Алгебры Клиффорда (1)

<u>Группа</u> $G\ (\neq \varnothing)$, в кот. зад. операция $G \times G \to G$

$x, y \in G \to z \in G$

1) ассоциативность $(xy)z = x(yz) \quad \forall x, y, z \in G$
2) $\exists$ 1 эл. $\quad x \cdot e = e \cdot x = x \quad \forall x$
3) $\forall x \in G, \forall x^{-1} \in G \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$

<u>Абелева группа</u>

4) коммутативность $\quad xy = y \cdot x \quad \forall x, y \in G$

$\{G, +\}$ – аналогично (1 эл. – 0)

Ex $\{\mathbb{Z}, +\}, \{\mathbb{R}^+, \cdot\}$ – группа, $\{\mathbb{Z}, \cdot\}$ – не группа ($1/2 \notin \mathbb{Z}$)

<u>Кольцо</u> – аб. группа по сложению, где зад. оп. умножения $R \times R \to R$

5) дистрибутивность $(x+y)z = x \cdot z + y \cdot z$

$x(z+y) = x \cdot z + x \cdot y \quad \forall x, y, z \in R$

★ унитальное R : $\exists e \in R \quad \forall x \cdot e = e \cdot x \quad \forall x \in R$;
ассоциативное R: $(xy) \cdot z = x(y \cdot z)$;
коммутативное R: $xy = yx$;
кольцо с делением (<u>тело</u>) – унитальное R :
$\forall x \in R \quad \exists x^{-1} \in R \ : \ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e \quad (x \neq 0, \ 0 \neq e)$

<u>Кватернион</u> – унит., ассоц. кольцо с делением
(тело, но не поле)

<u>Поле</u> – ассоциативное, коммутативное кольцо с делением

Ex $\{\mathbb{Z}, +, \cdot\}$ – кольцо; $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ – кольцо и поле; $\{\mathbb{C}; +, \cdot\}$ – поле

$\mathbb{H}$ – Гамильтон (1843), Гиббс – векторы,
Грассман (1844) алгебра с внешн. умножением,
Клиффорд (1873) объед. $\mathbb{H}$ и $\wedge$

$q = a + bi + cj + dk \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\bar{q} = a - bi - cj - dk$

$q \cdot \bar{q} = \ldots = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$\forall q \neq 0 \quad \exists q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{|q|^2}$

$|\bar{q}| = \sqrt{q \cdot \bar{q}}$ – норма

$$\left.\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = -ji &= k \\ jk = -kj &= i \\ ki = -ik &= j \end{aligned}\right\} \text{ правила умножения}$$

Лин. пр-во V над полем F $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ — абелева гр. по слож., в кот. задана операция умн. на скаляр:

1) $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha x + \beta x$
2) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ $\quad \forall x, y, z \in V$
3) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha\cdot y$ $\quad \forall \alpha, \beta \in F$
4) $1\cdot x = x$

Алгебра над полем F — лин. пр-во, где опр. опер. умнож. (удовл. св-ву дистрибутивности) $A\times A \to A$

⊕ согл. с лин. структурой

$(\alpha x + \beta y)z = \alpha xz + \beta yz$ $\quad \forall x, y, z \in A$

$x(\alpha y + \beta z) = \alpha xy + \beta xz$ $\quad \forall \alpha, \beta \in F$

⊕ унитальная A $\quad \exists e \in A \quad ex = xe = x$

ассоциативная A $\quad (xy)z = x(yz)$

коммутативная A $\quad xy = yx$

алгебра Ли $(x\cdot y \to [x, y])$ 1) антикоммутативность $xy = -yx$

2) т-во Якоби $x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0$

Ex $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ — унит., ассоц., некоммутат. алгебра

Алгебра Клиффорда с фикс. базисом $(Cl_{p,q,r}, \; p+q+r = n)$ $\quad$ • $Cl_{p,q} = Cl_{p,q,0}$ — невырожденная АК

E — лин. пр-во над $\mathbb{R}$ $\quad (\dim E = 2^n)$

генераторы (n базисов) ← мультииндексы $(a<b<c)$

$e, e_a, e_{ab}, e_{abc}, \ldots, e_{1\ldots n}$ ← элемент объема

$2^n = 1 + n + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + 1$ (из бинома Ньютона)

$$U = ue + \sum_a u^a e_a + \sum_{a<b} u^{ab} e_{ab} + \ldots + u^{1\ldots n} e_{1\ldots n} = \sum_{\substack{|A| = k \\ k = \overline{0,n}}} u^A e_A, \quad u^A \in \mathbb{R}$$

$U \in Cl_{p,q,r}$ — произв. элемент; $u, u_a, \ldots, \in \mathbb{R}$

$A\times A \to A$ $\quad$ 1) $(\alpha x + \beta y)z = \ldots$; $x(\alpha y + \beta z) = \ldots$

2) унит. $\exists e \in A$: $eU = Ue = U$ $\quad \forall u \in A$

3) ассоц. $(U\cdot V)W = U(V\cdot W)$ $\quad \forall U, V, W \in A$

4) $\left.\begin{matrix} (e_a)^2 = \eta_{aa} e \\ e_a e_b = -e_b\cdot e_a \; (a \neq b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{e_a e_b + e_b e_a = 2\eta_{ab} e}$, $\eta = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r})$

основное антиком. отношение АК

5) $e_{a_1 \ldots a_n} = e_{a_1}\circ e_{a_2}\circ \ldots \circ e_{a_n}$, $\quad a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

Ex $Cl_{1,1,0}$, $n=2$, $\dim Cl_{1,1,0} = 2^n = 4$

$(e_1)^2 = e$, $(e_2)^2 = -e$

$Cl_{1,1,0} \ni V = ue + u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^{12} e_{12}$

$(e - 2e_1 - e_2 - e_{12})(e_1 + e_{12}) = \cancel{e_1} + e_{12} - 2e - 2e_2 + e_1 e_2 - \cancel{e_1} - e_2 + e =$

$= -e - 3e_2 + 2e_1 e_2 = -e - 3e_2 + 2e_{12}$

Алгебра Грассмана (внеш. алгебра) — $\Lambda_n = Cl_{0,0,n}$

$e_a \wedge e_b = -e_b \wedge e_a$ $(a \neq b)$, $e_a \wedge e_a = 0$

Алгебра Клиффорда V — лин. пр-во ($\dim V = n$)

Q — кв. форма

$T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k V$ ← тензоры разных рангов

↑ тенз. алгебра

тогда $Cl(V, Q) = T(V) / I(V, Q)$

— фактор-группа по двуст. идеалу $I(V,Q)$, порожденному эл-тами вида $x \otimes x - Q(x)e$

(*) алг. Грассмана, где $Q(x) = 0$

(*) $Cl(\mathbb{C}^n)$ — комплексная АК ($n = p$, $q = 0$)

(можно с пом. преобразования $e_a^1 = i e_a$)

$\mathbb{C} \otimes Cl_{p,q}$ — комплексифицированная АК : $U = \sum u^A e_A$, $u^A \in \mathbb{C}$

↑ вещест. АК

Ex1 $Cl_{0,1} \ni V = \overset{a}{\widehat{ue}} + \overset{bi}{\widehat{u^1 e_1}}$ $\Rightarrow$ $Cl_{0,1} \simeq \mathbb{C} \ni a + bi$

$n = 1$, $\dim Cl_{0,1} = 2^n = 2$

$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$; $1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Ex2 $Cl_{1,0} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \in V = ue + u^1 e_1$ ($e_1^2 = e$)

двойные числа

$Cl_{0,0} \simeq \mathbb{R}$ $\in V = ue$

$Cl_{2,0} \simeq Cl_{1,1} \not\simeq C_{0,2} \simeq \mathbb{H} = Mat_1(\mathbb{H})$

$Cl_{2,0}$	$Cl_{1,1}$	$C_{0,2}$
$e_1^2 = e$	$e_1^2 = e$	$e_1^2 = -e$
$e_2^2 = e$	$e_2^2 = -e$	$e_2^2 = -e$
$e_{12}^2 = -e$	$e_{12}^2 = e$	$e_{12}^2 = -e_1^2 \cdot e_2^2 = -e$

$\Leftrightarrow ue + u^1 i + u^2 j + u^{12} k$

$U \in ue + u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^{12} e_{12} \leftrightarrow \begin{pmatrix} u+u^1 & u^2+u^{12} \\ u^2-u^{12} & u-u^1 \end{pmatrix}$, где

$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_1 e_2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ex3 М-цы Паули (для ур-я Дирака)

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 \cdot \sigma_2 &= i\sigma_3 \\ \sigma_2 \cdot \sigma_3 &= i\sigma_1 \\ \sigma_1 \cdot \sigma_3 &= i\sigma_2 \end{aligned}\right| \qquad \sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i, \quad i \neq j$$

$(\sigma_i)^+ = \sigma_i$

эрмитово сопряжение (сопрят. для транспон. м-цы) $A^+ = A$

$(iA)^+ = \bar{i} A^+ = -iA$

$(\sigma_2)^+ = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{\bar{T}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^{-} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2$

$tr(\sigma_i) = 0 \quad \forall i = \overline{1,3}$

$Cl_{3,0}$: $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

⊛ базис эрмитовых м-ц с нулевым следом

$su(2) = \{ A \in Mat(2, \mathbb{C}),\ A^+ = -A,\ tr\, A = 0 \}$ ← $\dim = 3$

special unitary

алг. Ли

антиэрмит.

базис $i\sigma_j$, $j = \overline{1,3}$

$\left\{ \begin{pmatrix} ic & ia+b \\ ia-b & -ic \end{pmatrix} \right\}$

$Cl_{3,0} \simeq Mat(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ k+li & m+ni \end{pmatrix} \right\}$ – алгебра м-ц 2x2 над полем $\mathbb{C}$

$\dim = 8$

Ex4

$\mathbb{C}$ ⊛ $Cl_{1,3} \simeq Mat(4, \mathbb{C}) \ni U = ue + u^1 e_1 + \ldots + u^{1234} e_{1234}$, $u \in \mathbb{C}$

dim компл. = 16, dim вещ. = 32

М-цы Дирака $\quad \gamma_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & 0 & \\ & 1 & & \\ \hline 0 & & -1 & \\ & & & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}$, $\quad (\gamma_0)^2 = \mathbb{1}_4$

$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$, $i = \overline{1,3}$, $\quad (\gamma_i)^2 = -\mathbb{1}_4$

$tr(\gamma_0) = tr(\gamma_i) = 0$, $\quad (\gamma_a)^+ = \gamma_0 \gamma_a \gamma_0$

$\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2\eta_{ab} \cdot \mathbb{1}_4$, $\quad \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$, $\quad a, b = \overline{1,4}$, $i, j = \overline{1,3}$

$e \to \mathbb{1}_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

$e_i \to \gamma_{a-1}$, $a = \overline{1,4}$

$e_{ij} \to \gamma_{a-1}\gamma_{b-1}$

$e_{1234} \to \gamma_0 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3$

$$Cl_{p,q} \ni U = ue + \underbrace{\sum_a u^a e_a}_{= Cl^1_{p,q}} + \sum_{a<b} u^{ab} e_{ab} + \dots + u^{1\dots n} e_{1\dots n}$$

$$Cl^k_{p,q} := \Big\{ \sum_{|A|=k} u^A e_A \Big\}, \quad k = \overline{0,n}$$

↑ подпр-во (с фикс. k) (subspace of grade k) ранга k

$$\Rightarrow \quad Cl_{p,q} = \bigoplus_{k=0}^{n} Cl^k_{p,q} = Cl^{(0)}_{p,q} + Cl^{(1)}_{p,q} \quad ; \quad \dim Cl^k_{p,q} = C^k_n$$

↑ прямая сумма

$Cl^{even}_{p,q} := Cl^{(0)}_{p,q} := \bigoplus_{k=0,2,4\dots} Cl^k_{p,q}$ ← подпр-во (подалгебра)

$Cl^{odd}_{p,q} := Cl^{(1)}_{p,q} := \bigoplus_{k=1,3,5\dots} Cl^k_{p,q}$ ← лин. пр-во

$\mathbb{Z}_2$ градуировка $\quad \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$

Thm $\quad Cl^{(i)}_{p,q} \cdot Cl^{(j)}_{p,q} \subset Cl^{(i+j) \bmod 2}_{p,q} \qquad i,j = 0,1$

$Cl^{(0)} \cdot Cl^{(0)} \subset Cl^{(0)}$

$Cl^{(0)} \cdot Cl^{(1)} \subset Cl^{(1)}$

$Cl^{(1)} \cdot Cl^{(1)} \subset Cl^{(0)}$

▷ индексы пропадают парами => четность не меняется

$e_{a_1 \dots a_k} \circ e_{b_1, \dots, b_n}$

$e_{123} \cdot e_2 = \pm e_{13}$ □

$\langle U \rangle_k$ – проекция эл-та Ak на подпр-во ранга K

$\langle e + 2e_{123} - e_{24} \rangle_0 = e$; $\langle \dots \rangle_2 = -e_{24}$; $\langle \dots \rangle_3 = 2e_{123}$; ⟨ ... ⟩

$U = \sum\limits_{k=0}^{n} \langle U \rangle_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \overset{k}{U}$

<u>Thm</u>: $\overset{k}{U} \cdot \overset{l}{U} = \overset{|k-l|+2}{W_1} + \overset{|k-l|+4}{W_2} + \dots$

$U \cdot V = \Big(\sum\limits_{a_1 < \dots < a_k} u^{a_1 \dots a_k} e_{a_1 \dots a_k}\Big) \cdot \Big(\sum\limits_{b_1 < \dots < b_k} v^{b_1 \dots b_l} e_{b_1 \dots b_l}\Big)$

$e_{a_1 \dots a_k} \cdot e_{b_1 \dots b_l}$

- нет совп. $\Rightarrow k+l$
- 1 совп. $\Rightarrow k+l-2$

  $e_{134} \cdot e_{35} = \dots = \pm e_{145}$
- $k > l$ или $l > k \Rightarrow |k-l|$ ■

(*) $\overset{k}{U} \wedge \overset{l}{V} = \begin{cases} \overset{k+l}{W} \\ 0 \end{cases}$, $\underline{U, V \in \Lambda_n}$

A наз-ся $\mathbb{Z}_2$-градуированной, если $A = M + L$ и
$\overset{M}{U} \cdot \overset{M}{V} \subset M$
$\overset{M}{U} \cdot \overset{L}{V} \subset L$
$\overset{L}{U} \cdot \overset{L}{V} \subset M$
(замк. отн. умн.)

$Z_2 = \{+1, -1\} =$

	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

<u>Thm</u> $Cl_{p,q}$ явл $\mathbb{Z}_2$ град. $(M = Cl^{(0)},\ L = Cl^{(1)})$

▷ автоматически из $\overset{k}{U} \cdot \overset{l}{V} = W$ с шагом 2

<u>Lemma</u> $\dim Cl^{(0)}_{p,q} = \dim Cl^{(1)}_{p,q} = 2^{n-1}$

▷ $a = b = 1$ $\quad 2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$

$a = 1,\ b = -1$ $\quad 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$

$Cl^{(k)}_{p,q} \cdot Cl^{(l)}_{p,q} \subset Cl^{(k+l) \bmod 2}_{p,q}$

Алгебры Клиффорда (2)

Основные операции

① Реверс — лин. операция: $\widetilde{(u^{a_1\dots a_k} e_{a_1\dots a_k})} = u^{a_1\dots a_k} e_{a_k}\cdots e_{a_1} =$

$$= u^{a_1\dots a_k} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot e_{a_1\dots a_k}$$

- $U = \sum_{k=0}^{n} \overset{k}{U} \Rightarrow \tilde{U} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \overset{k}{U}$
- $\tilde{\tilde{U}} = U$

  $\widetilde{(U \cdot V)} = \tilde{V} \cdot \tilde{U}$ ← антиинволюция

  $\widetilde{(U+V)} = \tilde{U} + \tilde{V}$

  $\widetilde{(\lambda V)} = \lambda \tilde{V}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

② Четностное сопряжение (grade involution):

$$\widehat{(u^{a_1\dots a_k} e_{a_1\dots a_k})} = u^{a_1\dots a_k} (-1)^k e_{a_1\dots a_k}$$

- $U = \sum_{k=0}^{n} \overset{k}{U} \Rightarrow \hat{U} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \overset{k}{U}$
- $\hat{\hat{U}} = U$

  $\widehat{(U+V)} = \hat{U} + \hat{V}$

  $\widehat{(\lambda U)} = \lambda \cdot \hat{V}$

  $\widehat{(UV)} = \hat{U} \cdot \hat{V}$

③ Клиффордово сопряжение — суперпозиция двух операций:

$$\hat{\tilde{U}} = \tilde{\hat{U}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k(k+1)/2} \overset{k}{U}$$

- антиинволюция

	0	1	2	3	4	5	
$\sim$	+	+	−	−	+	+	...
$\wedge$	+	−	+	−	+	−	...
$\hat{\sim}$	+	−	−	+	+	−	...

ex. $Cl_{0,1} \simeq \mathbb{C}$ $\quad$ $\sim$ — тожд.

$\wedge = \hat{\sim}$ — компл. сопр.

