① Част. сумма $\sum^{+\infty} a_n$: $S_N = \sum^{N} a_n$

$\sum a_n$ – сход., если $\exists \lim\limits_{N\to+\infty} S_N = S$ – сумма ряда

② Критерий Коши : $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m \geq N \quad |a_m + \dots + a_n| < \varepsilon$

отр. : $\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq m > N \quad |a_m + \dots + a_n| \geq \varepsilon$

③ Необх. признак $\sum a_n$ – сход. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

④ Признак сравнения $\sum a_n, \sum b_n$; $a_n, b_n \geq 0$, $c > 0$

1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq c \cdot b_n$

2) $a_n, b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ $\Big\}$, то (A)-расх $\Rightarrow$ (B)-расх, (B)-сход $\Rightarrow$ (A)-сход.

3) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0;+\infty)$, то (A) $\Leftrightarrow$ (B)

⑤ Признак Коши (рад.) $\sum c_n$, $c_n \in \mathbb{C}$, $q = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ $q > 1$ – расх. $q < 1$ – сход.

⑥ Признак Коши (инт.) $f(x)$ – моном. на $[1;+\infty)$, $a_n = f(n)$, то $\sum a_n \Leftrightarrow \int f(x)dx$

⑦ Признак Куммера $\sum a_n, \sum c_n$; $a_n, c_n > 0$; если $\sum \frac{1}{c_n}$ – расх, $\exists \lim (c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}) = k$, то $k > 0$ – сх. $k < 0$ – ра

⑧ Признак Даламбера $\sum a_n$, $a_n > 0$ $\exists q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то $q > 1$ – расх $q < 1$ – сход.

⑨ Признак Раабе $\sum a_n$, $a_n > 0$ $\exists R = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$, то $R > 1$ – сход. $R < 1$ – расх.

⑩ Признак Бертрана $\sum a_n$, $a_n > 0$ $\exists B = \lim \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \cdot \ln n$, то $B > 1$ – сход. $B < 1$ – расх.

⑪ Призна Гаусса $\sum a_n$, $a_n > 0$ $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n \cdot \ln n}\right)$, то сход. $\lambda > 1$; $\lambda = 1$, $\mu > 1$

⑫ Знакочер. ряд : например, $\sum (-1)^n a_n$, где $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\sum a_n$ – сход. абсолютно, если $\sum |a_n|$ – сход.; $\sum a_n$ – сход. усл., если $\sum |a_n|$ – расх., $\sum a_n$ – сход.

⑬ Признак Дирихле $\forall N \quad |\sum^{N} a_n| \leq C$; $b_n \downarrow\downarrow 0 \Rightarrow \sum a_n b_n$ – сход.

⑭ Признак Абеля $\sum a_n$ – сход., b_n – мон., огр. п-ть $\Rightarrow \sum a_n b_n$ – сход.

⑮ Признак Лейбница $b_n \geq (\leq) 0$, если $b_n \downarrow\downarrow 0 \Rightarrow \sum (-1)^{n+1} \cdot b_n$ – сход.

⑯ Признак Гаусса (ал.) $\sum (-1)^n \cdot b_n$, $b_n > 0$ $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to +\infty$ $\mu > 0$ – сход. $\mu < 0$ – расх.

⑰ Теор. о перестановке $\sum a_n$ – абс. сход к A, то $\sum a_{\tau(n)}$ – абс. сход. к A, $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – перест.

⑱ Теор. Римана $\sum a_n$ – усл. сход., то $\forall S \in \mathbb{R}\ \exists \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $\sum a_{\tau(n)} = S$

⑲ Произведение рядов $\sum a_k \cdot \sum b_c = \sum c_n$

1) $S_N = S_{N-1} + \left(\sum_{k=1}^{N} a_N b_k + \sum_{k=1}^{N-1} a_k b_N\right)$

2) $S_N = S_{N-1} + \sum_{k=1}^{N} a_{N+1-k} b_k$

Теор. $\sum a_n, \sum b_n$ – абс. сход. к A, B $\Rightarrow \sum a_{k_i} \cdot \sum b_{l_i}$ – абс. сход. к AB

Теор. Мертенса $\sum a_n, \sum b_n$ – сход., один абс. $\Rightarrow c_n = \sum a_k \cdot b_{n-k+1}$: $\sum c_n$ – сход.

(20) Равном. сходимость 1) $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \overset{\forall n>N}{:}\ \forall x\in X\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=0$

2) $S_n(x)=\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \{S_n(x)\} \underset{X}{\rightrightarrows}$

(21) Критерий Коши 1) $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{N}\quad \forall n,m>N\quad \forall x\in X\quad |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

2) $\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq m>N\ \forall x\in X\ |a_m(x)+\ldots+a_n(x)|<\varepsilon$

(22) Отрицание Коши

(23) Маж. призн. Вейерштр. $\sum a_n(x)$

1) $\forall n\in\mathbb{N}\quad |a_n(x)|\leq b_n(x)$ на X, $\sum b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \Rightarrow \sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$ - абсол.

2) $\forall n\in\mathbb{N}\quad \sup\limits_{x\in X}|a_n(x)|\leq c_n$, $\sum c_n$ - сход. $\Rightarrow \sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

(24) Признак Абеля $\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$; $\sup\limits_{x\in X}|b_n(x)|\leq C$, b_n - монот. $\Rightarrow \sum\limits^{\infty} a_n(x)\cdot b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

Признак Дирихле $\sup\limits_{x\in X}|a_n(x)|\leq C$; $\sum b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$, b_n - монот. $\Rightarrow \sum\limits^{\infty} a_n\cdot b_n \underset{X}{\rightrightarrows}$

(25) Признак Дини $\left.\begin{array}{l}\{f_n\}\in C[a;b] \text{ - монот. по } n\ \forall x\in[a;b] \\ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ f(x)\in C[a;b]\end{array}\right\} \Rightarrow f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$

(26) 1) $f_n\in C[a;b]$, $f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f\in C[a;b]$

2) $a_n(x)\in C[a;b]$, $\sum a_n(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \Rightarrow \sum a_n(x)\in C[a;b]$

(27) 1) $f_n\in R[a;b]$, $f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f\in R[a;b]$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

2) $a_n(x)\in R[a;b]$, $\sum a_n(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \Rightarrow \sum a_n(x)\in R[a;b]$ $\quad \int_a^b \sum a_n(x)\,dx=\sum\int_a^b a_n(x)\,dx$

(28) $\left.\begin{array}{l} S(x)=\sum a_n(x) \text{ сход. в } x=x_0\in[a;b];\ a_n(x)\in D[a;b],\ \forall n \\ \sum a_n'(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\sum a_n(x)\in D[a;b] \\ \left(\sum a_n(x)\right)'=\sum a_n'(x)\end{array}$

(29) $\exists \lim\limits_{x\to a} a_n(x)=c_n$; $\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$, $a\in X$ - пред. т. $X\setminus a \Rightarrow \sum c_n$ - сход.; $\lim\limits_{x\to a}\sum a_n(x)=\sum\lim\limits_{x\to a} a_n(x)$

(30) ф-я Вейерштрасса: $f_{a,b}(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a^k\cos(b^k x)$, $a\in(0;1)$, $ab\geq 1$

(31) $\sum c_n(z-z_0)^n$, $z\in\mathbb{C}$, $|z-z_0|<R \Rightarrow$ ряд сход. абс., где $R=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$

(32) 1ая теорема Абеля $\sum c_n(z-z_0)^n$ сход. в $\xi \Rightarrow \sum c_n(z-z_0)^n \underset{K_q}{\rightrightarrows}$ абс., $K_q=\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|\leq q|\xi-z_0|, q\in(0;1)\}$

(33) 2ая теорема Абеля $\sum c_n(z-z_0)^n$ сход. в $\xi \Rightarrow \sum c_n(z-z_0)^n \underset{I}{\rightrightarrows}$, $I=\{z\in\mathbb{C}: z=z_0+t(\xi-z_0),\ t\in(0;1)\}$

(34) Бесконечное произведение $\prod\limits^{\infty} p_n$, $p_n\neq 0$ $\quad \exists P=\lim\limits_{N\to+\infty}\prod\limits^{N} p_n$ $\quad P\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ - сход.; $P=0$ - расх. к нулю

(35) Крит. сходимости 1) $p_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad \prod p_n$ - сход $\Leftrightarrow \sum\ln p_k$

2) $p_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $p_n=1+\alpha_n$

$\alpha_n\geq(\leq)0\quad \prod p_n$ - сход $\Leftrightarrow \sum\alpha_n$ - сход.

$\sum\alpha_n, \sum\alpha_n^2$ - сход. $\Rightarrow \prod p_n$ - сход.

(36) Кратн. корня z_0 ст. n $\quad f(z)=0$: $f(z_0)=\ldots f^{(n-1)}(z_0)=0$; $f^{(n)}(z_0)\neq 0$

Аналит. ф-я $f(z)\in A(\mathbb{C})$ $\quad \forall z\in\mathbb{C}$, $c_n\in\mathbb{C}$: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n\cdot z^n$

(37) Теор. Вейерштрасса $f(z)\in A(\mathbb{C})$ — 1 порядка; a_n — все простые нули; $f(0)\neq 0$

$$f(z) = f(0)\cdot \exp\left(\frac{z\cdot f'(0)}{f(0)}\right)\cdot \prod^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\cdot \exp\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

(38) Ф-ла Валлиса $\frac{\pi}{2} = \prod^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n-1)} = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2N+1}\cdot\left(\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\right)^2\right)$

Ф-ла Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot \alpha_n$, где $\alpha_n = 1+o(1)$, $n\to\infty$

(39) Теор. Теплица

$$\begin{pmatrix} p_{11} & & \\ p_{21} & p_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

1) $p_{nk}\geq 0\in\mathbb{R}$

2) $\sum^{n} p_{nk} = 1$

3) $\lim_{n\to\infty} p_{nk} = 0$

4) $\{x_n\}$: $\lim_{n\to\infty} x_n = a\in\mathbb{R}$, то $\lim_{n\to+\infty}\sum^{n} p_{nk}x_k = \lim_{n\to+\infty} x_n = a$

(40) Рег. метод суммирования: $\exists\lim_{n\to\infty}\sum a_n = S \Rightarrow \sum a_n$ — сум-ма к S

Метод (C,k): $\{S_n\}$ сум. к S при пом. k-х сред. средних

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^k}{A_n^k} = S$, где $S_n^0 = S_n$, $S_n^k = \sum_{j=0}^{n} S_j^{k-1}$, $A_n^0 = 1$, $A_n^k = \sum_{j=0}^{n} A_j^{k-1}$ | при $k=1$: $S_n^1 = S_0+\dots+S_n = (n+1)a_0+\dots+a_n$, $A_n^1 = \sum_{j=0}^{n} 1 = n+1$

Метод Абеля: $\sum a_n$ сум. к S $\Leftrightarrow \forall x\in(0;1)$ $\sum a_n x^n$ — сход. и $\exists\lim_{x\to 1-} a_n x^n = S\in\mathbb{R}$

