1 **Множества** — совокупность объектов произвольной природы, объед. по к/л призн.

Элементы мн-ва — объекты, сост. мн-ва

Подмн-во — кажд. эл. мн-ва явл. эл. мн-ва B

$A \subset B \vee A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$.

Пустое мн-во — мн-во, не сод. ни одн. эл. $\varnothing \subseteq \forall A$

Универсальное мн-во — мн-во, содерж. все мн-ва, наход. в рассм. $\forall A \subseteq U$

Булеан мн-ва $\beta(A)$ — мн-во всех подмн-в мн-ва A

мн-во n эл. имеет 2^n подмн-в

Конечное мн-во — мн-во из кон. числа эл.

Бесконечное мн-во — мн-во из беск. числа эл.

Способы задания множеств

1) Задание конечного мн-ва перечисл. элементов

2) Порождающей процедурой — ук. правила, по кот. из известн. эл. получаются все эл. мн-ва

M — мн-во четных

а) $2 \in M$

б) $2a \in M$

3) Указ характер. св-в эл. мн-в $M = \{x : P(x)\}$

$M = \{x \mid P(x)\}$

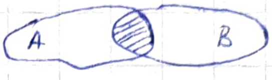
② Операции над множествами

1) Объединение – мн-во, сост. из эл., принадл. хотя бы одному из мн-в

$A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$

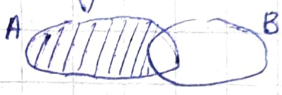
2) Пересечение – мн-во, сост. из эл., принадл. и A, и B

$A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$



3) Разность – мн-во, сост. из эл., вход. в A и не вх. в B

$A \setminus B = \{x : x \in A$ и $x \notin B\}$

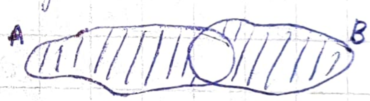


4) Дополнение – все эл. унив. мн-ва, не сод. эл. мн. A

$\bar{A} \, (C_u A) = \{x : x \in U$ и $x \notin A\}$

5) Симметр. разн. = кольцев. сумма

$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



③ Законы алгебры множеств

1) Коммутативный $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

2) Ассоциативный $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3) Дистрибутивный $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) Идемпотентности $A \cup A = A \cap A = A$
$A \cup U = U$ $A \cap U = A$
$A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

5) Де Моргана (двойственности) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

6) Поглощения $A \cup (A \cap B) = A$
$A \cap (A \cup B) = A$

7) Двойного дополнения $\bar{\bar{A}} = A$

8) Комплементности (дополнения) $A \cup \bar{A} = U$
$A \cap \bar{A} = \varnothing$

9) Включения $A \subseteq B \iff \bar{B} \subseteq \bar{A}$

10) Равенства $A = B \iff (A \subseteq B) \cap (B \subseteq A)$

④ Декартово произведение мн-в A и B –

для $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $B = \{b_1, \dots, b_m\}$

мн-во всех упоряд. пар (a_i, b_j), где $a_i \in A$ $b_j \in B$

$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Декартов квадрат $A \times A = A^2$

Декартов куб $A \times A \times A = A^3$

Свойства декартовых произведений

$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B$

$a_i \in A$, $b_j \in B$, $c_k \in C$

1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

3) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

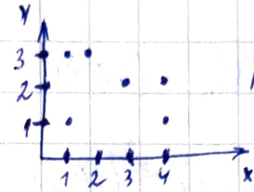
⑤ **Бинарное отношение** – подмн-во P дек. произв. $A \times B$, х-тер. связь мн-в A и B, элем. кот. будут уп. пары (a,b), где $a \in A, b \in B$ $\quad P \subseteq A \times B$

$P \subseteq A \times B \quad P = \{(a_i, b_j) \in P : a_i \in A, \; b_j \in B\}$

$Q \subseteq P$ – сужение б.о. P

Графическое изобр. бин. отн.

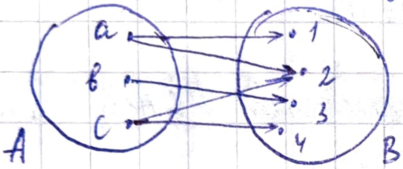
1) $\forall a \in A \rightarrow \forall a \in OX$
$\forall b \in B \rightarrow \forall b \in OY$



$P = \{(1,1), (1,3), (2,3), (3,2), (4,1), (4,2)\}$

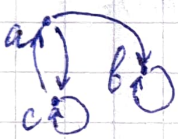
пары бин. отн. изобр. т. с соотв. коорд. $(a,b) \in P$

2)



$P = \{(a,1), (a,2), (b,3), (c,2), (c,4)\}$

3)



$P = \{(a,b), (a,c), (b,b), (c,a), (c,c)\}$

Диагональ – $id\, A = \{(x,x) : x \in A\}$

Область опр. D_P – $P \subseteq A \times B \quad D_P = \{a : a \in A$ и $(a,b) \in P\}$

Область знач. R_P – $P \subseteq A \times B \quad R_P = \{b : b \in A$ и $(a,b) \in P\}$

Обратное отнош. P^{-1} – бин. отн. $P^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in P\}$

Образ эл. $a \in A$ – $P \subseteq A \times B \quad P(a) = \{b : b \in B \; (a,b) \in P\}$

Прообраз эл. $b \in A$ – $P \subseteq A \times B \quad P^{-1}(b) = \{a : a \in A \; (a,b) \in P\}$

Образ мн-ва C – объед. обр. всех эл. $C \subseteq A \quad P \subseteq A \times B \quad P(C) = \bigcup_{a \in C} P(a)$

Прообраз мн-ва D – объед. прообр. всех эл. $D \subseteq B \quad P \subseteq A \times B \quad P(D) = \bigcup_{b \in D} P^{-1}(b)$

$P = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6)\}$
$D_P = \{1, 2, 3, 4\}$
$R_P = \{3, 4, 5, 6\}$
$P^{-1} = \{(3,1), (4,2), (5,3), (6,4)\}$

$P(2) = \{4\}$
$P^{-1}(6) = \{4\}$
$P(C) = \{4, 5, 6\} \quad C = \{2, 3, 4\}$
$P^{-1}(D) = \{1, 2, 4\} \quad D = \{3, 4, 6\}$

⑥ Операции над бинарными отношениями

$P_1 \subseteq A \times B \quad P_2 \subseteq A \times B$

1) Объединение $P_1 \cup P_2 = \{(a,b): (a,b) \in P_1$ или $(a,b) \in P_2\}$

2) Пересечение $P_1 \cap P_2 = \{(a,b): (a,b) \in P_1$ и $(a,b) \in P_2\}$

3) Разность $P_1 \setminus P_2 = \{(a,b): (a,b) \in P_1$ и $(a,b) \notin P_2\}$

4) Дополнение $C_{A \times B} P_1 = \{(a,b): (a,b) \in A \times B$ и $(a,b) \notin P_1\}$

