left(\ddot{a}_{55}^{(12)} - a_{60:55}^{(12)}\right) + 6000\left(\ddot{a}_{\overline{8}|}^{(12)} - \ddot{a}_{60:50:\overline{8}|}^{(12)}\right) =$$

$$= \quad 41448 \quad + \quad 6745 \quad =$$

$$= 12000\cdot(18{,}210 - 14{,}756) + 6000\,(6{,}8398 - \quad)$$

$\uparrow$ PFA92020 $\qquad \uparrow$ M-F

$$\ddot{a}_{60:50:\overline{8}|}^{(12)} = \ddot{a}_{60:55} - v^8 \frac{l_{68}^m}{l_{60}^m}\cdot\frac{l_{63}^f}{l_{55}}\cdot\ddot{a}_{68:63} - \frac{1}{24}$$

3.18. Дано ТС

$\mu_x = B e^{\alpha x}$ Gompetz - Makeham law

l_{20}, l_{25}, l_{30} из табл. $\Rightarrow \hat{l}_{23}, \hat{l}_{27}$

$$l_{25} = l_{20} e^{-\int_{20}^{25} \mu_u du} = l_{20} \exp\left(-B \frac{e^{25\alpha} - e^{20\alpha}}{\alpha}\right)$$

$$l_{30} = l_{25} e^{-\int_{25}^{30} \mu_u du} = l_{25} \exp\left(-B \frac{e^{30\alpha} - e^{25\alpha}}{\alpha}\right)$$

$$e^{5\alpha} = \frac{\ln l_{25} - \ln l_{30}}{\ln l_{20} - \ln l_{25}} = A \qquad \alpha = \ln A/5 = 0{,}00193455$$

$$B = \alpha \frac{\ln l_{20} - \ln l_{25}}{A^2(A-1)} = 0{,}0012644$$

$$\hat{l}_{23} = l_{20} e^{-\int_{20}^{23} \mu_u du} = 97355{,}3 \qquad l_{23} = 97370$$

$$\hat{l}_{27} = l_{25} e^{-\int_{25}^{27} \mu_u du} = 96882{,}1 \qquad l_{27} = 96982$$

3.19. NSP - net single premium

1	50000 \$	$\mu_{1,x+t} = t/50$
2	25000 \$	$\mu_{2,x+t} = t/25$
3	10000 \$	$\mu_{3,x+t} = t/10$

$\delta = 0{,}02$

$T = \min[T_1, T_2, T_3]$

$${}_tp_x = {}_tp_x^1 \cdot {}_tp_x^2 \cdot {}_tp_x^3 \Rightarrow {}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \frac{8u}{50} du\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{25}\right)$$

(eq. вып.)
$$NSP = 5 \cdot 10^4 \cdot \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_x \mu_{1,x+t} dt + 2{,}5 \cdot 10^4 \cdot \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_x \mu_{2,x+t} dt + 1{,}0 \cdot 10^4 \cdot \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_tp_x \mu_{3,x+t} dt$$

$$NSP = \int_0^\infty e^{-0{,}02t} \exp\left(-\frac{2t^2}{25}\right)\left[\frac{5 \cdot 10^4 t}{50} + \frac{2{,}5 \cdot 10^4 t}{25} + \frac{10^4 t}{10}\right] dt =$$

$$= 3000 e^{+1/800} \int_0^\infty t \exp\left(-\frac{2}{25}\left(t+\frac{1}{8}\right)^2\right) dt =$$

$$= 3000{,}75 \left[\int_{1/8}^\infty \exp\left(-\tfrac{2}{25}t^2\right) t\,dt - \tfrac{1}{8}\sqrt{2\pi}\sqrt{25/4}\left(1 - \Phi\left(\tfrac{1}{8}\sqrt{4/25}\right)\right)\right]$$

$$= 3000{,}75 \left[\tfrac{25}{4}\int_{1/20}^\infty \exp(-u^2/2)\, u\, du - 0{,}402314\right] = 17620{,}46385$$

3.16. Закон де-Муавра $\omega=90$ (равн. распр. $[0, 90]$)