$Cl_{0,2} \simeq \mathbb{H}$ $\quad$ $\hat{\sim}$ — кватерн. сопряжение

④ Комп. сопряжение в АК ($\mathbb{C} \oplus Cl_{p,q}$)

$$U = \sum_A u^A e_A \Rightarrow \bar{U} = \sum \overline{u^A} e_A, \quad u^A \in \mathbb{C}$$

- $\bar{\bar{U}} = U$; $\overline{(U+V)} = \bar{U} + \bar{V}$; $\overline{(UV)} = \bar{U}\cdot\bar{V}$; $\overline{\lambda U} = \bar{\lambda}\cdot\bar{U}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$Cl^{\bar{k}}_{p,q} := \bigoplus_{m = k \bmod 4} Cl^m_{p,q}, \quad k = 0,1,2,3$$ — кватернионные типы

$$\dim C^{\bar{k}}_{p,q} = \sum_{m = k \bmod 4} C^m_n \; ; \quad Cl_{p,q} = Cl^{\bar{0}}_{p,q} \oplus Cl^{\bar{1}}_{p,q} \oplus Cl^{\bar{2}}_{p,q} \oplus Cl^{\bar{3}}_{p,q}$$

★ $(1+i)^n = \sum_{k=0}^n C^k_n \cdot i^k = (\ldots) + i(\ldots)$

$\quad\parallel$

$(\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{\pi n}{4} + i \sin\frac{\pi n}{4}\right)$

$$\dim Cl^{\bar{0}}_{p,q} + \dim^{\bar{2}}_{p,q} = 2^{n-1} \iff \dim Cl^{\bar{0}}_{p,q} = \frac{2^{n-1} + 2^{n/2}\cos\frac{\pi n}{4}}{2}$$

$$\dim Cl^{\bar{1}}_{p,q} = \frac{2^{n-1} + 2^{n/2}\sin\frac{\pi n}{4}}{2}$$

⑤ Коммутатор $[U,V] := U\cdot V - V\cdot U$

Антикоммутатор $\{U,V\} := U\cdot V + V\cdot U$

Thm
$$[\overset{\bar{k}}{U}, \overset{\bar{k}}{V}] = \overset{\bar{2}}{W} \quad \bar{2} \leftrightarrow 1$$
$$[\overset{\bar{2}}{U}, \overset{\bar{k}}{V}] = \overset{\bar{k}}{W}$$
$$[\overset{\bar{0}}{U}, \overset{\bar{1}}{V}] = \overset{\bar{3}}{W}$$
$$\bar{0} \quad \bar{3} \quad \bar{1}$$
$$\bar{1} \quad \bar{3} \quad \bar{0}$$
$$\ldots \quad \ldots$$

$\iff$ Четверная группа Клейна (Абелева)

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{1, i, j, k\}$

$\updownarrow$

$\bar{2}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{3}$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	1	k	j
j	j	k	1	i
k	k	j	i	1

- $Cl_{p,q}$ явл. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ град. по отн. к $[U,V]$, где $1 \leftrightarrow \bar{2}$
- $Cl_{p,q}$ явл $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ град. по отн. к $\{U,V\}$, где $1 \leftrightarrow \bar{0}$

$(\bar{k}, \bar{k} \to \bar{0}; \; \bar{0}, \bar{k} \to \bar{k}; \; \bar{1}, \bar{2} \to \bar{3}; \; \bar{1}, \bar{3} \to \bar{2}, \; \bar{2}, \bar{3} \to \bar{1})$

Случ. 1 $Cl^{(0)}_{p,q} = \{U : \hat{U} = U\}$

$Cl^{(1)}_{p,q} = \{U \in Cl_{p,q} : \hat{U} = -U\}$

- $Cl^{\bar{0}}_{p,q} = \{U : \hat{U} = U, \; \tilde{U} = U\}$

$Cl^{\bar{1}}_{p,q} = \{U : \hat{U} = -U, \; \tilde{U} = U\}$

$Cl^{\bar{2}}_{p,q} = \{U : \hat{U} = U, \; \tilde{U} = -U\}$

$Cl^{\bar{3}}_{p,q} = \{U : \hat{U} = -U, \; \tilde{U} = -U\}$

▷ $(\widehat{[\overset{k}{U},\overset{l}{V}]}) = (UV - VU)^\wedge = \hat U \hat V - \hat V \hat U = (-1)^k(-1)^l [U,V]$

$(\widetilde{[\overset{k}{U},\overset{l}{V}]}) = (UV - VU)^\sim = \tilde V \tilde U - \tilde U \tilde V = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}+\frac{l(l-1)}{2}+1}[U,V]$

$\therefore [\overset{\bar 2}{U},\overset{\bar 2}{V}] \subset Cl^{\bar 2}$ $\qquad \widehat{[U,V]} = [U,V]$

$\qquad \widetilde{[U,V]} = -[U,V]$

Сл. 2 $Cl^{\bar 2}_{p,q}$, $Cl^{\bar 2}_{p,q}\oplus Cl^{\bar 0}_{p,q}$, $Cl^{\bar 2}_{p,q}\oplus Cl^{\bar 1}_{p,q}$, $Cl^{\bar 2}_{p,q}\oplus Cl^{\bar 3}_{p,q}$

— подалгебры Ли в $Cl_{p,q}$ (алг. Ли отн. взятия коммут.), кажд. из них замкнута отн. взят. коммут.

$\mathbb{C}\otimes Cl_{p,q} = Cl^{\bar 0}_{p,q} + iCl^{\bar 0}_{p,q} + Cl^{\bar 1}_{p,q} + iCl^{\bar 1}_{p,q} + \dots$

где $Cl^{\bar 0}_{p,q} = \{U : \hat U = U, \tilde U = U, \bar U = U\}$

$iCl^{\bar 0}_{p,q} = \dots$

$\dots$

8 подпр-в $(2\times 2\times 2)$

Сл. 3 $U\tilde U \subset Cl^{\bar 0}\oplus Cl^{\bar 1}$, $U\in Cl_{p,q}$

▷ $(U\tilde U)^\sim = \tilde{\tilde U}\tilde U = U\tilde U$ $\Rightarrow$ $\sim$ не мен. $\Rightarrow$ 0 или 1

Сл. 4 $U\in Cl^{\bar k}_{p,q}$, $k=\overline{0,3}$ $\qquad \overset{\bar k}{U}{}^n \subset \begin{cases} Cl^{\bar 0}, & n \text{ — четно} \\ Cl^{\bar k}, & n \text{ — нечетно}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos\overset{\bar k}{U}\subset Cl^{\bar 0} \\ \sin\overset{\bar k}{U}\subset Cl^{\bar k}\end{cases}$

▷ $U^2 = 1/2\,\{\overset{\bar k}{U},\overset{\bar k}{U}\}\subset \bar 0$

Центр АК $Cen(Cl_{p,q}) = \{U\in Cl_{p,q} : [U,V]=0,\ \forall V\in Cl_{p,q}\}$

Thm $Cen\,Cl_{p,q} = \begin{cases} Cl^{0}_{p,q}, & n \text{ — четно} \\ Cl^{0}_{p,q}\oplus Cl^{n}_{p,q}, & n \text{ — нечетно}\end{cases}$

▷ $e_{1\dots n}$ U; $\quad e_{1\dots n}e_a = (-1)^{n-1}e_a e_{1\dots n}$, n — нечетно, $a\in\{1,\dots,n\}$

$U = U^{(0)} + U^{(1)} \in Cen\,Cl_{p,q}$

$e_aU = Ue_a$, $a = 1,\dots,n$ $\Rightarrow \begin{cases} e_aU^{(0)} = U^{(0)}e_a \\ e_aU^{(1)} = U^{(1)}e_a\end{cases}$

$$V^{(0)} = ue + v^{12} e_{12} + \ldots + e^{(1234)} e_{1234} + \ldots = A^{(0)} + e_1 B^{(1)}$$

$$e_1 (u^{12} e_2 + e^{(1234)} e_{234}) + \ldots$$

не сод. e_1 не сод. e_1

$$e_1 (A^{(0)} + e_1 B^{(1)}) = (A^{(0)} + e_1 B^{(1)}) \cdot e_1$$

$$\cancel{e_1 A^{(0)}} + (e_1)^2 B^{(1)} = \cancel{A^{(0)} e_1} + e_1 B^{(1)} e_1 \implies B^{(1)} \equiv 0$$

$$= -e_1 e_1 B^{(1)}$$

далее, аналогично, нет ни одного генератора $\Rightarrow$

$V^{(0)} = ue$, $u \in \mathbb{R}$

$\triangleright$ $V^{(1)} = A^{(1)} + e_1 \cdot B^{(0)}$

$$e_1 (A^{(1)} + e_1 B^{(0)}) = (A^{(1)} + e_1 B^{(0)}) \cdot e_1$$

$$e_1 A^{(1)} + \cancel{(e_1)^2 B^{(0)}} = A^{(1)} e_1 + \cancel{e_1 B^{(0)} e_1} \implies V^{(1)} = b \cdot e_{1 \ldots n}$$

n — нечетно

$V^{(1)} \equiv 0$,

n — четно $\square$

- $[V, e_a] = 0$, $a = \overline{1, n}$ $\Rightarrow V = \begin{cases} ue + u^{1 \ldots n} e_{1 \ldots n}, & n\text{ — чет.} \\ ue, & n\text{ — неч.} \end{cases}$

- $\{V, e_a\} = 0$, $a = \overline{1, n}$ $\Rightarrow V = \begin{cases} u^{1 \ldots n} e_{1 \ldots n}, & n\text{ — чет} \\ 0, & n\text{ — неч.} \end{cases}$

- $\Lambda_n = Cl_{0,0,n}$, $\eta = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} e_a \wedge e_b = -e_b \wedge e_a, & a \neq b \\ e_a \wedge e_a = 0 \end{cases} \iff e_a \wedge e_b + e_b \wedge e_a = 2\eta_{ab} e$$

⑥ Внешнее умножение (грассман. умнож.)

$$Cl_{p,q}: \quad e_{a_1} \wedge e_{a_2} \wedge \ldots \wedge e_{a_k} := e_{[a_1} \cdot e_{a_2} \cdot \ldots \cdot e_{a_k]} =$$

$$= \frac{1}{k!} (e_{a_1 \ldots a_k} + \ldots + \ldots - \ldots)$$

- $e_{a_1} \wedge e_{a_2} = 1/2 (e_{a_1} e_{a_2} - e_{a_2} e_{a_1}) = e_{a_1 a_2} - \eta_{a_1 a_2} e$

как в опр-ле

- $e_{a_1} \wedge e_{a_2} \wedge e_{a_3} = 1/6 (e_{a_1} e_{a_2} e_{a_3} + e_{a_3} e_{a_1} e_{a_2}) + \ldots - \ldots - \ldots - \ldots) =$

$= e_{a_1} e_{a_2} e_{a_3} - \eta_{a_2 a_3} e_{a_1} + \eta_{a_1 a_3} e_{a_2} - \eta_{a_1 a_2} e_{a_3}$

$$\begin{array}{c|ccc} + & 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & 3 & 2 \\ + & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

⊛ если упорядочить, то $e_{a_1} \wedge \ldots \wedge e_{a_k} =$
$e_{a_1} \cdot \ldots \cdot e_{a_k} =$
$e_{a_1 \ldots a_k}$

базисы совпадают ($Cl_{p,q}$ и $\Lambda_{p,q}$) ⊛ если равны $=0$

$e_{a_1} \wedge e_{a_2} = e_{a_1} \cdot e_{a_2} - \eta_{a_1 a_2} e$

$+$

$e_{a_2} \wedge e_{a_1} = e_{a_2} \cdot e_{a_1} - \eta_{a_1 a_2} e$

$\Rightarrow e_{a_1} e_{a_2} + e_{a_2} e_{a_1} - 2\eta_{a_1 a_2} e = 0$ (осн. тож-во)

$\Lambda_k = e_{a_1} \wedge e_{a_2}$ $\quad \eta := \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q})$

$e_{a_1} \cdot e_{a_2} := e_{a_1} \wedge e_{a_2} + \eta_{a_1 a_2} e$

$\Rightarrow$ можно на алг. Грассмана задать клиф. умнож-е

Алгебры Клиффорда (3)

Периодичность Картана – Ботта

Лемма 1 $Cl_{p+1,q+1} \simeq Mat(2, Cl_{p,q})$ ⊛ $Cl_{1,1} \simeq Cl_{2,0} \simeq Mat(2,\mathbb{R})$

(2^{n+2}) $(4 \cdot 2^n)$

▷ $e_1, \dots, e_n$ – $Cl_{p,q}$

$(e_+)^2 = e$ $(e_-)^2 = -e$

$e_i \to \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & -e_i \end{pmatrix}$ $i = \overline{1,n}$

$e_+ \to \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}$

$e_- \to \begin{pmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{pmatrix}$

ген-ры $\longrightarrow$ ген-ры

$Cl_{p+1,q+1}$ $Mat(2, Cl_{p,q})$ ◻

Лемма 2 $Cl_{p+1,q+1} \simeq Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$

▷ $e_1, \dots, e_n$ – $Cl_{p,q}$

$(e_+)^2 = e$ $(e_-)^2 = -e$

вместо $\{e_i\}$ $(e_i)' = e_i e_+ e_-$, $i = \overline{1,n}$ (чтобы коммут. с e_+ и e_-)

◻

(Ex) $Cl_{1,3} \simeq Cl_{1,1} \otimes Cl_{0,2}$

$O_1 = e_1$ $E_1 = e_{12}$ $\underset{\text{коммут.}}{\Longleftrightarrow}$ $O_2 = e_{123}$ $E_2 = e_{34}$

$Cl_{2,0} \simeq Cl_{1,1}$ $\Leftarrow$ $O_1E_1 = -E_1O_1$, $O_1^2 = E_1^2 = +e$ $\Rightarrow$

$O_2E_2 = -E_2O_2$, $O_2^2 = E_2^2 = -e$ $\Rightarrow$ $Cl_{0,2}$

Лемма 3 $Cl_{p,q} \simeq Cl_{q+1,p-1}$, $p \geq 1$ ⊛ $Cl_{2,0} \simeq Cl_{1,1}$

▷ $e_1, \dots, e_n - Cl_{p,q}$; замена базиса $(e_i)' = \begin{cases} e_1 & i=1 \\ e_i e_1, & i = 2, \dots, p \end{cases}$; $(e_i e_1)^2 = -e_i^2$ ◻

Лемма 4 (периодичность Картана) $Cl_{p,q} \simeq Cl_{p-4,q+4}$, $p \geq 4$

▷ замена $(e_i)' = \begin{cases} e_i e_1 e_2 e_3 e_4, & i = 1,2,3,4 \\ e_i, & i = \overline{5,n} \end{cases}$ ◻

$n \backslash p-q$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	–	–	–	–	$\mathbb{R}$	–	–	–	–
1	–	–	–	$\mathbb{C}$		$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	–	–	–
2	–	–	$\mathbb{H}$		$Mat(2,\mathbb{R})$		$Mat(2,\mathbb{R})$		
3	–	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$		$Mat(2,\mathbb{C})$	–	$Mat(2,\mathbb{R})\oplus Mat(2,\mathbb{R})$	–	$Mat(2,\mathbb{C})$	
4	$Mat(2,\mathbb{H})$	–	$Mat(2,\mathbb{H})$	–	$Mat(4,\mathbb{R})$	$=$	$Mat(4,\mathbb{R})$	–	$Mat(2,\mathbb{H})$
$\vdots$									

1.2 $\quad$ 1.2

Лемма 4

Лемма 3

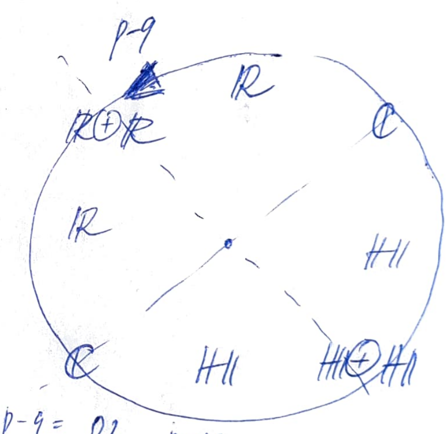
$$Cl_{0,3} \simeq \mathbb{H}\oplus\mathbb{H} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{H} & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{H}\end{array}\right)$$

$$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$e_1 \to \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix}$$

$$e_2 \to \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j\end{pmatrix}$$

$$e_3 \to \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k\end{pmatrix}$$



Thm

$$Cl_{p,q} = \begin{cases} Mat(2^{n/2}, \mathbb{R}) & \\ Mat(2^{(n-1)/2}, \mathbb{R}) \oplus Mat(2^{(n-1)/2}, \mathbb{R}), & p-q = 0,2 \mod 8 \\ Mat(2^{(n-1)/2}, \mathbb{C}), & p-q = 1 \mod 8 \\ Mat(2^{(n-2)/2}, \mathbb{H}), & p-q = 3,7 \mod 8 \\ Mat(2^{(n-3)/2}, \mathbb{H}) \oplus Mat(2^{(n-3)/2}, \mathbb{H}), & p-q = 4,6 \mod 8 \\ & p-q = 5 \mod 8 \end{cases}$$

$Cl^{(0)}_{p,q} \subset Cl_{p,q}$ ⓐ [illegible] – эквивалентности

__Лемма 5__ 1) $\underset{(2^{n/2})}{Cl^{(0)}_{p,q}} \simeq \underset{(2^{n-1})}{Cl_{p,q-1}}$ $\quad$ 2) $Cl^{(0)}_{p,q} \simeq Cl_{q,p-1}$

$\Rightarrow$ $Cl^{(0)}_{p,q} = Cl^{(0)}_{q,p}$

▷ $e_1, \dots e_n$ – $Cl_{p,q}$; $(e_i)' = e_i e_n$, $i = 1, \dots, n-1$ – $Cl^{(0)}_{p,q}$

$Cl_{p,q}$: $p+q=n$

$$Q = q + \ldots + \ldots = 2^{n-1/2}\left(2^{n-1/2} - \sin\frac{\pi(p-q+1)}{4}\right)$$

$$P = 1 + p + \ldots = 2^{n-1/2}\left(2^{n-1/2} + \sin\frac{\pi(p-q+1)}{4}\right)$$

$$P + Q = 2^n$$

$$P - Q = C \cdot \sin\frac{\pi(p-q+1)}{4}$$

Thm 2 $Cl(\mathbb{C}^n) \simeq \begin{cases} Mat(2^{n/2}, \mathbb{C}) & , n - \text{четно} \\ Mat(2^{n-1/2}, \mathbb{C}) \oplus Mat(2^{n-1/2}, \mathbb{C}) & , n - \text{нечетно} \end{cases}$

$\cong$

$\mathbb{C} \otimes Cl_{p,q}$

e.g. $\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3} \simeq Mat(4, \mathbb{C})$

▷ Способ матр. представления: $Cl_{n,0}$ (из всех можно пол p,q)

$e \to E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$n=1$ $e_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\left(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right)$ $U = ue + u'e_1 \to \begin{pmatrix} u+u' & 0 \\ 0 & u-u' \end{pmatrix}$

$n=2$ $e_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_{12} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$U = ue + u'e_1 + u^2 e_2 + u^{12} e_{12} \to \begin{pmatrix} u+u' & u^2+u^{12} \\ u^2-u^{12} & u-u' \end{pmatrix}$$

Алгоритм переходов

$n=2k$. $e_1, \ldots, e_n \to \gamma_1, \ldots, \gamma_n$

превосход. из
↓ пред. алгебры

$n=2k+1$ $e_a \to \left(\begin{array}{c|c} \gamma_a & 0 \\ \hline 0 & -\gamma_a \end{array}\right)$ $a=1,\ldots,2k$? $e_{2k+1} \to \begin{pmatrix} i^k \gamma_1 \ldots \gamma_{2k} & 0 \\ 0 & -i^k \gamma_1 \ldots \gamma_{2k} \end{pmatrix}$

$n=2k+2$ $e_a \to (-\|-)$; $e_{2k+1} \to (-\|-)$; $e_{2k+2} \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$

- Алгебра простая, если она не содержит нетривиальных двусторонних идеалов ($Mat(\ ,\mathbb{C})$; $Mat(\ ,\mathbb{R})$; $Mat(\ ,\mathbb{H})$)

- Алгебра простая центральная, если её центр изоморфен центру поля, над кот. она рассматрив-ся $Cen \simeq F$

→ n - чет => Cl - центр. простая

n - нечет => $\hookrightarrow$ $p-q = 1 \mod 4$ - прям. сумма 2ух простых алгебр
$p-q = 3 \mod 4$ - центр. простая

☆ n — чет $\quad Cen\ Cl_{p,q} = \{ue\} \simeq \mathbb{R}$

n - нечет. $\quad C_n\ Cl_{p,q} = \{ue + be_{1,\dots,n}\} \simeq \begin{cases} \mathbb{C} \\ \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \end{cases}$

$(e_{1,\dots,n})^2 = (-1)^{n(n+1)/2} \underbrace{(e_1)^2 \cdot \ldots \cdot (e_n)^2}_{(-1)^q} =$

$= (-1)^{n(n-1)/2 + q} \cdot e \overset{\text{ex}}{=} \begin{cases} -1 & p-q = 2,3 \bmod 4 \\ 1 & p-q = 0,1 \bmod 4 \end{cases}$

⋆ $U \in Cl_{p,q} \quad \langle U\rangle_k : \overset{k}{U} \in Cl^k_{p,q}, \ k = \overline{0,n}$

