# Тема 1: сигма – алгебры.

## Задача 1

Пусть $\mathcal{F}$ - сигма-алгебра, $A$ и $B$ – две совокупности подмножеств, содержащиеся в $F$, причем $A \subset B$.

По определению сигма-алгебры:
- если $B \in \mathcal{F} \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}$;
- $A \cup B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (A \cup B^c)^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \cap B \in \mathcal{F} \Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{F}$

## Задача 2

$$\mathbb{I}_B - \mathbb{I}_{A \cap B} = \begin{cases} 1, x \in B \\ 0, x \notin B \end{cases} - \begin{cases} 1, x \in A \cap B \\ 0, x \notin A \cap B \end{cases} = \begin{cases} 1, (x \in B) \ \wedge \ (x \notin A \cap B) \\ 0, ((x \in B) \wedge (x \in A \cap B)) \vee ((x \notin B) \wedge (x \notin A \cap B)) = \\ -1, (x \notin B) \wedge (x \in A \cap B) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, x \in B \backslash A \\ 0, x \notin B \backslash A \end{cases} = \mathbb{I}_{B \backslash A}$$

## Задача 3

Пусть $C$ и $D$ принадлежат сигма − алгебре $\mathcal{F}$.

Тогда по определению сигма-алгебры:
- $D \in \mathcal{F} \Rightarrow D^c \in \mathcal{F}$
- $C \cup D^c \in \mathcal{F} \Rightarrow C^c \cap D \in \mathcal{F}$
- $C \in \mathcal{F} \Rightarrow C^c \in \mathcal{F}$
- $D \cup C^c \in \mathcal{F} \Rightarrow D^c \cap C \in \mathcal{F}$
- $D^c \cap C \in \mathcal{F}, C^c \cap D \in \mathcal{F} \Rightarrow (C^c \cap D) \cup (D^c \cap C) \in \mathcal{F}$

## Задача 4

Сигма-алгебра, порожденная множеством $A$:

$\sigma(A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$

## Задача 5

Сигма-алгебра, порожденная непересекающимися множествами $A, B$:

$\sigma(A \cup B) = \{\emptyset, A, A^c, B, B^c, A \cup B, A^c \cap B^c, \Omega\}$

## Задача 6

а) $$\mathbb{I}_A * \mathbb{I}_B = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases} * \begin{cases} 1, x \in B \\ 0, x \notin B \end{cases} = \begin{cases} 1, (x \in A) \ \wedge \ (x \in B) \\ 0, ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B)) \\ \quad \vee ((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1, x \in A \cap B \\ 0, x \notin A \cap B \end{cases} = \mathbb{I}_{A\cap B}$$

b) $\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_{A\cap B} = \begin{cases} 2, (x \in A) \wedge (x \in B) \\ 1, (x \in A) \vee (x \in B) \\ 0, (x \notin A) \vee (x \notin B) \end{cases} - \begin{cases} 1, (x \in A) \wedge (x \in B) \\ 0, x \notin A \cap B \end{cases} = \begin{cases} 1, x \in A \cup B \\ 0, x \notin A \cup B \end{cases} = \mathbb{I}_{A\cup B}$

### Задача 7

Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ две сигма алгебры.

a) $\mathcal{G} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ является сигма-алгеброй, т.к.:

1. $\Omega \in \mathcal{F}_1$ и $\Omega \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow \Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{G}$

2. Если $A \in \mathcal{G} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_1$ и $A^c \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{G}$

3. Пусть $A_i \in \mathcal{G}\ \forall i \in I \Rightarrow \cup A_i \in \mathcal{F}_1, \cup A_i \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow \cup A_i \in \mathcal{G}$

b) $\mathcal{G} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ не является сигма-алгеброй в общем случае, например, если рассмотреть объединение сигма-алгебр, порожденных непересекающимися множествами $A$ и $B$:

$\sigma(A) \cup \sigma(B) = \{\emptyset, A, A^c, B, B^c, \Omega\}$

оно не содержит $A^c \cup B^c$, а значит не все элементы множества имеют обратные элементы принадлежащие этому же множеству.

