

<b>LIFE INSURANCE</b>		Лист итогов 6		Фамилия, Имя		Касьянова Ксения	
<b>Задача 1</b>				<b>Задача 3</b>			
		I TC	II S(x)	1). на случай смерти		возраст	
возраст	а)	0.9160	0.7506	а). КФ	A=	0.0058	32
31	б)	0.0918	0.2491		P=	0.0011	пол
пол	в)	0.0321	0.0078	б). Интенс	A=	0.0047	Ж
Ж	г)	0.0196	0.0646		P=	0.0010	срок п
	д)	0.999817	0.9982	в). S(x)	A=	0.0316	6
	е)	0.999816			P=	0.0069	
	ж)	0.999817		Резервы: а) КФ б) интенсивн			
	з) де Муавр	0.0049	0.0359	при А	0.0034	0.0040	
				при Р	0.0003	0.0006	
<b>Задача 2</b>				2). на дожитие			
выплаты с	2020	года		а). КФ	A=	0.7627	
рента	1000	уменьш. на 100 у.е. ежегодно			P=	0.1418	
Современная стоимость ренты:				б). Интенс	A=	0.5290	
2946.194					P=	0.1131	
				в). S(x)	A=	0.5074	
					P=	0.1101	
				Резервы: а) КФ б) интенсивн			
				при А	0.8730	0.7271	
				при Р	0.4660	0.3387	

## I часть. LIFE INSURANCE

### Задача 1

Найти вероятности для 31-летнего страхователя:

I. по таблице смертности жителей г. Москвы за 2016 г. для страхователя – женщины:

II. для функции дожития вида:  $s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{102}}, 0 \leq x \leq 102$

III. для интенсивности смертности вида:  $\mu_x = 0.002x, x \geq 0$

а) дожить, по крайней мере, до 62 лет

$$I. {}_{31}p_{31} = \frac{l_{62}}{l_{31}} = \frac{90087}{98351} = 0.91597$$

$$II. {}_{31}p_{31} = \frac{s(62)}{s(31)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{62}{102}}}{\sqrt{1 - \frac{31}{102}}} = 0.75058$$

$$III. {}_{31}p_{31} = \exp(-\int_{31}^{62} 0.002u du) = \exp(-2.883) = 0.05596$$

б) умереть до достижения возраста 52 лет;

$$I. {}_{21}q_{31} = \frac{l_{31} - l_{52}}{l_{31}} = \frac{98351 - 90087}{98351} = 0.09181$$

$$II. {}_{21}q_{31} = \frac{s(31) - s(52)}{s(31)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{31}{102}} - \sqrt{1 - \frac{52}{102}}}{\sqrt{1 - \frac{31}{102}}} = 0.24941$$

$$III. {}_{21}q_{31} = 1 - \exp(-\int_{31}^{52} 0.002u du) = 1 - \exp(-1.743) = 0.825$$

в) умереть в возрасте 44 лет;

$$I. {}_{13}q_{31} = \frac{l_{44} - l_{45}}{l_{31}} = \frac{96668 - 96479}{98351} = 0.00192$$

$$\text{II. } {}_{13|}q_{31} = \frac{s(44) - s(45)}{s(31)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{44}{102}} - \sqrt{1 - \frac{45}{102}}}{\sqrt{1 - \frac{31}{102}}} = 0.00782$$

$$\text{III. } {}_{13|}q_{31} = {}_{13}p_x - {}_{14}p_x = \exp(-\int_{31}^{44} 0.002udu) - \exp(-\int_{31}^{45} 0.002udu) = \exp(-0.975) - \exp(-1.064) = 0.03211$$

г) умереть в возрасте от 44 до 52 лет;

$$\text{I. } {}_{13|8}q_{31} = \frac{l_{44} - l_{52}}{l_{31}} = \frac{96668 - 94737}{98351} = 0.01963$$

$$\text{II. } {}_{13|8}q_{31} = \frac{s(44) - s(52)}{s(31)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{44}{102}} - \sqrt{1 - \frac{52}{102}}}{\sqrt{1 - \frac{31}{102}}} = 0.06464$$

$$\text{III. } {}_{13|8}q_{31} = {}_{13}p_x - {}_{21}p_x = \exp(-\int_{31}^{44} 0.002udu) - \exp(-\int_{31}^{52} 0.002udu) = \exp(-0.975) - \exp(-1.743) = 0.2022$$

