Случ. процессы (1)

(Ω, F, P) — вер. пр-во

Ω пр-во исходов

F - σ-алгебра

1) $\Omega \in F$

2) $A \in F \Rightarrow \Omega \setminus A \in F$

3) $A_1 \dots A_n \in F \Rightarrow \bigcup_n A_n \in F$

P аксиомы:

1) $P(A) \in [0,1]$, $A \in F$

2) $P(\Omega) = 1$

3) $A_i \cap A_j = \varnothing$ $\forall i,j, i \neq j$, $A_{i,j} \in F$

$$P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$$

След. $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$

R.V. $X : \Omega \to R$ (если оно F-измеримо)

т.е. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\} \in F, \forall \alpha \in R$

$F(x) = P(X \leq \alpha) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x)$

S.R.V. X, если она прин. конечное число значений

$X = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}$, где $\mathbb{1}_{A_i} = \begin{cases} 1, & \omega \in A_i \\ 0, & \omega \notin A_i \end{cases}$

$A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, $A_i \cap A_j = \varnothing$

($\{A_1, \dots, A_n\}$ - разбиение пр-ва Ω случ. вел. X)

(*) для $\forall$ r.v. X:

$X = X^+ - X^-$, где $X^+ = \max(X, 0)$ ← неотр.

$X^- = \max(-X, 0)$ ← с.в.

(*) для $\forall$ non-neg. $X \geq 0$ $\exists \{X_n\} : X_n \uparrow X$

$\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n & X(\omega) \geq n \\ \frac{k-1}{2^n} & \frac{k-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k}{2^n}, \ k = \overline{1, 2^n n} \end{cases}$$

Если X, Y - простые с.в. : $X \geq Y \Rightarrow E(X) \geq E(Y)$

- Н.ор. сл.в. $X \geq 0$, $X_n \uparrow X$

$\{E[X_n]\}$ – возр. посл. н.о. чисел

$$E[X] = \lim_{n\to\infty} E[X_n]$$

$$X = X^+ - X^- \qquad E[X^+] = \lim_{n\to\infty} E[X_n^+]$$

$$E[X^-] = \lim_{n\to\infty} E[X_n^-]$$

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-]$$

- $|X| = X^+ + X^-$
- $E\{|X|\} < \infty$ (X – абс. интегрируема)

$$E[X^+] \leq E[|X|] < \infty$$

$$E[X^-] \leq E[|X|] < \infty$$

$\Rightarrow$ если X абс. инт., то $E(X)$ – конечно

Пред. 1 Если $X \geq 0$ $E[X] = 0$, то $X = 0$ w.p. 1

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq 0\}) = 0$$

$\triangleright$ $A_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq 1/n\} \in F$

$$0 = E[X] \geq E[X \cdot \mathbb{1}_{A_n}] \geq 1/n \cdot E[\mathbb{1}_{A_n}] = 1/n \cdot P(A_n) \Rightarrow$$

$\forall n\ P(A_n) = 0$

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq 0\} = \cup_n A_n$

$P(\cup_n A_n) \leq \sum_n P(A_n) = 0$

$\left(\cup_n A_n = \cup_n (A_n - \cup_{k<n} A_k) \Rightarrow\right.$

$\left.P(\cup_n A_n) = P(A_n - \cup_{k<n} A_k) \leq \sum_{n} P(A_n)\right)$

$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq 0\} = 0$, $X = 0$

$F(X) = P(X \leq x)$

$X \geq 0$, для X_n:

$$E[X_n] = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot P(A_{k,n}) + n \cdot P(B_n)$$

где $B_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq n\}$

$A_{k,n} = \{\omega \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k}{2^n}\}$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \left(F(k/2^n) - F(k-1/2^n)\right) + nP(B_n) + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n2^n} P(X = \tfrac{k}{2^n}) - nP(X=n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \Delta F \frac{k-1}{2^n} + nP(B_n) + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n2^n} P(X = k/2^n) - n \cdot P(X=n)$$

$\xrightarrow{n \to \infty}$ $E[X] = \int_0^\infty x \, dF(x)$ (согл. Римана – Стилтьеса)