$Tr(U) := \langle U\rangle_0$

1) $Tr(U+V) = Tr(U) + Tr(V)$

▷ $U = ue + u^1 e_1 \ldots \ ; \ Tr(U) = ue$

2) $Tr(UV) = Tr(VU)$

▷ $Tr[U,V] = 0 \ ; \ [e_{a_1\ldots a_n}; e_{a_1\ldots a_l}] = \ldots = e_{a_1\ldots a_n}\cdot e_{a_1\ldots a_l} = \overset{k+l}{W} + \ldots +$

3) $Tr(UV\cdot W) = Tr(W\cdot UV)$ — циклические перестановки

4) $Tr(T^{-1}UT) = Tr(U) = Tr(TT^{-1}U)$

5) $Tr(\hat{U}) = Tr(U) = Tr(\tilde{U})$

<u>Thm</u> $Tr(U) = \underset{\uparrow \text{константа}}{2^{-n/2}}\ \underset{\uparrow \text{матричное представление}}{tr(\gamma(U))}$ $\quad \gamma : Cl \to Mat$

e.g. $\mathbb{C}\otimes Cl_{2,0} \quad e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e_2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$U = ue + u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^{12} e_{12} \to \begin{pmatrix} u+u_1 & \cdot \\ \cdot & u-u_1 \end{pmatrix}$

$Tr\,U = u = 1/2\ tr(\gamma(U))$

<u>Скалярное произведение</u> (евклидово, эрмитово)

$\hookrightarrow (U,V) := Tr(\tilde{\overline{U}}, V) \ ; \ U,V \in Cl^{\#}_{n,0}$

• $(V,U) = \overline{(U,V)}$

• $(V, \lambda U) = \lambda(U,U)$

• $(U+V, W) = (U,W) + (V,W)$

• $(U,U) \geq 0, \ (U,U) = 0 \Leftrightarrow U = 0$

☆ $Cl^F_{p,q} \leftrightarrow$ верно для $F = \mathbb{R}/\mathbb{C}$

$(e_{i_1 \dots i_k}, e_{j_1 \dots j_l}) = \mathrm{Tr}(e_{i_k}, \dots, e_{i_1}, e_{j_1} \dots, e_{j_l}) = \begin{cases} 1, & i_1, \dots, i_k = j_1, \dots, j_l \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$(U, U) = (\sum U_A^2) e$

↳ ортонорм. базис отн. скал. пр-е

Эрмитово сопряжение:

$U^+ = U|_{\substack{e_{i_1} \dots e_{i_k} \to (e_{i_1}, \dots e_{i_k})^{-1} \\ \lambda \to \bar{\lambda}}}$

$(ue + u^1 e_1 + \dots + u^{1 \dots n} e_{1 \dots n})^+ = \bar{u} e + \bar{u}^1 (e_1)^{-1}$

$\pm e_1$ в з-ти от сигнатуры

• $e^a := e_b \eta^{ab} = (e_a)^{-1}$; $e^A := (e_A)^{-1}$

Thm $(V, V) := \mathrm{Tr}(U^+ V)$

↳ скал. пр-е в $\mathbb{C}^F_{p,q}$

▷ $U^+ = \begin{cases} \bar{\bar{U}}, & q = 0 \\ \dots \end{cases}$ ⊛ $(\gamma_a)^+ = \gamma_0 \gamma_a \gamma_0$

Thm $U^+ = \begin{cases} e_{1 \dots p} \bar{\bar{U}} (e_{1 \dots p})^{-1}, & p \text{ - неч.} \\ e_{1 \dots p} \hat{\bar{\bar{U}}} (e_{1 \dots p})^{-1}, & p \text{ - чет.} \end{cases}$ ①

② $\begin{cases} e_{p+1, \dots n} \bar{\bar{U}} (e_{p+1 \dots n})^{-1}, & q \text{ - четно} \\ e_{p+1, \dots n} \hat{\bar{\bar{U}}} (e_{p+1, \dots n})^{-1}, & q \text{ - нечетно} \end{cases}$

▷ 1) $(e_{i_1 \dots i_k})^+ = e_{1 \dots p} (e_{i_1 \dots i_k}) (e_{1 \dots p})^{-1} \cdot (-1)^{(p+1)k} =$

$= e_{1 \dots p} (e_{i_k \dots i_1}) (e_{1 \dots p})^{-1} (-1)^{(p+1)k} =$

$= (-1)^{pk - s} e_{i_k \dots i_1} (-1)^{(p+1)k}$

$\Rightarrow 1$

2) $(e_{i_1, \dots i_k})^+ = e_{p+1, \dots n} (\widetilde{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}}) (e_{p+1, \dots, n})^{-1} (-1)^{k(q)} =$

$= (-1)^{kq - (k-s)} e_{i_k, \dots e_{i_1}} (-1)^{kq}$

$\underbrace{\overbrace{1 \dots p}^{p}}_{s}, \underbrace{\overbrace{p+1, \dots n}^{q}}_{k-s}$; $s + (k-s) = k$

$\cancel{p}k - s + \cancel{p}k + k$

$kq - k + s + kq$

3) $(e_{i_1, \dots, i_k})^+ = (e_{i_1} \dots e_{i_k})^{-1} = e_{i_k} \cdot \dots e_{i_1} (-1)^{k-s} = (-1)^{ks} \cdot e_{i_k} \dots e_{i_1} \cdot e_{i_1} \dots e_{i_k}$ ▷22

Алгебры Клиффорда (4)

Унитарные группы и алгебры Ли

$U(n) = \{A \in Mat(n, \mathbb{C}) \ : \ A^+ A = E\}$ - унит. группа (группа Ли, многообразие)

обычное эрм. сопряжение

$\underbrace{u(n) = \{A \in Mat(n, \mathbb{C})}_{gl(n)}:\ A^+ = -A\}$ - унит. алгебра (Ли)

отн. взятия коммутатора

антиэрмитова

$UCl_{p,q} = \{U \in \mathbb{C} \otimes Cl_{p,q} \ : \ U^+ U = e\} \cong \begin{cases} U(2^{n/2}), & n\text{ - четно} \\ U(2^{(n-1)/2}) + U(2^{(n-1)/2}), & n\text{ - нечетно} \end{cases}$

$uCl_{p,q} = \{U \in \mathbb{C} \otimes Cl_{p,q} \ : \ U^+ = -U\} \cong \begin{cases} u(2^{n/2}), & n\text{ - четно} \\ u(2^{n-1/2}) + u(2^{n-1/2}), & n\text{ - нечетно} \end{cases}$

$\gamma : \mathbb{C} \otimes Cl_{p,q} \to \begin{cases} Mat(2, \mathbb{C}), & n\text{ - чет.} \\ Mat(2, \mathbb{C}) \otimes Mat(2, \mathbb{C}), & n\text{ - неч..} \end{cases}$

$\gamma(U^+) = \gamma^+(U) \Leftrightarrow (\gamma_a)^+ = \gamma_a^{-1}$

согласованность — требуется унитарность

$\gamma : A \to gl(U)$ - представление

$\gamma(U \cdot V) = \gamma(U) \cdot \gamma(V)$ - гомоморфизм (сохр. умножение)

Пр. $uCl_{1,3}$, $U^+ = -U$

$\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3} \ \{\underbrace{e, ie, e_1, ie_1, \dots}_{32}\}$

$e_a \in UCl_{p,q}$ (по построению)

Ответ: $\underset{\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3}}{\underset{\cap}{uCl_{1,3}}} = lin(ie, \underbrace{ie_1, e_2, e_3, e_4, ie_{12}, ie_{13}, ie_{14}}_{16}, e_{23}, \dots, e_{123})$

Способы построения матр. пр. Ак с помощью примитивного идемпотента и миним. лев. идеала

- идемпотент t : $t^2 = t$ $\quad (t \in \mathbb{C} \otimes Cl_{p,q} \;;\; t^2 = t, \; t^+ = t)$
- левый идеал, связ. с t : $I(t) = \{ V \in Cl : Vt = 0 \}$

e.g. $Mat(4, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \otimes Cl_{1,3}$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}; \; \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ и т.д. } + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

везде идемпотент   тривиальный

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset A$$

1 из 4 примит. идемпот.   4-мерное подпр-во

1. из 4 мин. лев. идеал.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \left\{ \begin{pmatrix} a & k & 0 & 0 \\ b & l & 0 & 0 \\ c & m & 0 & 0 \\ d & n & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset A$$

8-мерное подпр-во

- Мин. левый идеал – не сод. других левых идеалов, кроме себя и трив (соотв. $t=0$)
- Примит. идемпотент – кот. соотв. мин. лев. идеалу

$$\underbrace{\begin{matrix} V \in I(t) \\ v \in Cl \end{matrix} \Rightarrow v \cdot V \subset I(t)}_{\text{лев. идеал (по опр.)}} \Leftrightarrow \text{левый идеал свя. с } t$$

$I(t) = \{ V : vVt = vV \}$

$(U, V) = Tr(U^+ V)$; $\quad U, V \in I(t) \leftarrow$ подпр-во лев. идеал

↑ скал. произв.

$\tau_1, \dots, \tau_d \quad \Rightarrow d = \dim I(t)$

↑ ортонорм. базис (выб.)

$(\tau_k, \tau^l) = \delta_k^l = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$

↑ дельта Кронекера.

$$\gamma: \mathbb{C}\otimes Cl_{p,q} \to \begin{cases} Mat(2^{n/2};\mathbb{C}) & , n - \text{чёт.} \\ Mat(2^{n-1/2};\mathbb{C})\otimes Mat(2^{n-1/2};\mathbb{C}) & , n - \text{неч.}\end{cases}$$

$$\underset{\underbrace{\mathbb{C}\otimes Cl_{p,q}}_{\in I(4)}}{U} \underset{I(4)}{\tau_k} = \sum p_k^l \tau_l$$

(непол.) матр. презент.

$$U\tau_k = p_k^l \tau_l$$

$\gamma(u)$

1) ск. пр

2) δ_k^l - мел. шд $\Rightarrow p_k^n = (U\tau_k, \tau^n)$

e.g. $n=2$ $\quad \mathbb{C}\otimes Cl_{2,0} \cong Mat(2,\mathbb{C})$

$t = 1/2\,(e+e_1) \qquad t^2 = t$

эрмитов идемпотент

$$\begin{cases}\tau_1 = \sqrt{2}\,et = \sqrt{2}t \\ \tau_2 = \sqrt{2}\,e_2 t\end{cases}$$

базис соотв. лв. идеала

$e \to \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

1) $e_1\tau_1 = e_1\sqrt{2}t = \sqrt{2}t = \tau_1 = \underset{=p_1^1}{1\cdot\tau_1} + \underset{=p_1^2}{0\cdot\tau_2}$

$e_1 t = t$

2) $e_1\tau_2 = e_1\sqrt{2}e_2 t = -\sqrt{2}e_2 t = 0\cdot\tau_1 - 1\cdot\tau_2$

$e_2\tau_1 = \ldots$

$e_2\tau_2 = \ldots$

$e_1 \to \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \quad e_2 \to \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$t = 1/2\,(e+e_1) \Rightarrow t = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

Лемма 1 $\quad \gamma(U\cdot V) = \gamma(U)\cdot\gamma(V)$

$\triangleright \quad (UV)\tau_k = U\cdot\gamma(U)_k^l\tau_l = \gamma(V)_k^l\,\gamma(U)_l^m\,\tau_m$

$\gamma(UV)_k^m\tau_m$

константы пробег. (строки на столбцы) $\square$

$n=2 \quad \mathbb{C}\otimes Cl_{2,0} \cong Mat(2,\mathbb{C})$

Лемма 2 $\quad$ для данного $\gamma(*)$: $\gamma(U^+) = \gamma^+(U)$

$\triangleright \quad \gamma(U)_k^m = (U\tau_k, \tau^m) = (\tau_k, U\tau^{+m})$

(1) $(\gamma(U)_k^m)^+ = \gamma(U^+)_k^m$

$\overline{\gamma(U)_k^m} = (U^+\tau^m, \tau_k) \longrightarrow (\gamma(U)_k^m)^+ = (U^+\tau^k, \tau_m)$

(2) $\gamma(U^+)^m = (U^+\tau_k, \tau^m) =$

$= \gamma(U^+)_k^m = (U^+\tau_k, \tau^m)$

(*) $(A, UB) = (U^+A, B)$

$(A,B) = Tr(A^+B)$

$(A,B) = \overline{(B,A)}$

Лемма 3 $\quad t = \frac{1}{2}(e + i^{a} e_1) \prod_{k=1}^{n/2-1} \frac{1}{2}(e + \underbrace{i^{b_k} e_{2k} e_{2k+1}}_{\text{множ., нахд. ед. идемпотентом}})$

$\uparrow$ n-четно

прим. идемп.
$t^2 = t, \; t^+ = t$

$$a = \begin{cases} 0, & p = 0 \\ 1, & p \neq 0 \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} 0, & 2k = p \\ 1, & 2k \neq p \end{cases}$$

$n = 4 \; (p = 1, q = 3) \qquad t = \frac{1}{2}(e + e_1) \cdot \frac{1}{2}(e + i e_{23})$

для ур-я Дирака
запис. через м-ты γ

$$t = \frac{1}{2}(E + \gamma_0) \frac{1}{2}(E + i\gamma_{12})$$

$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g U g^{-1} \quad \longleftarrow$ метод усреднения в теории конечных групп;
конечная группа в АК
среднее группы; теория Шура;
группы Салингароса

$G = \{\pm e_A\}$; $Cl_{p,q}$, A – мультииндекс

$$P(U) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum (\pm e_A) \underset{\substack{\uparrow \\ Cl_{p,q}}}{U} (\pm e_A)^{-1} = \frac{1}{2^n} \sum_A e_A U (e_A)^{-1} \overset{\text{Thm}}{=} \langle U \rangle_{\text{center}}$$

$$\triangleright \; e_a \left| \sum e_A U e_A^{-1} \right| \cdot e_a^{-1} = \sum_B e_B U e_B^{-1} \qquad a = \overline{1,n}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

e.g. $\quad e, e_1, e_2, e_{12} \; ; \quad e \mid e_1 \pm e \; ; \quad e_{12} \pm e_2$

$$\left. \begin{array}{l} e_a X e_a^{-1} = X \\ e_a X = X e_a \end{array} \right\} \Rightarrow X \in \operatorname{Cen} Cl_{p,q}$$

($\triangleright$ проекция на центр $\quad \frac{1}{2^n} \sum_A e_A U (e_A)^{-1} \circledequal \langle U \rangle_{Cen} = \begin{cases} T_2(U), & n\text{-чет.} \\ T_2(U) + T_2(U), & n\text{-нечет.} \end{cases}$

$$U = \langle U \rangle_{cen} + \langle U \rangle_{Cl \setminus Cen}$$

$G = \{\pm e_A\}$

$$\sum_{a=1}^{n} e_a U (e_a)^{-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (n - 2k) \langle U \rangle_k$$

$\boxed{n=4}$ $\sum_a \gamma_a \gamma_b (\gamma_a)^{-1} = -2\gamma_b \quad \forall b$

↑ конкр. м-цы Дирака

$\boxed{n=4}$ $\sum_a e_a U (e_a)^{-1} = 4\langle U\rangle_0 - 2\langle U\rangle_1 + 2\langle U\rangle_3 - 4\langle U\rangle_4$

$$\sum_{|A|=m} e_A U (e_A)^{-1} = \sum_k (-1)^{k\cdot m} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i C_{n-k}^{m-i} \langle U\rangle_k$$

(*) свертка Вандермонда

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum e_A U (e_A)^{-1} = Tr(U) + \pi(U) \quad , |A| - \text{четно}$$

↑ проекция на центр

$\pi(U) = \langle U\rangle_n$

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum e_A U (e_A)^{-1} = Tr(U) + (-1)^{n+1} \pi(U) \quad , |A| - \text{нечетно}$$

(*) $P^2 = P$ – проектор

$Tr(U) = 1/n \; tr(U)$ – операция отнорм., чтобы не завис. конкр.

$tr(A^+ B)$ – скал. произв., такое же для матриц

$Cl_{p,q}$ $\exists \gamma_a, \beta_a$ – эл-ты Ak
$a = \overline{1,n}$ $a = \overline{1,n}$

(*) $\gamma_A \gamma_B + \gamma_B \gamma_A = 2\eta_{AB} e$ (*)

$\beta_A \beta_B + \beta_B \beta_A = 2\eta_{AB} e$

$\gamma_a = T^{-1} \beta_a T$

↑ обратный эл-т Ak ; $\exists T^{-1}$?

(e.g.) $Cl_{2,1}$; не всегда γ, β – генераторы:

$\gamma_1 = e_1$, $\gamma_2 = e_2$, $\gamma_3 = e_{12} = \gamma_1 \cdot \gamma_2$

↑ 3 антиком. эл-та ($e_1 \cdot e_{12} = -e_{12} \cdot e_1$)

$(e_{12})^2 = e_{12} \cdot e_{12} = -e$

"лин. зав." генераторы (вып. усл. (*))

$\Rightarrow Cl_{2,0} \subset Cl_{2,1}$

Thm $Cl_{p,q}$; γ_a узова (*)

если n - четно $\Rightarrow$ γ_a - порожд. базис

если n - нечетно $\Rightarrow$ $\gamma_{1,\dots,n} = \pm e_{1\dots n}$ порожд. базис ($p-q = 1,3 \mod 4$)

$\Rightarrow$ $\gamma_{1,\dots n} = \pm e$ не порожд. базис

"ранги совпадают"

при перемножении всего

(возм. только при $p-q = 1 \mod 4$)

(*) для $\mathbb{C} \otimes Cl_{p,q}$

n - нечетн.

$\gamma_{1\dots n} = \pm ie$ не порожд. базис

$(p-q) = 3 \mod 4$

$\triangleright$ Пусть не явл базисом $\Rightarrow$ B

$$Cl + c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_{1\dots n}\gamma_{1\dots n} = 0 \quad \exists\, c_j \neq 0$$

$$c_B \neq 0 \qquad \gamma_B / c_B \cdot \mid Cl + \dots + c_{1\dots n}\gamma_{1\dots n} = 0$$

$$1 \cdot e + \underset{\gamma_k}{\hat{d}}\gamma_1 + \dots + d_{1\dots n}\gamma_{1\dots n} = 0 \quad \exists\, d_j \neq 0$$

Лемма $\forall \gamma_A \quad \exists\, \gamma_a : \{\gamma_A, \gamma_a\} = 0$

кроме $\gamma_{1\dots n}$, n-неч.