5) Сим. разн. $P_1 \oplus P_2 = (P_1 \setminus P_2) \cup (P_2 \setminus P_1)$

6) Композиция – произвед. бин. отношений $P \subseteq A \times B \quad Q \subseteq B \times C$

$$P \circ Q = \{(a,b) : a \in A,\ b \in C : \exists x \in B \quad (a,x) \in P \quad (x,b) \in Q\}$$

а) $(P^{-1})^{-1} = P$
б) $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$
в) $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$

$P = \{(a,b) : a,b \in N \quad b = 2a\} \quad Q = \{(a,b) : a,b \in N \quad b = a^2 + 5\}$

$P \circ Q = \{(a,b) : a,b \in N \quad \exists x \in N \quad (a,x) \in P \quad (x,b) \in Q\} =$

$= \{(a,b): a,b \in N \quad \exists x \in N \quad x = 2a \quad b = x^2 + 5\} =$

$= \{(a,b): a,b \in N \quad \exists x \in N \quad b = (2a)^2 + 5 = 4a^2 + 5\} =$

$= \{(a,b): (a,b) \in N \quad b = 4a^2 + 5\}$

7) Функция $f \subseteq A \times B$ — $D_f = A$ $R_f \subseteq B$, что
$\left.\begin{matrix}(x, y_1) \in f \\ (x, y_2) \in f\end{matrix}\right\} \Rightarrow y_1 = y_2$, то $y = f(x)$

$A \xrightarrow{f} B$

$f: A \to B$

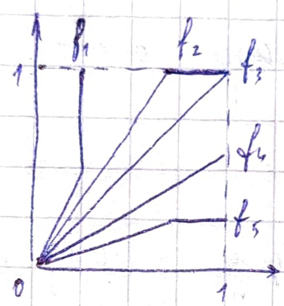
Типы функций

1) Инъективная $f: A \to B$ — для $\forall x_1, x_2 \in D_f$ $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$

2) Сюръективная $f: A \to B$ — для $\forall y \in R_f$ $\exists x \in D_f$, что $f(x) = y$

3) Биективная $f: A \longleftrightarrow B$ — сюр. и инъект. ф-я

$A = [0; 1]$
$B = [0; 1]$



f_1 — не явл. ф-й
f_2 — сюр.
f_3 — биект.
f_4 — инъект.
f_5 — никакая

Св-ва функций

1) $f_1: A \to B$ $f_2: B \to C$ $\Rightarrow$ $f_1(f_2): A \to C$

2) f_1, f_2 — инъект./сюр./биект. $\Rightarrow f_1 \circ f_2$ — инъект./сюр./биект.

3) Если $f^{-1} \subseteq A \times B$ явл. ф-й $f^{-1}(x)$,
то $f^{-1}(x)$ — обратн. ф-я для $f(x)$

4) $f(x)$ имеет $f^{-1}(x)$ $\Rightarrow$ f — биект.

⑧ Матрица бинарного отношения

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ $P \subseteq A \times B$

$[P]$ матрица р-ти $n \times m$, эл. кот. опр-ся

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_i, b_j) \in P \\ 0, \text{ если } (a_i, b_j) \notin P \end{cases}$$

Обратно, любую м-цу из 0 и 1 можно рассм. как м-цу бин. отн.

Свойства матриц бин. отношений: $P \subseteq A \times B$ $Q \subseteq A \times B$

1) $[P \cup Q] = [P] + [Q]$

поэлем. слож. по правилу $0+0=0$ $1+0=1$ $1+1=1$

2) $[P \cap Q] = [P] * [Q]$

поэлем. умн. по правилу $0 \cdot 0 = 0$ $1 \cdot 0 = 0$ $1 \cdot 1 = 1$

3) $P \subseteq A \times B$ $Q \subseteq B \times C$ $[P \circ Q] = [P] \cdot [Q]$

произв. м-ц в указ. порядке, причем умн. по пр-лам $[P \cap Q]$, а сложение по пр-лам $[P \cup Q]$

4) М-ца тожд. отн. – един. м-ца $id\, A = \{(x, x) : x \in A\}$

5) М-ца обратн. отн. – трансп. м-ца отн. $[P^{-1}] = {}^t[P]$

6) $P \subseteq A \times B$ $Q \subseteq A \times B$ $P \subseteq Q \Leftrightarrow p_{ij} \leq q_{ij}$

Замыкание отн. отн. рассм. св-ва $P^*_{\text{св-во}}$ – миним. по ч-лу элементов бин. отн. с выд. св-вом, получ. из отн. P добавлен. упор. пар из $A \times A$

9 Свойства бин. отношений P на непуст. мн-ве A
$P \subseteq A \times A$

1) Рефлексивное - если $\forall x \in A$, $(x,x) \in P$

2) Антирефлекс. - если $\forall x \in A$ $(x,x) \notin P$

3) Симметричн. - если $(x,y) \in P$, то $(y,x) \in P$

4) Антисимметр - если $(x,y) \in P$ и $(y,x) \in P$, то $x = y$

5) Транзитивн. - если $(x,y) \in P$ и $(y,z) \in P$, то $(x,z) \in P$

⑩ Опр. св-в бин. отношения по его матрице

1) Рефлексивное - главная диагональ [P] сост. из 1

2) Антирефлек. - главн. диагональ [P] сост. из 0

3) Симметрич. - м-ца [P] симметр. отн. главн диаг.

$[P] * {}^t[P] = [P] = {}^t[P]$

4) Антисиммет. - м-ца $[P] * {}^t[P]$ все эл., кроме главной диаг. 0

5) Транзитивн. - получ. м-ца $[P] \cdot [P] = [P]$

(11) Отношение эквивалентности – рефлексивное, симметр. и транзитивное бин. отн. xEy

$x \sim y$

Класс эквивалентности элемента $x \in A$ $E \subseteq A \times A$ –

$E(x) = \{y : y \in A \ \ x \sim y\}$

Фактор-множество A по отн. экв. E – мн-во классов э-ти элементов $x \in A$ $A|E = \{E(x) : x \in A\}$

Разбиение – сист. непустых подмн-в $\{A_i\}$, что

$\bigcup A_i = A$ и $A_j \cap A_i = \varnothing$ при $i \neq j$

T. 1) $A|E$ явл. разбиением мн-ва A

2) Если $\exists$ разбиение $\{A_i\}$, то на мн-ве A можно задать отн. экв. xEy, что $x \in A_i, y \in A_i$ для нек. i

▶ 1) $A|E = \{E(x) : x \in A\}$ – рефлексивное $\Rightarrow \forall E(x) \neq \varnothing$

