Тема 4: цепи Маркова.

Задача 1

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

где Q - переходная матрица ц. м. (X_n).
Тогда стационарное распределение $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$:

$$\pi Q = \pi, s.t. \sum \pi_i = 1$$

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3), s.t. \sum \pi_i = 1$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{2}{5}\pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{5}\pi_1 = \pi_2 \\ \frac{3}{5}\pi_1 + \frac{4}{5}\pi_2 + \frac{3}{5}\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\pi_1 = \pi_2 \\ \pi_3 = 1 - \frac{6}{5}\pi_1 \\ \frac{3}{5}\pi_1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}\pi_1 - \frac{2}{5}(1 - \frac{6}{5}\pi_1) = 0 \end{cases}$$

Откуда $\pi_1 = \dfrac{10}{31}, \pi_2 = \dfrac{2}{31}, \pi_3 = 1 - \dfrac{12}{31} = \dfrac{19}{31}$, т.е. стационарное распределение $\pi = \left(\dfrac{10}{31}, \dfrac{2}{31}, \dfrac{19}{31}\right)$.

Задача 2

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

где Q - переходная матрица ц. м. (X_n).
Тогда стационарное распределение $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$:

$$\pi Q = \pi, s.t. \sum \pi_i = 1$$

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}, s.t. \sum \pi_i = 1$$

$$\begin{cases} \pi_2 = \pi_1 \\ \frac{2}{3}\pi_3 = \pi_2 \\ \pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_2 = \pi_1 \\ \frac{2}{3}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{7}{3}\pi_3 = 1 \end{cases}$$

Откуда $\pi_1 = \dfrac{2}{7}, \pi_2 = \dfrac{2}{7}, \pi_3 = \dfrac{3}{7}$, т.е. стационарное распределение $\pi = \left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{7}\right)$.

Задача 3

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

где Q - переходная матрица ц. м. (X_n).

Тогда стационарное распределение $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$:

$$\pi Q = \pi, s.t. \sum \pi_i = 1$$

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}, s.t. \sum \pi_i = 1$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{3}{5}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{3}{5}\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{2}{5}\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{3}{4}\pi_2 \\ \pi_3 = \frac{5}{3}(\pi_2 - \frac{3}{20}\pi_2 - \frac{4}{20}\pi_2) = \frac{13}{12}\pi_2 \\ \frac{3}{4}\pi_2 + \pi_2 + \frac{13}{12}\pi_2 = 1 \end{cases}$$

Откуда $\pi_1 = \dfrac{9}{34}, \pi_2 = \dfrac{6}{17}, \pi_3 = \dfrac{13}{34}$, т.е. стационарное распределение $\pi = \left(\dfrac{9}{34}, \dfrac{6}{17}, \dfrac{13}{34}\right)$.

По эргодической теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{I}_{\{X_k \le 2\}} = \sum_{i\in\{1,2,3\}} \mathbb{I}_{\{i\le 2\}} \pi(i) = \frac{9}{34} + \frac{6}{17} + 0 = \frac{21}{34}.$$

Задача 4

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

где Q - переходная матрица ц. м. (X_n).
Тогда стационарное распределение $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$:

$$\pi Q = \pi, s.t. \sum \pi_i = 1$$

$$(\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{pmatrix}, s.t. \sum \pi_i = 1$$

$$\begin{cases} -3\pi_1 & +\pi_2 & & +2\pi_4 & = 0 \\ 3\pi_1 & -9\pi_2 & +4\pi_3 & +\pi_4 & = 0 \\ 4\pi_1 & +3\pi_2 & -10\pi_3 & +2\pi_4 & = 0 \\ 2\pi_1 & +3\pi_2 & +6\pi_3 & -9\pi_4 & = 0 \\ \pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3 & +\pi_4 & = 1 \end{cases}$$

Решая методом Гаусса систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -9 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -10 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

получаем стационарное распределение $\pi = \left(\frac{174}{659}, \frac{146}{659}, \frac{151}{659}, \frac{188}{659}\right)$.
По эргодической теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (X_k)^3 = \sum_{i\in\{1,2,3,4\}} i^3 \pi(i) = 1^3 * \frac{174}{659} + 2^3 * \frac{146}{659} + 3^3 * \frac{151}{659} + 4^3 * \frac{188}{659} = \frac{17451}{659} \approx 26.481$$