(41) Тригонометр. ряд Фурье $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos kx + b_k\sin kx\} = S(f,x)$

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k\end{pmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\begin{pmatrix}\cos kt\\ \sin kt\end{pmatrix}dt$$

(42) Крит. сходимости $\delta\in(0;\pi)$; $f, |f|\in R(\mathbb{T})$; то $S(f,x)\to S\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \int_0^{\delta}\frac{\sin(n+\frac12)t}{t}\cdot\psi_{x,S}(t)\,dt = o(1), n\to\infty$

$\psi_{x,S}(t) = f(x+t)+f(x-t)-2S$

(43) Призн. сходимости Дирихле 1) $f\in C^1(\mathbb{T})\Rightarrow S(f,x) = f(x)$, $\forall x\in\mathbb{T}$

2) $f, f'\in KC(\mathbb{T})\Rightarrow S(f,x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, $\forall x\in\mathbb{T}$

(44) Ядро Дирихле $D_n(t) = \frac{1}{2}+\sum\cos kt$

1) четная ф-я

2) $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac12)t}{2\sin\frac{t}{2}}$

I. Знакопостоянные ряды

① Знакопостоянный ряд $\sum\limits^{\infty} a_n$: $a_n \geqslant (\leqslant) 0$, $\forall n$

част. сумма $S_N = \sum\limits^{N} a_n$

$\sum\limits^{\infty} a_n$ - сход., если $\exists \lim\limits_{N\to+\infty} S_N = S$ - сумма ряда

② Критерий Коши

$\sum a_n$ - сход. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geqslant m > N$ $|a_m + \ldots + a_n| < \varepsilon$

▷ $\{S_N\}$ - числ. п-ть, тогда $|S_N - S_{m-1}| < 1$ по к. Коши □

③ Необх. признак

$\sum a_n$ - сход $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

④ Теор. сравнения : $\sum a_n, \sum b_n$: $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$, $C \geqslant 0$

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n \leqslant C \cdot b_n$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$; $a_n, b_n > 0$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$

$\Big\}$ (A) - расх => (B) - расх; (B) - сход. => (A) - сход

3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0; +\infty)$, $b_n > 0$ $\quad$ (A) $\Leftrightarrow$ (B)

▷ $0 < a_m + \ldots + a_n \leqslant C \cdot (b_m + \ldots + b_n) < \varepsilon$, если (B) сход.

($\geqslant \varepsilon$, если (A) расх) □

▷ $\forall n$ $\left.\begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1} \\ \ldots \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \end{array}\right\}$ => $\frac{a_{n+1}}{a_1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_1}$ => $a_{n+1} \leqslant \underbrace{\frac{a_1}{b_1}}_{=C} \cdot b_{n+1}$ □

▷ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N$ $\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$

$\underbrace{(k-\varepsilon)}_{= C_-} \cdot b_n < a_n < \underbrace{(k+\varepsilon)}_{= C_+} \cdot b_n$ □

II. Признаки сходимости

① Признак Даламбера $\sum a_n$, $a_n > 0$ $\quad \exists q = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\quad q > 1$ – расх. $\quad q < 1$ – сход.

▷ признак Куммера $c_n = 1$: $k = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{1}{q} - 1$

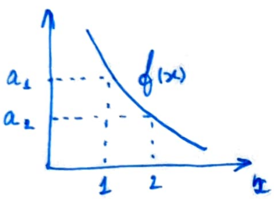
$k = \frac{1}{q} - 1 > 0 \Rightarrow \sum a_n$ – сход, $q < 1$

$k = \frac{1}{q} - 1 < 0 \Rightarrow \sum a_n$ – расх., $q > 1$

② Интегральный признак Коши $f(x)$ – моном. на $[1; +\infty)$, $a_n = f(x)$

то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$

▷ Пусть $f(x)$ – мон. уб. на $[1; +\infty)$



$$\begin{cases} a_1 \geq f(x) \geq a_2, & x \in [1, 2] \\ \dots \\ a_N \geq f(x) \geq a_{N+1}, & x \in [N, N+1] \end{cases}$$

$\sum\limits_{n=1}^{N} a_N \geq \int_1^{N+1} f(x)\,dx \geq \sum\limits_{n=2}^{N+1} a_n$, откуда $\sum a_n \Longleftrightarrow \int f(x)\,dx$

Аналогично для $f(x)$ – мон. возр. на $[1; +\infty)$ □

③ $\sum \frac{1}{n^p}$

$f(x) = \frac{1}{n^p}$ – моном. на $[1; +\infty)$, $\forall p \in \mathbb{R}$

тогда $\sum \frac{1}{n^p} \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$, кот. сход. при $p > 1$, расх. при $p \leq 1$ □ (или по необх. призн. $\lim a_n \geq 1$)

III. Признаки сходимости

① **Признак Куммера** $\sum a_n, \sum c_n;\ a_n, c_n > 0$

$\sum \frac{1}{c_n}$ – расх. $\quad \exists k = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \right)$

$k>0 \quad \sum a_n$ – сх

$k<0 \quad \sum a_n$ – р

$\triangleright$ $\frac{c_n a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant \delta > 0$

$c_n a_n - c_{n+1} \cdot a_{n+1} \geqslant \delta \cdot a_{n+1}$

$c_n a_n \geqslant c_{n+1} \cdot a_{n+1} \quad \Rightarrow \quad \{c_n a_n\} \downarrow$ мон. уб. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$

$\sum\limits_{n=1}^{N} |c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1}| = c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1} \geqslant \delta \cdot \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \Rightarrow S_N$ – огр. $\Rightarrow a_n$ – сход $\square$

$\triangleright$ $\frac{c_n a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} < \delta$

$c_n a_n < c_{n+1} a_{n+1}$

$\frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} = \frac{c_n}{c_{n+1}} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$, т.к. $\sum \frac{1}{c_n}$ – расх $\Rightarrow \sum a_n$ – расх $\square$

② **Признак Бертрана** $\sum a_n, \ a_n > 0$

$\exists B = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \cdot \ln n \qquad \begin{array}{ll} B>1 & \text{– сход.} \\ B<1 & \text{– расх.} \end{array}$

$\triangleright \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{B}{\ln n \cdot n}(1 + o(1))$

$c_n = n \cdot \ln n: \quad \frac{1}{c_n}$ – расх., т.к. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$ – расх.

$k = \lim \left(n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) \right) =$

$= \lim \left(n \ln n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{B}{n \ln n}\right) - (n+1) \cdot \left(\ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) =$

$= \lim \left(B - 1 + o(1) \right) = B - 1$

$k = B - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad a_n$ – сход, $\quad B > 1$

$k = B - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad a_n$ – расх., $\quad B < 1$ $\square$

③ **Признак Гаусса** $\sum a_n, \ a_n > 0: \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n \cdot \ln n} \right) \qquad$ сход. $\begin{array}{l} \lambda > 1 \\ \lambda = 1, \ \mu > 1 \end{array}$

$\triangleright$ $\lambda > 1 \quad q = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n}{\lambda n + \mu} = \frac{1}{\lambda} < 1 \Rightarrow$ сход.

$\lambda < 1 \quad q = \frac{1}{\lambda} > 1 \Rightarrow$ расх.

$\lambda = 1 \quad \mu > 1 \quad R = \lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim n \left(1 + \frac{\mu}{n} - 1 \right) = \mu > 1 \Rightarrow$ сход.

$\lambda = 1 \quad \mu < 1 \quad R = \mu < 1 \Rightarrow$ расх.

$\lambda = 1 \quad \mu = 1 \quad B = \lim \left(\underbrace{n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)}_{=\mu = 1} - 1 \right) \cdot \ln n = 0 < 1 \Rightarrow$ расх.

④ **Общий признак** $\sum a_n, \ a_n > 0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n} + \frac{\lambda_3}{n \ln n} + \frac{\lambda_4}{n \ln n \ln\ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n \ln\ln n \ln\ln\ln n} \right), \quad n \to +\infty$$

то сход.
$\lambda_1 > 1$
$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 > 1$
$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 > 1$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 > 1$

IV. Знакочередующиеся ряды

Абс. сход. $\sum a_n$, $\sum|a_n|$ – сход.

Усл. сход. $\sum a_n$, $\sum|a_n|$ – расх., $\sum a_n$ – сход.

① Преобразование Абеля

$A_\ell = \sum\limits_{k=m-1}^{\ell} a_k \Rightarrow a_k = A_k - A_{k-1}$

$$\sum_m^n a_k b_k = \sum_m^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_m^n A_k b_k - \sum_m^n A_{k-1} b_k = \sum_m^n A_k b_k - \sum_{m-1}^{n-1} A_{\bar{k}} b_{\bar{k}+1} =$$

$\bar{k} = k+1$

$$= \sum_m^n A_k (b_k - b_{k+1}) - A_{m-1} b_m + A_n b_{n+1}$$

② Лемма: b_n – моном. $|\sum a_n b_n| \le 4 \cdot \max\limits_{k=\overline{m-1,n}} |A_k| \cdot \max\{|b_m|, |b_{n+1}|\}$

$\triangleright$ $|\sum a_n b_n| \le \max\limits_{\overline{m-1,n}} |A_k| \cdot \Big|\underbrace{\sum\limits_m^{n+1} |b_k - b_{k+1}|}_{\substack{=|b_{n+1} - b_m|, \\ \text{т.к. } b_n \text{ – мон.}}} + |b_{n+1}| + |b_m|\Big| \le \max |A_k| \cdot 4 \max\{|b_m|, |b_{n+1}|\}$

③ Признак Дирихле $|\sum\limits^N a_n| \le C,\ \forall N$; $b_n \downarrow\downarrow 0 \Rightarrow \sum a_n b_n$ – сход.

$\triangleright$ $|\sum a_n b_n| \le 4 \cdot C \cdot \max\{|b_m|, |b_{n+1}|\} \le 4C \cdot \varepsilon$

$(\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall m, n)$ ε

Признак Абеля $\sum a_n$ – сход.; b_n – моном. огр. $\Rightarrow \sum a_n b_n$ – сход.

$\triangleright$ $|\sum a_n b_n| \le 4 \cdot \underbrace{\varepsilon}_{\max |A_k| \to 0} \cdot C$

④ Признак Лейбница $b_n \downarrow\downarrow 0$, $b_n (\ge) \le 0$, то $\sum (-1)^{n+1} b_n$ – сход.

$\triangleright$ по пр. Дирихле $\sum a_n = (-1)^n$

V. Функциональные последовательности и ряды

$\sum^{N} u_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_N(x)$

1) $f_n \to f$ на X поточечно $\Leftrightarrow \forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

2) $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in X \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$

3) $\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$, если $\{S_N\}_{n=1}^{\infty} \underset{X}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall x \in X \ |\sum\limits_{n+1}^{\infty} a_k(x)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x \in X} |\sum\limits_{n+1}^{\infty} a_k(x)| = 0$

① критерий Коши

$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq m > N \ \forall x \in X \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

▷ $|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n - f + f - f_m| = |f_n - f| + |f_m - f| < 2\varepsilon$

◁ $x \in X$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, по к. Коши для п-ти $f_n(x)$ - сход.