$(x,x) \in E$ $\qquad \bigcup_{x \in A} E(x) = A$

Пусть $z \in E(x) \cap E(y)$ $u \in E(x)$, тогда

- $\begin{cases} z \in E(x) \Rightarrow (x,z) \in E \Rightarrow (z,x) \in E \text{ по симметр.} \\ z \in E(y) \Rightarrow (y,z) \in E \end{cases}$
- $(y,z) \in E$, $(z,x) \in E \Rightarrow (y,x) \in E$ по транз.
- $\left.\begin{matrix} u \in E(x) \Rightarrow (x,u) \in E \\ (y,x) \in E \end{matrix}\right\} \Rightarrow (y,u) \in E \Rightarrow u \in E(y)$
- $u \in E(x) \Rightarrow u \in E(y) \Rightarrow \left.\begin{matrix} E(x) \subseteq E(y) \\ \text{Аналогично } E(y) \subseteq E(x) \end{matrix}\right\} E(x) = E(y)$

Классы экв. не пересек. : $E(x) \cap E(y) \neq \varnothing \Leftrightarrow E(x) = E(y)$

2) $\{A_i\}$ – разбиение мн-ва A, тогда · A_i – непуст → рефл.

- $x, y \in A_i \Rightarrow y, x \in A_i$ → симметр.
- $\left.\begin{matrix} xEy \Rightarrow x,y \in A_i & y \in A_i \\ yEz \Rightarrow y,z \in A_j & y \in A_j \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_i = A_j$ $\left.\begin{matrix} (x,y) \in A_i \\ (y,z) \in A_i \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x,z) \in A_i$

→ транзит.

(12) Отношение порядка $A \neq \varnothing$

Предпорядок – рефлекс. и транзит. бин. отн. $P \subseteq A \times A$
- симметр. предпорядок – отн. эквив.

„$\leq$" Частичный порядок – рефлекс., антисимм., транзит. бин. отн. $P \subseteq A \times A$
- „$\leq^{-1}$" явл. част. порядком, двойственным по отн. к исх.

„$<$" Строгий порядок – антирефл., антисимм., транзит. бин. отн. $P \subseteq A \times A$
- $x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y$

Несравнимые эл-ты – $a_i, a_j \in P$ $P \subseteq A \times A$ невозможно сказать, в-ся ли $a_i \leq a_j$ или $a_j \leq a_i$

Линейный порядок – част. порядок $P \subseteq A \times A$ $\forall a_i, a_j \in P$ – сравнимы

Частично упоряд. мн-во – на мн-ве определен част. порядок

Линейно упоряд. мн-во – на мн-ве определен лин. порядок

Наибольший элемент – на мн-ве част. порядок $P \subseteq A \times A$
$a \in A : \forall x \in A \quad x \leq a$

Наименьший элемент – на мн-ве част. порядок $P \subseteq A \times A$
$b \in A : \forall x \in A \quad b \leq x$

Полный порядок – лин. порядок $P \subseteq A \times A$ $\forall B = \varnothing : B \subseteq P$ имеет наименьший элемент

Вполне упоряд. мн-во – на мн-ве определен полн. порядок

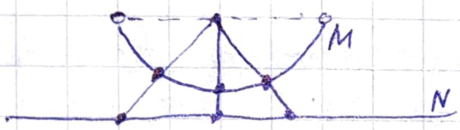
(13) Взаимоодн. соотв. меж. эл. мн-в A и B — $\exists$ опр. правило, что кажд. $a \in A$ став-ся в соотв. единств. $b \in B$ и обратно в силу того же правила $b' \in B \to a' \in A$

- если A и B конечны, то взаимоодн. соотв. уст., когда, число эл. одинаково $|A| = |B|$

- если A и B бесконечны

1. $n \longleftrightarrow 2n$ $\quad N = \{1, 2, \dots, n\}$ $\quad M \subseteq N \quad M \sim N$

   $M = \{2, 4, \dots 2m\}$

2. 

$M \sim N$

Эквивалентные мн-ва $A \sim B$ — между эл. мн-в A и B уст. взаимоодн. соотв.

1. $A \sim B \iff B \sim A$
2. $A \sim A$
3. $A \sim B \quad B \sim C \implies A \sim C$

Мощность — кол-во эл-в мн-ва A: $|A|$, card A

мощность кон. мн-ва — число эл.
мощность бескон. мн-ва — общее, что есть у всех экв. мн-в
мощность $(0;1)$ — cont

(14) Мощность декартова произведения мн-в

$A_1 \dots A_n$ - конечные мн-ва $|A_1| = m_1 \dots |A_n| = m_n$, то
$|A_1 \times \dots \times A_n| = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$

▶ 1. $n=1$ $|A_1| = m_1$

2. пусть $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ $n=k$

3. $|A_1 \times \dots \times A_k \times A_{k+1}| = m_1 \cdot \dots \cdot m_k \cdot m_{k+1}$ $n=k+1$

для $(a_1, \dots, a_k) \in A_1 \times \dots \times A_k$

для $\forall a_{k+1} \in A_{k+1}$ $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$ – эл. $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{k+1}$

$\uparrow$

можно подставить $\forall a \in A_{k+1}$
т.к. эл. этого вида $|A_{k+1}| = m_{k+1}$ штук,
то эл. вида $(a_1, \dots, a_{k+1})$ будет
$(m_1 \cdot \dots \cdot m_k) \cdot (m_{k+1})$

След.: $|A_1| = |A_2| = \dots = |A_k| = m$, то $|A_1 \times \dots \times A_k| = m^k$

15 **Счетное множество** - мн-во эквивалентное мн-ву $\mathbb{N}$, т.е. его элементы можно пронумеровать

1) Любое подмн-во счет. мн-ва — конечное или счетное

▶ A - счетное $\quad A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$B \subseteq A \quad B = \{a_{n_1}, \dots, a_{n_k}\}$

если B имеет наибольшее => B - конечное

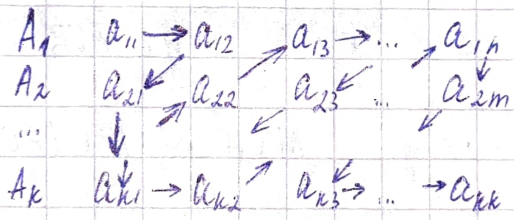
если B не им. наибольшего => B - счетное

2) Объед. конечного или счетного числа счет. мн-в — счетное мн

▶ Предп. все эл. счетного числа мн-в различны, => можно пронум. иначе перейдем к новым мн-вам

$A_1;\ A_2 \setminus A_1;\ A_3 \setminus (A_1 \cup A_2);\ \dots;\ A_k \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{k-1})$

каждое из которых не более, чем счетно и не содерж. одинак. элементов



диаг. метод Кантора

чтобы показать, что $A_1 \cup \dots \cup A_k$ - счетное

кажд. эл-т нумеруется 1 раз

3) Из $\forall$ беск. мн-ва можно выделить счетное подмн-во, причем ост. часть исх. мн-ва будет беск. мн.