кроме e, n - любое

$\triangleright$ $|A|$ - четно, $a \in A$

$|A|$ - нечетно, $a \notin A$ $\square$

$\gamma_k \cdot \mid \gamma_a$ по лемме можно подобрать γ с 1 инд., кот. с ним не коммутирует

дополнили сложили, γ_k пропадает (или больше)

возьмём еще γ_k, пока не останется:

$$e + \underbrace{f_{1\dots n}}_{\text{переобознач. конст.}}\gamma_{1\dots n} = 0 \Rightarrow \gamma_{1\dots n} = \lambda e$$

$$\lambda = \pm 1$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2} + q} = (\gamma_{1\dots n})^2 = \lambda^2 e$$

$= 1$, $\pm e$

$p-q = 1 \mod 4$

если n – чет., то можно удб. от всех слагаем. => ⊠

если n – нег., ост 2 слаг., ком. явл.-ся ЛЗ, только если $1 \bmod 4 = p-q$

n – нег. $\{\gamma_A\}$ – перех. базис $\underset{\square}{\Rightarrow}$ $\underset{\substack{\text{ч} \\ ae+be_{1\dots n}}}{\gamma_{1\dots n}} \in \text{Cen}\, Cl$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+p} e = (\gamma_{1\dots n})^2 = (ae + be_{1\dots n})(ae + be_{1\dots n}) =$$

$$= \left(a^2 + b^2(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+q}\right) e + 2ab e_{1\dots n}$$

т.к. $b \neq 0$ (т.к. иначе γ не базис)

$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow \gamma_{1\dots n} = \underset{\neq 1}{b}\, e_{1\dots n}$

<u>Лемма</u> $Cl_{p,q}$ $\underbrace{\{\gamma_A\}, \{\beta_a\}}_{\text{базисы}}$

$T = \sum_A \beta_A \underset{\substack{\cap \\ Cl}}{F} \gamma_A^{-1} \Rightarrow \beta_a T = T\gamma_a$ ← всегда можно построить (ненулевой)

$\Downarrow$

$\gamma_a = T^{-1} \beta_a T$

↑ нужен обратимый

$\triangleright\ \beta_a \left(\sum_A \beta_A F \gamma_A^{-1}\right) \cdot \gamma_a^{-1}$

$\beta_a T \gamma_a^{-1} = T$

АК (5)

В центр. прост. Ал. $\forall$ автоморфизм — изоморф. на себя — явл. внутр.

0,4	КР	АК 1–4 опр.;
0,6	ЭКЗ	А 5–6

- гр., ал., пол., тело
- АК, e_a, e_A …
- ~, ∧, св-ва
- Cl^k, $Cl^{(k)}$, $Cl^{\bar{k}}$, $\mathbb{Z}_2$ — опр. и доказ. прост. усл.
- [ ], { }, Cen
- 8 – пер. к.б. $Cl_{2,0} \cong Cl_{1,1}$?
- Tr, †, $(\ ,\ ) = Tr(U^\dagger V)$
- прин. иg., лев. идеалы

Ⓣ. Паули 1936 ⇐ Ⓣ Сиолем-Кетер 1927 1933

$n=4$ $\quad Mat(4;\mathbb{C})$

γ_a ; β_a

E – матрица

$$(*)\quad \begin{array}{l} \gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2\eta_{ab} e \\ \beta_a \beta_b + \beta_b \beta_a = 2\eta_{ab} e \end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} \exists T \in Mat(4;\mathbb{C}) \\ \gamma_a = T^{-1} \beta_a T \end{array}$$

АК имеет одно неприводимое представление (теория предст-ий)

$\boxed{\text{(верно для } n=2k)}$

$Mat(4;\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}Cl_{1,3}$

↑ простая центр. ал.

$\sum_A e_A U e_A^{-1} = Tr_{cen}(\ )$

$T = \sum \gamma_A U \beta_A^{-1}$

$\gamma_a T = T\beta_a \quad \forall a = \overline{1,n}$

м-цы Паули

Ⓣ Artin-Wedderburn

$\forall$ прост. ал. конечн. разм. над $\mathbb{R}$ изоморфна мат. кольцу над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$

$\forall$ центр. прост. алг. над $\mathbb{R}$ изоморфна мат. кольцу над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$. (теор. Фробениуса)

Ⓣ. Паули

⇐ Д-б

γ_a удовл. $(*)$ $\Rightarrow$ $\beta_a =: T^{-1} \gamma_a T$ удовл. $(*)$

$\beta_a \beta_b + \beta_b \beta_a = T^{-1} \gamma_a T T^{-1} \gamma_b T + T^{-1} \gamma_b T T^{-1} \gamma_a T =$

$= T^{-1} \underbrace{(\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a)}_{2\eta_{ab} e} T = 2\eta_{ab} e$

Одн. формулировка Т. Паули:

$\Rightarrow$ Пусть для $\mathbb{C}l_{p,q}$; $\mathbb{C}\otimes Cl_{p,q}$ $p+q=n$ – четно

$\gamma_a, \beta_a \in Cl_{p,q}$ $\Rightarrow$ Оба набора порожд. базис $\{\gamma_A\}, \{\beta_A\}$
удовл. (*)

$\exists$ единств. с точн. $T : \gamma_a = T^{-1}\beta_a T$
до умн. на const

$\in \mathbb{C}l$ (элемент)

при этом $T = \sum_A \beta_A F (\gamma_A)^{-1}$, $F \in \{\gamma_A\} = \{e, \gamma_a \dots\}$ подойдет наверно (из элементов базиса)

$\updownarrow$

$T(F)$

получится или 0, или подходящий нам (с точн. до const)

(*) АК четн. раз-ти имеет единств. представление с точн. до эквивалентности (преобр. подобия), в нег. случ. 2 пред.)

Схема док-ва

$\circ A1$ $T = \sum \beta_A F \gamma_A^{-1}$ $\quad \beta_a T = T\gamma_a \Rightarrow \beta_A T = T\gamma_A$ (*)
$\overset{\Uparrow}{\mathbb{C}l}$

$Q = \sum \gamma_a G \beta_A^{-1}$ $\quad \gamma_a Q = Q\beta_a$ (Q будет обр. к. T с т.д. const)

$QT = \sum_A \gamma_A G (\beta_A^{-1} \cdot T) = \sum_A \underline{\gamma_A} G T \underline{(\gamma_A)^{-1}} = \pi_{centr}(GT) =$
$= Tr(G \cdot T) \cdot e$

(*) верно и для обратн.

$\sum e_A V e_A^{-1} \Rightarrow$ проекция на центр

подобр $G, T(F)$
чтобы $Tr(G_a T) \neq 0$
(если T отл. от 0, то G можно подобрать)
$T = A^{\neq 0} e_{57}$ $\} \Rightarrow \pi_e$
$\Rightarrow G = e_{57}$

для нег.
$\underbrace{Tr(G \cdot T)e + \dots e_{1\dots n}}$
$\neq 0$?
не всегда ЭТ

○ Л $\sum_{A,B} \beta_A \gamma_B \gamma_A^{-1} \gamma_B^{-1} = \begin{cases} 2^n \cdot e & , n\text{-чёт.} \\ 2(e + \beta_{1\ldots n} \gamma_{1\ldots n}^{-1}) & , n\text{-нечёт.} \end{cases}$

$\sum_A \beta_A e \gamma_A^{-1} = e + \beta_1 \gamma_1^{-1} + \ldots + \beta_{1\ldots n} \gamma_{1\ldots n}^{-1} \quad | e$

$\sum_A \beta_A \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_A^{-1} = (e \pm \beta_1 \gamma_1^{-1} \pm \ldots \pm \beta_{1\ldots n} \gamma_{1\ldots n}^{-1}) \gamma_1 \quad | \gamma_{1\ldots n}$

$\vdots$

$\sum_A \beta_A \gamma_{1\ldots n} \gamma_A^{-1} = (e \pm \beta_1 \gamma_1^{-1} \pm \ldots \pm \beta_{1\ldots n} \gamma_{1\ldots n}^{-1}) \gamma_{1\ldots n} \quad | \gamma_{1\ldots n}^{-1}$

$\Sigma = 2^n \cdot e$

в $\forall$ столбце 1/2 $\oplus$ и 1/2 $\ominus$ (кроме 1 и посл.)

в нч. случае все плюсы

$\forall$ элемент ком. с 1/2 и антикоммут. с 1/2

▶ Т Найдется $T(F)$ отл. от 0

Пусть $T(F) = 0 \quad \forall F \in \{\gamma_A\}$

$2^n = \sum \underbrace{\beta_A \overset{\checkmark F}{\gamma_B} \gamma_A^{-1}}_{=0} \gamma_B^{-1} = \sum_B 0 \cdot \gamma_B^{-1} = 0 \leftarrow$ противоречие ■

<u>Т. Паули для n-нечётно</u>

$Cl_{p,q}$, $\mathbb{C} \otimes Cl_{p,q}$, где $n = p+q$ – нч.

γ_a, β_a удовл. (*) – антиком. соотношениям

если $p-q = 1 \mod 4 \to \gamma_{1\ldots n} = \pm e_{1\ldots n} \Rightarrow$ порожд. базис
$\beta_{1\ldots n}$

$\to \gamma_{1\ldots n} = \pm e \Rightarrow$ не пор. базис
$\beta_{1\ldots n}$

(пор. базис АК из рун. много /

$p-q = 3 \mod 4 \to \gamma_{1\ldots n} (\beta_{1\ldots n}) = \pm e_{1\ldots n} \Rightarrow$ пор. баз

$\to \gamma_{1\ldots n} = \pm ie \Rightarrow$ не пор. базис

$$\left[\begin{array}{l} 1)\ \gamma_a = T^{-1}\beta_a T \iff \gamma_{1\ldots n} = \beta_{1\ldots n} \\ \exists T \\ 2)\ \nexists T,\ \text{но}\ \exists T:\ \gamma_a = -T^{-1}\beta_a T \iff \gamma_{1\ldots n} = -\beta_{1\ldots n} \end{array}\right.$$

$$3)\quad \gamma_a = e_{1\ldots n} T^{-1}\beta_a T \iff \beta_{1\ldots n} = e_{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n}$$

$$4)\quad \gamma_a = -e_{1\ldots n} T^{-1}\beta_a T \iff \beta_{1\ldots n} = -e_{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n}$$

$$\mathbb{C}\left\{\begin{array}{ll} 5)\ \gamma_a = i e_{1\ldots n} T^{-1}\beta_a T \iff & \beta_{1\ldots n} = i e_{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n} \\ 6)\ \gamma_a = -i e_{1\ldots n} T^{-1}\beta_a T \iff & \beta_{1\ldots n} = -i e_{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n} \end{array}\right.$$

$\triangleright$ алгоритм: $T = \sum \beta_A F \gamma_A{}' \neq 0$

$F \in \{1, \gamma_{A} + \gamma_B;\ |A| - \text{чет.},\ |B| - \text{нечёт}\}$

(ex) $Cl_{3,0} \simeq Mat(2, \mathbb{C})$

$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \gamma_a = \sigma_a \quad a = 1,2,3 \leftarrow$ м-цы паули

$e_1 \to \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \beta_a = -\sigma_a$

$e_2 \to \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$e_3 \to \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\nexists T:\ \gamma_a = T^{-1}\beta_a T$

Пусть $\exists T$ $\quad \underset{i\mathbb{1}}{\gamma_{123}} = T^{-1}\beta_1 T T^{-1}\beta_2 T T^{-1}\beta_3 T = T^{-1}\underbrace{\beta_{123}}_{-i\mathbb{1}} T = -i\mathbb{1}$

$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ противор.

$\Rightarrow \nexists T$

$\exists T:\ \gamma_a = -T^{-1}\beta_a T$, где $T = e$

След: $\mathbb{C} \otimes Cl_{p,q} \ni U = u e + \sum_a u^a e_a + \ldots + u^{1 \ldots n} e_{1 \ldots n}$

$Tr(U) = u e$ $\quad \Big(\underbrace{Tr(U) = Tr(\hat{U})}_{\text{лемма}} = u e \Big)$

тот. предст.

$\downarrow$

$\gamma : Cl_{p,q} \xrightarrow{\text{изом.}} \begin{cases} Mat(2^{n/2}; \mathbb{C}) &, n - \text{чет.} \\ Mat(2^{\frac{n-1}{2}}; \mathbb{C}) \oplus Mat(2^{\frac{n-1}{2}}; \mathbb{C}) \end{cases}$

Теор: $\quad Tr(U) = \dfrac{1}{2^{[\frac{n+1}{2}]}} \, tr(\gamma(U))$

тот. предст. матр. рез-та

$\triangleright$ План док-ва:

провер. для рекурр. метода $\quad e \to 1$

....

$\Rightarrow$ по т. Паули

если n-четно $\quad \gamma_a = T^{-1} \beta_a T$

$\big(Tr(T^{-1} A T) = Tr A \big)$

т.к. $Tr(AB) = Tr(BA)$

если n-нечетно $\quad \gamma_a = \pm T^{-1} \beta_a T$

" $\gamma(U) = T^{-1} \hat{\beta}(U) T$ "

$\gamma(U) = T^{-1} \beta(U) . T$ для чет. рангов

$\gamma(U) = T^{-1} \hat{\beta}(U) T$ для неч. рангов

$\Downarrow$

$Tr\, \gamma(U) = Tr(\beta(U)) = Tr(\hat{\beta}(U))$

Определитель от эл. АК $\mathbb{C}\otimes Cl_{p,q}$

$\det U = \det(\gamma(U))$, где $\gamma : Cl_{p,q} \xrightarrow[\text{предст.}]{\text{точн.}} \begin{cases} Mat \\ Mat \oplus Mat \end{cases}$

$U \in \mathbb{C}\otimes Cl_{p,q}$

Корректность: n - четно $\quad \gamma_a = T^{-1}\beta_a T$ (базисы)

$\det(\gamma(U)) = \det(\beta(U))$

n - нечетно → -//-

↓ $\gamma_a = -T^{-1}\beta_a T \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma(U) = T^{-1}\beta(\hat{U})T \Rightarrow \det(\gamma(U)) = \det(\beta(\hat{U}))$

$\Rightarrow \det(U) = \det(\hat{U})$

лемма (верно для рекуррентного $\Rightarrow$ верно для осн.)

$q = a + bi + cj + dk$

$\bar{q} = a - bi - cj - dk$

$q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$\sqrt{q\bar{q}} = |q|$

$q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{|q|^2}$

$\boxed{n=1}$ $\quad U = Ue + u'e_1$

$\mathbb{C}\otimes Cl_1 \simeq \mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \sim \begin{pmatrix} \boxed{a} & 0 \\ 0 & \boxed{a} \end{pmatrix}$

$\mathbb{C}\otimes Cl_2 \simeq Mat(2;\mathbb{C})$

Thm

$$\operatorname{Det} U = \begin{cases} U, & n=0 \\ U\hat{U}, & n=1 \\ U\tilde{\hat{U}}, & n=2 \\ U\tilde{U}\hat{U}\hat{\tilde{U}}, & n=3 \\ U\tilde{U}(\hat{U}\hat{\tilde{U}})^{\triangledown}, & n=4 \\ U\tilde{U}(\hat{U}\hat{\tilde{U}})^{\triangledown}(U\tilde{U}(\hat{U}\hat{\tilde{U}})^{\triangledown})^{\triangle} \end{cases}$$

эл. ранга 0 с точн. до Det

2×2

2×2 ⊕ 2×2

4×4

$= U\hat{\tilde{U}}\hat{U}\tilde{U}$

$U^{\triangledown} = U \,\big|\, 4 \to -4,\ 5 \to -5$

$U^{\triangle} = U \,\big|\, 5 \to -5$

для выч. Cl обратный элемент по тем же ф-лам и вычисл. $\triangle \leftrightarrow \triangledown$

$(n=3)$ $U^{-1} = \dfrac{\tilde U \hat U \hat{\tilde U}}{U \tilde U \hat U \hat{\tilde U}}$

$\uparrow$ скаляр (если $=0 \Rightarrow \nexists U^{-1}$)

$U = e - e_1 + 2e_2 - e_{12}$

$U^{-1} = ae + be_1 + ce_2 + de_{12}$

$(n=3)$ $Det(U) = U \hat{\tilde U} \hat U \tilde U$

$Det(UV) = Det(U) \cdot Det(V)$

$UV(\hat{\widetilde{UV}}) \cdot (\widehat{UV}) \cdot (\widetilde{UV}) \overset{?}{=} U \hat{\tilde U} \hat U \tilde U \cdot V \hat{\tilde V} \hat V \tilde V$

$\Rightarrow U V \hat{\tilde V} \hat{\tilde U} \hat U \hat V \tilde V \tilde U$

$(n=3)$

	0	1	2	3
$\sim$	+	+	−	−
$\wedge$	+	−	+	−
$\hat{\sim}$	+	−	−	+

$(V\tilde V)^{\sim} = V\tilde V \Rightarrow V\tilde V$

$Cl_0 + Cl_1$

$(V\hat{\tilde V})^{\hat{}} = V\hat{\tilde V} \Rightarrow Cl_0 + Cl_3 \Rightarrow Cent\,Cl$

$\hat V \tilde V = (V\hat{\tilde V})^{\wedge} \Rightarrow Cent\,Cl$

Ортогональная группа

$\det A = +1$

$O(n) = \{ A \in Mat(n, \mathbb{R}) : A^T A = E \}$

↑ группа $A \in O(n), B \in O(n) \Rightarrow A \cdot B \in O(n)$

$(AA^T)^T = AA$ ← всегда симметр.

$SO(n) = \{ A \in O(n) : \det A = 1 \}$

$\subset O(n)$

подгруппа

$O(p,q) = \{ A \in Mat(n, \mathbb{R}) : A^T \eta A = \eta \}$

$n = p+q$

↑ псевдоорт. группы

$\eta = diag(\underbrace{1 \dots 1}_{p}, \underbrace{-1 \dots -1}_{q})$

$O(n,0) = O(n) \cong O(0,n)$

$SO(n,0) = SO(0,n) = SO(n)$

$SO(p,q) = \{ A \in O(p,q) : \det A = 1 \}$

↑ спец. псевдоорт. группы, подгр. $O(p,q)$

$A \in O(p,q)$

$$\begin{array}{c} \| \\ \left(\begin{array}{c|c} P_{p \times p} & R \\ \hline L & Q_{q \times q} \end{array}\right) \begin{array}{l} \}p \\ \}q \end{array} \\ \underbrace{\phantom{P_{p\times p}}}_{p} \underbrace{\phantom{Q_{q\times q}}}_{q} \end{array}$$

Лемма $A \in O(p,q) \Rightarrow$

$|\det P| \geq 1$

$|\det Q| \geq 1$

$|\det P| = |\det Q|$

$sgn(\det P) \cdot sgn(\det Q) = sgn(\det A)$

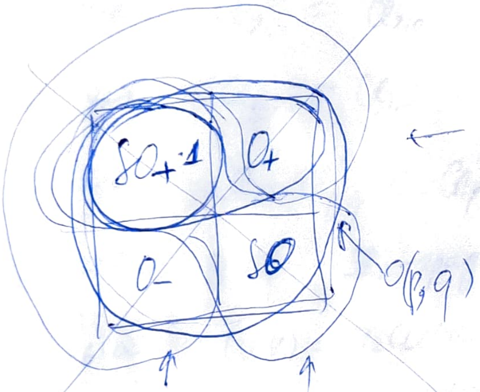
Теор. $O_+(p,q) = \{ A \in O(p,q) : \det P \geq 1 \}$ ← явл. подгр. в $O(p,q)$

$\subset SO(p,q)$ подгр.

$$SO_+(p,q) = \{A \in O(p,q) : \det A = 1,\ \det P \geq 1\} =$$

$$= \{A \in O(p,q) : \det A = 1,\ \det Q \geq 1\} =$$

$$= \{A \in O(p,q) : \det P \geq 1,\ \det Q \geq 1\}$$



$\leftarrow \det P \geq 1$

$\det P \leq -1$

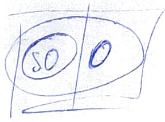
$\det Q \geq 1$ $\quad \det Q \leq -1$

$\det A = 1$

$\det A = -1$

все подгр нормальны

$(p,q) = (n,0)$



H подгр. $\subset G$ гр.

