Линейная алгебра

① Комплексные числа

1.1. $\mathbb{C} := \{a+bi,\ a,b \in \mathbb{R}\}$

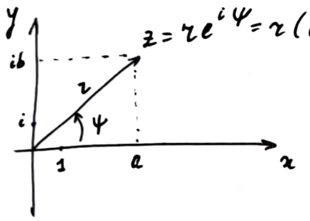
$$a = \mathrm{Re}\, z$$
$$b = \mathrm{Im}\, z$$
$$z = a + bi \qquad \bar{z} = a - bi \qquad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$(a+bi)^{-1} := \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2} \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

1.2 $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$

$$\arg z \in (-\pi; \pi]$$

$z = re^{i\psi} = r(\cos\psi + i\sin\psi)$



$$a = r\cos\psi$$
$$b = r\sin\psi$$
$$z = r(\cos\psi + i\sin\psi)$$

1.3. Формула Эйлера: $\boxed{e^{iy} = \cos y + i\sin y}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \ldots = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n y^{2n}}{2n!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right.$$

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

$$e^x \cdot e^{iy} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)\cdot\left(1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \ldots\right) = 1 + (x+iy) + \frac{(x+iy)^2}{2!} + \ldots = e^{x+iy}$$

↑ в смысле Коши

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = e^z, \quad z \in \mathbb{C}$$

1.4. Формула Муавра: $\boxed{(\cos\psi + i\sin\psi)^n = \cos n\psi + i\sin n\psi}$, т.к. $(e^{i\psi})^n = e^{i\psi n}$

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} = e^x; \quad \arg e^z = \mathrm{Im}\, z$$

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{cases} \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\operatorname{ch} z = \cos iz$; $\operatorname{sh} z = -i \sin z$;

$\operatorname{ch} iz = \cos z$; $-i \operatorname{sh} iz = \sin z$;

$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$;

где $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

$\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

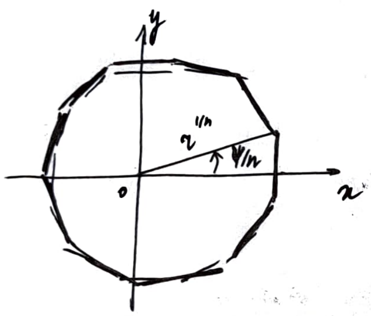
1.5. $w := \sqrt[n]{z}$, $z, w \in \mathbb{C}$

$z = re^{i\varphi}$

$w = |w| e^{i \operatorname{Arg} w} = \sqrt[n]{r e^{i(\varphi+2\pi k)}} = r^{1/n} e^{i(\varphi+2\pi k)/n}$, $k \in \mathbb{Z}$

$|w| = r^{1/n}$

$\operatorname{Arg} w = \dfrac{\varphi+2\pi k}{n}$



$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)}$$

2.1 Алгебраический многочлен ст. n.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad , n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0, a_n \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = (x-\alpha)^k f_k(x) \quad , \underset{\substack{\uparrow \\ \text{кратность} \\ \text{корня } \alpha}}{k \leq n} , \quad f_k(\alpha) \neq 0$$

2.2. Теорема Виета

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad , a_n \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$(x_1 x_2 + \ldots + x_1 x_n) + (x_2 x_3 + \ldots + x_2 x_n) + \ldots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\ldots$$

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\ldots$$

$$x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

2.3. Дискриминант $\quad D = a_n^{2n-2} \prod_{k>l} (x_k - x_l)^2$

где $x_i , i = \overline{1,n}$ - корни $f(x) = 0$

2.4. Формулы Кардано

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad , a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + px + q = 0$$