▶ M - беск. мн-во выберем a_1 и b_1 $a_1 \ne b_1$,

из ост. части a_2 и b_2 $a_2 \ne b_2$, a_3 и b_3 и т.д.

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ - счетные мн-ва

т.к. $B \subseteq M \setminus A$, то $M \setminus A$ - бесконечн.

(16) **Мощность мн-ва, получающ. из беск. мн-ва удалением конечного или счетного мн-ва, будет эквивалентно исходному**

▶ M - беск. мн-во A, B - счетн. мн-ва

$N = (M \setminus A) \setminus B \Rightarrow M \setminus A = N \cup B$
$N = M \setminus (A \cup B) \Rightarrow M = (A \cup B) \cup N$

$M \sim M \setminus A$, т.к. уст. взаимнооднозн. соотв. между эл.

Пусть $x \in M \Rightarrow x \in N$ и $x \in (A \cup B)$,

то в $M \setminus A$ $x \sim x$, если $x \in N$

Пусть $x \in A \cup B \Rightarrow$ A и B - счетные, поэтому $A \cup B$ - счетное
$(A \cup B) \sim B$

то для $x \in (A \cup B)$ $y \in B$ $x \sim y$

Пусть $x \in M \setminus A \Rightarrow x \in N$ $x \in B$ $y \in A \cup B$

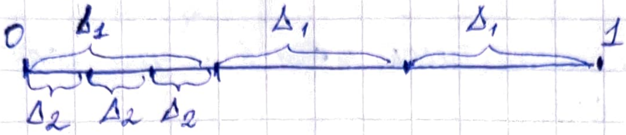
A, B - счетные $\Rightarrow x \sim y$ $M \setminus A \sim N \cup (A \cup B)$

След: Если к беск. мн-ву добавить кон. и счетн. мн-во, то объед. будет экв. исходному

Т: A, B - бесконечны
если $A' \subseteq A$ $A' \sim B$ $A \not\sim B$, то $\operatorname{card} A > \operatorname{card} B$

(17) Теорема Кантора: мн-во точек $[0;1]$ несчетно, беск.

▶ Пусть $[0;1]$ - счетное, тогда $[0;1]=\{x_1;\dots;x_n\}$



$[0;1]$ - делится на 3 части
Δ_1, не сод. т. x_1 - делится на 3 части
Δ_2, не сод. т. x_2 - делится на 3 части
Δ_n, не сод. т. x_n - делится на 3 части

полученная система влож. отрезков - стягив.
$|\Delta_n| \to 0$
тогда $\exists$ x_0 - един. точка, принадл. всем отр.,
которая $x_0 \in [0;1]$ и должна быть пронумеров.
но x_0 не принадл. ни одному из Δ_n отрезков
$x_0 \notin \Delta_{n+1}$
получено противоречие $\Rightarrow$ $[0;1]$ несчетное

(18) **Континуальное мн-во** - мн-во эквивал. мн-ву $[0;1]$

$|$конт. мн-во$|$ > $|$счетное мн-во$|$

1) Объед. счетного или кон. числа мн-в м-ти cont - мн-во м-ти cont

2) Объед. конт. числа мн-в м-ти cont - мн-во м-ти cont

След.: а) м-ть $[a, b] = cont$ $\quad x \in [0;1] \quad y \in [a;b]$

$y = a + (b-a)x$

$x = \dfrac{y-a}{b-a}$

уст. вз. одн. соотв => эквив. мн-ва => $[a,b]$ - конт.

б) любой из инт. /полуинт. $(a;b)$, $[a;b)$ м-ти cont

если из беск. мн-ва уд. конечное мн-во, то м-ть не изм

в) м-ть $(-\infty;\infty) = cont$ $\quad x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \quad y \in (-\infty;\infty)$

$y = tg x$

$x = arctg\, y$

г) $|$мн-во иррац. чисел$| = cont$

если из $(-\infty;\infty)$ удалить $\mathbb{R}$, явл. счетным, то ост. иррац. числа будут иметь ту же м-ть

(19) Теорема о м-ти мн-ва $\beta(M)$ $M \neq 0$

$|\beta(M)| > |M|$

▶ $\beta(M) = T$ $m \in M$ $t \in T$

$M \subseteq T$ и $\phi \subseteq T$.

Очевидно, $\exists\ T_0 \subseteq T : T_0 \sim M$ (T_0 - одноэл. подмн-ва M)

Допустим $T \sim M$, тогда уст. взаимно одн. соотв.

Разобьем M на 2 класса:

1) эл-ты M, кот. вход. в соотв. ему подмн-во M

2) эл-ты M, кот. не вход. в соотв. подмн-ва M

Оба класса непустые, кажд. эл. M входит в 1 из классов

Второй класс - нек. подмн-во M => элемент T

=> этому эл-ту T соотв. нек. эл. из M по предполагаемому взаимнооднозн. соотв. $m^* \in M$

m^* - не принадл. ни 1, ни 2 классу, что невозможно, т.к. $\forall m \in M$ отн. к к/л классу

=> противоречие

$T \not\sim M$

т.к. $M \subseteq T$ $T_0 \subseteq T$ $T_0 \sim M$ => $|T| > |M|$

$|\beta(M)| > |M|$

След.: не $\exists$ мн-ва с наиб. мощн.

не $\exists$ наиб. $\mathbb{N}$ числа

(20) Комбинаторика – разд. дискр. мат., в кот. решаются задачи выбора и расположения элементов, как правило конечных мн-в

Комбинаторная конфигурация – правило, по кот. стр-ся конструкция из эл. мн-ва

Правило суммы S – конечное мн-во: $A \subset S$ $B \subset S$
A можно выбрать m способами, B – n способами, которые искл. друг друга и не м.б. произведены одновременно
тогда $A \cup B \subset S$ можно выбрать $m+n$ способами

Правило произведения S – конечное мн-во: $A \subset S$ $B \subset S$
A можно выбр m спос., B – n спос.,
тогда $A \cap B \subset S$ можно выбрать $m \cdot n$ способами

если $1^{ое}$ д-е вып-ся n_1 спос, ..., $k^{ое}$ д-е вып-ся n_k спос., то все д-я в указ порядке можно вып. $n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$ спос.

(21) **Размещения без повт.** из n по k — посл. выбор k эл-тов из n эл-тов мн-ва N по одному и расположение их в опр. порядке - комбинации, кажд. из кот. содержит k эл. и различ. порядком и составом

Теор. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

n спос. выб. 1 эл.
$n-1$ спос. выб. 2 эл.
...
$n-k+1$ спос. выб. k эл.

по пр-лу умножения $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Размещения с повт. из n по k — размещ. с усл, что кажд. эл. может участ. в размещ. неск. раз: элементы выб-ся поочередно, причем после отбора возвращаются в мн-во S

Теор. $\hat{A}_n^k = n^k$

n спос. выб. 1 эл.
n спос. выб. 2 эл.
...
n спос. выб. k эл.