$nP(X=n) \leq n \cdot P(B_n)$

$\sum_{k=1}^{n2^n} P(X = k/2^n) \leq 1$

$Var[X] < \infty \Rightarrow n \cdot P(B_n) \to 0, \ n \to \infty$

если $\exists F'(x) = f(x)$, то $E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx$

с.в. X : $E(|X|) < \infty$ $\quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx$

Случ. процессы (2)

(Ω, F, P)

$\{\omega : X(\omega) \le a\} \in F \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (измеримость)

Лемма:

a) $\{\omega : X(\omega) > a\} \subset F \quad \forall a \in \mathbb{R}$

b) $\{\omega : X(\omega) \ge a\} \subset F \quad \forall a \in \mathbb{R}$

c) $\{\omega : X(\omega) < a\} \subset F \quad \forall a \in \mathbb{R}$

d) $\{\omega : X(\omega) \le a\} \subset F \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Эквивалентные опр-я измеримости

▷ $\{\omega : X(\omega) \ge a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) > a - \frac{1}{n}\}$ $(a \Rightarrow b)$

$\{\omega : X(\omega) < a\} = \Omega \setminus \{\omega : X(\omega) \ge a\}$ $(b \Rightarrow c)$

$\{\omega : X(\omega) \le a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{\omega : X(\omega) < a + \frac{1}{n}\}$ $(c \Rightarrow d)$

$\{\omega : X(\omega) > a\} = \Omega \setminus \{\omega : X(\omega) \le a\}$ $(d \Rightarrow a)$

□

* σ-алгебра замк. отн. взятия счетных пересечений (след. того что замк. отн. взятия объединений и дополнений)

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\{\omega : a < X(\omega) \le b\} = \{\omega : X(\omega) \le b\} \setminus \{\omega : X(\omega) \le a\} \subset F$

(следствие из d)

$\{X_n(\omega)\}_{n \ge 1}$; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n(\omega) \equiv \limsup\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = \inf\limits_m g_m(\omega)$,

$\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)\right)$ $\qquad g_m(\omega) = \sup\limits_{n \ge m} f_n(\omega)$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} X_n(\omega) \equiv \liminf\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = \sup\limits_m g_m(\omega)$,

$g_m(\omega) = \inf\limits_{n \ge m} f_n(\omega)$

$\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) \subset F$

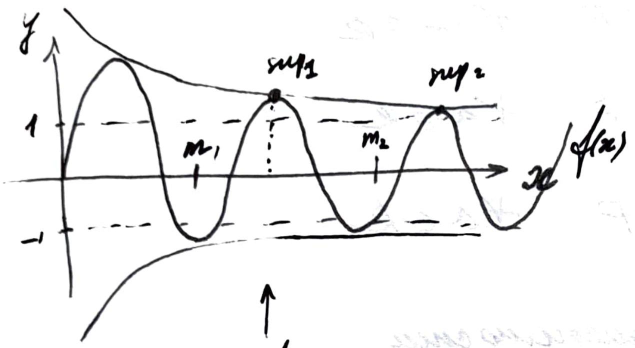
$\triangleright$ $\{\omega : g_m(\omega) > a\} = \bigcup_{n=m}^{\infty} \{\omega : f_n(\omega) > a\} \subset F$

$\subset F$ (a))

$h(\omega) = \inf g_m(\omega)$

$\{\omega : h(\omega) < a\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\omega : g_m(\omega) < a\} \subset F$

$\subset F$ (c)) $\square$



$\sup\limits_{x\in[m_1;+\infty)} f(x)$

$\nexists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

$\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x) = 1$

$\underline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x) = -1$

$\sup\limits_{x\in[m;+\infty)} f(x) = g_m \downarrow 1$

$\inf\limits_{x\in[m;+\infty)} f(x) = g_m \uparrow -1$

$X \sim f \iff E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx,$ (*)

$\forall g(x) \in C'$ огранич.