норм. подгр., если $ghg^{-1} \subset H$ $\quad \forall h \in H$, $\forall g \in G$

$A \in SO(n)$ $\quad BAB^{-1} \subset SO(n)$ $\quad \forall B \in O(n)$

$$\det(B \cdot A \cdot B^{-1}) = \cancel{\det B} \cdot \det A \cdot \cancel{\det B^{-1}} = \det A = 1$$

Фактор группы.

$$\frac{O(p,q)}{SO_+(p,q)} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$ ← 4ая группа Клейн

↑ сам. больш. (сам. мал.)

$$\frac{O(p,q)}{O_+(p,q)} = \mathbb{Z}_2$$ (во всех ост. случаях)

АК(6') КР разбор

1) $Cl_{0,2} \cong \mathbb{H}$

КР) 2).а $e(e+e_1) = e_1(e+e_1)$ $\quad UV = W \cdot V \quad V \neq W,\ V \neq 0$

2) б $(e+e_1)\cdot(e_2 - e_{12})$ $\quad UV = 0 \quad VU \neq 0$

3) а $(e_{1..n})^2 = e_{1..n} e_{1..n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+q} e = (-1)^{\frac{(p-q)^2 + 4pq - (p-q)}{2}} = \begin{cases} 1, & p-q = 0,1 \bmod 4 \\ -1, & p-q = 2,3 \bmod 4 \end{cases}$

3) б) $V \in Cl^1_{p,q} \Rightarrow V^2 \in Cl^0_{p,q}$

$(u_1 e_1 + \ldots + u_n e_n)^2 = (\sum u_i^2 \eta_{ii}) e$

4) а $Cl^{(0)}_{2,1} \cong Cl_{2,0} \quad \leftrightarrow \quad Cl^{(0)}_{p,q} \cong Cl_{p,q-1}$

4) б) $Cl_{2,0} \cong Cl_{1,1} \quad \leftrightarrow \quad Cl_{p,q} \cong Cl_{q+1,p-1}$

5) а $Cl^k_{p,q} Cl^l_{p,q} \subset Cl^{|k-l|}_{p,q} + Cl^{|k-l|+2}_{p,q} + \ldots$

5) б $Cl_{p,q}$ – $\mathbb{Z}_2$-град. алгебра $\quad Cl_{p,q} = Cl^{even}_{p,q} \oplus Cl^{odd}_{p,q}$

6) а $(U,V) = Tr(U^+ V)$ $\quad$ ск. пр-е и св-ва

6) б) $Tr(V) = u e$ $\quad$ след и св-ва

7) а) $Cl_{1,3} \quad U^+ = U|_{e_A \to e_A^{-1}}$ $\quad$ 1) $U^+ = e_1 \tilde{U} e_1$

2) $(UV)^+ = V^+ U^+$

7) б) $Cl_{3,1}$ $\quad$ –//– $\quad$ 1) $V^+ = e_4 \hat{\tilde{U}} e_4$

2) –//–

8а) $[Cl^{\bar{1}}_{p,q}, Cl^{\bar{3}}_{p,q}] \subset Cl^{\bar{0}}_{p,q}$ $\quad Cl^{\bar{k}} = \oplus Cl^m$

$m = k \bmod 4$

$([U,V])^\wedge = (U \cdot V - V \cdot U)^\wedge = \ldots = UV - VU$

$([U,V])^\sim = \ldots = UV - VU$

$\Rightarrow$

	0	1	2	3
	+			
	+			

8б) $[Cl^{\bar{1}}, Cl^{\bar{2}}] \subset Cl^{\bar{?}}$ $\quad$ –//– $\quad \Rightarrow$

	0	1	2	3
		–		
		+		

9а) $U\tilde{U} \in Cl^{\bar{0}} + Cl^{\bar{1}}$ $\quad (U\tilde{U})^\sim = U\tilde{U}$

9б) $U\hat{\tilde{U}} \in Cl^{\bar{0}} + Cl^{\bar{3}}$ $\quad (U\hat{\tilde{U}})^\wedge = U\hat{\tilde{U}}$

0	1	2	3
+	+	+	–
+	+	–	–
+	–	–	+

$\ldots b_{2n} \ldots - \ldots b_{n1} + 1) \leq \ldots (a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1n} + 1)(b_{12} + b_{13} + \ldots + b_{1n} + 1) = (a_{11}| \cdot |b_{11}|$

10) а) $Cl_{p,q}$

$e_{a_1} \wedge \ldots \wedge e_{a_n} = e[a_1 \ldots e_{a_1}] =$

$e_{a_1} \wedge e_{a_2} = e_{a_1} \cdot e_{a} - \eta_{a_1 a_2} e$

10) б) Λ_n (наоборот)

11) а) $t = \frac{1}{2}(e_1 + e_1)$ $\quad \tau_1 = \sqrt{2} t$

$\tau_2 = \sqrt{2}\, e_1 t$

1) $(t_2, t_2) = \tau_2 (t_1^+ t_2) = 1$

2) $\underset{=}{U} \tau_n = \rho^{\rho}_2 \frac{t}{2}$

12) а) $Cl_n Cl = \begin{cases} Cl^0 & n - \text{чет} \\ Cl^0 \oplus Cl^1 & n - \text{нечет.} \end{cases}$

12) б) $V e_a = -e_a V$, n - чет.

АК(6)

$$\begin{array}{c} p\times p \\ \left(\begin{array}{c|c} P & R \\ \hline L & Q \end{array}\right) = A \in O(p,q) \\ q\times q \end{array} \qquad A^T \eta A = \eta$$

$SO(p,q)$ ... $\det A = 1$

$O_+(p,q)$ ... $\det P \geq 1$

$O_-(p,q)$ ... $\det Q \geq 1$

$SO_+(p,q)$

$O(1, n-1)$ $\quad O(1,3)$ – группа Лоренца

$SO(1,3)$ – спец. группа Лор.

$O_+(1,3)$ – ортохронная (сохр. ориент. по вр.)

$O_-(1,3)$ – ортохорная (сохр. ориент. по ост.)

$SO_+(1,3)$ – спец. ортохронная

$A\eta A^T = \eta$ $\ast$

$\{A \in Mat(4;\mathbb{R}),\ A^T\eta A = \eta,\ a^1_1 \geq 1\}$

$\mathbb{R}^n$ – евкл. пр-во

$\bar{x}(x_1, \dots x_n)$

$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

$\mathbb{R}^{p,q}$ – псевдоевкл. пр-во

$(\bar{x}\bar{y}) = x_1y_1 + \dots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \dots - x_ny_n$ $(\ast)$

• $M = \mathbb{R}^{1,3}$ – пр-во Минковского

$$\left(\begin{array}{c|c} a^1_1 & R \\ \hline L & Q \end{array}\right)$$

$\forall A, B$

$C = A \cdot B$

$\cancel{c^1_1 = \sum a^k_1 b^1_k}$

$c_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} \geq 1$

?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots \\ a_{12} & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\sum_m a_{km} a_{lm} \eta_{mm} = \eta_{kl}$

$(a_{11})^2 - a_{12}^2 - a_{13}^2 - \dots - a_{1n}^2 = 1$

"норма" строки в смысле $(\ast)$

$(b_{11})^2 - b_{12}^2 - b_{13}^2 - \dots - b_{1n}^2 = 1$

$\triangleright$ Из нер-ва Коши – Буняковского $(\sum x_i y_i)^2 \leq (\sum x_i^2) \cdot (\sum y_i^2)$

$$|-a_{12}b_{21} - \dots - a_{1n}b_{n1} + 1| \overset{\text{К.Б.}}{\leq} \sqrt{(a_{12}^2 + a_{13}^2 + \dots + a_{1n}^2 + 1)(b_{12}^2 + b_{13}^2 + \dots + b_{1n}^2 + 1)} \overset{\ast}{=} |a_{11}| \cdot |b_{11}|$$

$SO(2)$ $\qquad\qquad$ $O(2)$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\boxed{SO(2) \mid O(2)}$

$\varphi = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Связ. компонента

не плавно))

$\boxed{SO(2)}$ $\;\;\boxed{}$

$\det = 1$ $\qquad$ $\det = -1$

$SO(1,1)$

$\boxed{SO_+(1,1)}$ $\quad \boxed{O'_+(1,1)}$

$\boxed{O'_-(1,1)}$ $\quad \boxed{SO'(1,1)}$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$$

$\cap$ $\qquad\qquad\qquad$ $\cap$

$O_+(1,1)$ $\qquad\qquad$ $O_-(1,1)$

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi \\ -\operatorname{sh}\psi & -\operatorname{ch}\psi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi \\ \operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix} \qquad \operatorname{ch}^2\psi = 1 + \operatorname{sh}^2\psi$$

$\cap$ $\qquad\qquad\qquad$ $\cap$

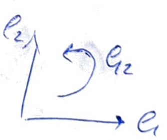
$SO'(1,1)$ $\qquad\qquad$ $SO_+(1,1)$

Группа Липшица и группа Клиффорда

$Cl_{p,q} \supset Cl^1_{p,q} = V = \mathbb{R}^{p,q}$

$\dim Cl_{p,q} = 2^n \quad \dim V = n$

$e_1, \dots, e_n$



$n = 2 \qquad \mathbb{R}^2 = Cl^1_{2,0} \quad Cl_{2,0} \ni U = ue + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_{12} e_{12}$

$\bar{x} = a e_1 + b e_2 \subset Cl^1_{2,0}$

$$(a_1 e_1 + a_2 e_2) \cdot (b_1 e_1 + b_2 e_2) = (\underbrace{a_1 b_1 + a_2 b_2}_{(\bar{a}, \bar{b})}) e + \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{\bar{a} \wedge \bar{b}} \cdot e_{12}$$

$$\underline{\bar{a}\bar{b} = (\bar{a}, \bar{b}) + \bar{a} \wedge \bar{b}}$$

$$e_1 e_2 = \eta_{12} e + e_1 \wedge e_2$$

↑ м-ца Грама (ск. произведение)

$n=3$

geometric algebra
= Clifford + геом. интерпретация
(Lounesto)

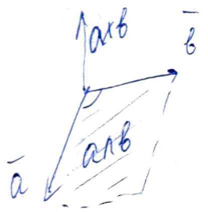
$\bar a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$

$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$

$$\bar a \bar b = \underbrace{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\cdot e}_{(\bar a, \bar b)} + \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1) e_{12} + (a_1 b_3 - \dots)}_{\bar a \wedge \bar b} \dots$$

$$a \wedge b \wedge c = \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}_{\text{объем}} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

$$a \times b := (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 + \dots = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



$Cl^{p,q}$

- $Cl^{*}_{p,q} = \{ U \in Cl_{p,q} : \exists U^{-1} \}$ — явл. группой
- присоединенное д-е: (внутр. автоморфизм) $ad : Cl^{\times}_{p,q} \to \mathrm{Aut}\, Cl_{p,q}$, $T \mapsto TUT^{-1}$, $U \in Cl_{p,q}$ $\quad (ad_T(U) = T(U)T^{-1})$
- twisted adjoint (автоморфизм) $\tilde{ad}_T(U) = \hat T U T^{-1}$
- $\Gamma^{\pm}_{p,q} := \{ T \in Cl^{\times\, even}_{p,q}$ либо $\cup\, Cl^{\times\, odd}_{p,q} : T\, Cl^1_{p,q} T^{-1} \subset Cl^1_{p,q} \}$
  группа Липшица$^{\pm}$
- $\hat\Gamma_{p,q} := \{ T \in Cl^{\times}_{p,q} : T\, Cl^1_{p,q} T^{-1} \subset Cl^1_{p,q} \}$
  группа Клиффорда

Утв. n - четно $\Gamma^{\pm}_{p,q} = \Gamma_{p,q}$

n - нечетно $\Gamma_{p,q} = \text{cen}^{*} Cl_{p,q} \cdot \Gamma^{\pm}_{p,q}$

обрат. эл-т центра

$\text{cen}\, Cl = \begin{cases} Cl^0 & n\text{-чет} \\ Cl^0 \oplus Cl^{\wedge} & n\text{-нечет.} \end{cases}$

Γ e_A - генераторы, n - четно

$\beta_a := T e_a T^{-1}$ $\Rightarrow T = \sum \beta_A F e_A^{-1} = F + \beta_1 F e_1^{-1} + \ldots + \beta_{1..n} F e_1^{-1}$

Cl^{-1} $\{e_A\}$

$\beta_a \beta_b + \beta_b \beta_a = 2\eta_{ab} e$

Теорема Паули:

n - четно

$\beta_a, \gamma_a \Rightarrow \exists T : \beta_a = T^{-1} \gamma_a T$

$T_1, T_2 :$ $\beta_a = T_1^{-1} \gamma_a T_1 \to \gamma_a = T_1 \beta_a T_1^{-1}$

$\beta_a = T_2^{-1} \gamma_a T_2$

$\beta_a = T_2^{-1} T_1 \beta_a \underbrace{T_1^{-1} T_2}_{(T_2^{-1}T_1)^{-1}} \Rightarrow T_2^{-1} T_1 \in \text{cen}\, Cl = \{\lambda e\}$

□

Теор. $Cl_{p,q}$, $n = p+q$ - четно $\Rightarrow$ $ad(\Gamma_{p,q}) = O(p,q)$ (если ищ. что только 1!)

$\star$ $\hat{ad}$

$\Gamma^{\pm}$

т.е. $\forall\, P \in O(p,q)$ м-цы из орт. гр.

$\exists\, T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$

$T e_a T^{-1} = \sum_b p_a^b e_b$ $\left(\star\ \hat{T} e_a T^{-1} = \sum_b p_a^b e_b\right)$ $\Leftrightarrow$ $\hat{T}$ - одн. способ

$-T e_a T^{-1}$

$\gamma_a = T \beta_a T^{-1}$ $\Leftarrow$ или $\gamma_a = -T \beta_a T^{-1}$

• при этом T единств. с точн. до умн. на конст $\lambda \in \mathbb{R}^{*}$ = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

• если $\det P = 1$ $(P \in SO(p,q)) \Rightarrow T \in Cl^{even}$

$\det P = -1$ $(P \in O'(p,q))$, $O' = O \setminus SO$ $\Rightarrow T \in Cl^{odd}$

Док-во: $P \in O(p,q)$ e_a $\beta_a =: \sum p_a^c e_c$

$$\beta_a \beta_b + \beta_b \beta_a = p_a^c e_c p_b^d e_d + p_b^d e_d p_a^c e_c =$$

$$= p_a^c p_b^d \underbrace{(e_c e_d + e_d e_c)}_{2\eta_{cd} e} \overset{?}{=} 2\eta_{ab} e$$

$$p_a^c p_b^d \eta_{cd} = \eta_{ab}$$

$\Updownarrow$ опр-е ортогон. в стол.

$P^T \eta P = \eta$ $\Rightarrow$ т. Паули

$T e_a T^{-1} = p_a^b e_b \in Cl$,

$$\beta_{1\dots n} = \beta_1 \dots \beta_n = p_1^a e_a p_2^b e_b \dots p_n^w e_w = \underset{\pm 1}{\underset{\shortparallel}{\det P}} \, e_{1\dots n}$$

Теор. $Cl_{p,q}$ $p+q=n$ - нечетно $\Rightarrow \hat{ad}(T^{\pm}_{p,q}) = O(p,q)$

$\forall P \in O(p,q)$ $\exists T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$: $\hat{T} e_a T^{-1} = p_a^b e_b$

, при этом T ед. с точ. до умн. на $\lambda \in \mathbb{R}^\times$

$Ker(ad) = \{T \in Cl_{p,q}^\times : ad_T(U) = U\}$

$= \{TUT^{-1} = U\} = cen\, Cl = \begin{cases} Cl^{0\times} & ч. \\ (Cl^0 \oplus Cl^1)^\times & неч. \end{cases}$

- мн-во эл. ком. перех. в трив.

$Ker(\hat{ad}) = \{T \in Cl_{p,q}^\times : \hat{ad}_T(U) = U\} =$

$= \{T : \hat{T} U T^{-1} = U\} = Cl_{p,q}^{0\times}$

$\forall U$

упр. $(UT = \hat{T} U)$ $(e_a T = \hat{T} e_a)$

$\hat{ad}_T(U) = \hat{T} U T^{-1}$

AK(7)

$\boxed{\hat{ad}(\Gamma^{\pm}_{p,q}) = O(p,q)}$

$n = p+q$

(сюръект.)

т.е. $\forall P \in O(p,q)$

$\exists T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ $!\lambda \neq 0$

$\hat{T} e_a T^{-1} = P_a^b e_b$

$T, -T$ ($\cancel{\lambda}$ + $Te_{1..n}, -Te_{1..n}$)

$\boxed{\hat{ad}(\Gamma^{+}_{p,q}) = SO(p,q)}$ ⟶ то же самое

* $ad(\Gamma^{+}_{p,q}) = SO(p,q)$

тоже верно

обрат.

$\Gamma^{\pm}_{p,q} = \{T \in Cl^{\times\, even}_{p,q} \vee Cl^{\times\, odd}_{p,q} :$

$\cup$ $T Cl^1 T^{-1} \subset Cl^1 \}$

$\Gamma^{+}_{p,q} = \{T \in Cl^{\times\, even}_{p,q} : T Cl^1 T^{-1} \subset Cl^1\}$

$!\lambda \neq 0$

од. с тол. до скал.

$N(U) = \tilde{U} U$ — "норма"

$N: Cl_{p,q} \to Cl_{p,q}$

гомоморф.

$\boxed{\text{утв. } N: \Gamma^{\pm}_{p,q} \longrightarrow Cl^{\times 0}_{p,q}}$

$\triangleright$ $x \in Cl^1_{p,q}$

$(TxT^{-1})^{\sim} = (\widetilde{T^{-1}})\, \tilde{x}\, \tilde{T}$

$\underbrace{\quad}_{\in Cl^1}$ ‖ $\tilde{x}$ ‖ x

TxT^{-1}

$\Downarrow (T \cdot T^{-1})^{\sim} = (e)^{\sim}$

$T^{\sim} \cdot (T^{-1})^{\sim} = e$

$(T^{-1})^{\sim} = (T^{\sim})^{-1}$

$\tilde{T} \cdot | \; TxT^{-1} = (\tilde{T})^{-1} x \tilde{T} \; | \cdot T$

$\tilde{T} T x = x \tilde{T} T$

$\tilde{T} T \in cen\, Cl_{p,q}$

n - чет $\tilde{T} T \in Cl^0$

n - неч. $\tilde{T} T \in Cl^0$ (пользуемся $\in \Gamma^{\pm}_{p,q}$)

или odd, или even

$\boxed{\begin{array}{l} \hat{N}(U) = \hat{\tilde{U}} U \\ \hat{N}: \Gamma^{\pm}_{p,q} \longrightarrow Cl^{\times 0}_{p,q} \end{array}}$

не 0

Спинорные группы:

$Pin(p,q) = \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} : \tilde{T} T = \pm e\} = \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} : \hat{\tilde{T}} T = \pm e\}$

$Pin_-(p,q) = \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} : \tilde{T} T = + e\}$

$Pin_+(p,q) = \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} : \hat{\tilde{T}} T = + e\}$

$Spin(p,q) = \{T \in \Gamma^{+}_{p,q} : \tilde{T} T = \pm e\} = \{T \in \Gamma^{+}_{p,q} : \hat{\tilde{T}} T = \pm e\}$

$Spin_+(p,q) = \{T \in \Gamma^{+}_{p,q} : \tilde{T} T = + e\} = \{T \in \Gamma^{+}_{p,q} : \hat{\tilde{T}} T = + e\}$

(*) $O(p,q)$, $O_+(p,q)$, $O_-(p,q)$, $SO(p,q)$, $SO_+(p,q)$

Pin   Spin

$\hat{ad}(Pin(p,q)) = O(p,q)$

$\forall P \in O(p,q) \quad \exists T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$

2 элемента $\pm T$ (с помощью нормировки N и $\hat{N}$)

автоматически:

1) Thm $\hat{ad}\ Pin(p,q) \longrightarrow O(p,q)$ сюръективен с ядром $\{\pm 1\}$

$\forall P \in O(p,q) \quad \exists \pm T \in Pin(p,q) : \hat{T} e_a T^{-1} = p_a^b e_b$

ровно 2

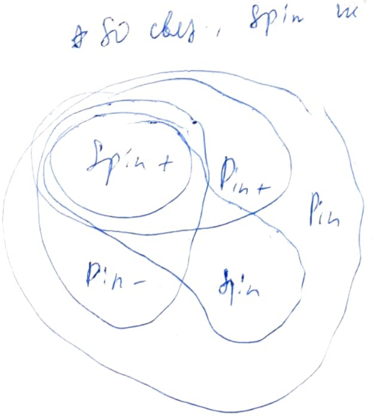
det = -1
пов. + отр.
det = 1
поворот

2) $\hat{ad}\ Spin(p,q) \longrightarrow SO(p,q)$

* SO связ., Spin не всегда

(*) $SO(2) \ni \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ поворот на $\angle\varphi$



Упр.
подгр. т.к. замкнуты отн. умножения

Упр. норм. подгруппы (все)

* $H \subset G$, H - норм подгр.