по пр-лу умн. $\hat{A}_n^k = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$

(22) **Перестановка** без повт. из n эл. – комб. из эл. S, кажд. из кот. содержат все n эл., отличающихся только порядком элементов

Теор. $P_n = A_n^n = n!$

n спос. выб. 1 эл.
$n-1$ спос. выб. 2 эл.
...
1 спос. выб. n эл.

по прав. умножения $P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Перестановка с повт. – комбин., имеющие группы одинак. элементов $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$

Теор. $P_{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} = \dfrac{n!}{n_1! \, n_2! \ldots n_k!}$

если $\exists$ группа n_1 из повт. эл., то число разл. перестановок уменьш. в n_1 раз

аналогично $\exists \, n_k$, то $P_{(n_1, \ldots, n_k)} = \dfrac{n!}{n_1! \ldots n_k!}$

23 **Сочетания без повт.** из n по k – комбинации из k элем., содерж. в себе эл-ты мн-ва из n эл-тов, различающиеся только составом

Теор. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

если в C_n^k перест. все эл-ты мест., то пол. A_n^k

$A_n^k = C_n^k \cdot k! \Rightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Сочетания с повт. из n по k – сочетания из k эл., с условием, что кажд. из n эл. может уч. в комб. несколько раз

Теор. $\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

$S = \{a_1, \dots, a_n\} \sim M = \{1, \dots, n\}$

сочетание из n по k $\quad a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_k}$
соотв. сочет. $\quad n_1 n_2 \dots n_k$

считая, что $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ рассм. $n_1, n_2+1, n_3+2, \dots, n_k+k-1$

то все эл.-соч. различны $\Rightarrow$ соч. без повт. из $n+k-1$ по k

(24) Разбиение мн-ва на группы

$S_n = S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k$, в кажд. S_k n_k элементов, причем $S_i \cap S_j = \varnothing$

$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

Упор. подмн-ва $S_1, S_2, \ldots, S_k$ можно рассмотр. как послед-ть их расположения

тогда $1^{ое}$ подмн-во S_1 из n_1 эл. выб-ся из S_n $C_n^{n_1}$ способов.

$2^{ое}$ подмн-во выб-ся $C_{n-n_1}^{n_2}$ спос.

...

$k^{ое}$ подмн-во выб-ся $C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$ спос.

По пр. произв. выбрать подмн-ва в указ. порядке можно:

$$N(n_1, n_2, \ldots, n_k) = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{\cancel{(n-n_1)!}\,n_1!} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{(n-n_1-n_2)!\,n_2!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{0! \cdot n_k!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

25 Бином Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \cdot b^{n-k}$ $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$

1) $n=1$ $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^k \cdot b^{1-k} = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 \cdot b^0 = a+b$

2) верно при $n = k-1$ $(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-1-k}$

3) при $n = n$

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1} = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k \cdot b^{n-1-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} = [j = k+1]$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} a^j b^{n-j} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^k a^k b^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k) a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Следствие

1. Сумма бин. коэф. равна 2^n. Число подмн-в $\beta(N) = 2^n$, если в N – n элементов

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$$

2. Сумма бин. коэф. при чет. и нечет. одинак. и равна 0

$$0 = (1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^n \cdot (-1)^{n-k}$$

3. Бин. коэф. равноуд. от концов равны: $C_n^k = C_n^{n-k}$

4. $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

Полиномиальная формула

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n=\sum_{\substack{r_1\geq 0\ldots r_k\geq 0\\ r_1+\ldots+r_k=n}}\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}\,a_1^{r_1}\cdot a_2^{r_2}\cdot\ldots\cdot a_k^{r_k}$$

суммирование по целым неотр. реш. $r_1+\ldots+r_k=n$

$(a_1+a_2+a_3)^3$: $n=3$ $k=3$ $r_1, r_2, r_3 \geq 0$ $r_1+r_2+r_3=3$

3	0	0	$\frac{3!}{3!\,0!\,0!}=1$
0	3	0	
0	0	3	
2	1	0	$\frac{3!}{2!\,1!\,0!}=3$
2	0	1	
1	0	2	
1	2	0	
0	1	2	
0	2	1	
1	1	1	$\frac{3!}{1!\,1!\,1!}=6$

$$(a_1+a_2+a_3)^3=1(a_1^3+a_2^3+a_3^3)+3(a_1^2a_2+a_1^2a_3+a_1a_3^2+a_1a_2^2+a_2a_3^2+a_2^2a_3)+$$
$$+6a_1a_2a_3$$

Следств.:

1. $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_{n-1}a_n$

2. Сумма бин. коэф. k^n

(26) Опр. числа элементов в объед. неск. множ-в

A_1 – $n(A_1)$ элементов , A_2 – $n(A_2)$ элементов

Если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ $\quad n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2)$

если $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ $\quad n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n[A_1 \cup (A_2 \cup A_3)] = n(A_1) + n(A_2 \cup A_3) - n[A_1 \cap (A_2 \cup A_3)]$$
$$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - [n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + \ldots + n(A_{n-1} \cap A_n)] +$$
$$[n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + n(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)] - \ldots + (-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

След. $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset A$

число эл. мн-ва A, не принадл. ни одн. из мн-в $A_1, \ldots, A_n$

$$N = n(A) - n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

27. Опр. числа элементов, не облад. ни одн. св-вом

Пусть A — мн-во из N элементов св-в $p_1, p_2, \dots, p_n$, совместимых друг с другом

св-вом p_{ik} облад. N_{ik} элементов

Тогда ни одним из св-в облад.

$N(0) = N - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n$

$S_1 = N_1 + N_2 + \dots + N_n$ числа эл-тов св-в p_{ik}

$S_2 = N_{12} + N_{13} + \dots + N_{n-1\,n}$ число эл-тов $2^{ух}$ св-в p_{ik}

...