д-ж) прожить ещё 3 месяца

И. - в предположении о линейности функции дожития;

$${}_{0.25}p_{31} = 1 - {}_{0.25}q_{31} = 1 - 0.25q_{31} = 1 - 0.25 * 0.000732 = 0.999817$$

- в предположении о постоянстве силы смертности;

$${}_{0.25}p_{31} = p_{31}^{0.25} = (1 - 0.000732)^{0.25} = 0.999816$$

- в предположении гипотезы Балдуччи;

$${}_{0.25}p_{31} = \frac{p_{31}}{p_{31} + 0.25q_{31}} = \frac{1 - 0.000732}{1 - 0.000732 + 0.25 * 0.000732} = 0.999817$$

$$\text{II. } {}_{0.25}p_{31} = \frac{s(31.25)}{s(31)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{31.25}{102}}}{\sqrt{1 - \frac{31}{102}}} = 0.99824$$

$$\text{III. } {}_{0.25}p_{31} = \exp(-\int_{31}^{31.25} 0.002udu) = \exp(-0.0156) = 0.98452$$

з) средняя округленная продолжительность оставшейся жизни по таблицам смертности:  $e_{31} = [T_{31}] = [50.50] = 50$ ; и средняя полная продолжительность оставшейся жизни по функции дожития:  $\dot{e}_{31} = E(T_{31}) = \frac{1}{s(31)} \int_{31}^{102} \sqrt{1 - \frac{u}{102}} du = 1.1986 * 39.491 = 47.334$

и) умереть в течение последующих 5 лет

$$\text{по де Муавру с предельным возрастом 100 лет: } {}_5q_{31} = \frac{s(31) - s(36)}{s(31)} = (\frac{100-31}{100} - \frac{100-36}{100}) / \frac{100-31}{100} = 0.07246$$

$$\text{I. } {}_5q_{31} = \frac{l_{31} - l_{36}}{l_{31}} = \frac{98351 - 97868}{98351} = 0.00491$$

$$\text{II. } {}_5q_{31} = \frac{s(31) - s(36)}{s(31)} = 0.03585$$

$$\text{III. } {}_5q_{31} = 1 - \exp(-\int_{31}^{36} 0.002udu) = 1 - \exp(-0.335) = 0.28466$$

к) кривая смертей  $f(x)$ , интенсивность смертности  $\mu_x$ , функция дожития  $s(x)$

$$\text{I. } f(x) = -s'(x) = -\frac{d}{dx}(\sqrt{1 - \frac{x}{102}}) = \frac{1}{204\sqrt{1 - \frac{x}{102}}}$$

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{1}{204(1 - \frac{x}{102})}$$

$$\text{II. } s(x) = \exp(-0.001x^2)$$

$$f(x) = -s'(x) = 0.002 \exp(-0.001x^2)x$$

## Задача 2

Эффективная годовая процентная ставка  $i_1 = 7\%$  в течение первых 10 лет,  $i_2 = 4\%$ . В 2015 году покупается 8-летняя финансовая рента с выплатами каждый год, начиная с 2020-го года (ровно через 5 лет), в первый год выплат - 1000 у.е., *уменьшающуюся* ежегодно на 100 у.е.

$$\nu_1 = 0.9346, \nu_2 = 0.9615$$

$$a_{\bar{5}|@i_1} = \frac{1-0.9346^5}{0.07} = 4.099$$

$$(Ia)_{\bar{5}|@i_1} = \frac{4.099}{1-0.9346} - \frac{5 \cdot 0.9346^5}{0.07} = 11.743$$

$$(Da)_{\bar{5}|@i_1} = \frac{(5 \cdot 0.07 - 1) \cdot 4.099}{0.07} + \frac{5 \cdot 0.9346^5}{0.07} = 12.87$$

$$a_{\bar{3}|@i_2} = \frac{1-0.9615^3}{0.04} = 2.778$$

$$(Ia)_{\bar{3}|@i_2} = \frac{2.778}{1-0.9615} - \frac{3 \cdot 0.9615^3}{0.04} = 5.489$$

$$(Da)_{\bar{3}|@i_2} = \frac{(3 \cdot 0.04 - 1) \cdot 2.778}{0.04} + \frac{3 \cdot 0.9615^3}{0.04} = 5.551$$