заменой

$$y = x + \frac{a_1}{3}$$

$$a_1 = b/a$$

Пусть: $\varepsilon = \dfrac{-1 + \sqrt{3} i}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$;

$$u = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}} \, ,$$

$$v = \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2}} \, ,$$

$$z_1 := x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^{-1} x_3$$

$$z_2 := x_1 + \varepsilon^{-1} x_2 + \varepsilon x_3$$

, где x_1, x_2, x_3 - корни $x^3 + px + q = 0$

z_1^3, z_2^3 - корни $y^2 + 27q \cdot y - 27p^3 = 0$

$z_1 = 3v \qquad z_2 = 3u$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^{-1} x_3 = 3v \\ x_1 + \varepsilon^{-1} x_2 + \varepsilon x_3 = 3u \end{cases}$$

Формулы Кардано:

$x_1 = u + v$ где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^{-1} v$ $\quad u(w) = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$

$x_3 = \varepsilon^{-1} u + \varepsilon v$

или

$$x_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-D}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-D}{108}}}$$

Дискриминант $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

- $D > 0$

  $D = a_3^4 (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 > 0$

  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ – три действ. разл. корня

- $D = 0$

  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ – три действ. корня, мин. два из них совп.

- $D < 0$

  $D = a_3^4 \left((x_1 - x_2)(x_1 - \overline{x}_2)\right)^2 (x_2 - \overline{x}_2)^2 = -a_3^4 (x_1 - x_2)^4 (\operatorname{Im} x_2)^2 < 0$

  x_1 – один действ. корень, $x_2, \overline{x}_2$ – два компл. сопр. корня

Дискриминант ур. произв. степени

- $D = (-1)^k$

  корни различны, k пар компл.-сопр. корней

- $D = 0$

  среди корней есть ~~кр~~ одинак. корней

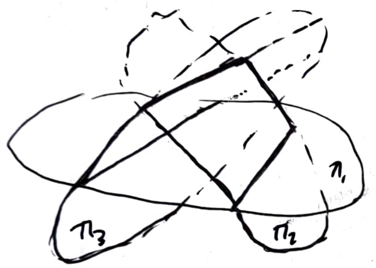
② Матрицы. Определители

1.1 $AX = 0$ – однородная система

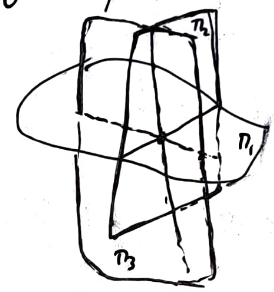
ex: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ – плоскость

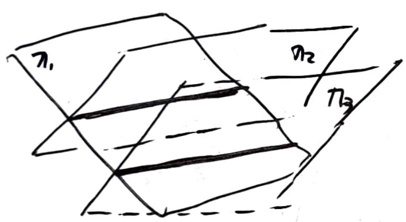
$A_{3\times3} X_{3\times1} = 0$ → бесконечное число решений

нет решений



одно решение





1.2. $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$, где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$AE = EA = A$, где $A_{n\times n}$, $E_{n\times n}$

A^{-1} : $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, где –//–

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & \dots & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$A_{3\times3}$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ – алгебраическое дополнение a_{12}

$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

[THM] $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$

$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} =$

$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} =$

$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} =$

$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$

$= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$

$\underset{4\times4}{|A|} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$

...

аналогично $|A_{n\times n}|$ и [$THM_{n\times n}$]

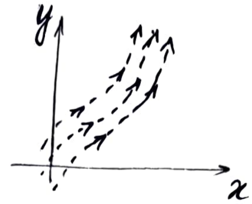
1.3.