$S_n = N_{12\dots n}$ число эл-тов с n св-вами

От 100 до 800 $p_1 \vdots 4$ $p_2 \vdots 6$ $p_3 \vdots 9$

$N_1 = \left[\frac{800}{4}\right] - \left[\frac{99}{4}\right] = 176$ $N_2 = 117$ $N_3 = 77$

$N_{12}(\vdots 12) = 58$ $N_{23}(\vdots 18) = 39$ $N_{13}(\vdots 36) = 20$ $N_{123}(\vdots 36) = 20$

$N(0) = N - N_1 - N_2 - N_3 + N_{12} + N_{23} + N_{13} - N_{123} =$
$= 701 - 176 - 117 - 77 + 58 + 39 + 20 - 20 = 428$

28. Опр. числа элементов, облад. опр. набором св-в

Пусть A - мн-во из N элементов $p_1, p_2 \dots p_n$ св-в, совмест. друг с другом

Тогда $1 \le r \le n$

$$N(r) = C_r^r S(r) - C_{r+1}^r S(r+1) + C_{r+2}^r S(r+2) - \dots + (-1)^{n-r} C_n^r S(n)$$

$S(r) = S_r$ число эл. с св-вами

$S(r+1) = S_{r+1}$ число эл. с $r+1$ св-вами

От 100 до 800 $p_1 : 4$ $p_2 : 6$ $p_3 : 9$

делится только на одно из 4, 6, 9

$$N(1) = C_1^1 S(1) - C_2^1 S(2) + C_3^1 S(3) = (176 + 117 + 77) - 2!(58 + 39 + 20) + \frac{3!}{2!1!} \cdot 20 = 196$$

делится на два из 4, 6, 9

$$N(2) = C_2^2 S(2) - C_3^2 S(3) = (58 + 39 + 20) - \frac{3!}{2!1!} \cdot 20 = 57$$

29 Линейные однородные рекуррентные уравнения порядка k ($p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}$) вида:

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + p_2 a_{n+k-2} + \dots + p_k a_n = 0$$

Характер. мн-н – $P(\lambda) = \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + \dots + p_k$

Характ. корни – корни $P(\lambda)$

Общ. решение ЛОРУ – мн-во всех п-тей, удовл. ЛОРУ

1) Если λ – корень хар. мн-на, то п-ть $\{C\lambda^n\}$ явл. решением ЛОРУ, где $C \in \mathbb{R}$ – произв. постоян.

2) Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ – различные действ. корни хар. мн-на, то общ. решение ЛОРУ

$$a_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_k \lambda_k^n$$

3) Если λ_i – корень хар. мн-на кратности r, то в a_n ему будет соответствовать:

$$(C_{i1} + C_{i2} n + C_{i3} n^2 + \dots + C_{ir} n^{r-1}) \lambda_i^n$$

Если известны первые k членов искомой числ. п-ти, то можно найти конкретное решение при подстановке

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0 \qquad a_0 = 4 \quad a_1 = 10$

1) $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 2$

2) Общ. решение $(C_1 + C_2 \cdot n) \cdot 2^n$

3) $\left.\begin{array}{l} (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot 2^0 = 4 \\ (C_1 + C_2 \cdot 1) \cdot 2^1 = 10 \end{array}\right\} \quad C_1 = 4 \quad C_2 = 1$

4) $a_n = (4+n) \cdot 2^n$

(30) Линейные неоднородные рекуррентные уравнения вида

$(p_1, \dots, p_k) \in R$

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + p_2 a_{n+k-2} + \dots + p_k a_n = f(n)$$

Общ. решение ЛНРУ – сумма общ. решения ЛОРУ и н/л частн. реш. a_n^*

$$a_n = a_{n(одн.)} + a^*$$

1) $f(n) = A \cdot \beta^n$ $\quad A, \beta, n \in R$, то частн. реш. им. вид

$$a_n^* = \begin{cases} d_0 \beta^n & - \beta \text{ не явл. корн. } P(\lambda) \\ d_0 \beta^n \cdot n^r & - \beta \text{ корень } P(\lambda) \text{ кр-ти } r \end{cases}$$

d_0 – коэф.

2) $f(n) = P(n)$ – мн-н степени r, то частн. реш.

$$Q(n) = d_0 + d_1 n + d_2 n^2 + \dots + d_r n^r$$

$$a_n^* = \begin{cases} Q(n) & \text{– если 1 не явл. корнем } P(\lambda) \\ n^k \cdot Q(n) & \text{– если 1 явл. корнем } P(\lambda) \text{ кр-ти } k \end{cases}$$

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 10 \cdot 2^n$$

1) Общ. решение $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0$ $\quad P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ $\quad \lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 4$

2) $a_{n(одн)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n$

3) $\beta = 2$ $\quad a_n^* = d_0 \cdot n \cdot 2^n$

4) $a_{n+1}^* = d_0(n+1)2^{n+1}$

$a_{n+2}^* = d_0(n+2)2^{n+2}$

5) $d_0(n+2)2^{n+2} - 6d_0(n+1) \cdot 2^{n+1} + 8d_0 n \cdot 2^n = 10 \cdot 2^n$

$d_0(n+2)4 - 6d_0(n+1) \cdot 2 + 8d_0 n = 10$

$4d_0 n + 8d_0 - 12d_0 n - 12d_0 + 8d_0 n = 10$

$d_0 = -2{,}5$

6) $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n - 2{,}5 \cdot 2^n$

7) Опр. C_1, C_2

$$\begin{cases} a_0 = C_1 + C_2 - 2{,}5 = 0 \\ a_1 = C_1 \cdot 2 + C_2 \cdot 4 - 5 = 18 \end{cases}$$

$C_1 = 2$

$C_2 = 16$

8) $a_n = 2 \cdot 2^n + 16 \cdot 4^n - 2{,}5 \cdot 2^n$

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 18n \qquad a_0 = 0, \; a_1 = 18$$

2) $a_{n(одн)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 4^n$

3) $a_n^* = n^1 \cdot Q(n) = n \cdot (d_0 + d_1 n) = d_0 n + d_1 n^2$

4) $a_{n+1}^* = d_0(n+1) + d_1(n+1)^2$

$a_{n+2}^* = d_0(n+2) + d_1(n+2)^2$

5) $d_0(n+2) + d_1(n+2)^2 - 6d_0(n+1) - 6d_1(n+1)^2 + 8d_0 n + 8d_1 n^2 = 18n$

$d_0 n + 2d_0 + d_1 n^2 + 4d_1 n + 4d_1 - 6d_0 n - 6d_0 - 6d_1 n^2 - 12d_1 n - 6d_1 + 8d_0 n + 8d_1 n^2 = 18n$

$+3d_0 n - 4d_0 - 8d_1 n - 2d_1 = 18n$

$$\begin{cases} 3d_0 - 8d_1 = 18 \\ -4d_0 - 2d_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = 3 \\ d_0 = -5 \end{cases}$$

$a_n^* = -5n + 3n^2$

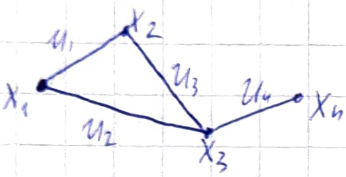
6) $a_n = a_{n(одн)} + a_n^* = C_1 2^n + C_2 \cdot 4^n - 5n + 3n^2$

(31) **Графы** – совокупность непуст. мн-ва верш. и наборов пар вершин.