$x=40$

$$S(x) = F(x) = 1-\frac{x}{\omega} \quad , 0<x<\omega$$

$$\bar{Z}_x = v^{T_x} \quad , v=(1+i)^{-1} \quad , i=8\%$$

a) $$E[\bar{Z}_x] = \bar{A}_x = \frac{1-v^{\omega-x}}{\delta(\omega-x)} = 0{,}254331$$

$$Var[\bar{Z}_x] = {}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2 = \frac{1-v^{\omega-x}}{2\delta^2(\omega-x)^2}\left[\delta(\omega-x)(1+v^{\omega-x}) - 2(1-v^{\omega-x})\right] =$$

$$=0{,}0651926$$

b) $$\ddot{a}_x = \frac{1}{v^x(\omega-x)}\sum_{n=x}^{\omega-1} v^n(\omega-n) = \frac{1}{1-v} - \frac{v}{(1-v)^2(\omega-x)}(1-v^{\omega-x})$$

по опр.

$$\sum_{n=x}^{\omega-1} n v^{n-1} = \left(\frac{v^x-v^\omega}{1-v}\right)' = \frac{(x v^{x-1} - \omega v^{\omega-1})(1-v) + v^x - v^\omega}{(1-v)^2}$$

c) $x=55$ $\quad i=8\%$ $\quad \omega=90$

$$\ddot{a}_{55} = 9{,}00467$$

$$\ddot{a}_{55}^{(12)} = \alpha(12)\,\ddot{a}_{55} - \beta(12) \qquad \alpha(12) = 1{,}00049 \qquad \beta(12) = 0{,}47132$$

$$12\cdot 10000\ \ddot{a}_{55}^{(12)} = 102{,}453$$

3.17. $$P\left(T_x^{(s)} > T_x^{(ns)}\right) = 0{,}2371 \qquad (ns) - \text{non-smoker}$$

$$\mu_{x+t}^{(s)} = k\,\mu_{x+t}^{(ns)}$$

a) $$P\left(T_x^{(s)} > T_x^{(ns)}\right) = \int_0^\infty {}_tp_x^{(s)} \cdot {}_tp_x^{(ns)}\,\mu_{x+t}^{(ns)}\,dt = -\int_0^\infty {}_tp_x^{(s)}\,d\,{}_tp_x^{(ns)}$$

$k-?$

$$v = {}_tp_x^{(ns)}$$

$$= \int_0^\infty v^k\,dv = \frac{1}{k+1} = 0{,}2371$$

$$\Rightarrow k = 3{,}21763$$

b) де Муавр. $\omega=100$, $u = t/65$

$$\mathring{e}_{35,35}^{(s,ns)} = \int_0^{65}\left(\frac{65-t}{65}\right)\left(\frac{65-t}{65}\right)^k dt = 65\int_0^1 (1-t)^{k+1}\,dt = \frac{65}{k+2} = 12{,}4578$$

3.1.18. $\mu_x = \dfrac{x}{a(a+x)}$

а) $s(x) = \dfrac{x+a}{a} e^{-x/a}$

$_t p_x = (1 + \dfrac{t}{x+a}) e^{-t/a} \longrightarrow e^{-t/a}$, $x \to \infty$

$\mathring{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x \, dt = a + \dfrac{a^2}{a+x} \longrightarrow a$ $x \to \infty$

б) $\mu_x = A + Be^{ax}$

$s(x) = e^{-Ax - B/a (e^{ax} - 1)}$

$_t p_x = e^{-Ax - B/a (e^{at} - 1) e^{ax}}$ обл. всеми желанными свойствами!

3.1.19. $x = 20$

де Муавр $\omega = 100$

2 года: $\mu = 0{,}15$

$\mathring{e}_{20}^{+} = \int_0^2 e^{-0{,}15u} du + e^{-0{,}3} \int_2^{80} \dfrac{80-u}{78} du = 30{,}6198$

~~[illegible]~~

Актуарные вычисления: одна жизнь

3.2.1. $x=18$ (AM 92 Selected)

Равн. распр.

$1 \, q_{18}^{(?)} = 0,15$

$1 \, q_{15}^{(?)} = 0,1$

$q_{60}^{(r)} = 0,75$

$w=65 \; q_{65} = 1$

Число см. сотр. на пробации

$$\frac{1000}{l_{[18]}} \left[\left(l_{[18]} - l_{[18]+1} \right) + 0,85 \left(l_{[18]+1} - l_{20} \right) \right] = 0,888$$

Число см. среди пост. персонала

$$\frac{1000}{l_{[18]}} \Big[0,85 \cdot 0,9 \cdot l_{20} - 0,85 \cdot 0,5 \cdot 0,75 \cdot l_{60}$$

$$- 0,85 \cdot 0,5 \cdot 0,25 \cdot l_{65} \Big]$$

$$= 62,1281$$

$$\Sigma = 63,01 \Rightarrow 64$$

3.2.2. пож. стр. 30.000 $ в конце года смерти

месячная рента 120$ в нач. месяцев (нач. 1ой выпл.)