F – б-алгебра порожд. откр. мн-вами в R

$\Rightarrow$ F – б-алгебра бор. мн-в пр-ва Ω

$б_A$ – б-алг. порожд. сов. подмн-в A

$б_A = \bigcap_G \{G$ б-алг., $G \supset A\}$

$g: R \to R$ изм. по Борелю (g борелевская)

$\iff \{x \in R : g(x) \le a\}$ – бор. мн-во $\forall a \in R$

Если (*) верно $\forall g$ огр. бор. ф-и

(посл. таких ф-и — поточечные пределы равном-но огр. п-тей непр. ф-й)

(*) :

▷ (⇐) $g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases}$

$E[g(X)] = P(X \leq a)$

$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x) dx$

$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$

(⇒) $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$

E.g. $X \sim N(0,1)$

Пусть $Y = \begin{cases} X & |X| \leq c \\ -X & |X| > c \end{cases}$, $c > 0$

g — произв. огр. бор. ф-я (тест. ф-я)

$E[g(Y)] = E[g(Y) I_{|X| \leq c} + g(Y) I_{|X|>c}] =$

$= E[g(Y) I_{|X| \leq c}] + E[g(Y) I_{|X|>c}] =$

$= E[g(X) I_{|X| \leq c}] + E[g(-X) I_{|X|>c}] =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) I_{|x| \leq c}\, \phi(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(-x) I_{|x|>c} \phi(x) dx =$

$= \int_{-c}^{c} \dots + \int_{-\infty}^{c} \dots + \int_{c}^{+\infty} \dots = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \phi(x)\, dx$

(⇒) $Y \sim N(0,1)$

$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$

$$X + Y = \begin{cases} 2X, & |X| \leq c \\ 0, & |X| > c \end{cases}$$

$X+Y \not\sim N(0,1)$

т.к. $\cancel{cov(X,Y) \neq 0}$

т.к. $(X,Y) \not\sim N(0,\Sigma)$

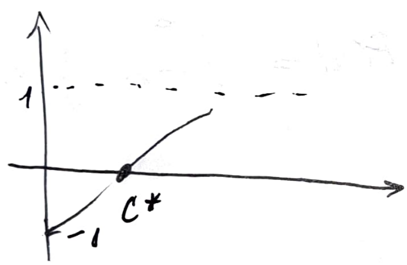
$$E[XY] = E[XY I_{|X| \leq c}] + E[XY I_{|X| > c}] =$$

$$= E[X^2 I_{|X| \leq c}] + E[-X^2 I_{|X|>c}] =$$

$$= \int_{-c}^{c} x^2 \phi(x) dx + \int_{-\infty}^{-c} -x^2 \phi(x) dx + \int_{c}^{\infty} \dots \Rightarrow$$

$E[XY] \to 1$, $c \to \infty$

$E[XY] \to -1$, $c \to 0_+$



$\exists c^* : E[XY] = 0$

но $(X,Y) \not\sim N(0,\Sigma)$

④ Если $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$

$Z_1, Z_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$ i.i.d.

$(X,Y) \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$

Н.с.в. X, Y на (Ω, F, P):

$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$

E.g. $X_1, X_2, X_3 \sim N(0,1)$ i.i.d.

$$X = \frac{X_1 + X_2 X_3}{\sqrt{1 + X_3^2}} \sim N(0,1)$$

▷ ① $E[g(X)] = \iiint g(\cdot)\, \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$

g – огр. непр. φ-я

пусть $u = \frac{x_1 + x_2 x_3}{\sqrt{1 + x_3^2}} \Rightarrow E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, \phi(u)\, du$

$\Rightarrow X \sim N(0,1)$

(2) X_3 – "fixed"

$X = a X_1 + b X_2$

$a = \frac{1}{\sqrt{1+X_3^2}} \qquad b = \frac{X_3}{\sqrt{1+X_3^2}} \qquad a^2 + b^2 = 1$

$\Rightarrow \quad f(X \mid X_3) = \phi(x) \leftarrow$ норм. при фикс. X_3

$E[g(X)] = E[E[g(X) \mid X_3]]$

$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, \phi(u)\, du\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, \phi(u)\, du$

Стох. процессы (3)

Лемма 2.1 (Дуба-Дынкина)