$\Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \Rightarrow \forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n, m \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq m > N \ \forall x \in X \ |a_m + \ldots + a_n| < \varepsilon$

▶ из опр. и к. Коши для п-ти

② Теорема Дини

$\left.\begin{array}{l}\{f_n\} \in C[a;b] \text{ мон. по } n \ \forall x \\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in C[a;b]\end{array}\right\} f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$

▷ $\varepsilon > 0$ $f_1(x) \leq \ldots \leq f_n(x)$

$\forall x \in [a;b]$ $0 \leq f(x_0) - f_n(x_0) < \varepsilon$

$f, f_n \in C \Rightarrow \forall n \geq N \ \exists U_{\delta_0}(x_0): \ 0 \leq f(x) - f_n(x) < \varepsilon$

Выд. конечное подпокр. $\underset{N_1}{U_{\delta_1}(x_1)}, \ldots, \underset{N_n}{U_{\delta_n}(x_n)}$

Пусть $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \forall n > N_\varepsilon \ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$

След.: $\left.\begin{array}{l} a_n(x) \geq 0, \ x \in [a;b], \ a_n(x) \in C[a;b] \\ S(x) = \sum a_n(x) \in C[a;b]\end{array}\right\} \Rightarrow \sum\limits^{\infty} a_n(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows}$

VI. Признаки равномерной сходимости

① Признак Вейерштрасса

1) $\forall n \quad |a_n(x)| \leq b_n(x) \qquad \sum b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$, то $\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

2) $\forall n \; \forall x \quad \sup\limits_{x \in X} |a_n(x)| \leq c_n \qquad \sum c_n$ - сход., то $\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

$\triangleright \; |a_m(x) + \ldots + a_n(x)| \leq |b_m(x) + \ldots + b_n(x)| < \varepsilon$

$\triangleright$ по к. Коши

② Признак Дирихле 1) $\forall n \quad |\sum a_n(x)| \leq C$

2) b_n - моном. по n, $b_n \underset{X}{\rightrightarrows} 0$, то $\sum a_n b_n \underset{X}{\rightrightarrows}$

$\triangleright \; |\sum a_n(x) \cdot b_n(x)| \leq 4 \cdot \underbrace{\max |A_k|}_{\leq C} \cdot \max \underbrace{\{|b_m|, |b_{n+1}|\}}_{<\varepsilon} \leq 4C \cdot \varepsilon$

③ Признак Абеля 1) $\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

2) b_n - моном. по n $\quad |b_n(x)| < C$, то $\sum a_n b_n \underset{X}{\rightrightarrows}$

$\triangleright \; |\sum a_n(x) \cdot b_n(x)| \leq 4 \cdot \underbrace{\max |A_k|}_{<\varepsilon} \cdot \max \underbrace{\{|b_n|, |b_{n+1}|\}}_{\leq C} \leq 4 \cdot \varepsilon \cdot C$

④ $\sum \frac{\sin nx}{n}$

a) $\sum \frac{\sin nx}{n} \underset{[\varepsilon; 2\pi - \varepsilon]}{\rightrightarrows}$, $\varepsilon \in (0; \pi)$

по Дирихле $\quad a_n = |\sum \sin nx| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}$

$b_n = \frac{1}{n}$ - мон. по n, $\sum b_n \rightrightarrows 0$

в) $\sum \frac{\sin nx}{n} \underset{[0; 2\pi]}{\not\rightrightarrows}$ (сход. в т. $x = 0; 2\pi$)

$\varepsilon = \frac{1}{4}$

$\sup\limits_{x \in [0; 2\pi]} \left|\sum\limits_{N}^{2N} \frac{\sin nx}{n}\right| \geq \left|\sum\limits_{N}^{2N} \frac{\sin n \cdot \frac{\pi}{4N}}{n}\right| \geq \left|\sum\limits_{N}^{2N} \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{n}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left|\sum\limits_{N}^{2N} \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot N \frac{1}{2N} = \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{4} = \varepsilon$

по к. Коши нет равн. сх-ти

VII. Теорема о непрерывности

① $\left.\begin{array}{l} f_n \in C[a;b] \\ f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f \end{array}\right\} \Rightarrow f \in C[a;b]$

▷ $x, x_0 \in [a;b]$

$$|f(x_0) - f(x)| \le \underbrace{|f(x_0) - f_n(x_0)|}_{\rightrightarrows} + \underbrace{|f_n(x_0) - f_n(x)|}_{\in C} + \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\rightrightarrows} < 3\varepsilon$$

② $\left.\begin{array}{l} a_n(x) \in C[a;b] \\ \sum a_n(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n(x) \in C[a;b]$

▷ $S_N(x) = \sum a_N(x)$, теор. о непр. ф-ий п-ти

③ ф-я Вейерштрасса $f_{a,b}(x) = \sum a^k \cos(b^k x)$: $f(x) \in C(\mathbb{R})$, $f(x) \notin D(\mathbb{R})$ при $\begin{array}{l} a \in (0;1) \\ ab \ge 1 \end{array}$

▷ $T = 1$ $\quad \psi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; \frac{1}{2}] \\ 1-x, & x \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} 4^{-m} \cdot \psi(4^m \cdot x) :$$

① $4^{-m} \cdot \psi(4^m x) \le \frac{1}{2 \cdot 4^m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{m=0}^{\infty} 4^{-m} \cdot \psi(4^m x) \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^m} = \frac{2}{3}$$

по т. Вейерштр. $f_n(x) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \Rightarrow f(x) \in C(\mathbb{R})$

② $x_0 \in \mathbb{R}$: $\quad x_0 \in \Delta_n = \left[\frac{q_{n-1}}{2 \cdot 4^m}; \frac{q_n}{2 \cdot 4^m}\right]$, $q_n \in \mathbb{N}$

$$\exists x_n \in \Delta_n : \ |x_0 - x_n| = \frac{1}{4^{n+1}}$$

при $m > n$ $\quad T = \frac{1}{4^{n+1}}$ для $\psi(4^m x)$

$$\frac{\psi_m(x_n) - \psi_n(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

при $m \le n$ $\quad \psi(4^m x)$ лин. на Δ_n с угл. коэф. ± 1

$$\frac{\psi_m(x_n) - \psi_m(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1$$

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi_m(x_n) - \psi_m(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{m=0}^{n} (\pm 1) \quad \begin{cases} \text{чет.} & n = 2l+1 \\ \text{неч.} & n = 2l \end{cases}$$

т.к. $x_n \to x_0$, $n \to +\infty$ $\quad \nexists \lim\limits_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$

VIII. Теорема об интегрируемости

① $f_n \in R[a;b]$, $f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$, то $f \in R[a;b]$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$\triangleright$ 1) $\forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \forall n>N \ \forall x \quad f_n - \varepsilon \le f \le f_n + \varepsilon$

$\forall x \in \Delta_i: \ m_i^{(n)} - \varepsilon \le f \le M_i^{(n)} + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \omega(f, \Delta_i) = M_i^{(n)} - m_i^{(n)}$

$$\sum \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i = \sum (M_i^{(n)} - m_i^{(n)} + 2\varepsilon)\cdot \Delta x_i = \underbrace{\sum \omega(f_n, \Delta_i)\cdot \Delta x_i}_{\to 0 \text{ по кр. инт.}} + 2\varepsilon\cdot(b-a) \le C\cdot\varepsilon \ \square$$

2) $\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \le \varepsilon(b-a)$ $\square$

② $a_n(x) \in R[a;b]$, $\sum a_n(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows}$, то $\sum a_n(x) \in R[a;b]$; $\int \sum a_n(x)\,dx = \sum \int a_n(x)\,dx$

$\triangleright$ 1) $\{S_N\}$, аналог.

2) $S(x) = a_1(x) + \ldots + a_n(x) + \varphi_n(x)$

$\sup\limits_{x\in[a;b]} |\varphi_n(x)| < \varepsilon$, т.к. $\rightrightarrows$

$$\int \sum a_n(x)\,dx = \sum \int a_n(x)\,dx + \underbrace{\int \varphi_n(x)\,dx}_{\le \varepsilon(b-a)}$$

③ Теор. о перестановке предела суммы

$\exists \lim\limits_{x\to a} a_n(x) = c_n$; $S(x) = \sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$, то $\sum c_n$ – сход; $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits^{\infty} a_n(x) = \sum\limits^{\infty} \lim\limits_{x\to a} a_n(x)$

$\triangleright$ 1) $\forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \forall x \ |a_n(x) + \ldots + a_m(x)| < \varepsilon$

$a_n(x) \to c_n,\ x\to a \quad |c_n + \ldots + c_m| < \varepsilon \quad \Rightarrow$ по т. Коши $\sum c_n$ – сход.

2) $C_N = \sum\limits^{N} c_k$, $C = \sum\limits^{\infty} c_k$

$$|S(x) - C| \le \underset{\rightrightarrows}{|S(x) - S_n(x)|} + \underset{\forall\varepsilon\ \exists U_\delta\ \forall x}{|S_n(x) - C_n|} + \underset{\text{сход.}}{|C_n - C|} < 3\varepsilon$$

$|S_n(x) - C_n| \le \sum |a_k(x) - c_k| < \varepsilon$

$\lim S(x) = C$

$\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_1^{\infty} a_n(x) = \sum\limits_1^{\infty} \lim\limits_{x\to a} a_n(x)$

IX. Теорема о дифференцируемости

① $S(x) = \sum a_n(x)$ сход. в $x = x_0 \in [a;b]$, $\sum a_n'(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows}$ $\forall n$ $a_n(x) \in D[a;b]$ $\Bigg\} \Rightarrow$ $S(x) \in D[a;b]$, $(\sum a_n(x))' = \sum a_n'(x)$

▷ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n,m$ $|\sum a_k'| < \varepsilon$

$$\left|\sum \frac{a_k(x) - a_k(x_0)}{x - x_0}\right| = \left|\frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0}\right| = |U'(\xi)| = |\sum a_k'(\xi)| < \varepsilon$$ по т. Лагранжа

$\Rightarrow \sum \frac{a_k(x) - a_k(x_0)}{x - x_0} \underset{[a;b]\setminus x_0}{\rightrightarrows} \Rightarrow \sum (a_k(x) - a_k(x_0)) \rightrightarrows$ по Абелю $\Rightarrow \sum a_n(x) \rightrightarrows$

$S(x) \in C[a;b]$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = \sum^{\infty} \lim_{x \to x_0} \frac{a_m(x) - a_m(x_0)}{x - x_0}$$

X. Степенные ряды

Опр. $\sum c_n \cdot (z-z_0)^n$, $z \in \mathbb{C}$; $\{z_n\}$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ |z_n - z_0| < \varepsilon \iff z_n \to z_0$

① Теор. $\sum c_n (z-z_0)^n$, $z \in \mathbb{C}$

1) $|z-z_0| < R \Rightarrow$ абс. сход.

2) $|z-z_0| > R \Rightarrow$ расх. , где $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c_n}{c_{n+1}}$

▷ 1) $\sum |c_n| \cdot |z-z_0|^n$ по к. Коши $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n| \cdot |z-z_0|^n} < 1 \iff |z-z_0| < \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$

1) z; по призн. Даламбера

2) необх. усл. сход. не вып.