$i = 4\%$, (AM 92 Ultimate)

EPV(i) vs EPV(ii)

$$30000 \left(1 - d \ddot{a}_x \right) > 1440 \left(\ddot{a}_x - \frac{11}{24} \right)$$

$$\ddot{a}_x < \frac{30000 + 1440 \cdot 11/24}{30000 \cdot \frac{0,04}{1,04} + 1440} = 11,8203$$

$$\ddot{a}_{66} = 11,836$$

$\ddot{a}_x$ – убыв. $\Rightarrow$ $\ddot{a}_x < 11,82 \quad \forall x \geq 67$

3.2.3. $\mu = 0{,}2137$ после 1 года вых. и пенс.

потом АМ 92 (шт.)

$$p_{[61]} = e^{-0{,}2137} = 0{,}80759$$

$$p_{[61]+k} = p_{61+k} \quad \forall k \geq 1 \qquad (l_{[61]+k} = l_{61+k})$$

$$= \frac{l_{61+k+1}}{l_{61+k}}$$

$$l_{[61]} = \frac{l_{62}}{p_{[61]}} = \frac{9129}{0{,}807} = 11304{,}9$$

$$e_{[61]} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_{61+k}}{l_{[61]}} = \frac{l_{61}}{l_{[61]}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_{61+k}}{l_{61}} = \frac{l_{61}}{l_{[61]}} e_{61} = 16{,}166$$

$$\mathring{e}_{[61]} \approx \frac{1}{2} + e_{[61]} = \frac{1}{2} + \frac{l_{61}}{l_{[61]}} \left(\mathring{e}_{61} - \frac{1}{2}\right) = 16{,}666$$

3.2.4.

С. Мат. методы (1)

ЗБЧ

$$\frac{\sum^n X_i - n EX}{\sigma \sqrt{n}} \sim N(0;1)$$

$\mu_3 - E(S^3) = 0 \Rightarrow \gamma = \mu_3 / \sigma^{3/2} << 1$ (<0,01)

$k = \mu_4 / \sigma^2 - 3 << 1$ (<0,01)

$E[X^{2n}] = (2n-1)!! \cdot \sigma^{2n}$

$E[X^{2n+1}] = 0$

Зад. 2.1.16.

ex $\sum_{j=1}^{k} a_j \geq \sum_{j=1}^{k} b_j \quad \forall k = \overline{1,n}$

$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{(1+i)^j} \geq \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j}{(1+i)^j}$

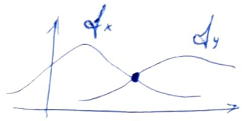
$C = \{(T_j; C_j), j = \overline{1,n}\}$

$NPV(C) = 0 \Rightarrow i \leftarrow IRR$

$\sum \frac{C_j}{(1+i)^j} = 0$

∘ $X \geq 0$

$\left.\begin{matrix} X \leq_{(0)} Y \\ EX = EY \end{matrix}\right\} X \equiv Y$



$X \leq_{(1)} Y$

$E\,u(-X) \geq E(u(-Y))$

$\forall d \geq 0 \quad E(X-d)_+ \leq E(Y-d)_+$ ← stop-loss

$X_+ = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

Лишь сравнимы, если совп. 1 ≤ момент,

тогда $Bin(n,p) \leq_{(1)} Pois(\lambda) \leq_{(1)} NegBin(r, \tilde{p})$

$\mu = np \qquad \mu = \lambda \qquad \mu = \frac{r\tilde{q}}{\tilde{p}}$

т.е. NB явл. мажорантой для Pois

$X < Y$

$X' \leq Y'$

$F_X(x) \geq F_Y(x)$

$P(\varphi(x) < y) = P(X < F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y \sim U[0,1]$

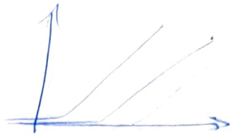
С. Мат. методы (2)