Вершины графа – мн-во S $x_1, x_2, \dots, x_n$
Ребра графа – мн-во U $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_2, x_3)$, … u_n

Дуги – связь между верш., обозн. стрелками, указ., начало из верш. счит. первой

Неориент. граф – S – нек. конечн. мн-во $V^{(2)}$ – мн-во двухэл. подмн-в
$G \leq V^{(2)}$ $G = (S, U)$ – пары $\cdot V^{(2)}$



$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

Ориент. граф – все ребра графа явл. дугами

Параллельные дуги (ребра) – различные дуги (ребра), соед. одни и те же верш.
(кратные дуги)

Конц. вершина – вершины, соед. дугой (ребром)
Петля – дуга, конц. вершины кот. совпадают
Простой граф – граф, кот. не содержит пар. дуг, петель
Мультиграф – граф, кот. содержит пар. дуги (ребра)
Псевдограф – граф, кот. содержит петли

Порядок графа – кол-во вершин графа
Полный граф – граф, все верш. кот. смежные
Смежные вершины – концевые вершины одн. и той же дуги (ребра)
Смежные ребра – два ребра, имеющ. общ. вершину
Инцидентные верш. и ребро – верш. явл. концевой для ребра (дуги)
Степень вершины $P(x_i)$ – число ребер инц. вершине x_i
Изолир. вершина – вершина $P(x_i) = 0$
Висячая вершина – вершина $P(x_i) = 1$

Двудольный граф – граф, для кот. сущ. разбиение мн-ва его вершин на две части, что концы кажд. ребра принадл. разн. частям
Изоморфные графы – графы, между верш. кот. уст. взаимнооднозн. соотв., причем вершины в одн. графе соед. ребром, когда в др. они соед. ребром

Планарный граф – все вершины графа явл-ся пересечением ребер (дуг)

(32) **Маршрут**, соед. верш. x_1 и x_{k+1} – пос-ть вершин и ребер графа, таких, что $u_i = (x_i, x_{i+1})$ $i = 1, \ldots, k$ $x_1 u_1, x_2 u_2, \ldots, x_k u_k x_{k+1}$

Длина маршрута – число ребер в маршруте

Цепь – маршрут, все ребра кот. различны

Простая цепь – ~~маршрут~~ цепь, все верш. кот. (кроме м.б. крайних) различны

Цикл – циклическая цепь

Простой цикл – простая цикл. цепь

Цикл. маршрут – маршрут, у кот. нач. и конц. вершины совпадают

Связный граф – любые две вершины графа можно соед. маршрутом

Сильно связный граф – связный ориент. граф: любые две верш. можно соед. путём

Путь – ориент. маршрут, соед. x_i и x_j в ориент. графе

Дерево – связный граф без циклов

(33) **Матрица смежности вершин** – м-ца порядка n, где n – число вершин графа. Для ор. графа

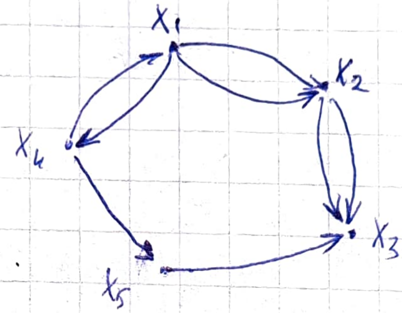
$$p_{ij} = \begin{cases} \text{число дуг из } x_i \text{ в } x_j \\ 0 \end{cases}$$

Для неор. графа

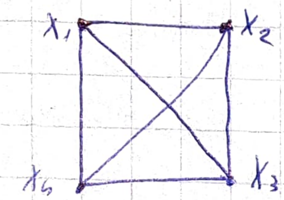
$$p_{ij} = \begin{cases} \text{число рёбер соед. } x_i \text{ и } x_j \quad (1) \\ 0 \end{cases}$$

$[P]$ – симметрична

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

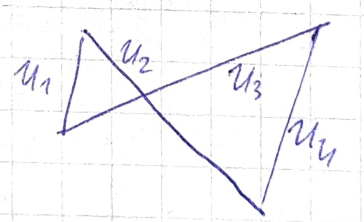


Матрица смежности дуг (рёбер) графа – м-ца порядка n, где n – число рёбер (дуг) $Q = \{q_{ij}\}$

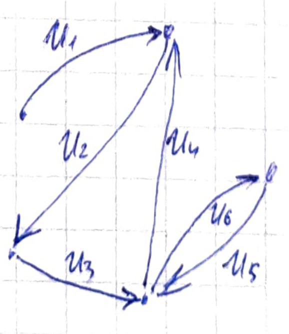
$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если рёбра } u_i \text{ и } u_j \text{ смежны} \\ 0 \end{cases} \quad \text{(для неор. гр)}$$

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если дуга } u_i \text{ непоср. предш. } u_j \\ 0 \end{cases} \quad \text{(для ор. гр.)}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



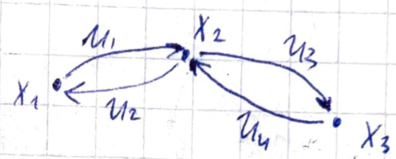
(34) Матрица инциденций для графа размера $n \times m$, где n – число вершин, m – число ребер(дуг)

$R = \{ r_{ij} \}$

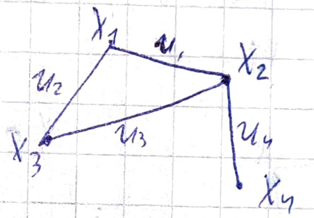
$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \text{ – начало } u_j \\ -1, & x_i \text{ – конец } u_j \\ 0; & \end{cases}$$ (для ориент. гр.)

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \text{ инц. } u_j \\ 0 & \end{cases}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Матрица весов – граф со взвеш. дугами $C = \{ c_{ij} \}$

$$c_{ij} = \begin{cases} u, & \text{вес дуги} \\ 0 & \end{cases}$$

Вес пути – сумма весов дуг пути

Сеть – граф со взвеш. дугами

Узлы сети – вершины взвеш. графа

(35) М-ца связности для неор. графа
М-ца достижимости для ориент. графа

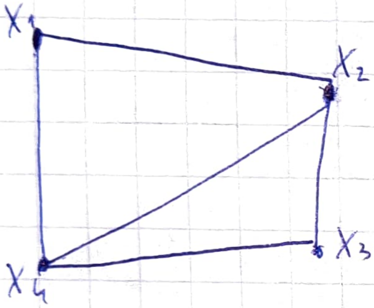
по м-це смежности м-ца порядка n, где n - число вершин,

тогда $B = E_n + P + P^2 + \dots + P^n$, P - м-ца смежн-ти

по м-це B сост. $C = (c_{ij})$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & b_{ij} \neq 0 \\ 0, & b_{ij} = 0 \end{cases}$$

если $c_{ij} = 1$, то в гр. есть маршр., соед. x_i и x_j



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 10 & 8 \\ 9 & 15 & 9 & 14 \\ 10 & 9 & 10 & 8 \\ 9 & 14 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 14 & 15 \\ 16 & 23 & 16 & 21 \\ 14 & 16 & 15 & 15 \\ 16 & 22 & 16 & 22 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(36) Отыскание в графе маршрутов с зад. кол-вом ребер (дуг)

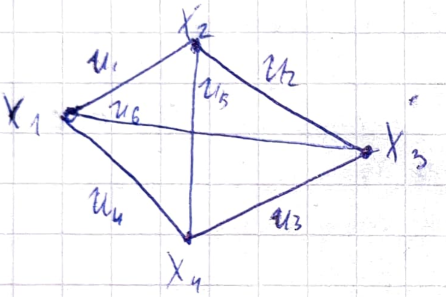
P – м-ца смежности вершин графа

P^k : $p_{ij}^{(k)}$ – равен числу маршрутов длины k, соед. x_i и x_j

1) Если в м-це P ук-ть ребра, то в $P_{ij}^{(k)}$ – сам маршр.