$X = (X_1, \dots, X_n)^T : \Omega \to \mathbb{R}^n$

Y – $\sigma(X)$-измерима ($\sigma(X) = \sigma(X_1, \dots, X_n)$) iff

$Y = h \circ X \equiv h(X)$ для нек. бор. ф-и ($h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

Лемма 2.2

$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

▷ Пусть $C_1 = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

$\Rightarrow C_1$ – σ-алгебра

т.к. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le a\} = X^{-1}((-\infty, a]) \in C_1 \Rightarrow$

$\sigma(X) \subset C_1$

Пусть $C_2 = \{B \subseteq \mathbb{R} : X^{-1}(B) \in \sigma(X)\}$

$\Rightarrow C_2$ – σ-алгебра в $\mathbb{R}$

Но $B = (-\infty, a] \in C_2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

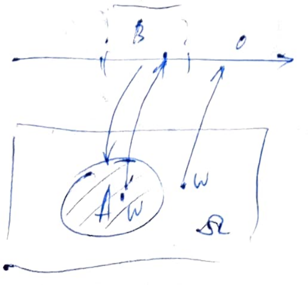
$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset C_2$

т.е. $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow X^{-1}(B) \in \sigma(X)$

$\Rightarrow C_1 \subset \sigma(X) \Rightarrow \sigma(X) = C_1$

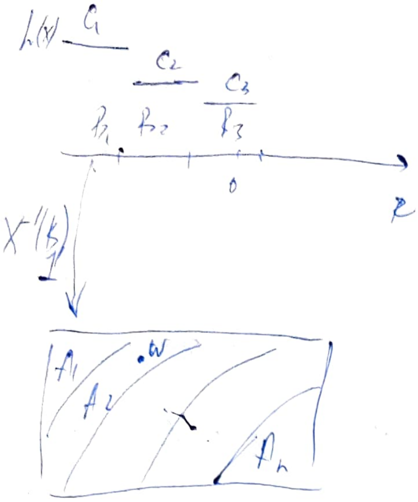
Лемма 2.1

▷ i) $\sigma(X) = \{X^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$



$h_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$

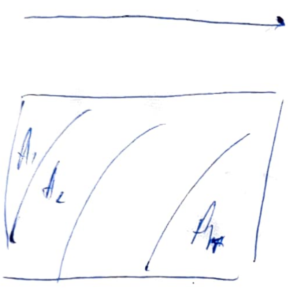
ii)



$Y(\omega) = c_2$

$h(X(\omega)) = c_2$

iii)



$Y_n \uparrow Y$

$B_1 = \{x \in \mathbb{R} : \exists \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)\}$

$\Rightarrow$ • $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, h_n(x)$ вим. по Борелю

• $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, h_n(x)$ вим. по Борелю

• $B_1 = \{x \in \mathbb{R} : \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, h_n(x) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, h_n(x)\}$

$$h(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x), & x \in B_1 \\ 0, & x \in B_1^c \end{cases}$$

iv) $Y \leq 0 \iff -Y$

v) Y – прост. $\Rightarrow$ $Y = Y_1 + Y_2$

де $Y_1 = Y \cdot 1[Y \geq 0] = h_1 \circ X$, h_1 – бор.

$Y_2 = Y \cdot 1[Y < 0] = h_2 \circ X$, h_2 – бор.

Закон 0,1 , $\{X_n\}_{n\geq 1}^{\infty}$ – п-ть нез. с. в.

$F_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^{\infty}$

где $F_n^{\infty} = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$

$\Rightarrow$ если $A \in F_\infty$, то $P(A) = 0$ или $P(A) = 1$

Простое случ. блужд. $S_n = X_1 + X_2 + \dots X_n$.

1) $E S_n = 0 \qquad Var\, S_n = n \qquad E S_n^4 = 3n^2 - 2n$

2) $P\{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0\} = 1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n/\sqrt{n} \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy$

Опр. $Y = E[X|G]$, $G \subseteq F$, $E[|X|] < \infty$

G – σ-алг.

если 1. Y – G-изм.