$E[(X-d)_+] \le E[(Y-d)_+],\ \forall d>0$ ⊛ мажорирование

$E f(x) \le E f(y)$

$\uparrow$

$f'>0,\ f''>0$



$\ast\ EZ = \int_0^\infty \bar F_Z(u)\,du$

$\bar F = 1-F = S(x)$

— surv. function

$\Delta(x) = F_x(x) - F_y(x)$

$\Delta'(x) = f_x(x) - f_y(x)$

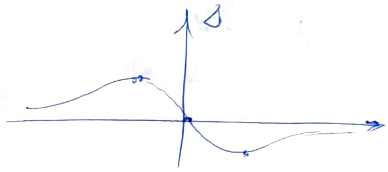
$E(X-d)_+ = \int_d^\infty (1-F(y))\,dy$

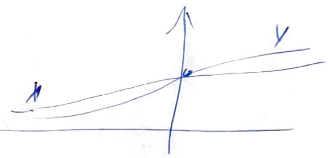
$\Delta(d) = E[(X-d)_+] - E[(Y-d)_+] =$

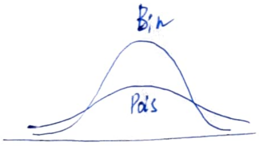
$= \int_d^\infty (F_y(u) - F_x(u))\,du$

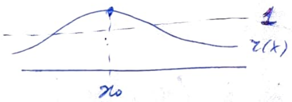
$\Delta(0)>0$

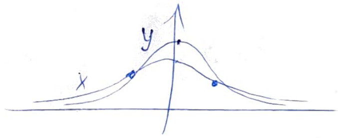
$\Delta(\infty)=0$











$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\binom{n}{x} p^x q^{n-x}}{\lambda^x}\, x!\, e^\lambda$$

$$\frac{r(x)}{r(x-1)} = \frac{\binom{n}{x} p^x q^{n-x} x!\, e^\lambda}{\lambda^x} : \frac{\binom{n}{x-1} p^{x-1} q^{n-x+1} (x-1)!\, e^\lambda}{\lambda^{x-1}} = Const\,(n-x+1)$$

> 1

$(x < x_0)$

Пусть u more risk-averse than v

$u^{-1}(E\,u(x)) \le v^{-1}(E\,v(x)) \Rightarrow \pi_u > \pi_v$

$u(w-p^+) = E[u(w-X)]$

$= u(w-\mu+\mu-p^+)$ $\qquad = E[u(w-\mu+\mu-X)]$

$= u(w-\mu) + u'(w-\mu)(\mu-p^+) + o(w)$

$= u(w-\mu) + u'(w-\mu)\,\underbrace{E(\mu-x)}_{=0} + \frac{1}{2} u''(w-\mu)\,E(\mu-x)^2$

$\Rightarrow \quad p^{+} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{u''(w-\mu)}{u'(w-\mu)} > \mu$

$p^{+} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \rho_{ARA}(w-\mu)$, где $\rho_{ARA} = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$

absolute risk aversion

$u(w-X)$ - вогн. (потери)

$f(x) = -u(-X)$ - вып. (доход)

Больше (+больше) риска $\Rightarrow$ больше платят

$X \leq_{(1)} Y$

$U(w) = E\,U(w + \pi(X) - X) \geq E\,U(w + \pi(Y) - Y)$

$\Rightarrow \pi(Y) \geq \pi(X)$

$\triangleright\ w = u^{-1}(E\,u(w+\pi(X)-X)) \leq v^{-1}(E\,v(w+\pi(Y)-Y))$ $\qquad \pi(X) > \pi(Y)$

$w = u^{-1}(E\,(w+\pi(X)-X)) \leq v^{-1}(E\,(w+\pi(Y)-Y))$

$u^{-1}(E[u(w+\pi(X)-X)]) \leq v^{-1}(E[w+\pi(X)-X])$

$\Rightarrow \pi(X) > \pi(Y)$

$\pi(u) > \pi(v)$

$a_1 \le \ldots \le a_n$, $b_1 \le \ldots \le b_n$

$$\frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n}$$

$\hookrightarrow \quad \overline{a_i b_i} \geq \bar{a}_i \cdot \bar{b}_i$

$\mathrm{Cov}(f(x), g(x)) \geq 0 \qquad \mathrm{Cov}(f(x), g(x)) < 0$

$\uparrow \quad \downarrow$

ex

$${}_t p_x = S(u) = P(T_x > u) = P(T_{u+x} \mid T > x)$$

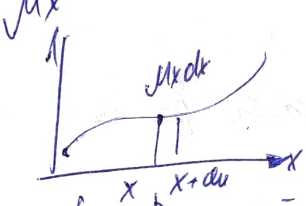
$${}_t p_x = {}_s p_x \cdot {}_{t-s} p_{x+y} \longleftrightarrow A(z,s) \cdot A(s,t) = A(z,t)$$