а) Стоимость в момент заключения договора:

- через возрастающую ренту

$$A = (1100 \cdot a_{\bar{5}|@i_1} - 100 \cdot (Ia)_{\bar{5}|@i_1} + 600 \cdot a_{\bar{3}|@i_2} \cdot \nu_1^5 - 100 \cdot (Ia)_{\bar{3}|@i_2} \cdot \nu_1^5) \cdot \nu_1^5 = (1100 \cdot 4.099 - 100 \cdot 11.743 + 600 \cdot 2.778 \cdot 0.9346^5 - 100 \cdot 5.489 \cdot 0.9346^5) \cdot 0.9346^5 = 2946.194$$

- через убывающую ренту

$$A = (500 \cdot a_{\bar{5}|@i_1} + 100 \cdot (Da)_{\bar{5}|@i_1} + 200 \cdot a_{\bar{3}|@i_2} \cdot \nu_1^5 + 100 \cdot (Da)_{\bar{3}|@i_2} \cdot \nu_1^5) \cdot \nu_1^5 = (500 \cdot 4.099 + 100 \cdot 12.87 + 200 \cdot 2.778 \cdot 0.9346^5 + 100 \cdot 5.551 \cdot 0.9346^5) \cdot 0.9346^5 = 2943.888$$

Стоимость, накопленная к концу платежного периода:

- через возрастающую ренту

$$S = (1100 \cdot a_{\bar{5}|@i_1} \cdot (1+i_1)^5 - 100 \cdot (Ia)_{\bar{5}|@i_1} \cdot (1+i_1)^5 + 600 \cdot a_{\bar{3}|@i_2} - 100 \cdot (Ia)_{\bar{3}|@i_2}) \cdot (1+i_2)^3 = (1100 \cdot 4.099 \cdot 1.07^5 - 100 \cdot 11.743 \cdot 1.07^5 + 600 \cdot 2.778 - 100 \cdot 5.489) \cdot 1.04^3 = 6518.417$$

- через убывающую ренту.

$$S = (500 \cdot a_{\bar{5}|@i_1} \cdot (1+i_1)^5 + 100 \cdot (Da)_{\bar{5}|@i_1} \cdot (1+i_1)^5 + 200 \cdot a_{\bar{3}|@i_2} + 100 \cdot (Da)_{\bar{3}|@i_2}) \cdot (1+i_2)^3 = (500 \cdot 4.099 \cdot 1.07^5 + 100 \cdot 12.87 \cdot 1.07^5 + 200 \cdot 2.778 + 100 \cdot 5.551) \cdot 1.04^3 = 6513.316$$

б) Премии, которые должен внести страхователь, если он желает оплатить договор двумя платежами:

$$a_{\bar{1}|@i_1} = \frac{1-0.9346}{0.07} = 0.934$$

$$(Ia)_{\bar{1}|@i_1} = \frac{0.934}{1-0.9346} - \frac{0.9346}{0.07} = 0.9299$$

$$a_{\bar{4}|@i_1} = \frac{1-0.9346^4}{0.07} = 3.386$$

$$(Ia)_{\bar{4}|@i_1} = \frac{3.386}{1-0.9346} - \frac{4 \cdot 0.9346^4}{0.07} = 8.176$$

$$a_{\bar{3}|@i_2} = \frac{1-0.9615^3}{0.04} = 2.778$$

$$(Ia)_{\bar{3}|@i_2} = \frac{2.778}{1-0.9615} - \frac{3 \cdot 0.9615^3}{0.04} = 5.489$$