2. $E[I(A)\cdot Y] = E[I(A)\cdot X]$, $\forall A \in G$

$\int_A Y(\omega)\, dP(\omega) = \int_A X(\omega)\, dP(\omega)$

Теор. Радона – Никодима

(Ω, G) – изм. пр-во, P – вер. мера, λ – мера со знаком:

$P(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$

$\Rightarrow \exists f(\omega)$: $\lambda(A) = \int_A f(\omega)\, dP(\omega)$, $A \in G$ $\left(\int_A X(\omega)\, dP(\omega)\right)$

$f(\omega)$ – единств. почти наверное

Случ процессы (3)

$(\Omega, F, \{F_t\}, P)$

M_t — мартингал, если:

a) M_t измерима отн. F_t, $\forall t \in [0, \infty)$

b) $E[|M_t|] < \infty$, $\forall t \in [0; \infty)$

c) $E[M_s | F_t] = M_t$, $s \geq t$

($\geq M_t$ F_t - субмартингал)

($\leq M_t$ F_t - супермартингал)

☆ $E[M_{n+1} | F_n] = M_n$ $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

ex1 $E[M_m | F_{n-1}] = M_{n-1}$ $\forall m > n-1$

▷ $E[E[M_{n+1} | F_n] | F_{n-1}] = E[M_n | F_{n-1}]$

$E[M_{n+1} | F_{n-1}] = M_{n-1}$

...

$E[M_m | F_{n-1}] = M_{n-1}$ $\forall m \geq n$

$E(X | Y) = E(X | \sigma(Y))$

$E(X | X_0, \dots, X_n) = E(X | \sigma(X_0, \dots, X_n))$

$1(\omega) = \sum_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$

ex2 $\{F_n\}$-мартингал $X_0, X_1, \dots$

$F_n = \sigma(X_0, \dots, X_n$

$E[X_{n+1} | X_0, \dots, X_n] = X_n$, $\forall m > n$

ii, ex3 $U_1, \dots, U_n$ – i.i.d $\quad U_i \sim U[0,1]$

$X_0 = 1 \qquad X_n = 2^n \cdot U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdots U_n$

X_n – $\mathcal{F}_n$ – мартингал $\qquad \mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$

$E[2^{n+1} \cdot U_1 \cdot \ldots \cdot U_n \cdot U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] =$

$= X_n \cdot 2 \cdot E[U_{n+1}] = X_n \cdot 2 \cdot 1/2 = X_n$

ex4 $S_0 = 0, \quad S_n = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_i \sim Exp(1)$ i.i.d.

$X_n = 2^n e^{-S_n}, n \geq 0$ – $\{\mathcal{F}_n\}$-мартингал

$E[2^{n+1} e^{-S_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] = X_n \cdot 2 \cdot E[e^{-\varepsilon_{n+1}}] = X_n$

$$E[g(X) \cdot h(y)] = E\big[E[h(y) \cdot g(X) \mid y]\big] = E[h(y) \cdot E(g(X) \mid y)] \qquad (*)$$

$g(x) = x, \quad h(y) = \mathbb{1}(y \in B)$

$$E[X \cdot \mathbb{1}_B(y)] = E[\mathbb{1}_B(y) \cdot E(X \mid y)] \qquad (**)$$

$X_0, X_1, \dots X_n$ – неотр. мартингал

$m > n \quad X_m = X, \quad y = (X_0, \dots X_n), \quad B = (y \in \mathbb{R}^{n+1} : y_0 < \lambda, \dots y_{n-1} < \lambda, y_n \geq \lambda)$

$$E[X_m \mathbb{1}(X_0 < \lambda, \dots, X_{n-1} < \lambda, X_n \geq \lambda)] = E\big[\underbrace{E[X_m \mid X_0, \dots X_n]}_{X_n} \cdot \mathbb{1}(\dots)\big]$$

Максимальное неравенство (Дуба)

$X_0, \ldots X_n$ - неотр. мартингал ($X_i \geq 0$ a.s.)