### Задача 8

Пусть $\mathcal{F}$ - сигма-алгебра и множество $A$ ей не принадлежит.

$\sigma(\mathcal{F} \cup A) = \{\emptyset, C, D, C^c, D^c, A, A^c, ..., \Omega\}$

$B = (C \cap A) \cup (D \cap A^c)$

(i) $\cup_{n=1}^{\infty}[(A \cap C_n) \cup (D_n \cap A^c)] = (\cup_{n=1} C_n \cap A) \cup (\cup_{n=1} D_n \cap A^c)$

(ii) $B^c = (C^c \cup A^c) \cap (D^c \cup A) = (C^c \cap D^c) \cup (C^c \cap A) \cup (D^c \cap A^c) = (C^c \cap D^c \cap A) \cup (C^c \cap D^c \cap A^c) \cup (C^c \cap A) \cup (D^c \cap A^c) = (C^c \cap A) \cup (D^c \cap A^c)$

$\sigma$-алгебра содержит любой элемент из $B$, $B^c$, а так же объединения множеств.

### Задача 9

Пусть $(X, Y)$ - пара независимых случайных величин, а $(Z, T)$ – пара независимых случайных величин такая, что $X = Z, Y = T$ (равенство по распределению).

a) $E(f(X)) = E(f(Z))$,

b) $E(X^2Y) = E(Z^2T)$,

c) $E(f(X)g(Y)) = E(f(Z)g(T))$,

d) $E(f(X, Y)) = E(f(Z, T))$, т.к. $(X,Y) = (Z,T)$ по распределению.

Если отказаться от независимости $Z$ и $T$ это не всегда верно, т.к. $(X,Y) \neq (Z,T)$ по распределению.

## Тема 2: условные математические ожидания.

### Задача 1

$E(YE(X|\mathcal{G})) = E(E(Y|\mathcal{G})E(X|\mathcal{G}))) = E(XE(Y|\mathcal{G}))$

## Задача 2

Пусть $X \in L^2$, $E(X|\mathcal{G}) = Y$ и $E(X^2|\mathcal{G}) = Y^2$.

Тогда $E([X-Y]^2|\mathcal{G}) = E(X^2 - 2XY + Y^2|\mathcal{G}) = E(X^2|\mathcal{G}) - 2YE(X|\mathcal{G}) + Y^2 = 0$.

$E[E([X-Y]^2|\mathcal{G})] = E([X-Y]^2) = 0 \Rightarrow X = Y$

## Задача 3

Пусть $(X, Y)$ независимы, $X$ строго положительна и $Z = XY$.

$E(\mathbb{I}_{\{Z \le t\}}|X) = E(\mathbb{I}_{\{XY \le t\}}|X) = E(\mathbb{I}_{\{Y \le t/X\}}|X) = P(Y \le t/X|X) = F_Y(t/X)$

## Задача 4

Пусть $X, Y$ две с.в. такие, что $X{-}Y$ не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{G}$, $E(X{-}Y) = m$, $Var(X{-}Y) = \sigma^2$. Предположим, что $Y$ является $\mathcal{G}$ – измеримой.

$E(X{-}Y|\mathcal{G}) = E(X{-}Y) = m$.