Диф. уравнения и вар. исчисление

Диф. уравнения

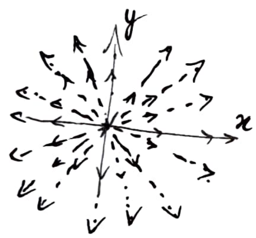
§1. Ур. первого порядка, разрешенные отн. производной

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$



(ex) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

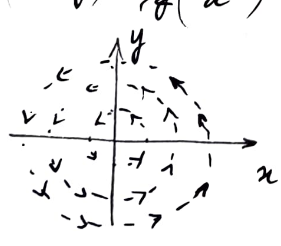
В кажд. точке отл. от $(0;0)$ угл. коэф. кас. к иск. инт. кривой равен y/x, т.е. совп. с угл. коэф. прямой из $(0;0)$ в (x,y)



Очевидно, инт кривые $y = cx$, т.к. напр. этих прямых всюду совп. с напр. поля

(ex) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

★ $\left(-\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{y}{x}\right) = -1$ => усл. ортогональности
поле напр. будет ортогонально полю напр. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$
=> инт. кривые $x^2+y^2=c^2$
(или $y=\sqrt{c^2-x^2}$ и $y=-\sqrt{c^2-x^2}$)

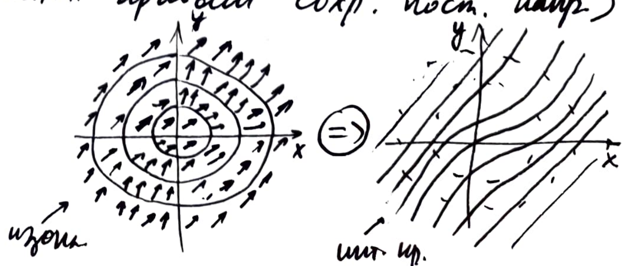


(ex) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+y^2}$

Для постр. поля найдем изоклины (геом. место т. в кот. кас. к искомым инт. кривым сохр. пост. напр.)

$\frac{dy}{dx} = k$ − const => $x^2+y^2=k^2$

изокл. − окр., угл. коэф. k



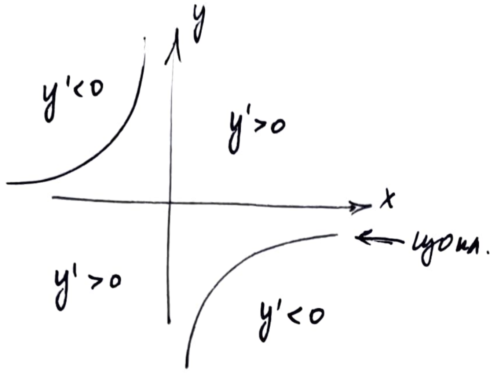
ex $y' = 1 + xy$

изоклины — гиперболы $k = xy + 1$

$k = 1$ $\quad x=0 \quad y=0$

$k = 0$ $\quad 1 + xy = 0$

↳ плоск. $y<0$ $y>0$

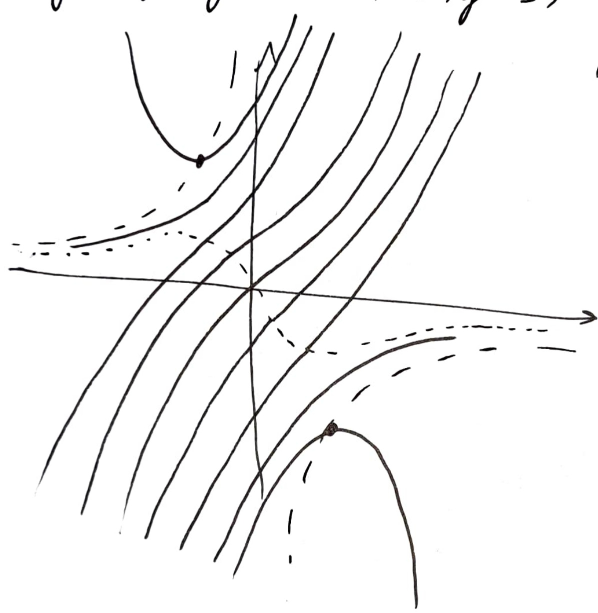


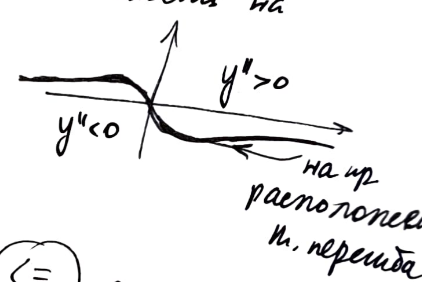
инт. кривые пересекая изоклину $1 + xy = 0$ переходят из обл. возр. в обл. убывания, и наоборот (на ветвях расп. т. max и min инт. кр.)