- в момент заключения договора (первые 4 выплаты ренты);

$$A_1 = (1100 * a_{\bar{4}|@i_1} - 100 * (Ia)_{\bar{4}|@i_1}) * \nu_1^5 = (1100 * 3.386 - 100 * 8.176) * 0.9346^5 = 2072.879$$

- в момент начала выплат (последние четыре выплаты).

$$A = (700 * a_{\bar{1}|@i_1} - 100 * (Ia)_{\bar{1}|@i_1} + 600 * a_{\bar{3}|@i_2} * \nu_1 - 100 * (Ia)_{\bar{3}|@i_2} * \nu_1) * \nu_1^5 = (700 * 0.934 - 100 * 0.9299 + 600 * 2.778 * 0.9346 - 100 * 5.489 * 0.9346) * 0.9346^5 = 1144.896$$

### Задача 3

Найти и сравнить единовременную (А) и ежегодную (Р) премии по договорам страхования для 32-летнего страхователя-женщины на сумму 20000 у.е. Найти величину страхового резерва на конец 3-го страхового года  ${}_3V_{x:\bar{6}|@i_1}$  - для стандартной процентной ставки и  ${}_3V_{x:\bar{6}|@i_2}$  - для процентной ставки, соответствующей интенсивности процентов  $\delta = 10, 5\%$ .

1) на случай смерти на срок 6 лет (с выплатой в конце года смерти);

2) на дожитие на срок 6 лет;

3) смешанного страхования на срок 6 лет (с выплатой в конце года смерти);

а) для коммутационных функций для эффективной годовой процентной ставки  $i = 4, 5\%$ , представленной в таблице смертности.

1) с единовременной уплатой взносов

$$A_{\bar{32}:\bar{6}|} = \frac{M_{32}-M_{38}}{D_{32}} = \frac{3227.84-3088.94}{24029.21} = 0.00578$$

$${}_3V_{\bar{32}:\bar{6}|@i_1}^A = \frac{M_{35}-M_{38}}{D_{35}} = \frac{3161.01-3088.94}{20992.4360} = 0.00343$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{\bar{32}:\bar{6}|} = \frac{M_{32}-M_{38}}{N_{32}-N_{38}} = \frac{3227.84-3088.94}{483054.06-353850.19} = 0.00108$$

$${}_3V_{\bar{32}:\bar{6}|@i_1}^P = \frac{M_{35}-M_{38}}{D_{35}} - \frac{M_{32}-M_{38}}{N_{32}-N_{38}} * \frac{N_{35}-N_{38}}{D_{35}} = 0.00343 - \frac{3227.84-3088.94}{483054.06-353850.19} * \frac{414085.23-353850.19}{20992.4360} = 0.000348$$

2) с единовременной уплатой взносов

$$A_{\bar{32}:\bar{6}|} = \frac{D_{38}}{D_{32}} = \frac{18326.51}{24029.21} = 0.76268$$

$${}_3V_{\bar{32}:\bar{6}|@i_1}^A = \frac{D_{38}}{D_{35}} = \frac{18326.51}{20992.43} = 0.873$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{\bar{32}:\bar{6}|} = \frac{D_{38}}{N_{32}-N_{38}} = \frac{18326.51}{483054.06-353850.19} = 0.14184$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\delta_1}^P = \frac{D_{38}}{D_{35}} - \frac{D_{38}}{N_{32}-N_{38}} * \frac{N_{35}-N_{38}}{D_{35}} = 0.873 - \frac{18326.51}{483054.06-353850.19} * \frac{414085.23-353850.19}{20992.43} = 0.466$$

3) с единовременной уплатой взносов

$$A_{32:\bar{6}|} = A_{32:\bar{6}|}^1 + A_{32:\bar{6}|}^1 = 0.00578 + 0.76268 = 0.76846$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\delta_1}^A = {}_3V_{32:\bar{6}|\delta_1}^A + {}_3V_{32:\bar{6}|\delta_1}^A = 0.00343 + 0.76268 = 0.76611$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{32:\bar{6}|} = P_{x:\bar{6}|}^{32} + P_{x:\bar{6}|}^1 = 0.00108 + 0.14184 = 0.14292$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\delta_1}^P = {}_3V_{32:\bar{6}|\delta_1}^A - \frac{D_{38}+M_{32}-M_{38}}{N_{32}-N_{38}} * \frac{N_{35}-N_{38}}{D_{35}} = 0.76611 - \frac{18326.51+3227.84-3088.94}{483054.06-353850.19} * \frac{414085.23-353850.19}{20992.43} = 0.35603$$