2) В графе порядка n $\exists$ (x_i, x_j) маршрут, когда (i, j) эл-т м-цы $\neq 0$:
$(P + P^2 + \ldots + P^{n-1})_{ij} > 0$

3) В графе порядка n $\exists$ цикл, проходящий через x_i, когда $(i, i) = (P + P^2 + \ldots + P^{n-1})_{ij} > 0$



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Маршрутов длины 2:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(37) Метрические х-ки графов

Пусть $G(S,U)$ - связ. граф, x_i, x_j - вершины

Расстояние, соед. вершины $d(x_i, x_j)$ - длина кратчайшего маршрута, соед. эти вершины

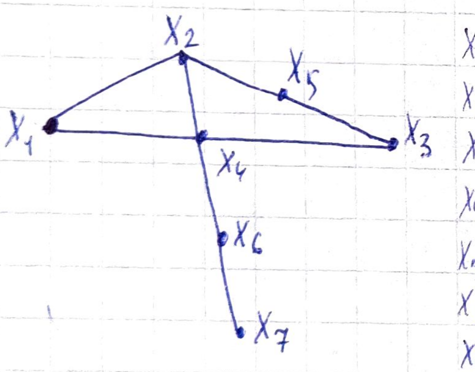
Эксцентриситет $e(x_i)$ - наибольшее расстояние от x_i до остальных вершин графа

Радиус графа $r(G)$ - наименьший $e(x_i)$

Диаметр графа $D(G)$ - наибольший $e(x_i)$

Центральные вершины - вершины, эксцентр. $e(x_i) = r(G)$
Центр графа - совокупность центр. вершин

Периферийные вершины - вершины, эксцентр. $e(x_i) = D(G)$



$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\
x_2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\
x_3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\
x_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\
x_5 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\
x_6 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\
x_7 & 3 & 3 & 3 & 2 & 4 & 1 & 0
\end{array}
$$

$e(x_1) = 3$ $e(x_2) = 3$ $e(x_4) = 2$ $e(x_5) = 4$ $e(x_6) = 3$ $e(x_7) = 4$

$r(G) = 2$ $D(G) = 4$

x_4 - центр. верш.

x_5, x_7 - периф. верш.

(38) Отыскание кратч. маршрутов в графе

Алгоритм Дейкстры.

Для ориент. графа со взвеш. дугами треб. найти кратч. путь

Алг. Дейкстры (расстановки меток): 1) отыск. кратч. пути

2) построение пути

$$C = \begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix}$$

Этап 1

1) $d(x_1) = 0^*$ – пост.

$d(x_i) = \infty \quad (i = 2, \dots, 6)$ – врем.

2) Среди вершин с врем. метками выбираем непоср. след. за x_1:

для $S = x_2, x_3, x_4$ пересчит. метки по формуле

$$d_{нов.}(x_i) = \min\{d_{стар.}(x_i), d(\tilde{x}) + \omega(x_i, \tilde{x})\}$$

$\tilde{x} = x_1$ – текущ. вершина

$\omega(x_i, \tilde{x})$ – вес дуги, соед. x_i и $\tilde{x}$

$d(x_2) = \min\{\infty, 0^* + 5\} = 5$

$d(x_3) = \min\{\infty, 0^* + 10\} = 10$

$d(x_4) = \min\{\infty, 0^* + 13\} = 13$

3) Превращ. одной из меток в пост.:

среди всех вершин с врем. метками выб-ся верш. с наим. значением

$\min\{d(x_2), d(x_3), d(x_4), d(x_5), d(x_6)\} = \min\{5, 10, 13, \infty, \infty\} = 5^* = d(x_2)$

$x_2 = \tilde{x}$ – текущая верш. $d(x_2) = 5^*$

4) Проверка окончания этапа: $\tilde{x} = x_2 \neq x_6$

2) $d(x_3) = \min\{10; 5^* + 8\} = 10$

$d(x_4) = \min\{13; 5^* + 9\} = 13$

$d(x_5) = \min\{\infty; 5^* + 13\} = 18$

3) $\min\{d(x_3), d(x_4), d(x_5), d(x_6)\} = 10^* = d(x_3)$

4) $\tilde{x} = x_3 \neq x_6$

2) $d(x_4) = \min\{13; 10^* + 5\} = 13$

$d(x_5) = \min\{18; 10^* + 3\} = 13$

$d(x_6) = \min\{\infty; 10^* + 6\} = 16$

3) $\min\{d(x_4), d(x_5), d(x_6)\} = 13^* = d(x_5)$

4) $\tilde{x} = x_5 \neq x_6$

2) $d(x_6) = \min\{16; 13^* + 9\} = 16$

3) $\min\{d(x_4), d(x_6)\} = \{13, 16\} = 13^* = d(x_4)$

4) $\tilde{x} = x_4 \neq x_6$

2) $d(x_6) = \min\{16; 13^* + 10\} = 16$

3) $\min\{d(x_6)\} = 16$

4) $\tilde{x} = x_6 = x_6$

Длина кратч. пути – 16

Этап 2

1) Рассм. вершины с пост. метками непоср. предшеств. x_6 и для каждой провер. рав-во $16 = d(x_j) + \omega(x_j; x_6) = d(x_6)$

$16 = d(x_3) + \omega(x_3, x_6)$ $\quad 16 = 10 + 6$

$16 \neq d(x_5) + \omega(x_5, x_6)$ $\quad 16 \neq 13 + 9$

$16 \neq d(x_4) + \omega(x_4, x_6)$ $\quad 16 \neq 13 + 10$

$\Rightarrow$ дуга $(x_3 x_6)$ вклюс. в кратч. путь

$d(x_3) = 10^*$

$10 \neq d(x_2) + \omega(x_2, x_3)$ $\quad 10 \neq 5^* + 8$

$10 = d(x_1) + \omega(x_1, x_3)$ $\quad 10 = 0^* + 10$

$\Rightarrow$ дуга (x_1, x_3) вклюс. в кратч. путь

Кратч. путь $(x_1, x_3), (x_3, x_6)$