опр. знак $2^{ой}$ произв. в разл. областях плоскости:

$$y'' = xy' + y = x + (x^2+1)y \Rightarrow x + (x^2+1)y = 0 \quad \text{или} \quad y = -\frac{x}{1+x^2}$$

разбивает плоскость на





$\Leftarrow$ анализ обл. возр./уб.; вып./вогн.; изоклины $k=1$

$\Rightarrow$ прим. рисунок (можно уточнить, выбрав доп. изокл.)

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \iff \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$$

если оба ур-я имеют смысл, то они эквивалентны

т.к. если $y = y(x)$ решение $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, то $x = x(y)$ — реш. $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$

$\Rightarrow$ обл. инт. кривые

если в нек. т. одно из ур. теряет смысл, то в таких т. оно заменяется др. ур-ем

§2 Уравнения с разделяющимися переменными

$$f_2(y)\,dy = f_1(x)\,dx$$

Интеграл д.у. — $\Phi(x,y)=0$ опр. решение, как неявн. ф-ю

↳ общий инт. — опр. все решения д.у.

↳ част. решение при н.у. $y(x_0)=y_0$ пол. из. $\int\limits_{y_0}^{y} f_2(y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x)dx + c$

ex $x\,dx + y\,dy = 0$

$$\int x\,dx + \int y\,dy = c$$

$x^2 + y^2 = c^2$ — семейство окр. с центром $(0;0)$

ex
$$e^{x^2}dx = \frac{dy}{\ln y}$$

$$\int e^{x^2}dx = \int \frac{dy}{\ln y} + c$$

$$\varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,dx = \varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,dy$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy$$

? потеря част. реш., обр. в нуль $\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)$

? появление лишних решений, обр. в нуль $\dfrac{1}{\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)}$, если $\psi_1(y)$, $\varphi_2(x)$ разрывны

ex
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln c$$

$|y| = |x|\cdot c \iff y = \pm c x,\ c>0$

$y = c_1 x,\ c_1\in\mathbb{R},\ c_1\neq 0$

при $c=0$ $y=0$ — потерянное решение при дел. на y

~~xx~~ $x=0$ — потер. решение

...

ex $\frac{dx}{dt} = 4t\sqrt{x}$, $x(1)=1$

$$\int_1^x \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_1^t 2t\,dt$$

$$\sqrt{x} = t^2$$

$$x = t^4$$

ex $\frac{dx}{dt} = -kx$, $k>0$ $t=t_0$, $x=x_0$

$$\ln|x| - \ln|x_0| = k(t-t_0)$$

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}$$

ex $y=ax^2 \Rightarrow y' = 2ax = \frac{2y}{x} \Rightarrow \underline{y' = -\frac{x}{2y}}$ д.у. орт. траекторий

def Ортогональные траект. сем. кривых – линии, пер. под прямым углом лин. дан. сем-ва

=> угл. коэф. y_1' и y_2' кас. к кривым дан. сем-ва и иск. орт. траект. должны в кажд. точке удовл. усл. орт-ти

$$y_2' = \frac{-1}{y_1'}$$

§3 Ур., приводящие к ур. с разделяющимися пер.