Задача 5

Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

где Q - переходная матрица ц. м. (X_n).
Тогда стационарное распределение $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$:

$$\pi Q = \pi, s.t. \sum \pi_i = 1$$

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}, s.t. \sum \pi_i = 1$$

$$\begin{cases} -7\pi_1 & +6\pi_2 & +5\pi_3 & =0 \\ 4\pi_1 & -7\pi_2 & +4\pi_3 & =0 \\ 3\pi_1 & +\pi_2 & -9\pi_3 & =0 \\ \pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3 & =1 \end{cases}$$

Решая методом Гаусса систему уравнений

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

получаем стационарное распределение $\pi = \left(\frac{59}{132}, \frac{4}{11}, \frac{25}{132}\right)$.

По эргодической теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{I}_{\{X_k=1\}} = \sum_{i\in\{1,2,3\}} \mathbb{I}_{\{i=1\}}\pi(i) = \frac{59}{132} + 0 + 0 = \frac{59}{132}.$$

Задача 6

Пусть начальное распределение ц. м. $\mu^{(0)} = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$, а матрица перехода:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

.

Тогда функцию инициирования $\psi(x)$ для $\mu^{(0)}$ можно задать как

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{2}{7}\right) \\ 2, & x \in \left[\frac{2}{7}, 1\right] \end{cases} .$$

Пусть $U_0, U_1, \ldots \sim U[0,1]$ $i.i.d.$. Тогда $X_0 = \psi\left(U_0\right) \sim \mu^{(0)}$ задает начальное распределение. Функция обновления строится аналогично (но роль $\mu^{(0)}$ i-ая строка переходной матрицы):

$$\phi(1, x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ 2, & x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{cases}$$

$$\phi(2, x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{2}{5}\right) \\ 2, & x \in \left[\frac{2}{5}, 1\right] \end{cases}$$

Далее итеративно моделируется цепь маркова с заданным начальным распределением и матрицей перехода:

$$X_0 = \psi\left(U_0\right), X_1 = \phi\left(X_0, U_1\right), X_2 = \phi\left(X_1, U_2\right), \ldots, X_k = \phi\left(X_{k-1}, U_k\right)$$

Задача 7

Пусть начальное распределение ц. м. $\mu^{(0)} = \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}\right)$, а матрица перехода:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Тогда функцию инициирования $\psi(x)$ для $\mu^{(0)}$ можно задать как

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\frac{2}{7}\right)\\ 2, & x\in\left[\frac{2}{7},\frac{3}{7}\right)\\ 3, & x\in\left[\frac{3}{7},1\right]\end{cases}$$

Пусть $U_0,U_1,\ldots\sim U[0,1]\ i.i.d.$. Тогда $X_0=\psi\left(U_0\right)\sim\mu^{(0)}$ задает начальное распределение. Функция обновления строится аналогично (но роль $\mu^{(0)}$ i-ая строка переходной матрицы):

$$\phi(1,x)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 2, & x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\\ 3, & x\in\left[\frac{3}{4},1\right]\end{cases}$$

$$\phi(2,x)=1,\ x\in[0,1]$$

$$\phi(3,x)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\frac{1}{3}\right)\\ 2, & x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\\ 3, & x\in\left[\frac{2}{3},1\right]\end{cases}$$

Далее итеративно моделируется цепь маркова с заданным начальным распределением и матрицей перехода:

$$X_0=\psi\left(U_0\right),X_1=\phi\left(X_0,U_1\right),X_2=\phi\left(X_1,U_2\right),\ldots,X_k=\phi\left(X_{k-1},U_k\right)$$

Задача 8

Пусть стационарное распределение ц. м., заданной на графе $\pi=\left(\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{1}{3}\right)$, и известно, что $d_1=d_2=d_3=2$.