② $1^{ая}$ теорема Абеля

$\sum\limits_0^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ — сход. в ξ, то $\sum c_n (z-z_0)^n \underset{K_q}{\rightrightarrows}$ абс. , где $K_q = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| = q|\xi - z_0|\}$
$q \in (0;1)$

▷ $|c_n (z-z_0)^n| = |\underbrace{c_n \cdot (\xi - z_0)^n}_{\substack{\to 0 \\ \text{по необх. пр.}}} \cdot \underbrace{\left(\dfrac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)^n}_{\substack{\leq 1 \cdot q^n, \\ \text{т.к. мон. и огр.}}}| \leq q^n$

q^n, z — сход. ; $z \in K_q \Rightarrow \sum c_n (z-z_0)^n \underset{K_q}{\rightrightarrows}$ абс. по Вейерштрассу

③ $2^{ая}$ теорема Абеля

$\sum\limits_1^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ — сход. в ξ, то $\sum c_n (z-z_0)^n \underset{I}{\rightrightarrows}$, где $I = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + t(\xi - z_0)\}$
$t \in [0;1]$

▷ $c_n (z-z_0)^n = c_n \cdot (\xi - z_0)^n \cdot t^n$

$\left.\begin{array}{l} c_n \cdot (\xi - z_0)^n \underset{I}{\rightrightarrows} \\ t^n \text{ — мон., огр.} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum c_n (z-z_0)^n$ сх. по Абелю

След. $\sum c_n (z-z_0)^n$ — сход. в ξ, то $f(z) \in C(I)$

XI. Непрерывность и почленное дифференцирование

① Лемма $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$: R – рад. сх., то
$\sum c_n \cdot n \cdot (z-z_0)^{n-1}$; $\sum c_n \cdot \frac{1}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$: R – рад. сход.

$\triangleright$ $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n| \cdot n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n| \cdot \frac{1}{n+1}}$

② Теор. $f(z) = \sum c_n (z-z_0)^n$, то $f(z) \in C^{\infty}(K_r)$, где $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \leq r < R\}$

$\triangleright$ $\left.\begin{array}{l} c_n (z-z_0)^n \in C(K_r) \\ \sum c_n (z-z_0)^n \rightrightarrows \end{array}\right\} \Rightarrow f \in C(K_r)$

$\sum c_n (z-z_0)^n$ – сход. в z_0

$\sum c_n \cdot n \cdot (z-z_0)^{n-1}$ (по лемме и 1 т. Аб.) – сход. в K_r

$c_n (z-z_0)^n \in D(K_r) \Rightarrow f \in D(K_r)$

$f' = \sum c_n \cdot n \cdot (z-z_0)^{n-1} \in D(K_r), \ldots, f^{(n)} \in D(K_r)$ $\square$

След. $f^{(k)}(z) = \sum c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (z-z_0)^{n-k}$, то $c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

③ $\operatorname{arctg} x$:

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \ldots + (-1)^n \cdot x^{2n} \ldots$ $x \in (-1;1)$; $R = 1$, $K_r = \{x : |x| \leq r\}$ $r \in (0;1)$

интегрируя внутри K_r почленно:

$\operatorname{arctg} x + c = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2^{n+1}} \ldots$ $x \in K_r = [-1;1]$

при $x = 0$ $c = 0$

в кон. т. $x = \pm 1$ $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ – сход. по Лейбницу

по 2 т. Аб. $\left.\begin{array}{l} \sum \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2^{n+1}} \in C(\pm 1) \\ \forall n \ \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2^{n+1}} \in C(-1;1) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2^{n+1}} \in C[-1;1]$

XII. Теорема Теплица

$$\begin{pmatrix} p_{11} & & \\ p_{21} & p_{22} & \ldots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

1) $p_{nk} \geqslant 0 \quad \in \mathbb{R}$

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} p_{nk} = 1$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} p_{nk} = 0$

4) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \lim x_n = a \in \mathbb{R}$, то $\lim \sum p_{nk} x_k = \lim x_n = a$

$\triangleright$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\Rightarrow \exists M \quad \forall n \quad |x_n| \leq M, \ |x_n - a| \leq M$

$\exists N_2 > N_1 \quad \forall n > N_2 \quad |p_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2 N_1 M}, \quad \forall k = \overline{1, N_1}$

$\forall n > N_2: \ |\sum p_{nk} x_k - a| = |\sum p_{nk}(x_k - a)| \leq p_{n1}|x_1 - a| + \ldots + p_{nn}|x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2N_1 M} \cdot N_1 \cdot M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Метод суммирования по Абелю

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сум. по Абелю к S $\Leftrightarrow$ $\forall x \in (0;1)$ $\sum a_n x^n$ – сход; $\exists \lim\limits_{x\to 1} \sum a_n x^n = S \in \mathbb{R}$

Теор. (регулярность) $\exists \sum a_n = S \Rightarrow \sum a_n$ сум. к S по Абелю

$\triangleright$ $f(x) = \sum a_n x^n$ – сход. в $x=0$; $x=1$

по 2 т. Абеля $\sum a_n x^n \underset{[0;1]}{\rightrightarrows} \Rightarrow f(x) \in C[0;1]$

$f(1-0) = f(1)$, т.е. $\lim\limits_{x\to 1_-} \sum a_n x^n = \sum\limits^{\infty} a_n = S$ $\triangleright$

XIII. Суммирование (C, k)

① $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ сум. к S при пом. k-х чезар. средних, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n^k}{A_n^k} = S$,

где $S_n^0 = S_n \quad S_n^k = \sum\limits_{j=0}^{n} S_j^{k-1}$

$A_n^0 = 1 \quad A_n^k = \sum\limits_{j=0}^{n} A_j^{k-1}$

② $\sum a_n$ сум. к S, если $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ сум. мет. (C, k) (- регулярен)

при $k=1$ $\quad S_n^1 = \sum\limits_{j=0}^{n} S_n = (n+1)a_0 + \ldots + a_n$

$A_n^1 = \sum\limits_{j=0}^{n} A_n = \sum\limits_{j=0}^{n} 1 = (n+1)$

$\Rightarrow \frac{S_n^1}{A_n^1} = a_0 + \frac{n}{n+1} a_1 + \ldots + \frac{1}{n+1} a_n$

$\triangleright$ $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{1}{n+1} & & & & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$

$p_{nk} \geq 0$

$\sum\limits^{n} p_{nk} = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} p_{nk} = 0$

по т. Теплица $\lim \sum p_{nk} S_k = \lim \frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1} = \lim S_n = S$

XIV. Бесконечные произведения

$\prod\limits^{\infty} p_k$ – сход. $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits^{N} p_k = P \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, при $P=0$ – расх. к нулю

① Необх. призн. $\prod\limits^{\infty} p_k$ – сход. $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$

▷ $p_k = \dfrac{P_k}{P_{k-1}}$, $\lim p_k = \dfrac{P}{P} = 1$

② $\prod\limits^{\infty} p_k$, $p_k > 0$, $p_n = 1+\alpha_n$

1) $\alpha_n (\geq) \leq 0$. $\prod\limits^{\infty} p_n$ – сход. $\Leftrightarrow \sum\limits^{\infty} \alpha_n$ – сход.

2) $\sum\limits^{\infty} \alpha_n, \sum\limits^{\infty} \alpha_n^2$ – сход. $\Rightarrow \prod\limits^{\infty} p_k$ – сход.

▷ 1) $\lim \alpha_n = 0$; $\alpha_n = o(1)$, $n\to+\infty$

$\ln(1+\alpha_n) \sim \alpha_n$, $n\to+\infty$

$\alpha_n \geq 0 \Rightarrow \sum \alpha_n \Leftrightarrow \sum \ln(1+\alpha_n) \Leftrightarrow \prod\limits^{\infty} p_k$

2) $\ln(1+\alpha_n) = \alpha_n - \dfrac{\alpha_n^2}{2}(1+o(1))$

$\sum \dfrac{\alpha_n^2}{2}$ – сход. $\Rightarrow \sum \dfrac{\alpha_n^2}{2}\cdot(1-o(1))$ – сход. $\Rightarrow \sum \ln(1+\alpha_n)$ – сход. $\Rightarrow \prod\limits^{\infty} p_k$ – сход.

③ $\prod\limits^{\infty} p_k$ – сход., $p_k > 0 \Leftrightarrow \sum \ln p_n$ – сход.

▷ $\prod\limits^{N} p_k = \exp\left(\sum\limits^{N} \ln p_n\right)$, $e^x \in C(\mathbb{R})$

XV. Теорема Вейерштрасса

① Теор. $f(z) \in A(\mathbb{C})$ $1^{\text{го}}$ порядка ; $f(0) \neq 0$; a_n — только прост. н

$$f(z) = f(z_0) \cdot \exp\left(\frac{z \cdot f'(0)}{f(0)}\right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

② $\sin z = z \cdot \prod^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(\pi n)^2}\right)$

$$\cos z = \prod^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2}\right)$$

▷ 1) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z} = \sum^{\infty} \dfrac{(-1)\, z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} - $

$f(0) = 1$; $f'(0) = 0$; $\sin z = 0 \iff z = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\sin z}{z} = 1 \cdot 1 \cdot \prod \left(1 - \frac{z}{\pi n}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi n}\right) \cdot e^{\frac{z}{\pi n}} \cdot e^{-\frac{z}{\pi n}}$$

$$\sin z = z \cdot \prod \left(1 - \frac{z^2}{(\pi n)^2}\right)$$

2) $f(z) = \cos z = \sum^{\infty} \dfrac{(-1) \cdot z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \ldots$

$f(0) = 1$; $f'(0) = 0$; $\cos z = 0 \iff z = \pi n + \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

$$\cos z = 1 \cdot 1 \cdot \prod \left(1 - \frac{z}{\pi n + \frac{\pi}{2}}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) \cdot 1 = \prod \left(1 - \frac{z^2}{\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)^2}\right)$$

XVI. Формула Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \prod^{\infty} \frac{(2n^2)}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \left(\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!} \right)^2 \right)$$

$\triangleright$ 1) $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\sin z}{z} = \prod \left(1 - \frac{z^2}{(\pi n)^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\pi} = \prod^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n^2)}$

2) $\Pi = \lim p_N$;

$$p_N = \Pi \frac{2n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2^2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3\cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{(2N)^2}{(2N-1)(2N+1)} \quad \square$$

Формула Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \alpha_n \quad ; \quad \alpha_n = 1 + o(1), \; n \to \infty$$

$\triangleright$ 1) $a_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+1/2}}$, $n \in \mathbb{N}$; $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \prod^{N} \frac{a_n}{a_{n-1}} = A$

$$\prod^{\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \exp\left(\sum^{\infty} \ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)\right)$$

$$\ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{e \cdot n \cdot (n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \right) = \ln\left(\frac{e\cdot n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \ln\left(\frac{en}{n-1} \cdot \exp\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\right)\right) = \ln\left(\frac{en}{n-1} \cdot \exp\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{en}{n-1} \cdot \exp\left(-1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) =$$

$$= \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sum \ln\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) \Leftrightarrow \sum \frac{1}{n^2} \Rightarrow n! = A \cdot \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1))$$