$\leftarrow$ гладкая f

$$\Rightarrow A(s,t) = e^{-\int_s^t \mu(u)\,du}$$

$$A(s,t) = e^{\int_s^t \delta(u)\,du}$$

$\hookrightarrow$ e.g. интенсивность инфляции (зав. от t)



$$\hookrightarrow {}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu(x+u)\,du}$$

$$\mu = A + B \cdot e^{\alpha x}$$

$\uparrow$ mortality rate

$$\frac{1}{k+1} = 0{,}35 \Rightarrow k$$

$$\mu^{(s)}(x) = k \cdot \mu^{(ns)}(x), \quad k > 1$$

$(s) \leftarrow$ smoker, $(ns) \leftarrow$ non-smoker

$${}_n p_x^{(ns)} = e^{-\int_0^t \mu^{(ns)}(x+u)\,du}$$

$$d_u\, p_x^{(ns)} = -{}_u p_x^{ns}\, \mu^{(ns)}(x+u)$$

$$-\int_1^0 dx\, v^k = \int v^k dv = \frac{1}{k+1}$$

$v = {}_n p_x^{(ns)}$

$$P(T^{(ns)} < T^{(s)}) = 0{,}35 \Rightarrow k?$$

$$= \int_0^u du\; {}_u p_x^{(ns)} \mu_{x+u} \cdot {}_u p_x^{(s)}\, du$$

$$= \int_0^u du\; {}_u p_x^{(ns)} \mu_{x+u} \left({}_u p_x^{(ns)}\right)^k du$$

Цена риска a) $\pi(X) = E(X)(1+\theta)$ — нет Var

б) $\pi(X) = E(X) + \theta \cdot Var(X)$ — $X \leq_{(o)} Y$

$\pi(X) \geq \pi(Y)$

$P(X=0) = p$

$P(X=\frac{10}{\theta}) = 1-p$

$$\frac{10(1-p)(1+10p)}{\theta}$$

при малых p: $\uparrow \downarrow$

но Var $\uparrow$

в) $\pi(X)$ — zero-utility price

$u(W-\pi) = E[u(W-X)]$ для клиента

$E[V(W+\pi - X)] = V(W)$ для банка

$p(W) < \pi < p^+(W)$ контракт возможен

г) Esscher price

$$\frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]}$$

$Cov[X.Y] > 0$, $E[XY] \geq E(X) \cdot E(Y)$

$$\varphi = \frac{e^{hX}}{E(e^{hX})} \qquad E(\varphi) = 1$$

$Cov(X, \varphi(X)) \geq 0$, φ - increasing

Мат. методы (8)

(1)

$$E(X-d)_+ \le E(Y-d)_+ \qquad \underline{EX = EY}$$

$$\Downarrow$$

$$E\Phi(X) \le E\Phi(Y) \qquad \Phi''_{xx} > 0$$

$$g(x) = \Phi(x) - \Phi(a) - \Phi'(a)(x-a) \qquad \bar{F}(x) = -F(x)$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{a} g(x)\,dF(x) - \int_a^{\infty} g(x)\,d\bar{F}(x) \overset{IBP}{=} -\int_{-\infty}^{a} F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

$$+ \int_a^{\infty} \bar{F}(x)\cdot g'(x)\cdot dx \overset{IBP}{=}$$

$g(a)=0$

$$F(a)\cdot g(a) = 0 \Big|_{a=-\infty} \qquad \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{a}(y-x) f(y)\,dy\right) = -F(x)$$

$$\bar{F}(a)\cdot g(a) = 0 \Big|_{a=+\infty} \qquad \frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{+\infty}(x-y) f(y)\,dy\right) = F(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{a} E[(x-y)_+]\,d\underbrace{g'(y)}_{>0} + \int_a^{\infty} E[(y-x)_+]\,d\underbrace{g'(y)}_{\ge 0} =$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int (y-x)_+ f(y)\,dy\right) = -\bar{F}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} (x-y)_+ f(y)\,dy\right) = \bar{F}(x)$$

$$\frac{d}{dx} E(X-x)_+ = -\bar{F}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_x^{\infty}(y-x) f(y)\,dy\right] = -\int_x^{\infty} f(y)\,dy = -\bar{F}(x)$$

$$\frac{d}{dx} E(x-X)_+ = \frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{x}(x-y) f(y)\,dy\right] = F(x)$$