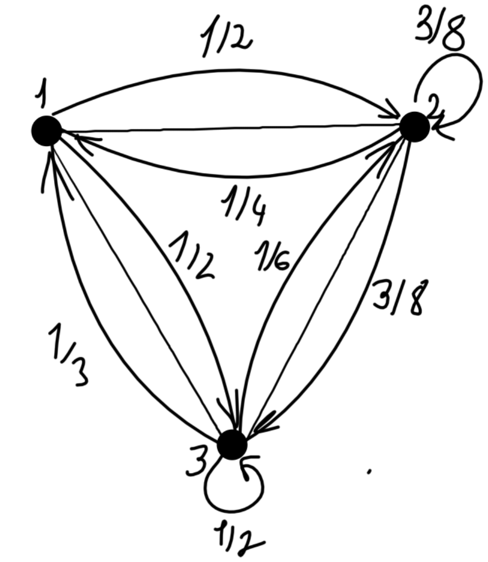
Тогда переходная матрица цепи Маркова находится следующим образом:

$$\begin{aligned}
P_{12}=&\frac{1}{d_1}\left(\frac{\pi_2}{\pi_1}\cdot\frac{d_1}{d_2}\wedge 1\right)=\frac{1}{2}\left(2\wedge 1\right)=\frac{1}{2}\\
P_{13}=&\frac{1}{d_1}\left(\frac{\pi_3}{\pi_1}\cdot\frac{d_1}{d_3}\wedge 1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\wedge 1\right)=\frac{1}{2}\\
P_{11}=&1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\\
P_{21}=&\frac{1}{d_2}\left(\frac{\pi_1}{\pi_2}\cdot\frac{d_2}{d_1}\wedge 1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\wedge 1\right)=\frac{1}{4}\\
P_{23}=&\frac{1}{d_2}\left(\frac{\pi_3}{\pi_2}\cdot\frac{d_2}{d_3}\wedge 1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\wedge 1\right)=\frac{3}{8}\\
P_{22}=&1-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}\\
P_{31}=&\frac{1}{d_3}\left(\frac{\pi_1}{\pi_3}\cdot\frac{d_3}{d_1}\wedge 1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\wedge 1\right)=\frac{1}{3}\\
P_{32}=&\frac{1}{d_3}\left(\frac{\pi_2}{\pi_3}\cdot\frac{d_3}{d_2}\wedge 1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\wedge 1\right)=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$P_{33}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Граф с вероятностями перехода



Полученное распределение является стационарным, поскольку с помощью подстановки легко видеть, что выполняется

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}$$

при

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Задача 9

Пусть стационарное распределение ц. м., заданной на графе $\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, и известно, что $d_1 = 2, d_2 = d_3 = 1$.

Тогда переходная матрица цепи Маркова находится следующим образом:

$$P_{12} = \frac{1}{d_1}\left(\frac{\pi_2}{\pi_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} \wedge 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 * 2 \wedge 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$P_{13} = \frac{1}{d_1}\left(\frac{\pi_3}{\pi_1} \cdot \frac{d_1}{d_3} \wedge 1\right) = \frac{1}{2}\left(1 * 2 \wedge 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$P_{11} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

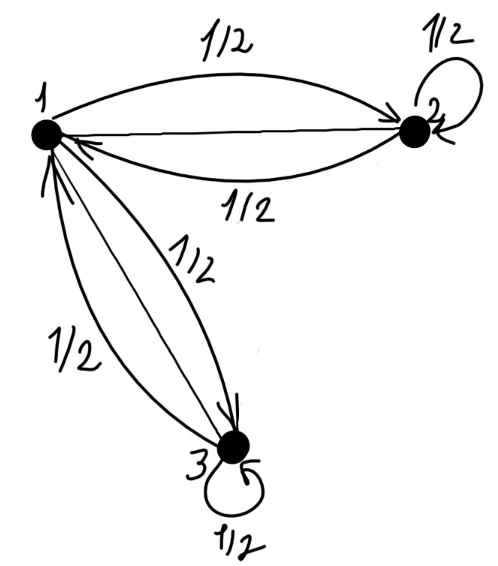
$$P_{23} = 0$$

$$P_{21} = \tfrac{1}{d_2}\left(\tfrac{\pi_1}{\pi_2} \cdot \tfrac{d_2}{d_1} \wedge 1\right) = \left(\tfrac{1}{2} \wedge 1\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$P_{22} = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$P_{32} = 0$$
$$P_{31} = \frac{1}{d_3}\left(\frac{\pi_1}{\pi_3}\cdot\frac{d_3}{d_1}\wedge 1\right) = \left(\frac{1}{2}\wedge 1\right) = \frac{1}{2}$$
$$P_{33} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Граф с вероятностями перехода



Полученное распределение является стационарным, поскольку с помощью подстановки легко видеть, что выполняется

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}$$

при

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$