$E(X{-}Y|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}){-}Y = m \Rightarrow E(X|\mathcal{G}) = Y + m$

$E((X{-}Y)^2|G) = \sigma^2 + m^2$

$E((X{-}Y)^2|G) = E(X^2|\mathcal{G}) - 2YE(X|\mathcal{G}) + Y^2 = \sigma^2 + m^2 \Rightarrow E(X^2|\mathcal{G}) = \sigma^2 + 2Y^2 + 2Ym - Y^2 + m^2 = \sigma^2 + (Y+m)^2$

## Задача 5

Пусть $X = X_1 + X_2$. Предположим, что $X_1$ – гауссовская с.в., не зависящая от сигма-алгебры $\mathcal{G}$, а $X_2$ является $\mathcal{G}$ – измеримой.

a) $E(X|\mathcal{G}) = E(X_1|\mathcal{G}) + E(X_2|\mathcal{G}) = E(X_1) + X_2$

$Var(X|\mathcal{G}) = E(X^2|\mathcal{G}) - (E(X|\mathcal{G}))^2 = E(X_1^2|\mathcal{G}) + 2X_2E(X_1|\mathcal{G}) + X^2 - E(X_1)^2 - 2X_2E(X_1) - X^2 = E(X_1^2) - -E(X_1)^2 = Var(X_1)$

b) $E(e^{\lambda X}|\mathcal{G}) = E(e^{\lambda X_1}e^{\lambda X_2}|\mathcal{G}) = e^{\lambda X_2}E(e^{\lambda X_1}) = e^{\lambda X_2}\,\text{exp}(\lambda E(X_1) + \lambda^2/2Var(X_1))$

## Задача 6

Пусть $Z_1$, $Z_2$ две интегрируемые с квадратом с.в.

$Cov(Z_1, Z_2|\mathcal{G}) = E(Z_1Z_2|\mathcal{G}){-}E(Z_1|\mathcal{G})E(Z_2|\mathcal{G}) = E(Z_1Z_2|\mathcal{G}){-}E(Z_2E(Z_1|\mathcal{G})|\mathcal{G}) =$

$= E(Z_1Z_2{-}Z_2E(Z_1|\mathcal{G})|\mathcal{G}) = E[(Z_1 - E(Z_1|\mathcal{G}))Z_2|\mathcal{G}]$

## Задача 7

Пусть $Z = aY + b$.

$\sigma(Z) : Z^{-1}(A) = \{w|Z(w) \in A\} = \{w|aY(w) + b \in A\} = \{w|Y(w) \in B\}$, где $A$ - борелевское, $B = \{x \in \mathbb{R} : ax + b \in A\}$ тоже борелевское, откуда следует $E(aX + b|Z) = E(aX + b|Y) = aE(X|Y) + b$

## Задача 8

Пусть $\mathcal{F}$ - сигма-алгебра. Рассмотрим сигма-алгебру $\mathcal{G}$, порожденную с.в. $\tau \wedge 1$, где $\tau$ – с.в. со значениями в $\mathbb{R}^+$. $X$ является $\mathcal{F}$ - измеримой с.в. Пользуясь леммой Дуба-Дынкина, имеем $h(1 \wedge \tau)$ - борелевская.

$E(X|\mathcal{G}) = E(X|\tau < 1)\mathbb{I}_{\{\tau<1\}} + E(X|\tau \ge 1)\mathbb{I}_{\{\tau \ge 1\}}$

$E(X|\mathcal{G})\mathbb{I}_{\{\tau \ge 1\}} = E(X|\tau \ge 1)\mathbb{I}_{\{\tau \ge 1\}} = \frac{E(X\mathbb{I}_{\{\tau \ge 1\}})}{\mathbb{I}_{\{\tau \ge 1\}}}\mathbb{I}_{\{\tau \ge 1\}}$

## Задача 9

Пусть $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ две независимые сигма-алгебры, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \wedge \mathcal{G}_2$ и $X_i$ две ограниченные случайные величины такие, что $X_i$ является $\mathcal{G}_i$ измеримой, $i = 1{,}2$.

Доказать, что $E(X_1X_2|\mathcal{G}) = E(X_1|\mathcal{G})E(X_2|\mathcal{G}) = E(X_1|\mathcal{G}_1)E(X_2|\mathcal{G}_2) = X_1X_2$.