2) $$\left(\frac{\pi}{2} = \right) \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} \right)^2 = \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{(n^2)! \cdot 2^{2n}}{(2n)!} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{2^{2n} \cdot A^2 \cdot n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} (1+o(1))^2}{A\sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} \right)^2 = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{n}\, (1+o(1)) \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{A^2}{2} \cdot n\, (1 + o(1)) = \frac{A^2}{4} (1 + o(1))$$

$$\frac{A^2}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \sqrt{2\pi} \quad \square$$

XVII. Тригонометрические ряды Фурье

$f(x)$ на $\Pi = [-\pi; \pi]$

$S(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ – ряд Фурье

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$$
$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

① $S_N(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{2} dt + \sum \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \cos kx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \sin kx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\left[\frac{1}{2} + \sum (\underbrace{\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx}_{\cos k(x-t)}) \right]}_{D_n(x-t)} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) \, dt$$

② $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum \cos kt$

1) четная

2) $D_n(t) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin\frac{t}{2}}$

$\triangleright$ $2 \sin\frac{t}{2} D_n(t) = 2 \sin\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sum 2 \sin\frac{t}{2} \cdot \cos kt =$

$$= \sin\frac{t}{2} + \left(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right) + \ldots + \left(\sin(n+\tfrac{1}{2})t - \sin(n-\tfrac{1}{2})t\right) = \sin(n+\tfrac{1}{2}) \cdot t$$

XVIII. Критерий сходимости тригонометрического ряда

① $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\, D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt$

Св-во: $s \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\cdot 2s\,dt = s$

$$S_N(f,x) - s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\cdot \underbrace{[f(x+t)+f(x-t)-2s]}_{\psi_{x,s}(t)}\,dt$$

Теор. $s \in \mathbb{R}$; $f, |f| \in R(\Pi)$, $\forall \delta \in (0;\pi)$

$$S_N(f,x) \to S,\ n\to+\infty \iff \int_0^{\delta} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,\psi_{x,s}(t)\,dt = o(1),\ n\to+\infty$$

② Лемма Римана – Лебега

$f, |f| \in R(\Pi)$ $\quad \int_{\Pi} f(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt \to 0,\ \lambda\to+\infty \iff \begin{cases} \int_{\Pi} f(t)\cos\lambda t\,dt \to 0 \\ \int_{\Pi} f(t)\sin\lambda t\,dt \to 0 \end{cases}$

$\triangleright$ 1) $\varphi \in C^1(\Pi)$

$$\int_{\Pi} \varphi(t)e^{-i\lambda t}\,dt = \frac{1}{-i\lambda}\int_{\Pi}\varphi(t)\,de^{-i\lambda t} = \frac{1}{-i\lambda}\left(e^{-i\lambda t}\cdot\varphi(t)\Big|_{\Pi} - \int_{\Pi} e^{-i\lambda t}\,d\varphi(t)\right) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ \lambda\to+\infty$$

2) f – произв. $\quad \exists \varphi \in C^1$

$$\int_{\Pi} |f(t)-\varphi(t)|\,dt < \varepsilon$$

$$\left|\int_{\Pi} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right| = \left|\int (f-\varphi)e^{-i\lambda t}\,dt + \int \varphi e^{-i\lambda t}\,dt\right| \le \underbrace{\int |f(t)-\varphi(t)|\,dt}_{<\varepsilon} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) < 2\varepsilon,\ \lambda\to+\infty$$

③ Теорема Дирихле

$$f, f' \in KC(\Pi) \Rightarrow S(f,x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

① $f_y(x) \underset{E_x}{\rightrightarrows} \varphi(x),\ y \to y_0 \iff \lim\limits_{y\to y_0} \|f_y(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_{C(E)} = 0 \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall y \in \mathring{O}_\delta(y_0): \sup\limits_{x\in E} |f_y(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$

② Критерий равн. сх. по Гейне $f_y(x) \underset{E}{\rightrightarrows} \varphi(x),\ y\to y_0 \iff \forall y_n \to y_0,\ y_n \neq y_0 : \|f_{y_n}(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_{C(E)} \to 0$

③ Критерий Коши $f_y(x) \underset{E}{\rightrightarrows} \varphi(x),\ y \to y_0 \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \mathring{O}_\delta(y_0)\ \forall y_1, y_2 \in \mathring{O}_\delta(y_0): \|f_{y_1}(\cdot) - f_{y_2}(\cdot)\|_{C(E)} < \varepsilon$

④ Неравн. сх-ть $f_y(x) \to \varphi(x),\ y\to y_0$ поточ. на $E \iff \forall x \in E\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta\ \forall y \in \mathring{O}_\delta(y_0)\ |f_y(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$

⑤ Пред. переход $f(x,y) : [a;b] \times Y \to \mathbb{C}$

1) $f_y(x) \in \mathcal{R}[a;b],\ \forall y \in \mathring{O}_\delta(y_0)$

2) $f_y(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f,\ y \to y_0$

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a;b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{y\to y_0} \int_a^b f_y(x)\,dx$

⑥ $f(x,y) \in C([a;b]\times[c;d]) \Rightarrow F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \in C[c;d]$; $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$

⑦ Формула Лейбница

$f'_y(x,y),\ f(x,y) \in C([a;b]\times[c;d])$

$\psi, \varphi : [c;d] \to [a;b] \in C^1[c;d]$

$\Rightarrow F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \in C^1[c;d]$

$F'(y) = f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx$

⑧ $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{Y}{\rightrightarrows} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists B \in [a;\omega)\ \forall b \in [B;\omega)\ \|F_b(y) - F(y)\|_{C(Y)} = \|\int_b^\omega f(x,\cdot)\,dx\|_{C(Y)} < \varepsilon$

⑨ Неравн. сх-ть $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)\,dx$ (сход. поточ. на Y) $\iff \forall y \in Y\ \forall \varepsilon>0\ \exists B \in [a;\omega)\ \forall b \in [B,\omega)\ |F_b(y) - F(y)| = \left|\int_b^\omega f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$

⑩ Крит. Коши $F(y) = \int_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{Y}{\rightrightarrows} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists B \in [a;\omega)\ \forall b_1, b_2 \in [B,\omega)\ \|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\|_{C(Y)} < \varepsilon$

⑪ $f(x,y) \in C([a;b)\times[c;d])$; $F(y) = \int_a^\omega f(x,c)\,dx$ – расход $\Rightarrow \int_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\not\rightrightarrows}$

⑫ Призн. Вейерштр. $g, f : [a;\omega) \times Y \to \mathbb{R}$

1) $f, g \in \mathcal{R}\ (\forall [a;b] \subset [a;\omega))$

2) $|f(x,y)| \le g(x,y),\ \forall (x,y) \in [a;\omega)\times Y$

3) $\int_a^\omega g(x,y)\,dx \underset{Y}{\rightrightarrows}$

, то $\int_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{Y}{\rightrightarrows}$

⑬ $f, g : [a,\omega) \times [c;d] \to \mathbb{R}$

$f, g \in \mathcal{R}\ (\forall [a;b) \subset [a;\omega))$; $g(x,y)$ – моном. по $x \in [a;\omega)$ $\forall y \in [c;d]$

Абель: $\int_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$

$\sup\limits_{\substack{x\in[a;\omega) \\ y \in [c;d]}} |g(x,y)| \le C$

Дирихле: $\|\int_a^b f(x,\cdot)\,dx\|_{C[c;d]} \le C,\ \forall b \in [a;\omega)$

$\sup\limits_{y\in[c;d]} |g(x,y)| \rightrightarrows 0,\ x \to \omega^-$

то $\int_a^\omega f(x,y)\,g(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$

⑮ Ф-ла Фруллани $f \in C[0;+\infty)$; $a, b > 0$; $\int_d^{+\infty} \frac{f(x) - c}{x}\,dx$ – сход $\forall d>0$; c – const

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = (f(0) - c)\ln\frac{b}{a}$

⑯ Пред. переход $f(x,y) : [a;\omega) \times Y \to \mathbb{R}$

1) $\int_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows}$; $\exists$ несоб. инт. $\forall y \in Y$

2) $f(x,y) \underset{\forall [a;b] \subset [a;\omega)}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, $y \to y_0 \in Y$

$\Rightarrow \lim\limits_{y\to y_0} \int_a^\omega f(x,y)\,dx = \int_a^\omega \varphi(x)\,dx$

(17) $f(x,y): [a;\omega)\times[c;d]\to\mathbb{R}$

1) $f, f'_y \in C([a;\omega)\times[c;d])$

2) $\int_a^\omega f'_y(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$

3) $\int_a^\omega f_y(x,y_0)\,dx$ – сход. $y_0\in[c;d]$

$\Rightarrow$ $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)\,dx \in C^1[c;d]$

$F'(y)=\int_a^\omega f'_y(x,y)\,dx$

(18) $f\in C([a;\omega)\times[c;d])$

$\int_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$

$\Rightarrow F(y)=\int_a^\omega f(x,y)\,dx \in C[c;d]$

(19) $f\in C([a;\omega)\times[c;d])$

$\int_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$

$\Rightarrow$ $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)\,dx \in \mathcal{R}[c;d]$

$\int_c^d\left(\int_a^\omega f(x,y)\,dx\right)dy=\int_a^\omega\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$

(20) 1) $f\in C([a;\omega)\times[c;\bar\omega))$

2) $\Phi(x)=\int_c^{\bar\omega} f(x,y)\,dy \underset{\forall[a;b]\subset[a;\omega)}{\rightrightarrows}$

$F(y)=\int_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{\forall[c;d]\subset[c;\bar\omega)}{\rightrightarrows}$

3) Сход. один из...

$\Rightarrow \int_a^\omega\left(\int_c^{\bar\omega} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^{\bar\omega}\left(\int_a^\omega f(x,y)\,dx\right)dy$

(21) 1) $f\in C((\omega_1,\omega_2)\times(\bar\omega_1,\bar\omega_2))$

2) $\Phi(x)=\int_{\bar\omega_1}^{\bar\omega_2} f(x,y)\,dy \underset{\forall[a;b]\subset(\omega_1,\omega_2)}{\rightrightarrows}$

$F(y)=\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x,y)\,dx \underset{\forall[c;d]\subset(\bar\omega_1,\bar\omega_2)}{\rightrightarrows}$

3) Сход. один из...