$EX = E(X-x)_+ - E(x-X_+)$

$EY = E(Y-x)_+ - E(x-Y)_+$

---

1) $E\varphi(x) \le E\varphi(y)$ $EX = EY$ $\varphi'(a)(\underset{EY}{EX}-a)$

$g(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \varphi'(a)(x-a)$

2) $E g(x) = \int_{-\infty}^{a} g(y)\, dF(y) - \int_{a}^{+\infty} g(y)\, d\bar F(y) =$ (в.п.)

$\underbrace{F(y)\cdot g(y)\Big|_{-\infty}^{a}}_{=0} - \int_{-\infty}^{a} \underbrace{F(y)}_{\text{перв. } E(x-X)_+} d\,g(y) - \cancel{\underbrace{F(y)\, g(y)\Big|_{a}^{+\infty}}_{=0}} + \int_{a}^{\infty} \underbrace{\bar F(y)}_{\text{первообр. } -E(X-x)_+} \cdot d g(y) =$

$= \int_{-\infty}^{a} E(x-X)_+\, d\,g'(y) + \int_{a}^{\infty} E(X-x)_+\, d\,g'(y)$

$EX = E(X-x)_+ - E(x-X)_+$

$EY = E(Y-x)_+ - E(x-Y)_+$

2) В ипотеку $200000 = S$

сколько стоит страховка на случ. смерти

$$P = \frac{S}{d \cdot a_{\overline{n}|}} \left(A^{1}_{x:n} - v^{n-} {}_{n}q_x \right)$$

(сразу)

$\frac{S+P}{a_{\overline{n}|}}$

↑ неизв => уравнение реш. (≈ 100 \$)

про Гаус. аппрокс., объяснить применимость
обосновать применимость

3.1.10 (не будет)

3.2.11

$i = 4$ $p = 3/4$

$i = 6$ $p = 1/4$

2016 $x = 50$

2030 $x = 65$

6

4

если дот. или вы сразу 125000

или пот. пенсия

$N(200000, 40000^2)$

↑ доходность акций

$_{15}p_{50} = \frac{l_{65}}{l_{50}} \approx 0{,}077$ $\ddot{a}_{65}^{(12)} = \ldots$

125000

$125000 / \ddot{a}_{65}^{(12)} \approx 13\,\ldots,1$ ($i=4$)

$12000 \cdot 12{,}276 \approx 147\,312$

$125000 / \ddot{a}_{65}^{(12)} \approx 12\,364,4$ ($i=6$)

$12000 \cdot 10{,}569 \approx$

фирма нес. убытки 1) доживает $_{15}p_{50} = 0{,}077$

интерес 6%. $p = 1/4$

Акц. < 125

2) дот. $_{15}p_{50} = 0{,}077$

инфл. 4% $p = 3/4$

Акц. < цена пенсии

3) не доживает $_{15}q_{50} = 0{,}923$

=> вероятность потерь ≈ 5%

$P(X < 125000) = P\left(\frac{X - 200000}{40000} < -1{,}875\right) =$

—

$E[\text{Profit}] \geq 23{,}689{,}1$

$E[\text{Profit}] = \left[\frac{3}{4}(200000 - 1{,}41{,}812) + \frac{1}{4}(200000 - 125000)\right] \cdot \frac{D_{65}}{D_{50}}$ 6%

$- 50000\, A^{1}_{50:\overline{15}|}$ ← 4%

НР – аппроксимация: 3.1.10

$E[\xi] = 0$

$D[\xi] = 1$

$E^{2k+1} = 0$

$E\xi^{2k} = (2k-1)!!\,\sigma^{2k}$

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nEX_1}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow \xi \sim N(0,1)$$

skewness $\dfrac{E\bar{\xi}_n^3}{\sigma^3} = 0$

kurtosis $\dfrac{E(\xi - E\xi)^4}{\sigma^4} - 3 \ll 0{,}001$

поправки $\eta = \xi + \dfrac{\gamma}{6}(\xi^2 - 1)$ $\quad E\eta = 0$

если γ или kurt не малы. $\quad Var\,\eta = 1$

skewness $= \gamma + c\dfrac{\gamma^3}{3} \dots$

$$\xi + \frac{\gamma}{6}(\xi^2 - 1) = x$$

$$\xi = -\frac{3}{\gamma} + \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + \frac{6x}{\gamma} + 1} = 2{,}33$$