$ghg^{-1} \in H \quad \forall h \in H \quad \forall g \in G$

Упр. $Spin_+$ - норм. подгр. в Spin? ghg

$(ghg^{-1})^{\sim}(ghg^{-1}) \overset{?}{=} \pm e$ $\qquad$ $(\tilde{g})^{-1}g^{-1} = (g\tilde{g})^{-1} = (\pm e)^{-1} = \pm e$

$\tilde{g}^{-1}\tilde{h}\underbrace{\tilde{g}g}_{\pm e}hg^{-1} = \underline{\pm e}\, e\, \underline{\mp e} = e$

Лемма $\quad \hat{ad}: \underset{T}{Pin(p,q)} \to \underset{P}{O(p,q)}$ $\qquad$ $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (A: $p\times p$, D: $q\times q$)

$\|T\|^2 = Tr(T^+T) = \begin{cases} \det A = \det D \neq 0, \; P \in SO_+ \\ \det A = -\det D, \; P \in O'_+ \\ \quad O_+ = SO_+ \\ -\det A = \det D \neq 0, \; P \in O'_- \\ -\det A = -\det D, \; P \in SO' \\ \quad = SO \setminus SO_+ \end{cases}$

$\Downarrow$ 0

SO_+	O'_+
O'_-	SO'

$\triangleright \|T\|^2 = Tr(T^+T) = Tr(e_{1\ldots p}^{-1}\tilde{T}e_{1\ldots p}T) \ominus$

$U^+ = \begin{cases} e_{1\ldots p}\hat{\tilde{U}}e_{1\ldots p}^{-1}, & p\text{ – чет.} \\ e_{1\ldots p}\tilde{U}e_{1\ldots p}^{-1}, & p\text{ – нч.} \end{cases} = \begin{cases} e_{1\ldots p}^{-1}\hat{\tilde{U}}e_{1\ldots p} & -\|- \\ e_{1\ldots p}^{-1}\tilde{U}e_{1\ldots p} & -\|- \end{cases}$

пусть $T \in Spin_+$, $\wedge$, т.к. Γ^+ (even)

$\tilde{T} = T^{-1}$, т.к. $Spin_+$

$\ominus Tr(e_{1\ldots p}^{-1}\underbrace{\tilde{T}e_1T}\underbrace{\tilde{T}e_2T}\ldots e_pT) =$ $\qquad$ $\hat{T}e_aT^{-1} = p_a^b e_b$

$= Tr(e_{1\ldots p}^{-1}\underline{p_1^b e_b\, p_2^c e_c \ldots p_p^z e_z}) =$ $\qquad$ $= Te_a\hat{T}^{-1} =$

по опр. $= \det A$ $\qquad$ $b, c = 1\ldots n$ сум. до p $(1\ldots p)$ ост. сокр. $\qquad$ $= T^{-1}e_a\hat{T}\ldots$

т.к. в орт. гр. $|\det A| = |\det B|$

$\det A \vee \det B$

* $|\det| \neq 1$

отсюда не видно, но и не важно

* $\det A = \pm\det D$ для орт групп

или док-во через T^+ по второй формуле.

Ост аналогично (в д-ве от пр. $Pin/Spin\ldots$ $\Rightarrow$ по знакам проверяем $\det$ что $\hat{ad}\,Pin_+ = SO_+$ и др. спин гр.

	$\hat{ad}$	ad, n – чет, p,q – чет	p,q – неч	(четырехмерн. и не 2) n – неч, p,q – чет	p,q – неч
Pin^1_+	$O^1_+ \longrightarrow$	O^1_+	O^1_-	SO^1	SO^1_+
Pin^1_-	$O^1_- \longrightarrow$	O^1_-	O^1_+	SO_+	SO^1
$Spin^1$	$SO^1 \longrightarrow$	SO^1	SO^1	SO^1	SO^1
$Spin_+$	$SO^1_+ \longrightarrow$	SO^1_+	SO^1_+	SO_+	SO_+
Pin	$O \longrightarrow$	O	O	SO	SO

(1,3)

Геометр. интерпретация

Утв. $\hat{ad}_s$

$s \in V^\times = Cl^{1\times}_{p,q}$

$v \in V = Cl^1_{p,q}$

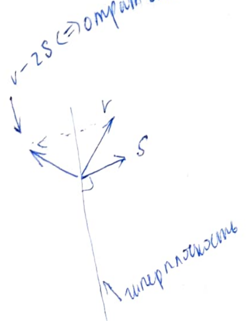
$\hat{ad}_s(v) = \hat{s} v s^{-1}$

↑ отраж. вектора v отн. гиперплоскости, орт. вектору s

Док-во: $\hat{ad}_s(v) = \hat{s} v s^{-1} =$

$= -svs^{-1} = v - \underbrace{(vs+sv)}_{B(s,v)} s^{-1} =$

$= v - 2\dfrac{B(s,v)}{\underbrace{B(s,s)}_{s^2}} s$



$x, y \to V = Cl^1_{p,q} \subset Cl_{p,q}$

$\dim V = n$

$= \tfrac{1}{2}(xy+yx) \Leftrightarrow e_a e_b + e_b e_a = 2\eta_{ab}$

$B(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \dots - x_ny_n$

↑ билин. форма

$Q(x) = B(x,x)$

$\mathbb{R}^{p,q}$

$Cl^{\times 1}_{p,q} = \{x \in Cl^1_{p,q} : x^2 \neq 0\}$

обратимость векторов

След. $v \in Cl^1 \Rightarrow v^2 \in Cl^0$

$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$

$y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$

Утв. $\hat{ad}: Cl^{1\times}_{p,q} \to O(p,q)$.

$\hat{ad}_s(v)$

▷ $Q(\hat{ad}_s(v)) \overset{?}{=} Q(v)$

$\Updownarrow$

$T^T \eta T = \eta$

$(\hat{ad}_s(v))^2 = \hat{s} v s^{-1} \hat{s} v s^{-1} = v^2 = Q(v)$

Тh. (Картан – Дьедонне)

Любое орт. преобр-е невырожд. (псевдо) евклид. пр-ва

разм-ти $\dim V = n$

явл. композ. отраж. (отн. гиперплоскостей), число пот. $\le n$

(любой поворот на пл-ти можно

реал., как 2 отражения)

$\leftarrow \quad \hat{ad}(\Gamma^{\pm}_{p,q}) = O(p,q)$

▷ (бд. т. Паули, $\quad \hat{T} e_a T^{-1} = p_a^b e_b$

а через К.-Д.) $\quad \Gamma^{\pm}_{p,q} = \{T \in Cl^{ev} \vee Cl^{odd} : T Cl^1 T^{-1} \in Cl^1\}$

$\Gamma_{p,q} = \{T \in Cl^{\times} : T Cl^1 T^{-1} \subset Cl^1\}$

---

① $\Gamma^2_{p,q} = \{v_1, \dots, v_n, \; v_i \in Cl^{\times,1}_{p,q}\}$

④ все те вект. отн. ком. отражения

Лемма $\hat{ad}(\Gamma^2_{p,q}) \underset{\text{сюръект.}}{\overset{=}{\longrightarrow}} O(p,q)$

▷ $A \in O(p,q) \overset{\text{т. К-Д}}{\Rightarrow} A = \hat{ad}_{s_1} \circ \hat{ad}_{s_2} \circ \dots \circ \hat{ad}_{s_k}(x) =$ отражения, $k \le n$

$= \hat{s}_1 \dots \hat{s}_k x s_k^{-1} \dots s_1^{-1} = (s_1 \dots s_n)^{\wedge} x (s_1 \dots s_n)^{-1} =$

$= \hat{ad}_{s_1 \cdot \dots \cdot s_n}(x) \quad \Rightarrow \quad s_1 \cdot \dots \cdot s_n \in \Gamma^2_{p,q}$

---

② $\Gamma^1_{p,q} = \{T \in Cl^{\times}_{p,q} : \hat{T} Cl^1 T^{-1} \subset Cl^1\}$

$\ker(\hat{ad})$

$T x = x \hat{T} \Rightarrow T \in Cl^0$

Лемма $\hat{N}(U) = \hat{\tilde{U}} U, \quad \hat{N} : \Gamma^1_{p,q} \to Cl^{0,\times}_{p,q}$

▷ $(\hat{T} x T^{-1})^{\sim} = \tilde{T}^{-1} \tilde{x} \tilde{\hat{T}} = \tilde{T}^{-1} x \tilde{\hat{T}} \,|\cdot T$

$\hat{T} x T$ $\quad \Gamma^1_{p,q} \quad \hat{}Cl^1 \quad \tilde{\hat{T}} \mid$

$\Rightarrow \tilde{T}\hat{T} x = x \hat{\tilde{T}} T = (\tilde{T}\hat{T})^{\wedge} \Rightarrow \hat{\tilde{T}} T \in Cl^0$ скаляр

③ Лемма: $\hat{N}: \Gamma^1_{p,q} \to Cl^{0,\times}_{p,q} \cong \mathbb{R}^\times$

$$\hat{N}(UV) = \hat{N}(U)\cdot\hat{N}(V)$$

$$\hat{N}(U^{-1}) = (\hat{N}(U))^{-1}$$

$\triangleright$ $(UV)^{\hat{\sim}}(UV) = \hat{V}(\underbrace{\hat{U}U}_{\in Cl^0})V = N(U)\cdot N(V)$

$\hat{N}(T) = \hat{\tilde{T}}T : \Gamma \to Cl^{\times,0}_{p,q}$

④ Лемма $\hat{ad}: \Gamma^1_{p,q} \to O(p,q)$

$\blacktriangleright$ $Q(\hat{ad}_T x) = Q(x)$

$T \in \Gamma^1_{p,q}$ $\quad x \in Cl^1$ (вектор)

$Q(x) = x^2 = -\hat{N}(x) = -\hat{\tilde{x}}x = -(-x^2)$

$\hat{N}(\hat{ad}_T x) = (\hat{T}xT^{-1})^{\hat{\sim}}(\hat{T}xT^{-1})$

$\hat{N}(\hat{ad}_T x) = \hat{N}(\hat{T}xT^{-1}) = \cancel{\hat{N}(\hat{T})}\cdot \hat{N}(x)\cdot \cancel{\hat{N}(T^{-1})} = \hat{N}(x)$

по п. 3 $\quad$ скаляры $\quad$ $\in Cl^0$

⑧ $\hat{N}(\hat{T}) \overset{?}{=} \hat{N}(T)$

$\hat{\tilde{\hat{T}}}\hat{T} = \tilde{T}\hat{T} = (\underbrace{\tilde{T}T}_{\in Cl^0})^\wedge$

$\hat{N}(\hat{T}) = T^{\hat{\tilde{}}}T^\wedge = T^{\sim}T^\wedge$

$\hat{N}(\hat{T}T^{-1})$

⑧ $\Gamma^+_{p,q} = \langle v_1 \dots v_{2k}\rangle, \; v_i \in Cl^1$

$\Uparrow$

$\Rightarrow$ $\Gamma^2_{p,q} = \Gamma^1_{p,q} = \Gamma^\pm$

$\Rightarrow Cl^\times_{p,q} = Cl^{ev} \vee Cl^{odd}$

$\Rightarrow \hat{T}ClT^{-1} = TClT^{-1}$

$\square$

⑤ Лемма $\Gamma^1_{p,q} = \Gamma^2_{p,q}$

$\triangleright$ $\Gamma^2_{p,q} \subseteq \Gamma^1_{p,q}$, $\quad$ д-б

$\Gamma^1_{p,q} \overset{!}{\subseteq} \Gamma^2_{p,q}$

$T \in \Gamma^1_{p,q} \Rightarrow \hat{ad}_T \in O(p,q) \Rightarrow \exists S \in \Gamma^2_{p,q} : \hat{ad}_S = \hat{ad}_T$

$TS^{-1} = \lambda e \;\; (\in \mathbb{R})$ $\quad T = \lambda S \in \Gamma^2_{p,q} \Leftarrow \hat{ad}_{TS^{-1}} = id$

AK(8)

$$\Gamma^{\pm}_{p,q} = \{T \in Cl^{(0)\times}_{p,q} \cup Cl^{(1)\times}_{p,q} : \hat{T}\, Cl^{1}_{p,q}\, T^{-1} \subset Cl^{1}_{p,q}\} =$$

$$= \{T \in Cl^{\times}_{p,q} : \hat{T}\, Cl^{1}_{p,q}\, T^{-1} \subset Cl^{1}_{p,q}\} =$$

$$= \{T = v_1 \cdots v_k \,;\ v_i \in Cl^{1}_{p,q}\}$$ — группа Липшица

$\Leftrightarrow$ пр-е векторов с нормировкой $k \le n$

$$Pin(p,q) = \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} : \tilde{T}T = \pm e\} = \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} : \hat{\tilde{T}}T = \pm e\}$$

$$Pin_+(p,q) = \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} : \hat{\tilde{T}}T = +e\}$$

$$Pin_-(p,q) = \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} : \tilde{T}T = +e\}$$

$$Spin(p,q) = \{T \in \Gamma^{+} : \tilde{T}T = \pm e\} = \{T \in \Gamma^{+}_{p,q} : \hat{\tilde{T}}T = +e\}$$

$$Spin_+(p,q) = \{T \in \Gamma^{+}_{p,q} : \tilde{T}T = +e\} = \{T \in \Gamma^{+}_{p,q} : \hat{\tilde{T}}T = +e\}$$

$$\Gamma^{+}_{p,q} = \{T \in Cl^{(0)\times}_{p,q} : T\, Cl^{1}_{p,q}\, T^{-1} \subset Cl^{1}_{p,q}\} = \{v_1 \cdots v_{2k} : v_i \in Cl^{1}_{p,q}\}$$

<u>Утв.</u> $Pin(n,0) = Pin_-(n,0)$;
$Spin(n,0) = Spin_+(n,0) \cong Pin_+(n,0)$

e.g. $\to$ из определения

$$\boxed{\boxed{Spin(n)} \quad Pin(n)}$$

<u>Утв.</u> $\underbrace{Pin(0,n) = Pin_+(0,n)}_{Pin(n)}$; $\underbrace{Spin(0,n) = Spin_+(0,n)}_{Spin(n)} = Pin_-(0,n)$

<u>Утв.</u> $Spin_+(p,q) \cong Spin_+(q,p)$; $\left(Pin(p,q) \not\cong Pin(q,p)\right)$

$Pin(1,0) \not\cong Pin(0,1)$

$\triangleright$ $Cl^{(0)}_{p,q} \cong Cl^{(0)}_{q,p}$

Thm: Для $n \le 5$: $Spin_+(p,q) = \{T \in Cl^{(0),\times}_{p,q} : \tilde{T}T = +e\}$

т.е. $T Cl^1_{p,q} T^{-1} \subset Cl^1_{p,q}$ выполняется (*)

автоматически для всех 5 групп (Pin, Spin)

(ост. только усл. нормировки)

$\triangleright$ $(TvT^{-1})^{\sim} = \tilde{T}^{-1} \tilde{v} \tilde{T} = T v T^{-1} \cdot (\pm 1) \cdot (\pm 1)$

$v \in Cl^1$

$\tilde{T} = \pm T^{-1}$ — т.к. вектор

(все, кроме $Pin_+(p,q)$)

	0	1	2	3
$\wedge$	+	−	+	−
$\sim$	+	+	−	−
$\wedge\sim$	+	−	−	+

$TvT^{-1} \subset \cancel{Cl^{0}} \oplus Cl^{\bar{1}}\} = TvT^{-1} \subset Cl^1 \oplus Cl^5 \oplus Cl^9 \oplus$

$TvT^{-1} \subset Cl^{(1)}$

↑ неч.

$n \le 4$: доказано, т.к. $Cl^1 \equiv Cl^{\bar{1}}$

$n=5$ $TvT^{-1} \subset Cl^1 \oplus \cancel{Cl^5}$?

для $Pin_+(p,q)$

$(TvT^{-1})^{\wedge\sim} = \hat{\tilde{T}}^{-1} \hat{\tilde{v}} \hat{\tilde{T}} = -TvT^{-1}$

$\hat{\tilde{T}}^{-1} = T$, $\hat{\tilde{v}} = -v$, $\hat{\tilde{T}} = T^{-1}$ (из нормировки)

$\Rightarrow TvT^{-1} \subset Cl^{\bar{1}} \oplus \cancel{Cl^{\bar{2}}}$

далее аналогично

Пусть $\exists\, v$: $TvT^{-1} = \underset{Cl^1}{W} + \underset{\mathbb{R}}{\lambda} \cdot \underset{\text{псевдоскаляр}}{e_{1\ldots5}}$ $\Rightarrow$ $\lambda = TvT^{-1}(e_{1\ldots5})^{-1} - W(e_{1\ldots5})^{-1}$

e

$= Tr(TvT^{-1}(e_{1\ldots5})^{-1} - \underbrace{W \cancel{e_{1\ldots5}^{-1}}}_{\text{ранга } 4}) =$

$= Tr(vT^{-1}T(e^{-1}_{1\ldots5})) = 0$

$\boxed{n=6}$ (6,0) контрпример: $Spin_+(p,q) \subseteq \{T \in Cl^{(0),\times}_{p,q} : \tilde{T}T = +e\}$

(*) автом-ки не вып-ся

$T = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{12} + e_{3456})$

$\tilde{T}T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{21} + e_6 e_5 e_4 e_3)(e_{12} + e_{3456}) =$

(*) существ. условие

$= \frac{1}{2}(e - e_{123456} + e_{123456} + e) = e$

$= -e_{23456}$

$= \frac{1}{2}(-e_1 - e_{23456} - e_{23456} + e_1)$

$T e_1 T^{-1}_{=\tilde{T}} = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{3456}) e_1 (e_{21} + e_6 e_5 e_4 e_3) = \frac{1}{2}(-e_2 + e_{13456})(e_{21} + e_6 e_5 e_4 e_3) =$

для $n \le 5$: $Spin_+(p,q) = \{T \in Cl_{p,q}^{(0),\times} : \tilde{T}T = +e\}$

$q \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	$O(1)$	$O(1)$	$U(1)$	$SU(2)$	$^2SU(2)$	$Sp(2)$	$SU(4)$
1		$GL(1,\mathbb{R})$	$SU(1,1)$	$Sp(1,\mathbb{C})$	$Sp(1,1)$	$SL(2,\mathbb{H})$	
2			$^2SU(1,1)$	$Sp(2,\mathbb{R})$	$SU(1,2)$		
3				$SL(4,\mathbb{R})$			
4							
5							
6							
7							

по лемме $Cl_{p,q} \cong Cl_{q,p}$

$^2SU(1,1) = SU(1,1) \times SU(1,1)$.