$\Rightarrow \int_{\omega_1}^{\omega_2}\left(\int_{\bar\omega_1}^{\bar\omega_2} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_{\bar\omega_1}^{\bar\omega_2}\left(\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x,y)\,dx\right)dy$

(22) Инт. Эйлера – Пуассона $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt\pi}{2}$

(23) Инт. Дирихле $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn}(\alpha)$

(24) $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\cdot e^{-t}\,dt,\ x>0$

(25) $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,\ x,y>0$

(26) Ф-ла понижения $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

(27) $\Gamma(n+1)=n!$

(28) $B(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}\,dt}{(1+t)^{x+y}}$

(29) $B(x,y)=\frac{x-1}{x+y-1}B(x-1,y)=\frac{y-1}{x+y-1}B(x,y-1)$

(30) $\Gamma(x)=\int_0^1 \ln^{x-1}\left(\frac1u\right)du$

(31) Ф-ла Эйлера – Гаусса $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}n^xB(n,x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^x\cdot(n-1)!}{x\ldots(x+n-1)}$

(32) $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},\ x\in(0;1)$

(33) $\Gamma\left(\frac12\right)=\sqrt\pi$

(34) $\int_0^{\pi/2}\sin^\alpha t\cdot\cos^\beta t\,dt=\frac12 B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\right)$

(40) $B\left(\frac54;\frac34\right)=\frac{\Gamma(5/4)\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)}=\frac14\Gamma\left(\frac14\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right)=\frac14\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt2}$

35. $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $x,y>0$

36. $F_f(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt$

37. $F_g^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)\, e^{i\lambda t}\, d\lambda$

38. 1) $f_1, f_2 \in L(\mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow F_{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2} = \alpha_1 F_{f_1} + \alpha_2 F_{f_2}$

2) $f, f' \in L(\mathbb{R})$; $f'(x) \in C(\mathbb{R})$ – почти всюду $\Rightarrow F_{f'} = i\lambda F_f$

3) $f, x f(x) \in L(\mathbb{R}) \Rightarrow [F_{f(x)}(\lambda)]'_\lambda = -i F_{xf(x)}(\lambda)$

4) $f^2, g^2 \in L(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F_f(\lambda) \cdot \overline{F_g(\lambda)}\, d\lambda$

39. Призн. Жордана $f \in L(\mathbb{R})$, $f \in Var_x \Rightarrow \dfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \cos\lambda(x-t)\, dt \right) d\lambda = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

I. Равномерная сходимость пар. семейств функций

$f_y(x) \underset{E_x}{\rightrightarrows} \varphi(x_0),\ y \to y_0 \iff \lim\limits_{y \to y_0} \|f_y(.) - \varphi(.)\|_{C(E)} = 0 \iff \lim\limits_{y \to y_0} \sup\limits_{x \in E} |f_y(.) - \varphi(.)| = 0$

$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \dot{O}_\delta(y_0):\ \sup\limits_{x \in E} |f_y(x) - f(x)| < \varepsilon$

① критерий Коши: $f_y(x) \underset{E}{\rightrightarrows} \varphi(x),\ y \to y_0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \dot{O}_\delta(y_0)\ \forall y_1, y_2 \in \dot{O}_\delta(y_0)\ \|f_{y_1}(.) - f_{y_2}(.)\|_{C(E)}$

$\triangleright\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \dot{O}_\delta(y_0):\ \forall y \in \dot{O}_\delta(y_0)\quad \|f_y(.) - \varphi(.)\| < \varepsilon$

$\forall y_1, y_2 \in \dot{O}_\delta(y_0)\quad \|f_{y_1}(.) - f_{y_2}(.)\| \leq \|f_y - \varphi\| + \|\varphi - f_{y_2}\| < 2\varepsilon$

$\triangleleft\ |f_{y_1}(x) - f_{y_2}(x)| \leq \|f_{y_1}(.) - f_{y_2}(.)\| < \varepsilon$

тогда $\forall x = x_\varepsilon\quad f(x) = \lim\limits_{y_2 \to y_0} f_{y_2}(x) \Rightarrow \lim\limits_{y_2 \to y_0} |f_{y_1}(x) - f(x)| < \varepsilon$

② $f: [a;w) \times Y \to \mathbb{R},\quad w \in \mathbb{R}$

$\forall y \in Y:\ f(x,y) \in \mathcal{R}[a,w)$ в нес. см.

$F(y) = \int_a^w f(x,y)\,dx$ сход. поточ. на $Y \iff \forall y \in Y\ \forall \varepsilon > 0\ \exists B_{y,\varepsilon} \in [a,w): \forall b \in [B,w): |F_b(y) - F(y)|$
$= \int_b^w f(x,y)\,dx < \varepsilon$

$F(y) = \int_a^w f(x,y)\,dx \underset{Y}{\rightrightarrows} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a;w)\ \forall b \in [B,w)\quad \|F_b(y) - F(y)\|_{C(Y)} = \left\|\int_b^w f(x,y)\,dx\right\|_{C(Y)} < \varepsilon$

③ критерий Коши $\int_a^w f(x,y)\,dx \underset{Y}{\rightrightarrows} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in [a;w)\ \forall b_1, b_2 \in [b,w): \left\|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right\|_{C(Y)} < \varepsilon$

$\triangleright\ F_b(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx\qquad F_b(y) \underset{Y}{\rightrightarrows} F(y),\ b \to w^-\qquad F_{b_2}(y) - F_{b_1}(y) = \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx$

$\triangleleft$ аналог. из к. Коши и равн. сход.

<u>След.</u> $f: [a;w) \times [c;d] \to \mathbb{R}$

$\left.\begin{matrix} f \in C([a;w) \times [c;d]) \\ ;\ \int_a^w f(x,c)\,dx \text{ -- расх.} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_a^w f(x,y)\,dx \underset{(c;d)}{\not\rightrightarrows}$

$\triangleright$ по к. Коши $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall B \in [a;w)\ \exists b_1, b_2 \in [B,w)\quad \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| \geq \varepsilon_0$

$F(y) = \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dy \in C[c;d] \Rightarrow \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}\quad \forall y \in [c; c+\delta]$

$\Rightarrow F(y) \underset{\forall Y \in [c;d)}{\not\rightrightarrows}$, т.к. замык. Y содержит $y = c$

$\Rightarrow F(y) \underset{(c;d)}{\not\rightrightarrows}$, т.к. $\left\|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right\|_{C(Y)} \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$

④ Признак Вейерштрасса: $g, f: [a,w) \times Y \to \mathbb{R}$

1. $f, g \in \mathcal{R}\ (\forall [a;b) \subset [a;w))$
2. $|f(x,y)| \leq g(x,y),\quad \forall (x,y) \in [a;w) \times Y$
3. $\int_a^w g(x,y)\,dx \underset{Y}{\rightrightarrows}$

то $\int_a^w f(x,y)\,dx \underset{Y}{\rightrightarrows}$

$\triangleright\ \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x,y)|\,dx \leq \int_{b_1}^{b_2} g(x,y)\,dx \Rightarrow$ по к. Коши $\square$

II. Интегрируемость и дифференцируемость

① Теор. $f(x,y) : [a;b] \times Y \to \mathbb{C}$, $y \to y_0$

$$\left.\begin{array}{l} f_y(x) \in \mathcal{R}[a;b], \ \forall y \in \mathring{U}_\delta(y_0) \\ f_y(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f, \ y \to y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \in \mathcal{R}[a;b] \\ \int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{y \to y_0} \int_a^b f_y(x)\,dx \end{array}$$

▷ $P = (P, \xi)$ $\quad F_y(P) = \sum f_y(\xi_k)\Delta x_k$; $F(P) = \sum f(\xi_k)\Delta x_k$

$f_y(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$, $y \to y_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathring{U}_\delta(y_0) : \forall y \in \mathring{U}_\delta(y_0) \ \forall x \in [a;b] : |f(x) - f_y(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$|F(P) - F_y(P)| = |\sum (f(\xi_k) - f_y(\xi_k))\Delta x_k = \sum |f(\xi_k) - f_y(\xi_k)| \cdot \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a)$, $\forall y \in \mathring{U}_\delta(y_0)$

$F_y \underset{P}{\rightrightarrows} F$, $y \to y_0$, $\forall p \in P$

Пусть $P : \lambda(P) \to 0$, то

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f_y(x)\,dx = \lim_{y \to y_0} \lim_{\lambda(P)\to 0} F_y(P) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \lim_{y \to y_0} F_y(P) = \lim_{\lambda(P) \to 0} F(P) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \square$$

② Лемма: $f(x,y) \in C([a;b] \times [c;d]) \Rightarrow \Phi(u,v,y) = \int_u^v f(x,y)\,dx \in C([a,b]^2 \times [c;d])$

▷ $|\Phi(u+\Delta u, v+\Delta v, y+\Delta y) - \Phi(u,v,y)| \le \underbrace{|\Phi(u+\Delta, v+\Delta, y+\Delta) - \Phi(u+\Delta, v+\Delta, y)|}_{I_1} + \underbrace{|\Phi(u+\Delta, v+\Delta, y) - \Phi(u,v,y)|}_{I_2}$

$I_1 \le \int_{u+\Delta}^{v+\Delta} |f(x,y+\Delta) - f(x,y)|\,dx \le \omega(|\Delta y|) \cdot (b-a) \to 0$, $\quad \omega(t) \to 0, t \to 0$, т.к. $f \in C(K)$

$I_2 = \left|\left(\int_{u+\Delta}^{v+\Delta} - \int_u^v\right) f(x,y)\,dx\right| = \left|\left(\int_{u+\Delta}^u + \int_v^{v+\Delta}\right) f(x,y)\,dx\right| \le \left|\int_{u+\Delta}^u f\,dx\right| + \left|\int_v^{v+\Delta} f\,dx\right| \le C \cdot (|\Delta u| + |\Delta v|) \to 0$,

$f \in C(K) \Rightarrow f \le C \quad \square$

③ Теор. $f(x,y) \in C([a;b] \times [c;d]) \Rightarrow F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \in C[c;d]$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

▷ из леммы и т. Фубини

④ Теор. $f'_y(x,y), f(x,y) \in C([a;b] \times [c;d]) \Rightarrow F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \in C^1[c;d]$

$$F'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx$$

▷ $\Rightarrow$ по 3

▷ $\left|\frac{F(y+h) - F(y)}{h} - \int_a^b f'_y(x,y)\,dx\right| = \left|\int_a^b \left(\frac{F(x,y+h) - F(x,y)}{h} - f'_y(x,y)\right)dx\right| =$

$= \left|\int_a^b (f'_y(x, y+\theta h) - f'_y(x,y))\,dx\right| \le \int_a^b |f'_y(x,y+\theta h) - f'_y(x,y)|\,dx \le \omega(f'_y, |\theta h|) \cdot (b-a) \to 0$

$\exists \theta \in (0;1)$

т.к. $f'_y \in C(K) \Rightarrow f$ – равн.