$t_{99\%}$

$\downarrow \gamma \to 0$

x

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \dots$$

$$-\frac{3}{\gamma} + \frac{3}{\gamma}\sqrt{1 + \frac{2}{3}x\gamma + \frac{\gamma^2}{9}} \approx$$

$$-\frac{3}{\gamma} + \frac{3}{\gamma}\left(1 + \frac{2}{3}x\gamma\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{9} + \dots\right) = x$$

$$P\left(\frac{\sum x}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \approx \Phi\left(-\frac{3}{\gamma} + \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + \frac{6x}{\gamma} + 1}\right)$$

Задача 3.1.10

500 контрактов (x, y) (D, A) 10000 \$

$\mu_x = 0{,}02$ (A, D) 5000 \$

$\mu_y = 0{,}025$

$$P\left(\frac{S_1 + \ldots + S_{500} - 500\, ES_1}{\sigma\sqrt{500}}\right) < 0{,}01$$

$$S_1 = Z_1^{(x)\, D_x} + Z_1^{(y)\, D_y}$$

$$v^{T(x)} = e^{-\mu \cdot T(x)} \Rightarrow \mu = -\ln(1{,}05)$$

$$EZ_1^{(x)} = 10^4 E\, v^{T(x)} \cdot \mathbb{1}\{T(x) < T(y)\} + 2 \cdot 10^4 \cdot E v^{T(y)}\, \mathbb{1}\{T(y) < T(x)\}$$

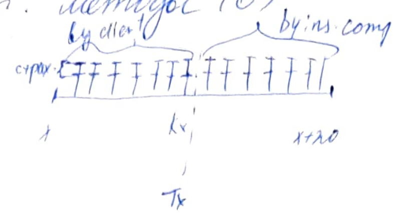
$$v = \frac{1}{1+i}$$

$i = 0{,}05$

≈ 2600 ≈ 1000

Мат. методы (6) AM 92

3.2.~~IV~~ Mortgage



$X = 30$

$C = 200000$

$P = ?$ — врем. стр. пол.

$i = 4$

$$X \cdot \left(\frac{1 - (1/1{,}04)^{20}}{0{,}04} \right) = 200000 \quad \leftarrow a_{\overline{20|}}$$

$$X = 14716{,}35$$

14.716,35 — вел. выплат без учета смерти

$$d = 1 - v = \frac{0{,}04}{1{,}04}$$

$$X(v^{k+1} + \ldots + v^{20}) = \begin{cases} X \cdot \dfrac{v^{k+1} - v^{21}}{d} & \text{if } k < 20 \\ 0 & \text{if } k > 20 \end{cases}$$

$$A_{[x]} - v^n \frac{l_{x+n}}{l_{[x]}} A_{x+n} - \frac{D_{x+n}}{D_{[x]}}$$

$$\| \quad A_{[30]:20} - \frac{D_{50}}{D_{[x]}} \quad \|$$

$$X/d \cdot E\left[(v^{k+1} - v^{21}) \mathbb{1}_{\{k<20\}}\right] = X/d \left(E\left[v^{k+1} \mathbb{1}_{\{k<20\}}\right] - v^{21} {}_{20}q_{30} \right) \ominus \quad \leftarrow A^1_{[30]:20}$$

$\ominus$ 1444,36

$$_{20}q_{[30]} = \frac{l_{[30]} - l_{50}}{l_{[30]}} = 0{,}0213$$

$$A^1_{[30]:20} = \frac{M_{[30]} - M_{50}}{D_{[30]}} = \ldots = 0{,}01313$$

справка:

$l_{[x]}$

$l_{[x]+1}$

l_{x+2}

$$A_{[30]:20}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{D_{[x]}}$$

$$A^1_{x:n} = \frac{M_x}{D_x} =$$

$$= \sum v^k d_k + D_x \cancel{v^n}$$

$$A_{x:\overline{n|}} = A^1_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}$$