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by)$$

$$z = ax+by$$

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$$

$$\frac{dz}{a+bf(z)} = dx$$

$$x = \int \frac{dz}{a+bf(z)} + C$$

ex $\quad \frac{dy}{dx} = 2x+y \quad , \quad z = 2x+y$

$$\frac{dz}{dx} - 2 = z$$

$$\ln|z+2| = \ln C + x$$

$$z = -2 + Ce^x$$

$$2x+y = -2 + Ce^x$$

$$y = Ce^x - 2x - 2$$

ex $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1 \quad , \quad z = x-y$

$$1 - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1$$

$$z\,dz = -dx$$

$$z^2 = -2x + C$$

$$(x-y)^2 = -2x + C$$

Одн. д.у. первого пор., привод. к ур. с разд. пер.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = y/x$$

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z)$$

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

$$x = c\, e^{\int \frac{dz}{f(z)-z}}$$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ — одн., если $M(x,y)$, $N(x,y)$
— одн. ф-и один. ст. одн-ти

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ex $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tg\,\frac{y}{x}$, $z = y/x$

$$x\frac{dz}{dx} + z = z + tg\,z$$

$$\frac{\cos z\,dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\sin z| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\sin z = cx$$

$$\sin\frac{y}{x} = cx$$

ex $(x+y)\,dx - (y-x)\,dy = 0$ $\qquad y = xz$

$$dy = x\,dz + z\,dx$$

$$(x + xz)\,dx - (xz - x)(x\,dz + z\,dx) = 0$$

$$(x + xz - xz^2 + zx)\,dx - (xz - x)\,x\,dz = 0$$

$$(1 + 2z - z^2)\,dx + x(1-z)\,dz = 0$$

$$\frac{(1-z)\,dz}{1+2z-z^2} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{1}{2}\ln|1+2z-z^2| + \ln|x| = \frac{1}{2}\ln|c|$$

$$x^2(1+2z-z^2) = c$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = c$$

Ур-е вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

преобр. в однор. путём переноса нач. корд. в т. пересеч. прямых (x_1, y_1)

$$X = x - x_1,\quad Y = y - y_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX};\qquad \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\, Y/X}{a_2 + b_2\, Y/X}\right) = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$$

В случае параллельности

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{k(a_1 x + b_1 y) + c_2}\right) = F(a_1 x + b_1 y)$$

[$\oplus$ $z = a_1 x + b_1 y$ => с разд. пер.]

§4. Линейные уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

ур-е линейное отн. неизв. ф-и и её производной, где $p(x), f(x)$ — непр. ф-и

Если $f(x) \equiv 0$, то ур-е будет лин. однородным

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln c_1 \quad , c_1 > 0$$

$$y = c \cdot e^{-\int p(x)dx} \quad , c \neq 0$$

(при дел. на y потер-ся решения $y \equiv 0$, кот. вкл. в сем-во реш. при $c=0$)

Метод вариации постоянной

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

инт. соотв. однородное ур-е $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$

$$y = c(x)\, e^{-\int p(x)dx} \quad , \text{ где } c(x) \text{ — новая ф-я}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx} e^{-\int p(x)dx} - c(x)\, p(x)\, e^{-\int p(x)dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = \frac{dc}{dx} e^{-\int p(x)dx} - c(x)\, p(x) e^{-\int p(x)dx} + p(x) \cdot c(x)\, e^{-\int p(x)dx}$$

$$\frac{dc}{dx} e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$\frac{dc}{dx} = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$c(x) = \int f(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + c_1$$

$$y = c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = \underbrace{c_1 e^{-\int p(x)dx}}_{} + \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \int f(x)\, e^{\int p(x)dx} dx}_{}$$

общ. реш. н. л. у. = общ реш. одн. ур. + частн. реш. неодн. ур. ($c_1 = 0$)

ex

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln c \quad , \quad y = cx$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$\frac{dc}{dx} \cdot x + c(x) - \frac{c(x) \cdot x}{x} = x^2$$

$$\frac{dc}{dx} \cdot x = x^2$$

$$dc = x\,dx$$

$$c(x) = \frac{1}{2} x^2 + c_1 \quad \Rightarrow \quad y = c_1 x + \frac{x^3}{2}$$