для ост. сигнатур нет гомоморф. классических гр. Ли (только м.б. подгруппами)

dim (R)

n^2 — $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in Mat(n,\mathbb{R}) : \exists A^{-1}\}$

↑ general linear (обратимые матрицы) группа $\det \neq 0$

n^2-1 — $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$

↑ special linear

$O(n) = O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : A^T A = 1\}$

↑ ортогональная

$\frac{n^2-n}{n}$ — $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$

↑ $S \cap O$

$O(p,q) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : A^T \eta A = \eta\}$, $n = p+q$

$so(p,q)$

$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$ (p единиц, q минус единиц)

$2n^2+n$ — $Sp(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{R}) : A^T \Omega A = \Omega\}$

↑ симплектическая

$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} & & -1 \\ & \iddots & \\ -1 & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$, $n \times n$

$2n^2$ — $GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in Mat(n,\mathbb{C}) : \exists A^{-1}\}$

$2n^2-2$ — $SL(n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : \det A = 1\}$

n^2 — $U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A^+ A = 1\}$

↑ унитарная

n^2-1 — $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$

n^2 — $U(p,q) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A^+ \eta A = \eta\}$

n^2-1 — $SU(p,q) = \{A \in U(p,q) : \det A = 1\}$

Ал. Ли

$gl(n,\mathbb{R}) = \{Mat(n,\mathbb{R}); [\,,\,]\}$

$sl(n,\mathbb{R}) = \{A \in gl(n,\mathbb{R}) : \operatorname{tr} A = 0\}$

special

$so(n) = \{A \in gl(n,\mathbb{R}) : A^+ = -A\}$

$so(p,q) = \{A \in gl(p+q,\mathbb{R}) : A^+\eta = -\eta A\}$

$sp(n,\mathbb{R}) = \{gl(2n,\mathbb{R}) : A^T\Omega = -\Omega A\}$

$gl(n,\mathbb{C}) = \{Mat(n,\mathbb{C}); [\,,\,]\}$

$u(n) = \{gl(n,\mathbb{C}) : A^+ = -A\}$

$su(n) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) : A^+ = -A, \operatorname{tr} A = 0\}$

$sl(n,\mathbb{C}) = \{gl(n,\mathbb{C}) : \operatorname{tr} A = 0\}$

$u(p,q) = \{gl(p+q,\mathbb{C}) : A^+\eta = -\eta A\}$

$su(p,q) = \{gl(p+q,\mathbb{C}) : A^+\eta = -\eta A, \operatorname{tr} A = 0\}$

n^2-n $O(n,\mathbb{C}) = \{A\in GL(n,\mathbb{C}) : A^T A = 1\} \cong O(p,q,\mathbb{C})$ $so(n,\mathbb{C}) = \{A\in gl(n,\mathbb{C}),\ A^T = -A\}$

$SO(n,\mathbb{C}) = \{A\in O(n,\mathbb{C}) : \det A = 1\}$

$4n^2+2n$ $Sp(n,\mathbb{C}) = \{A\in GL(2n,\mathbb{C}) : A^T\Omega A = \Omega\}$ $sp(n,\mathbb{C}) = \{gl(2n,\mathbb{C}),\ A^T\Omega = -\Omega A\}$

↑ симплектическая   комплексная

$4n^2$ $GL(n,\mathbb{H}) = \{A\in Mat(n,\mathbb{H}) : \exists A^{-1}\}$ $gl(n,\mathbb{H})$

$4n^2-1$ $SL(n,\mathbb{H}) = \{A\in GL(n,\mathbb{H}) : \det A = 1\}$ $sl(n,\mathbb{H}) \leftarrow \operatorname{tr} A = 0$

$2n^2+n$ $Sp(n) = \{A\in GL(n,\mathbb{H}) : A^* A = 1\}$ $sp(n)$ $A^* = -A$

↑ кватернионное сопряжение

$Sp(p,q) = \{A\in GL(p+q,\mathbb{H}) : A^*\eta A = \eta\}$ $sp(p,q)$ $A^*\eta = -\eta A$

$2n^2-n$ $O(n,\mathbb{H}) = \{A\in GL(n,\mathbb{H}) : A^* i1 A = i1\}$ $o(n,\mathbb{H})$ $A^* i A = -i1A$

$SO(n,\mathbb{H}) = \{A\in O(n,\mathbb{H}) : \det A = 1\}$ $so(n,\mathbb{H})$: $\operatorname{tr} A = 0$

Thm. $Sp(n) = \{A\in Mat(n,\mathbb{C})\ A^T\Omega A = \Omega,\ A^+A = 1\}$

$Sp(n,\mathbb{C}) \cap U(n)$

$= USp(n)$

Thm $Sp(p,q) = \{A\in Mat(\frac{n}{2},\mathbb{C}) : A^T\Omega A = \Omega,\ A^+ G A = G\}$

$$G = \begin{pmatrix} \boxed{-1}_p & & & \\ & \boxed{1}_q & & \\ & & \boxed{-1}_p & \\ & & & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

↕ Группы Ли ⇔ многообразия Ли   Cornwell (Group theory in Physics)

(сфера, тор, лист Мёбиуса, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$)

катг. из групп Ли представимы с помощью геометр. объектов (многообр. Ли)

тор не односвязный

сфера - связ. многообразие 

несвяз. многообр. 

односвяз. (сфера) любая петля стяг. в точку

~~det A - ...~~ $\quad U = e + \varepsilon u^{+} \dots + (\varepsilon^2 \equiv 0)$

1) $\det(1 + \varepsilon \cdot A) = 1 + \varepsilon\, tr A + \bar{o}(\varepsilon)$ пр. L_1 лин.

$\Rightarrow \det A = 1 \Rightarrow tr A = 0$

2) $\dots (1 + \varepsilon A)^{-1}$

$\Rightarrow \quad A^{-1} \Rightarrow [\,,\,]$

3) $1 = U^T U (1 + \varepsilon U^T)(1 + \varepsilon U) = 1 + \varepsilon(U + U^T) + \cancel{\varepsilon^2}$ ($=0$)

$A^T A = 1 \quad \Rightarrow \quad A^T = -A$

e.g. $n=1$ $\quad (1,0)$ $(0,1)$

$Spin(1) = \{\pm e\} = \mathbb{Z}_2 \cong O(1) \cong S^0$

$Pin(1,0) = \{\pm e_1, \pm e\}$, $(e_1)^2 = +e$, $= \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \not\cong$

$Pin(1,0) \not\cong Pin(0,1) = \{\pm e;\ \pm e_1\}$, $(e_1)^2 = -e$, $\mathbb{Z}_4$

$T = ue + u_1 e_1$

$\tilde{T} T = \pm e$

$\hat{T} T = \pm e$

e.g. $n=2$ $\quad T = ue + u_{12} e_{12}$

$Spin(2) = \{ae + be_{12} \ ;\ a^2 + b^2 = 1\} \cong U(1)$

$= z = a + bi \ :\ |z| = 1$

$Pin(2) = Spin'(2) \sqcup$

$\sqcup \{ce_1 + de_2 \ :\ c^2 + d^2 = 1\}$

k-мер. сфера в $k+1$ мер. пр-ве

$S^k = \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \ :\ \|x\| = 1\}$

S^2

S^1

S^0 $\quad -1 \quad 1$

e.g. $T \in Spin(2)$ $\quad x \in Cl'_{2,0}$

$\hat{T} x T = (\cos\varphi\, e + \sin\varphi\, e_{12}) \cdot (x_1 e_1 + x_2 e_2) \cdot$

$ae + be_{12}$

$\hat{T} = T$

поворот на 2φ.

$\cdot (\cos\varphi\, e + \sin\varphi\, e_{12}) = \dots = e_1(\cos 2\varphi\, x_1 - \sin 2\varphi\, x_2) + e_2(\cos 2\varphi\, x_2 + \sin 2\varphi\, x_2)$

(e.g.) $U(1)$ на (x_1, x_2)

поворот на φ

$(\cos\varphi + \sin\varphi\, i)(x_1 + i x_2) = (\cos\varphi\, x_1 - \sin\varphi\, x_2) + i(\cos\varphi\, x_2 + \sin\varphi\, x_1)$

(e.g.) $Pin(1,1) = \underbrace{\underbrace{\{ a e + b e_{12} : a^2 - b^2 = 1 \}}_{Spin_+(1,1)} \sqcup \{ a e + b e_{12} : a^2 - b^2 = -1 \}}_{Spin(1,1)} \sqcup$

$\sqcup \{ c e_1 + d e_2 : c^2 - d^2 = 1 \} \sqcup \{ c e_1 + d e_2 : c^2 - d^2 = -1 \}$

(!) $SO_+(1,1)$ связ., а её двулист. накр. не связ. $Spin_+(1,1)$

(не везде)

(e.g.) $Spin(3) \cong SU(2)$

(!) $SU(2) / \{\pm 1\} \cong SO(3)$ (можно док. в м-цах (элем. спр.))

$\shortparallel$

$Spin(3)$

$Spin(3) = \{ a e + b e_{12} + c e_{13} + d e_{23} \}$

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ $\quad \shortparallel \{ q \in \mathbb{H} : |q| = 1 \}$

$Cl^{(0)}_{3,0} \cong Cl_{0,2} \cong \mathbb{H}$ $\quad \shortparallel^{?}$ $SU(2)$

$SU(2) = \{ A \in Mat(2, \mathbb{C}),$

$A^+ = A,\ \det A = 1 \}$

$\begin{pmatrix} a_{11} + i b_{11} & a_{12} + i b_{12} \\ \dots & \end{pmatrix}^+ \dots$

$U(1) \cong SO(2) \cong S^1$

$SU(2) \cong Sp(1) = S^3$

$SU(1,1) \cong SL(2, \mathbb{R}) \cong Sp(1, \mathbb{R})$

$SL(2, \mathbb{C}) \cong Sp(1, \mathbb{C})$

Thm Группа Ли $\overset{U}{\cap}$ Алг. Ли $\overset{u}{\cap}$

1) $Cl^{\times}_{p,q}$ — $Cl_{p,q}$, [,]

2) $\Gamma_{p,q}$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} Cl^0 \oplus Cl^2 \oplus Cl^n & n - \text{чет} \\ Cl^0 \oplus Cl^2 & n - \text{неч.} \end{cases}$

гр. Клиф. $\Gamma^{\pm}_{p,q}$

3) гр. Липш.

4) $\Gamma^{+}_{p,q}$ — $Cl^0_{p,q} \oplus Cl^2_{p,q}$

5) $Spin_+$, Pin_+, Pin_-, $Spin$, Pin — $Cl^2_{p,q}$

Бивекторы $[a, b] \in Cl^2_{p,q}$, $a, b \in Cl^2_{p,q}$

$\{a, b\} \in Cl^1_{p,q} \oplus Cl^4_{p,q}$

$\dim Cl^2_{p,q} = \frac{n(n-1)}{2}$

1) $U = e + \varepsilon u$ $\quad \varepsilon^2 = 0$ $\quad U \in$ гр $\quad u \in$ ал. Ли

$U^{-1} = e - \varepsilon u$ $\quad U \cdot U^{-1} = e$

3) $\Gamma^{\pm}_{p,q} = \{T \in Cl^{(0)} \cup Cl^{(1)} : TCl^1T^{-1} \subset Cl^1\}$

$(e + \varepsilon u) v (e - \varepsilon u) = v + \varepsilon(uv - vu) - \cancel{\varepsilon^2}$

$\overset{\cap}{Cl^1}$ $\quad \overset{\cap ?}{Cl^1}$

$\forall v \quad ?\exists u$

$[X, Cl^1] \subset Cl^1 \Rightarrow$ $X = Cl^2 \oplus Cl^0 + \cancel{Cl^n}$

Cl^2 — в цу кватерн. чисел, Cl^0 — центр

либо чет, либо неч.

2) (=) в гр.Л. уже..., а в Гр.К. из-за него появл. n чет (неч.)

5) $\overset{(\triangle)}{\widetilde{T}}T = \pm e$

$(e + \overset{(\wedge)}{\widetilde{\varepsilon u}})(e + \varepsilon u) = \pm e$

$e + \underbrace{\varepsilon(u + \overset{(\triangle)}{\widetilde{u}})} = \pm e$

$\widetilde{u} = -u$

$\widehat{\widetilde{u}} = -u$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{c|cccc} \hat{\ } & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \tilde{\ } & & & & \end{array}$ $\Rightarrow$ $\overline{2} \oplus \overline{3}$, $\quad \frac{\overline{2}}{1} \oplus \frac{\overline{3}}{2}$

АК (10)

Фунд. группа многообразия $\pi(M)$

многообр. M односвязно $\Leftrightarrow$ $\pi(M) = 1$

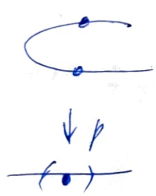
S^1 $\Rightarrow$ $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$ (груп. отн. +)

окружность
не односвяз.

Непр. сюръект. отобр. "на" отобр. топол. пр-в (многообразия) $p: X \to Y$ наз. покрытием,

если $\forall y \in Y$ $\exists U_y \subset Y$ (откр. окр.) : $p^{-1}(U_y) = \sqcup V_j$; $V_j \subset X$ (дизъюнкт. объед. (конц. сумма))

$p|_{V_j} : V_j \to U_y$ является гомеоморфизмом для $\forall j$



X — накрыв. пр-во $Spin + (p\text{-}q)$

$\downarrow p$

Y — база покрытия SO_+

⊛ двул. накр
двум т. из X
соотв. 1 т. из Y

1) Накр. наз. универсальным, если X — односвязно

2) тривиальным, если X накр. само себя
(т.е. $X = \sqcup V_j$
∃ гомеом.
Y

Утв. накр. трив. $\Leftrightarrow$ $X \cong Y \times T$
где T — мн-во с дискр. топологией

Утв. Если X — связно $\Rightarrow$ покрытие нетривиально

Теор. Группы $Pin(p,q)$, $Spin(p,q)$, $Spin_+(p,q)$ явл. 2-лист. накр.
$O(p,q)$, $SO(p,q)$, $SO_+(p,q)$

$\hat{S} e_a S' = p_a^b e_b$

$\forall p = \|p_a^b\| \in O(p,q) \ \exists \pm S \in Pin(p,q)$ ← два элемента (утв. про накрытие — усилие, т.к. требуется сюръект. и непрерывность...)

Схема док-ва:

① д-е группы $\mathbb{Z}_2$ на $Pin(p,q)$
(умн. слева) $\{\pm 1\}$

Опр. Группа G действ. свободно и собственно разрывно
evenly = freely + properly discontinuous
на топ. пр-во X, если
$\forall x \in X \ \exists V \subset X$: gV и hV непересекающиеся
откр. подмн. для $\forall h, g \in G$

② Thm. если G д-ет на с. и с.р. на пр-ве X,
evenly
то $p: X \to X/G$ является накрытием
проекция из X на ...

③ $O(p,q) \cong Pin(p,q)/\mathbb{Z}_2$
← фактор

$\widehat{ad}: Pin(p,q) \to O(p,q)$
$\ker(\widehat{ad}) = \mathbb{Z}_2$

G/H, G-группа, $a \in G$
H - норм. подгруппа
класс смежности
$aH = \{ah \mid h \in H\}$
ввод умн-е $(aH)\cdot(bH) = abH$

$SO_+(p,q)$ – связ.

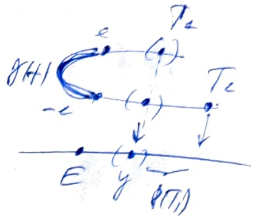
$Spin_+(p,q)$ – не всегда связ. $\qquad Spin_+(p,q) = \{T \in Cl^{even\,(0)} : T Cl^1 T^{-1} \subset Cl^1, \tilde{T}T = \ldots\}$ $\Leftrightarrow T = v_1 \cdot \ldots \cdot v_k$, $v_i \in Cl^1$

$Spin(1,1) = \{ae + be_{12} : a^2 - b^2 = 1\} \subset Cl_{1,1}$

две ветви гиперболы

Утв. $Spin_+(p,q)$ явл. связ. при $p \geq 2$ или $q \geq 2$

▷ $\pm e \in Spin_+(p,q)$



$\exists\ (e_1)^2 = (e_2)^2 = +e$ или $= -e$ $\qquad -e_1 e_2 = e_2 e_1$

$\gamma(t) = (\cos t \cdot e_1 + \sin t \cdot e_2)(\sin t \cdot e_2 - \cos t \cdot e_1) =$

$= \underbrace{\overset{+e}{\underset{-e}{\pm}} \cos 2t\, e + \sin 2t \cdot e_{12}}_{\in Cl^{even}_{p,q}} \qquad t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \tilde{T}T = (\pm \cos 2t \cdot e - \sin 2t \cdot e_{12})(\pm \cos 2t\, e + \sin 2t\, e_{12}) = \pm e$

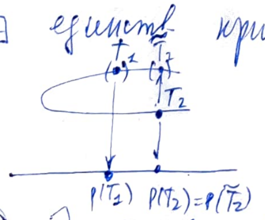
самые прост. элементы можно соед. кривой полн. лет. в X

$T_1, T_2 \in Spin_+(p,q) \Rightarrow \exists$ путь, соед. $\rho(T_1)$ и $\rho(T_2)$ $\Rightarrow$

Теор (о поднятии пути): $\rho : X \to Y$ – накрытие

Тогда $\forall$ непр. кривой $\gamma : [0,1] \to Y$ и точки $x \in X : \rho(x) = \gamma(0)$

$\exists$ единств. кривая $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X : x = \tilde{\gamma}(0)$ и



$\rho \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) \quad \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow \exists$ путь $\tilde{\gamma}$ в $Spin_+(p,q)$ с началом в T_1 и концом в $\tilde{T}_2$ ($\rho(T_2) = \rho(\tilde{T}_2)$ → на тот же лист, где T_1)

$p^{-1}(p(T_2)) = \pm T_2 \Rightarrow \tilde{T}_2 = \pm T_2$

$\Rightarrow \pm e$ попад. сама в себя

или мы умеем соед. e и $+e$

$\Rightarrow$ След. Двулист. накр. $SO_+(p,q)$ группой $Spin_+(p,q)$

нетривиально $p \geq 2$ или $q \geq 2$

Утв. $Spin(n)$, $n \geq 3$

$Spin_+(1, n-1) \cong Spin_+(n-1, 1)$, $n \geq 4$ } односвяз.

След. Накрытие в этих случаях универсальное

$\pi(SO_+(p,q)) = \mathbb{Z}_2 = \ker \widehat{ad}$

Ур-е Дирака (1920)

→ движ. электрона

→ $\mathbb{R}^{p,q}$ $M = \mathbb{R}^{1,3}$

пр-во Минковского

$\{x^\mu\}$ $\mu = 1 \ldots p, p+1 \ldots \underbrace{p+q}_{=n}$

$\eta = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q})$

ур-е Клейна - Гордона - Фока

$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\psi = 0$

$\partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$

$$\partial^\mu \partial_\mu = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$$

оператор 2ого порядка

2ая пр-я по врем.