$$P(\max_{0 \leq n \leq m} X_n \geq \lambda) \leq \frac{E[X_0]}{\lambda}$$

$$P(\max_{n \geq 0} X_n \geq \lambda) \leq \frac{E[X_0]}{\lambda}$$

$\triangleright$ $\underset{E[X_0]}{\overset{\shortparallel}{E[X_m]}} = \sum_{n=0}^{m} E[X_m \cdot \mathbb{1}(X_0 < \lambda, \ldots, X_{n-1} < \lambda, X_n \geq \lambda)]$

$+ E[X_m \cdot \mathbb{1}(X_0 < \cancel{\lambda, \ldots}, X_{n-1} < \lambda, X_n < \lambda)] \geq$

$\geq \sum_{n=0}^{m} E[\ldots] \underset{(**)}{=} \sum_{n=0}^{m} E[X_n \cdot \mathbb{1}(\ldots)] \geq$

$\geq \lambda \sum_{n=0}^{m} P(\ldots) = \lambda \cdot P(\max_{0 \leq n \leq m} X_n \geq \lambda)$

ex 5 $X_n = 0 \Rightarrow X_{n+1} = 0$

$X_n > 0 \Rightarrow X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1, & p_1 = 1/2 \\ X_n - 1, & p_2 = 1/2 \end{cases}$

$P(X_n \geq N$ ~~xxxxx~~ для нек. $n \geq 0 \mid X_0 = i_{>0})$

$$E[X_{n+1} \mid X_0 \ldots X_n] = \frac{1}{2}(X_n + 1) + \frac{1}{2}(X_n - 1) = X_n$$

$$P(\max_{0 \leq n} X_n \geq N \mid X_0 = i) \leq \frac{E(X_0)}{N} = \frac{i}{N}$$

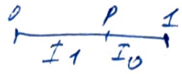
Случ. процессы (4)

$U_1, U_2 \dots$ i.i.d. $N[0,1]$

$$X = \begin{cases} 1 & p = 1/2 \\ -1 & p = 1/2 \end{cases}$$

Вер: $P(U_1 \in I_0) = 1-p$

$P(U_1 \in I_1) = p$



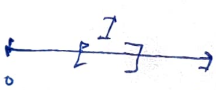
$P(X=1) = P(U_1 \in [0,p]) = p$

$P(X=0) = P(U_1 \in [p;1)) = 1-p$

$$X = \begin{cases} a_1 & p = p_1 \\ a_2 & p = p_2 \\ \dots & \dots \\ a_i & \\ & p = p_n \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Если $U_1 \in [p_1 + \dots + p_{i-1};\ p_1 + \dots + p_i)$, то $X = a_i$

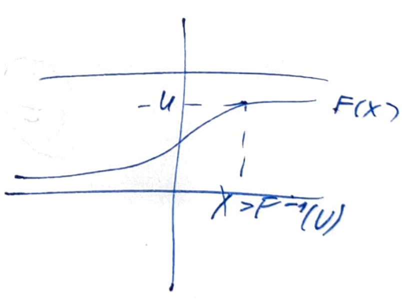
$U[0,a]$



$$P(U \in I) = \frac{|I \cap [0,a]|}{a}$$

$U_1 \dots U_2 \dots$

$\forall F \quad F(x) = P(X \leq x)$

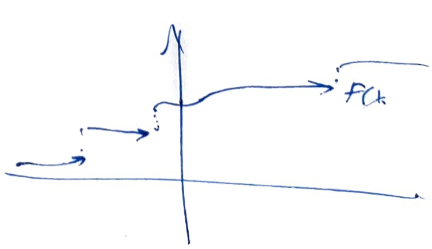


$X \sim F(x)$

$X = F^{-1}(U)$

$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) =$

$= P(U \leq F(x)) = P(U \in [0, F(x))) = F(x)$



Exp: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$

$F(x) = u$; $1 - e^{-\lambda x} = u$; $1 - u = e^{-\lambda x}$; $\ln(1-u) = -\lambda x$

$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$ $F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$

a) $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$

b) $1 - U \overset{d}{=} U \Rightarrow X = -\frac{1}{\lambda}\ln U$

Обобщ. обр. ф-я $G(u) = \inf \{\underbrace{x \in \mathbb{R} : u \leq F(x)}_{=: E_u}\}$

{} 1) $G(u) \neq \varnothing$

2) $G(u)$ огр. снизу $\left(\begin{array}{l} F(-\infty) = 0 \\ u \in (0;1) \end{array}\right)$

3) $G(u)$ замкнуто: $x_i \to x$

$F(x_i) \geq u \Rightarrow \exists\, x_{i^*} \leq x$ $F(x) \geq F(x_{i^*}) \geq u$

$\inf E_u = \min E_u$

Лемма 4.1

▷ ($\Rightarrow$) если $u \leq F(x)$, то по опр.