III. Признаки Абеля и Дирихле

$f, g: [a; \omega) \times [c; d] \to \mathbb{R}$

$f, g \in R(\forall [a; b] \subset [a, \omega))$

$g(x, y)$ - моном. по $x \in [a; \omega)$ для $\forall y \in [c; d]$

Абель: 1) $\int_a^{\omega} f(x, y)\, dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$

2) $\sup\limits_{\substack{y \in [c;d] \\ x \in [a;\omega)}} |g(x, y)| \le C$

Дирихле: 1) $\left\| \int_a^b f(x, y) dx \right\| \le C$, $\forall b \in [a; \omega)$

2) $\sup\limits_{y \in [c;d]} |g(x, y)| \rightrightarrows 0$, $x \to \omega$

то $\int_a^{\omega} f(x, y) \cdot g(x, y)\, dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$

$\triangleright \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \cdot g(x, y)\, dx \right| \underset{2\text{ т. о ср.}}{\le} |g(b_1 + 0, y)| \cdot \left| \int_{b_1}^{\xi} f(x, y)\, dx \right| + |g(b_2 - 0, y)| \cdot \left| \int_{\xi}^{b_2} f(x, y)\, dx \right|$

по Абелю: $\le C \cdot \varepsilon + C \cdot \varepsilon$

по Дирихле: $\le \varepsilon \cdot C + \varepsilon \cdot C$

IV. Непрерывность и дифференцируемость

① **Теор.** $\left.\begin{array}{l} f \in C([a,\omega)\times[c;d]) \\ \int_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows} \end{array}\right\} \Rightarrow F(y)=\int_a^\omega f(x,y)\,dx \in C[c;d]$

▷ $F_b(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ $\left.\begin{array}{l} 1)\ F_b(y)\underset{[c;d]}{\rightrightarrows},\quad b\to\omega^- \\ 2)\ F_b(y)\in C([a;\omega)\times[c;d]) \end{array}\right\} \Rightarrow F(y)\in C[c;d]$

② **Теор.** $f(x,y):[a;\omega)\times[c;d]\to\mathbb{R}$

1) $f, f'_y(x,y)\in C([a,\omega)\times[c;d])$

2) $\int_a^\omega f'_y(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$, то $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)\,dx\in C^1[c;d]$

3) $\int_a^\omega f_y(x,y_0)\,dx$ – сход. при $y_0\in[c;d]$ $\quad F'(y)=\int_a^\omega f'_y(x,y)\,dx$

▷ $F_b(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx \Rightarrow f'_y, f\in C[a;b]\times[c;d] \Rightarrow \forall b:\ F'_b(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx$

$F_b(y)\in C^1[c;d]$.

$F'_b(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows} \Phi(y),\ b\to\omega^-$

$F_b(y_0)=\int_a^b f(x,y_0)\,dx$ – сход при $b\to\omega^-$, то $F_b(y)\underset{[c;d]}{\rightrightarrows}F(y),\ b\to\omega^-$

$F'(y)=\Phi(y)$ ▫

③ **Формула Фруллани** $\left.\begin{array}{l} f\in C[0;+\infty);\ a,b>0 \\ \int_d^\infty \frac{f(x)-c}{x}\,dx \text{ – сход. при } \forall d>0,\ c\text{-const} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=(f(0)-c)\ln\frac{b}{a}$

▷ $\int_d^{+\infty}\frac{f(ax)-c}{x}\,dx \overset{t=ax}{=} \int_{ad}^{+\infty}\frac{f(x)-c}{x}\,dx$; $\int_d^{+\infty}\frac{f(bx)-c}{x}\,dx \overset{t=bx}{=} \int_{bd}^{+\infty}\frac{f(x)-c}{x}\,dx$

$\int_d^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=\int_{ad}^{bd}\frac{f(x)-c}{x}\,dx \underset{\substack{1\text{ т.о ср.}\\ \xi\in[ad;bd]}}{=} (f(\xi)-c)\int_{ad}^{bd}\frac{dx}{x}=(f(\xi)-c)\ln\frac{b}{a}$; пред.пер., $d\to 0$ ▫

④ **Интеграл Эйлера-Пуассона** $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

▷ $I=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,du \underset{u=xy,\ y>0}{=} \int_0^{+\infty}y\,e^{-x^2y^2}\,dx$

$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy\int_0^{+\infty}y e^{-x^2y^2}\,dx \overset{*}{=} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}y\cdot e^{-y^2(1+x^2)}\,dy\right)dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2(1+x^2)}\left(\int_0^{+\infty}e^{-u}\,du\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$

* 1) $f(x,y)=y\cdot e^{-y^2(1+x^2)}\in C(\mathbb{R}^2)$

2) $\int_0^{+\infty}y e^{-y^2(1+x^2)}\,dy \underset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows}$ по т. Вейерштр.

$|y e^{-y^2(1+x^2)}|\le y e^{-y^2}$

$y=0;\ y=+\infty$:

Пусть $y\in[c;d]\subset(0;+\infty)$

$y e^{-y^2(1+x^2)}\le \underbrace{d\cdot e^{-c^2(1+x^2)}}_{\text{сх.}}$, призн. Вейерштр. $\Rightarrow \int_0^{+\infty}y\cdot e^{-y^2(1+x^2)}\,dx \underset{y\in[c;d]\subset(0;+\infty)}{\rightrightarrows}$

3) $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}|y e^{-y^2(1+x^2)}|\,dy\right)dx$ – сход. $(=\frac{\pi}{4})$

V. Интегрирование

① $f \in C([a;\omega) \times [c;d])$, $\int_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$ $\Big\} \Rightarrow F(y) = \int_a^\omega f(x,y)\,dx \in \mathcal{R}[c;d]$; $\int_c^d \left(\int_a^\omega f(x,y)\,dx\right) dy = \int_a^\omega \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$

▷ $F_b(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$; $\int_c^d \left(\int_a^b f\,dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f\,dy\right) dx$ по т. Фубини

1) $F_b(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \underset{[c;d]}{\rightrightarrows}$, $b \to \omega^-$
2) $F_b \in C[c;d]$, $\forall b \in [a;\omega)$
$\Big\} \Rightarrow \lim\limits_{b \to \omega^-} \int_c^d F_b(y)\,dy = \int_c^d \lim\limits_{b \to \omega^-} F_b(y)\,dy$

$\lim\limits_{b \to \omega^-} \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \lim\limits_{b \to \omega} \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$

② 1) $f \in C([a;\omega) \times [c;\bar\omega))$
2) $\Phi(x) = \int_c^{\bar\omega} f(x,y)\,dy \underset{\forall [a;b] \subset [a;\omega)}{\rightrightarrows}$
$F(y) = \int_a^\omega f(x,y)\,dx \underset{\forall [c;d] \subset [c;\bar\omega)}{\rightrightarrows}$
3) Сходится один из:

$\Big\}$, то $\int_a^\omega \left(\int_c^{\bar\omega} f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^{\bar\omega} \left(\int_a^\omega f(x,y)\,dx\right) dy$

▷ $\Phi_d(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$; Пусть $\int_a^\omega \left(\int_c^{\bar\omega} f(x,y)\,dy\right) dx$ – сход.

1) $\Phi_d(x) \underset{\forall [a;b] \subset [a;\omega)}{\rightrightarrows}$, $d \to \omega^-$
2) $\Phi_d(x) \leq \int_c^{\bar\omega} f\,dy = G(x)$
3) $\int_a^{\bar\omega} G(x)\,dx$ – сход.
$\Big\} \Rightarrow$ $\int_a^\omega \Phi_d(x)\,dx \rightrightarrows$

$\lim\limits_{d \to \bar\omega^-} \int_a^\omega \Phi_d(x)\,dx = \int_a^\omega \lim\limits_{d \to \bar\omega} \Phi_d(x)\,dx$

$\lim\limits_{d \to \bar\omega^-} \int_c^d \left(\int_a^\omega f\,dx\right) dy = \int_a^\omega \lim\limits_{d \to \bar\omega^-} \left(\int_c^d f\,dy\right) dx$ □

③ 1) $f \in C((\omega_1, \omega_2) \times (\bar\omega_1, \bar\omega_2))$
2) $\Phi(x) = \int_{\bar\omega_1}^{\bar\omega_2} f(x,y)\,dy \underset{\forall [a;b] \subset (\omega_1,\omega_2)}{\rightrightarrows}$
$F(y) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x,y)\,dx \underset{\forall [a;b] \subset (\bar\omega_1,\bar\omega_2)}{\rightrightarrows}$
3) Сход. один из:

$\Big\}$, то $\int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(\int_{\bar\omega_1}^{\bar\omega_2} f(x,y)\,dy\right) dx = \int_{\bar\omega_1}^{\bar\omega_2} \left(\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x,y)\,dx\right) dy$

▷ Разбить на неск. инт. □

④ Интеграл Дирихле $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

▷ $\alpha = 0$ $I(\alpha) = 0$; $\alpha < 0$ $I(\alpha) = -I(-\alpha)$; $\alpha > 0$

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx \underset{t=\alpha x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$; $F(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-\beta t}\,dt$, $\beta \geq \beta_0 > 0$

1) $f(t,\beta) = \frac{\sin t}{t} e^{-\beta t} \in C(\mathbb{R}^2)$
$f'_\beta = -\sin t\, e^{-\beta t} \in C(\mathbb{R}^2)$

2) $-\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-\beta t}\,dt \underset{[\beta_0;+\infty)}{\rightrightarrows}$ по Вейерштрассу $|-\sin(t) e^{-\beta t}| \leq e^{-\beta_0 t}$ – сх. на $(0;+\infty)$

3) $F(1)$ – сход. $\Rightarrow$ $F(\beta) \in D(0;+\infty)$

$F'(\beta) = -\int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-\beta t}\,dt = \mathrm{Im} \int_0^{+\infty} e^{-(\beta+i)t}\,dt = \mathrm{Im}\,\frac{1}{\beta+i} = \mathrm{Im}\,\frac{\beta - i}{\beta^2+1} = -\frac{1}{\beta^2+1}$

$F(\beta) = -\mathrm{arctg}(\beta) + C \in C[0;+\infty)$:

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ – сх. по Дирихле $\forall \beta \in [0;+\infty)$

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-\beta t}\,dt$ – сх. по Абелю, т.к. $|e^{-\beta t}| \leq 1$, $\beta, t \geq 0$; мон. по t, $\forall \beta$

$\lim\limits_{\beta \to +\infty} F(\beta) = 0 = -\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \lim\limits_{\beta \to 0+} F(\beta) = -\mathrm{arctg}(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ □

VI. Гамма-, бета-функции

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $x>0$ $\qquad B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$, $x,y>0$

① $\Gamma(x)$, $x>0$ $\triangleright$ сх-ся в $0, +\infty$

$B(x,y)$, $x,y>0$ сх-ся в $0, 1$, причем $f(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ $\square$

② $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$ $\triangleright$ $\Gamma(x+1) = -\int_0^{+\infty} t^x de^{-t} = x\Gamma(x)$ $\square$

$\Gamma(n+1) = n!$ $\triangleright$ $\Gamma(1) = 1 \Rightarrow \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ $\square$

③ $B(x,y) = B(y,x)$ $\triangleright$ $B(x,y) = \{u = 1-t\} = B(y,x)$ $\square$

④ $B(x,y) = \frac{x-1}{x+y-1} B(x-1,y)$ $\triangleright$ $B(x,y) = -\frac{1}{y}\int_0^1 t^{x-1} d(1-t)^y = 0 + \frac{x-1}{y}\int_0^1 \left((1-t)^{y-1} - t(1-t)^{y-1}\right)\cdot t^{x-2} dt$

$= \frac{y-1}{x+y-1} B(x,y-1)$ $\qquad = \frac{x-1}{y} B(x-1,y) - \frac{x-1}{y} B(x,y)$ $\square$

⑤ $B(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{y+x}} dt$ $\triangleright$ $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{z}{z+1} \\ dt = \frac{1}{(z+1)^2} dz \end{array} \right\} = \int_0^{+\infty} \frac{z^{x-1}}{(1+z)^{x-1+y-1+2}} dz$ $\square$

⑥ $\Gamma(x) = \int_0^1 \ln^{x-1}\left(\frac{1}{u}\right) du$ $\triangleright$ $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \{t = \ln\frac{1}{u}\} = \int_1^0 \ln^{x-1}\left(\frac{1}{u}\right)\cdot u\cdot\left(-\frac{1}{u}du\right)$ $\square$

⑦ $B(x,n) = \frac{(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}$, $n\in\mathbb{N}$, $x>0$ $\triangleright$ $B(x,n) = \frac{n-1}{n+x-1} B(x,n-1) = \dots = \frac{(n-1)!}{(x+n-1)\dots(x+1)}\cdot \underbrace{B(x,1)}_{=\frac{1}{x}}$ $\square$

$B(m,n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, $n,m\in\mathbb{N}$ $\triangleright$ аналог.