б) при интенсивности процентов  $\delta = 10, 5\%$ .

$$\nu = \exp -0.105 = 0.90032$$

1) с единовременной уплатой взносов

$$A_{32:\bar{6}|}^1 = \frac{\nu d_{32} + \dots \nu^6 * d_{37}}{l_{32}} = 0.00466$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\delta_2}^A = A_{35:\bar{3}|}^1 = 0.00404$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{32:\bar{6}|}^1 = \frac{\nu d_{32} + \dots \nu^6 * d_{37}}{l_{32} + \dots \nu^5 * d_{37}} = 0.000996$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\delta_2}^1 = {}_3V_{32:\bar{6}|}^A - P_{32:\bar{6}|}^1 * \ddot{a}_{35:\bar{3}|}^1 = 0.00404 - 0.000996 * 3.43497 = 0.00062$$

2) с единовременной уплатой взносов

$$A_{32:\bar{6}|}^1 = \nu^6 \frac{l_{38}}{l_{32}} = 0.52897$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\delta_2}^A = A_{35:\bar{3}|}^1 = 0.72705$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{x:\bar{6}|}^1 = \frac{\nu^6 l_{38}}{l_{32} + \dots \nu^5 * d_{37}} = 0.11306$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\delta_2}^P = A_{35:\bar{3}|}^1 - P_{x:\bar{6}|}^1 * \ddot{a}_{35:\bar{3}|}^1 = 0.72705 - 0.11306 * 3.43497 = 0.338692$$

3) с единовременной уплатой взносов

$$A_{32:\bar{6}|} = A_{32:\bar{6}|}^1 + A_{32:\bar{6}|}^1 = 0.00466 + 0.52897 = 0.53363$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\delta_2}^A = A_{35:\bar{3}|}^1 = 0.00404 + 0.72705 = 0.73109$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{32:\bar{6}|} = P_{x:\bar{6}|}^{32} + P_{x:\bar{6}|}^1 = 0.000996 + 0.11306 = 0.11405$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\delta_2}^P = A_{35:\bar{3}|}^1 - P_{32:\bar{6}|} * \ddot{a}_{35:\bar{3}|}^1 = 0.73109 - 0.11405 * 3.43497 = 0.33933$$

в) с использованием функции дожития вида:  $S(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{100}}, 0 \leq x \leq 100$  при эффективной учетной ставке  $d = 10\%$ .

$$\nu = 1 - d = 0.9$$

$$d_x = (s(x) - s(x+1))/s(x) * l_0$$

$$l_x = s(x) * l_0$$

1) с единовременной уплатой взносов

$$A_{\frac{1}{32:\bar{6}|}} = \frac{\nu d_{32} + \dots \nu^6 * d_{37}}{l_{32}} = 0.031649$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{\frac{1}{32:\bar{6}|}} = \frac{\nu d_{32} + \dots \nu^6 * d_{37}}{l_{32} + \dots \nu^5 * d_{37}} = 0.006866$$

2) с единовременной уплатой взносов

$$A_{\frac{1}{32:\bar{6}|}} = \nu^6 \frac{l_{38}}{l_{32}} = 0.50745$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{\frac{1}{x:\bar{6}|}} = \frac{\nu^6 l_{38}}{l_{32} + \dots \nu^5 * d_{37}} = 0.110101$$

3) с единовременной уплатой взносов

$$A_{32:\bar{6}|} = A_{\frac{1}{32:\bar{6}|}} + A_{\frac{1}{32:\bar{6}|}} = 0.00466 + 0.52897 = 0.539103$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{32:\bar{6}|} = P_{\frac{32}{x:\bar{6}|}} + P_{\frac{1}{x:\bar{6}|}} = 0.000996 + 0.11306 = 0.116968$$