$x \in E_u$ и $x \geq \inf E_u := G(u)$

($\Leftarrow$) $\inf E_u = \min E_u \Leftrightarrow G(u) \in E_u$

по предп. $G(u) \leq x$

F - монот. $\Rightarrow F(x) \geq F(G(u)) \geq u$

т.к. $G(u) \in E_u$

Случ. проц. (5)

$\nu_{t,\lambda} = \max\{k \ge 1 \quad \underbrace{T_1 + \dots + T_k}_{= S_k} \le t\}$

$P\{\nu_{t,\lambda} = m\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!} \qquad m = 0, 1, \dots$

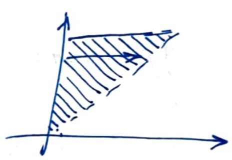
$X \sim f_x, \quad Y \sim g_y, \quad X+Y \sim f*g$

$f_{x+y}(x) = f*g(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$

$(X+Y)+Z, \quad f_x, f_y, f_z \qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \ge 0\}}$

$X+Y \sim f_{x+y} \qquad f_{(x+y)+z}(x) = \int f_{x+y}(x-y) f_z(y)\, dy =$

$= \int \left(\int f_x(x-y-z) f_y(z)\, dz \right) f_z(y)\, dy$



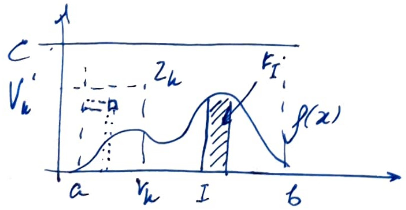
симплекс:

$0 \le u_1 \le u_2 \dots \le t$

$\lambda^r e^{-\lambda t} \int_{0 \le u_1 \dots \le t} du_1 \dots d_r = V_{\{0 \le u_1 \dots \le t\}} = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}$

$\{\nu_{t,\lambda} = k\} = \{S_k \le t \cap S_k + T_{k+1} > t\}$

Метод выборки с откл.



$U_1, U_2, \dots$ i.i.d $[0,1]$

$Z_k = (V_k, V_k')$

$V_k' = c \cdot U_{2k}$

$V_k = a + (b-a) U_{2k-1}$

$P((Z_k = (V_k, V_k')) \in F_I) = \frac{\int_I f(x)dx}{c(b-a)}$

$Z_1 = (V_1, V_1')$

$Z_2 = (V_2, V_2')$

$\dots$

$Z_\nu = (V_\nu, V_\nu')$ $\quad V_{\nu(\omega)}$

$t_{\nu(\omega)}$ – первый шаг.: $\nu(\omega) = \inf \{k \geq 1 : V_k' \leq f(V_k(\omega))\}$

$\nu(\omega) \sim Geom(\alpha)$

$P(\nu(\omega) = n) = P(Z_1 \in E^c) \cdot \ldots \cdot P(Z_{n-1} \in E^c) \cdot P(Z_n \in E) = (1-\alpha)^{n-1} \cdot \alpha$

$X(\omega) = V_{\nu(\omega)}(\omega)$

$$P(X \in I) = \frac{\int_I f(x)\,dx}{c(1-\alpha)} \underbrace{\sum (1-\alpha)}_{\frac{1}{\alpha}} = \int_I f(x)\,dx \cdot 1$$

для многих нез. величин:

$P(X_1 \in I_1, X_2 \in I_2, \ldots, X_k \in I_k) =$

$= \int_{I_1} f(x)\,dx \int_{I_2} f(x)\,dx \ldots \int_{I_k} f(x)\,dx$