⑧ Эйлера–Гаусса: $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n^x B(x,n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^x (n-1)!}{x\dots(x+n-1)}$

$\triangleright$ $e^x = 1 + x + \frac{x^2 e^c}{2}$, $c\in(0;x) \vee (x;0)$

$u^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln u}{n}} = 1 + \frac{\ln u}{n} + \frac{\ln^2 u\cdot e^c}{2n^2}$, $u\in(0;1)$, $c\in\left(\frac{\ln u}{n};0\right)$

$\underbrace{n\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right)}_{f_n(u)} = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}_{f(u)} - \frac{\ln^2 u\cdot e^c}{2n}$

$0 \le f(u) - f_n(u) = \frac{\ln^2 u}{2n}\cdot e^c \le \frac{\ln^2\varepsilon}{2n}\cdot e^0 \longrightarrow 0$, $n\longrightarrow+\infty$, $\varepsilon\in(0;1)$

1) $f_n(u) \underset{[\varepsilon;1]}{\rightrightarrows} f(u)$, $n\to+\infty$

$f_n^{x-1}(u) \underset{[\varepsilon;1]}{\rightrightarrows} f^{x-1}(u)$, $n\to+\infty$

2) $\int_0^1 f_n^{x-1}(u)\,du \underset{n\in\mathbb{N}}{\rightrightarrows}$, $x\ge1$

3) $f_n^{x-1}(u) \in \mathcal{R}[\varepsilon;1]$, $\forall u$

$\Rightarrow$ по т. о пред. пер.

$\Gamma(x) = \int_0^1 \ln^{x-1}\left(\frac{1}{u}\right)du = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} n^{x-1}\cdot\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right)^{x-1} du =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 n^{x-1}\left(1-u^{\frac{1}{n}}\right)^{x-1} du = \{u = v^n\} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 n^{x-1}(1-v)^{x-1}\cdot v^{n-1} dv = \lim\limits_{n\to+\infty} n^x\cdot B(x,n)$;

по ф-лам понижения верно $x>0$ $\square$

⑨ Дополнение: $\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$, $x\in(0;1)$

$\Gamma(x)\cdot\Gamma(1-x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[n^x\cdot\frac{(n-1)!}{x\cdot\ldots\cdot(x+n-1)} \times n^{1-x}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-x)(n-1-x)\dots(1-x)}\right] =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x\left(1+\frac{x}{1}\right)\dots\left(1+\frac{x}{n-1}\right)} \times \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n-1}\right)\dots\left(1-\frac{x}{1}\right)} \times \underbrace{\frac{n}{n-x}}_{\to 1}\right] = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\prod\limits^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin\pi\cdot x}$ $\square$

⑩ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ $\triangleright$ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$ $\square$

VII. Свойства гамма-, бета- функций

(1) $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $x,y>0$

▷ $\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+y)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+y)x}\,dx \quad \{t=(1+y)x\} \quad \alpha,\beta>2$

$$\Gamma(\alpha+\beta)\cdot B(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty}\Gamma(\alpha+\beta)\cdot\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dx\right)y^{\alpha-1}\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty} x^{\beta-1}e^{-x}\left(\underbrace{\int_0^{+\infty}(yx)^{\alpha-1}e^{-yx}\,d(yx)}_{\Gamma(\alpha)}\right)dx$$

$$=\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)$$

1) $f(x,y) = x^{\alpha+\beta-1}y^{\alpha-1}e^{-(1+y)x} \in C(\mathbb{R}^2)$

2) $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}|f(x,y)|\,dy\right)dx = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ — сх. $\alpha,\beta>0$

3) $\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy \underset{x\in[0;+\infty)}{\rightrightarrows}$

$$\lim_{b\to+\infty}\sup_{x\in[0;+\infty)} x^{\beta-1}e^{-x}\int_b^{+\infty}(xy)^{\alpha-1}\cdot e^{-yx}\,d(yx)=0$$

$\varepsilon>0 \quad F = x^{\beta-1}e^{-x}\int_{bx}^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt, \quad \{t=xy\}$

$$\sup_{x\in[0;x_0]} x^{\beta-1}e^{-x} < \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}$$

$$0\le \sup_{x\in[0;+\infty)}F \le \sup_{x\in[0;x_0]}F + \sup_{[x_0;+\infty)}F = I_1+I_2$$

$$I_1 \le \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\cdot\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt = \varepsilon$$

$$I_2 \le \left(\max_{[0;+\infty)} x^{\beta-1}e^{-x}\right)\int_{bx_0}^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt \text{ — сход.}$$

пусть $C(\beta)=\max\limits_{[0;+\infty)}(x^{\beta-1}e^{-x}) \Rightarrow \lim\limits_{b\to+\infty}\sup\limits_{x\in[0;+\infty)}|F|\le\varepsilon + C(\beta)\cdot\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{bx_0}^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt=\varepsilon$

3) $\int_0^{+\infty}f(x,y)\,dx \underset{y\in[0;+\infty)}{\rightrightarrows}$

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{-yx}(xy)^{\alpha-1}\right)x^\beta e^{-x}\,dx \le \max_{[0;+\infty)}(t^{\alpha-1}e^{-t})\cdot\int_0^{+\infty}x^\beta e^{-x}\,dx$$

$$\Rightarrow \lim_{b\to+\infty}\sup_{y\in[0;+\infty)}\left|\int_b^{+\infty}f(x,y)\,dx\right| \le \lim_{b\to+\infty}\left(\max_{t\in[0;+\infty)}(t^{\alpha-1}e^{-t})\right)\int_b^{+\infty}x^\beta e^{-x}\,dx=0$$

$\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = B(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\ge2 \to \alpha,\beta>0$ по ф. понижения

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t\cos^\beta t\,dt = \frac12 B\left(\frac{\alpha+1}{2};\frac{\beta+1}{2}\right)$

▷ $\int_0^{\pi/2}\sin^\alpha t\cos^\beta t\,dt = \int_0^{\pi/2}\sin^\alpha t\cos^{\beta-1}t\,d\sin t \underset{\{z=\sin t\}}{=}\int_0^1 z^\alpha\left(\sqrt{1-z^2}\right)^{\beta-1}dz =$

$\underset{\{t=z^2\}}{=}\frac12\int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}\,dt = \frac12 B\left(\frac{\alpha+1}{2};\frac{\beta+1}{2}\right)$

VIII. Преобразования Фурье

$f \in Var_x$, $f \in L[-\pi u; \pi u]$

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{kx}{u} + b_k \sin\frac{kx}{u}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i\frac{x}{u}k},$$

где $\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi u}\int_{-\pi u}^{\pi u} f(t)\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{u}k \\ \sin\frac{t}{u}k \end{pmatrix} dt$; $C_k = \frac{1}{2\pi u}\int_{-\pi u}^{\pi u} f(t) e^{-i\frac{k}{u}t}\,dt$, $k \in \mathbb{Z}_+$

① $f \in L(\mathbb{R})$

$\lambda_k = \frac{k}{u}$ $\quad \varphi(\lambda_k) = \int_{-\pi u}^{\pi u} f(t) e^{-i\lambda_k(x-t)}\,dt$

$$\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k e^{\frac{i\pi x}{u}k} = \frac{1}{2\pi u}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi u}^{\pi u} f(t) e^{i\frac{k}{u}(x-t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\varphi(\lambda_k) \xrightarrow[u\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\,dt\right)e^{i\lambda x}\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F_f(\lambda) e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

прямое: $F_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t}\,dt$

обратное: $F_g^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\lambda t}\,d\lambda$

② Свойства:

1) $f_1, f_2 \in L(\mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $F_{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2} = \alpha_1 F_{f_1} + \alpha_2 F_{f_2}$

2) $f, f' \in L(\mathbb{R})$; $f' \in C(\mathbb{R})$ почти всюду $\Rightarrow$ $F_{f'} = i\lambda F_f$

$\triangleright$ 1) $\Rightarrow$

$\triangleright$ $F_{f'(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}\,d f(t) = i\lambda\, F_{f(x)}(\lambda)$ – инт. по частям

IX. Свойства преобразований Фурье

$f \in L(\mathbb{R})$, $f \in Var_x \cap C(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \cos\lambda(x-t)\, dt \right) d\lambda$$

$$e^{i\lambda(x-t)} = \cos\lambda(x-t) + i \sin\lambda(x-t)$$

① лемма $f, |f| \in R(\mathbb{R})$; $S \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \cos\lambda(x-t)\, dt \right) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin A\xi}{\xi} \left(f(x+\xi) + f(x-\xi) - 2S \right) d\xi + S + o(1), \quad A \to \infty$$

② Признак Жордана $f \in L(\mathbb{R})$, $f \in Var_x \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \cos\lambda(x-t)\, dt \right) d\lambda = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

$\triangleright$ $S = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, $A \to +\infty$

$\exists \delta \in (0; +\infty)$: $\int_0^{\delta} \frac{\sin A\xi}{\xi} \big(\underbrace{f(x+\xi) + f(x-\xi) - 2S}_{\varphi_{x,S}(\xi)} \big) d\xi \to 0$, $A \to +\infty$

③ Признак Дини: $f \in L(\mathbb{R})$, $\int_0^{\delta} \frac{\varphi_{x,S}(t)}{t} dt$ — сход. $S \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0; +\infty)$,

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \cos\lambda(x-t)\, dt \right) d\lambda = S$$

$\triangleright$ из сх-ти, лемма Бор.-Леб. $\int_0^{\delta} \sin(A\xi) \frac{f(x+\xi) + f(x-\xi) - 2S}{\xi} d\xi \to 0$, $A \to +\infty$

След. $f \in L(\mathbb{R})$, $\int_0^{\delta} \frac{f(x \pm \xi) - f(x \pm 0)}{\xi} d\xi$ — сход $\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \cos\lambda(x-t)\, dt \right) d\lambda = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$

$\triangleright$ по пр. Дини, $S = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$