2ая пр-я по коорд.

можно разложить на произв. опер. 1ого пор.

с пом. м-ц Дирака

ЧТФ, т.к. $Cl \otimes Cl_{p,q} \cong Mat(2^{n/2}; \mathbb{C})$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2 \mathbb{1})\psi = (\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu + m^2)\psi = \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \partial_\nu \partial_\mu + m^2\right)\psi =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \partial_\mu + \frac{1}{2}\gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu \partial_\mu$$

$\nu \Leftrightarrow \mu$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \cdot 1$$

$$= (\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi =$$

$$= (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi$$

ур-е КГФ; $\mathbb{1}$; $\mathbb{1}$; 1 столб. из 4 эл.

ур-е Дир. $= 0$

e.g.

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$$

ур-е Дирака для электрона в вакууме

x – набор коорд.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} : R^{1,3} \longrightarrow \mathbb{C}^4$$

$m \geq 0$ ← масса ; γ^μ выб. такие, что:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}$$

у тетрады $\Leftrightarrow$ $\gamma^\mu_a \gamma^\nu_b \eta^{ab} = \eta^{\mu\nu}$

e_a $\gamma_\mu(x) := \gamma^\mu(x)$

$\Rightarrow$

$\circledast$ $Cl_{3,0} \cong Mat(2, \mathbb{C})$

$\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$

$\circledast$ $\partial_\mu \partial^\nu = 0$

$\circledast$ $\gamma^\mu(x)\gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x)\gamma^\mu(x) = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}$

(e.s.) $i\gamma^\mu(\partial_\mu\psi - i a_\mu \psi) = 0$ ← калибр. инвариантность и отн. ортогонал. замены координат

a_μ ← волн. ф-я

(потенциал э/м поля

$a_\mu : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{R}$

удовл. ур-ю Максвелла

$$\begin{cases} \partial_\nu a_\mu - \partial_\mu a_\nu = f_{\mu\nu} \\ \partial_\mu f^{\mu\nu} = j^\nu \equiv 0 \end{cases}$$

↕ можно зам. на ток Дирака

или ур-е Янга - Миллса

Инвариантность

① Ортогональ. замена координат:

$x^\mu \to x'^\mu = p^\mu_\nu x^\nu$ $\quad P = \| p^\mu_\nu \| \in O(1,3)$ $\quad SO$ $\quad SO_+$

$\partial_\mu \to \partial'_\mu = q^\nu_\mu \partial_\nu$ $\quad Q = P^{-1}$

$a_\mu \to a'_\mu = q^\nu_\mu a_\nu$

(I) $\psi \to \psi$

$\gamma^\mu \to \gamma'^\mu = p^\mu_\nu \gamma^\nu$

⇓

подст. все в ур-е ⇒ инвариантность

(II) $\psi \xrightarrow{?} S\psi$ ← подоб. что ур-е осталось инвар.

$\gamma^\mu \to \gamma^\mu$

$Sp(1,3)$ ≅ $Spin(1,3)$ $Spin_+(1,3)$ ⊛ двулист. накрытие

⇒ S - м-ца 4x4 соотв. эл-ту $p \in Sp$. (но матр. представление)

⊛ если n - четно $ad \Leftrightarrow \bar{a}d$ $\quad S^{-1}\gamma^\mu S = \bar{S}^{-1}\gamma^\mu S$

$$i\gamma^\mu(\partial'_\mu\psi' - i a'_\mu \psi') - m\psi' =$$

$$= i\gamma^\mu\left(q^\nu_\mu \partial_\nu(S\psi) - i q^\nu_\mu a_\nu S\psi\right) - Sm\psi$$

⊛ поясн. $\overset{?}{=} \gamma^\nu \longleftrightarrow \boxed{S^{-1}\gamma^\mu S = p^\mu_\nu \gamma^\nu}$

$S\cdot(\ldots) \overset{0}{=} 0 \quad \Leftarrow \quad = S\left(i\left(S^{-1} q^\nu_\mu \gamma^\mu S\right)(\partial_\nu\psi - i a_\nu\psi) - m\psi\right)$

(Э) Калибровочная инвариантность

(U_1) – калибровка,

$U(1) = \{A^+A = E\} =$ ф гр. Ли $= \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

$$ia_\mu \to ia'_\mu = \underbrace{ia_\mu}_{\text{чисто мним.}} + \underbrace{i\partial_\mu \lambda(x)}_{\text{чисто вещ.}}$$

$$\psi \to \psi' = e^{i\lambda} \cdot \psi$$

сглажив. не коммут. преобр. (без замены коорд.)

$u(1) = \{A^+ = -A\} = \{ia, a \in \mathbb{R}\}$

(1.5) $\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3}$ $\quad t^2 = t$ ← прост. эрмитов идемпотент

e^μ – генераторы $\quad t^+ = t$

e^0, e^1, e^2, e^3 $\Rightarrow$ $t = \frac{1}{2}(e + e^0) \cdot \frac{1}{2}(e + ie^{12})$

$t = \frac{1}{2}(e + \ldots)\frac{1}{2}(e + ie_{\ldots}) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{ie^\mu(\partial_\mu \psi - ia_\mu \psi) - m\psi = 0}$$

$\psi \in I(t) = \begin{pmatrix} \vdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

лев. идеал
порожд. t идемп.

(*) $S \in Spin_+$

$S^{-1} e^a S = p^a_b e^b$

ψ – спинор Дирака

1928 – Дирак
1930 – Хуке, Заутер
1947 – М. Рисс

Спиноры Вейля

$C_{p,q} \quad \{e^1, \ldots, e^n\}$

Киральный оператор $\omega = \begin{cases} e^{1\ldots n} & p - q = 0, 1 \mod 4 \\ ie^{1\ldots n} & p - q = 2, 3 \mod 4 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\omega^2 = e \qquad \omega^+ = \omega = \omega^{-1}$

эрмитовость + унитарность

$\{\omega, e^a\} = 0$, если n – четно; $[\omega, e^a] = 0$, если n – нечетно операторы (проекторы) $\Leftrightarrow$ идемпотенты

$P_L = \frac{e-\omega}{2}$

$P_R = \frac{e+\omega}{2}$

левый: $P_L^2 = P_L$

правый $P_R^2 = P_R$

+ ортогональность

$P_L P_R = P_R P_L = 0$

$$\frac{e-\omega}{2}\cdot\frac{e-\omega}{2} = \frac{e-\omega-\omega+\omega^{2}}{4} = \frac{e-\omega}{2}$$

$\omega^2 = e$

если n - нечетно $Cl_{p,q} = P_R Cl_{p,q} \oplus P_L Cl_{p,q}$

n - четно лев. спиноры Вейля

$\psi : P_L\psi = \psi \Leftrightarrow \omega\psi = -\psi$

спинор Дирака

правый спинор Вейля

$\psi : P_R\psi = \psi \Leftrightarrow \omega\psi = \psi$

$E_{Dirac} = E^R_{weil} \oplus E^L_{weil}$

ψ

$\psi = \psi_R + \psi_L$

опис. движение безмассовых частиц

$\psi_{dual} = \psi$

$\Downarrow$

$i e^\mu(\partial_\mu\psi - i a_\mu\psi) = 0$

$e_{1\ldots n}$ | $i e^\mu(\partial_\mu\psi - i a_\mu\psi) - m\psi = 0$

$-i e^\mu(\partial_\mu(e^{1\ldots n}\psi) - i a_\mu(e^{1\ldots n}\psi)) - m e^{1\ldots n}\psi = 0$

$\psi e^{1\ldots n} = \psi_{dual}$ — дуальный спинор

Алгебры Клиффорда (1)

Опр. Группа $(G, *)$ — мн-во $G\ (\neq \varnothing)$ на кот. определена ассоциативная бинарная операция $*$, $\exists e$, $\forall x\ \exists x^{-1}$.

$* : G \times G \to G$

1) асоц. $(xy)z = x(yz)\quad \forall x, y, z \in G$

2) $\exists e\quad x \cdot e = e \cdot x = x\quad \forall x \in G$

3) $\forall x \in G\quad \exists x^{-1} \in G\quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$

$\Big\} \Leftrightarrow$ $\exists$ операция обратная $*$ $\forall x, y \in G$ $\exists (a, b \in G) :$ $(x \cdot a = y) \wedge (b \cdot x = y)$

(*) для $\exists e$ и $\exists x^{-1}$ достаточно наличие левого нейтр. эл-та e_1

$$e_1 \cdot x = x$$

и левого обратного эл-та y

$$y \cdot x = e$$

Опр. Абелева (коммут.) группа — $(G; *)$ + св-во ком-ти:

4) коммутативность $xy = yx\quad \forall x, y \in G$

Опр. Подгруппа H (группы G) если
1) $e \in H\qquad e \in (G, \cdot)$
2) $H \times H \to H$
3) $\forall h \in H\quad \exists h^{-1} \in H$

ex $\{e\}$ — подгруппа G (единичная)

G — подгруппа G

ex $\{\mathbb{Z}, +\}$ — группа; $\{\mathbb{Z}, \cdot\}$ — не группа ($\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$); $\{\mathbb{R}^+, \cdot\}$ — группа

Опр. Порядок группы $(G, *)$ — мощность G ($\mathrm{card}(G)$)

Опр. Гомоморфизм групп — ~~отображение~~ групп, кот. сохр. групповую структуру

$f : (G, *) \to (H, \times)$ — гомоморфизм, если $f(a * b) = f(a) \times f(b)$

Опр. Ядро гомоморфизма:

- для аб. групп (колец, вект. пр-в и т.д.) — прообраз нуля
- для общ. групп — прообраз единицы

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ — где $f(A)$ образ множ. A ($f[A]$, A^f)
(или подмн-во области знач. f

$f^{-1}(B) := \{x : f(x) \in B\}$ — где $f^{-1}(B)$ прообраз мн-ва A

① эндоморфизм — гомоморфизм в само мн-во

мономорфизм — однозначный (инъективный) гомоморфизм

$\forall m : A \to B$ $m \circ f = m \circ h \Rightarrow f = h$ ⇔ можно сокращать слева

морфизм $f : A \to B$ — мономорфизм, если $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$

прим. операцию двойств-ти $\Rightarrow$ $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$,

т.е для морфизма $f : B \to A$ это озн., что f-эпиморфизм

"быть мономорф." двойственно "быть эпиморфизмом"

эпиморфизм — сюръективный гомоморфизм

$\forall m : A \to B$ $f \circ m = h \circ m$ $\Rightarrow f = h$ ⇔ можно сокр. справа

Опр. изоморфизм — взаимно однозначный (биект.) гомоморф.

∘ если G, H - группы

биект. $f : G \to H$ — изоморф., если $\forall x, y \in G$ $f(x) \cdot f(y) = f(xy)$

∘ если F, H - поля

биект. $f : F \to H$ — изоморф., если она сохр. обе операции поля

$f(a) + f(b) = f(a+b)$

$f(a) \cdot f(b) = f(a \cdot b)$

ex факторкольцо для кольца многочленов с вещ. коэф.

$\mathbb{R}[x]$ по модулю многочлена x^2+1 явл. полем

изоморфным $\mathbb{C}$ ⇔ $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$

① автоморфизм — изоморфизм, отр. алг. систему на себя

Опр. G, H — изоморфные группы, если $\exists$ гомоморфизм

групп $f : (G, *) \to (H, \times)$ и $g : (H, \times) \to (G, *)$

такие что $f(g(a)) = a$ и $g(f(b)) = b$ где $a \in H$, $b \in G$

(в таком случае f, g это изоморфизмы)

(*) $gH = \{gh \mid h \in H\}$
для $g \in G$ левый смежный класс по подгруппе H

$Hg = \{hg \mid h \in H\}$ — правый смежн. класс для $g \in G$

нормальная подгруппа — подгруппа особого типа
левый и правый смеж. классы по которой совп.
$\forall g \in G \quad gH = Hg$

Св-ва групп:

② $Cl_{p,q,r}$: $(\mathbb{F} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{R})$ (p,q,r) – сигнатура

E – лин. пр-во над $\mathbb{R}$ $(\dim E = 2^n)$

$e, e_a, e_{ab}, \ldots, e_{1\ldots n}$

e – единица АК

e_a – генераторы АК

e_A – эл-т общего АК

$\eta = \|\eta^{ab}\| = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{p},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{q},\underbrace{0\ldots 0}_{r})$

η – диаг. м-ца

$U, V \to UV$ – операция кл. умножения над произв. эл-тами $V \in Cl_{p,q,r}$:

$$V = ve + u^a e_a + \underbrace{u^{ab} e_{ab}}_{=\sum\limits_{a<b} u^{ab} e_{ab}} \ldots$$

$$= \sum_{\substack{|A|=k \\ k=\overline{0,n}}} u^A e_A, \text{ где } u_{\ldots}, u_{1\ldots n} \in \mathbb{R} \ (\in \mathbb{C})$$

1) дистр. и согл. с лин. структ.

$U(\alpha V + \beta W) = \alpha UV + \beta UW$ $\quad \forall U, V, W \in E$

$(\alpha U + \beta V)W = \alpha UW + \beta VW$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2) ассоц. $(UV)W = U(VW)$ $\quad \forall U, V, W$

3) унитальность $Ue = eU = U$ $\quad \forall U$

(*) 4) $e_a e_b + e_b e_a = 2\eta_{ab} \cdot e$ $\quad \forall a, b = 1, \ldots, n$

5) $e_{a_1 \ldots a_k} = e_{a_1} \cdot \ldots \cdot e_{a_k}$

$\underline{\text{Опр. 1}}$

$\Rightarrow Cl_{p,q,r}$ – ассоц., неком. унит. алгебра с (*)

$(e_{a_i})^2 = \eta^{ii} e = e$

$\underline{\text{Опр. 2}}$ $Cl^{\mathbb{F}}(V, Q) = T(V)/I(V, Q)$ – факт. алг. по двуст. идеалу

где $T(V) = \bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} \otimes^k V$ – тенз. алгебра,

V – лин. пр-во,

Q – кв. форма

Опр. 3 $\Lambda_n = Cl_{0,0,n}$ - алг. Грассмана (внешн. алг.)

в E базис $e, e_a, e_{a_1 a_2}, \dots e_{1\dots n}$, где $a_1 < a_2 < \dots$

на E ввод. опер. внеш. умножения $U, V \to U \wedge V$

1-3) -//-

4) $e_a \wedge e_b = - e_b \wedge e_a \quad a \neq b$

$e_a \wedge e_a = 0$

5) $e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_n} = e^{a_1 \dots a_n}$

$Cl(\mathbb{C}^n)$ $n = p,\ q = 0$ - комплексная АК

$\mathbb{C} \otimes Cl_{p,q}$ - комплексифицированная АК

$U = \sum u^A e_A$, $u^A \in \mathbb{C}$

$\langle U \rangle_k$ - проекция эл-та АК на подпр-во ранга k

$\langle e + 2e_{123} - e_{24} \rangle_0 = e \qquad \langle \dots \rangle_3 = 2e_{123}$

$U = \sum_{k=0}^n \langle U \rangle_k = \sum_{k=0}^n \overset{k}{U}$

Thm $\overset{k}{U} \cdot \overset{l}{V} = \overset{|k-l|+2}{W_1} + \overset{|k-l|+4}{W_2} \dots \Rightarrow A - \mathbb{Z}_2$ - град.

$\overset{k}{U} \wedge \overset{l}{V} = \begin{cases} \overset{k+l}{W} \\ 0 \end{cases}$

$cen(Cl_{p,q}) = \{ U \in Cl_{p,q} : [U, V] = 0 \ \forall V \in Cl_{p,q} \}$

Thm $cen\, Cl_{p,q} = \begin{cases} Cl^0_{p,q}, & n \text{ - четно} \\ Cl^0_{p,q} \oplus Cl^n_{p,q}, & n \text{ - нечетно} \end{cases}$

$Cl_{0,3} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$

$\parallel$

$\begin{pmatrix} \mathbb{H} & 0 \\ 0 & \mathbb{H} \end{pmatrix}$

$e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e_1 \to \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$e_2 \to \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}$

$e_3 \to \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$

① $Cl_{p+1,q+1} \cong Mat(2, Cl_{p,q})$ $\qquad$ e.g. $Cl_{1,1} \cong Cl_{2,0} \cong Mat(2,\mathbb{R})$

$$e_i \to \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & -e_i \end{pmatrix} \quad i = 1, n$$

$$e_+ \to \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_- \to \begin{pmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{pmatrix}$$

генераторы $\qquad$ генераторы

$Cl_{p+1,q+1} \qquad Mat(2, Cl_{p,q})$

② $Cl_{p+1,q+1} \cong Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$ $\qquad$ e.g. $Cl_{1,3} \cong Cl_{1,1} \otimes Cl_{0,2}$

③ $Cl_{p,q} \cong Cl_{q+1,p-1} \quad p \geq 1$ $\qquad$ e.g. $Cl_{2,0} \cong Cl_{1,1}$

④ $Cl_{p,q} \cong Cl_{p-4,q+4} \quad p \geq 4$

⑤ $Cl^{(0)}_{p,q} \simeq Cl_{p,q-1} \simeq Cl_{q,p-1} \simeq Cl^{(0)}_{q,p}$

n \ $p-q$	-4	-3	-2	-1	0	1 (L3)	2	3	4
0					$\boxed{\mathbb{R}}$				
1				$\boxed{\mathbb{C}}$	·	$\boxed{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}}$			
2			$\boxed{\mathbb{H}}$	·	$Mat(2,\mathbb{R})$	·	$Mat(2,\mathbb{R})$		
3		$\boxed{\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}}$	·	$Mat(2,\mathbb{C})$ $\downarrow$L2		$Mat(2,\mathbb{R})\oplus Mat(2,\mathbb{R})$	·	$Mat(2,\mathbb{C})$	
4	$Mat(2,\mathbb{H})$ $\uparrow$ L4	·	$Mat(2,\mathbb{H})$	·	$Mat(4,\mathbb{R})$		$Mat(4,\mathbb{R})$	·	$Mat(2,\mathbb{H})$

<u>Thm</u>

$$Cl_{p,q} \simeq \begin{cases} Mat(2^{n/2}, \mathbb{R}) & p-q = 0;2 \mod 8 \\ Mat(2^{n-1/2}, \mathbb{R}) \oplus Mat(2^{n-1/2}, \mathbb{R}) & p-q = 1 \mod 8 \\ Mat(2^{n-1/2}, \mathbb{C}) & p-q = 3;7 \mod 8 \\ Mat(2^{n-2/2}, \mathbb{H}) & p-q = 4;6 \mod 8 \\ Mat(2^{n-3/2}, \mathbb{H}) \oplus Mat(2^{n-3/2}, \mathbb{H}) & p-q = 5 \mod 8 \end{cases}$$

Thm $Cl(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{C}\otimes Cl_{p,q} \cong \begin{cases} Mat(2^{n/2}, \mathbb{C}) & n-2. \\ Mat(2^{n-1/2}, \mathbb{C}) \oplus Mat(2^{n-1/2}, \mathbb{C}) & 4\mathbb{Z} \end{cases}$

e.g. $\mathbb{C}\otimes Cl_{1,3} \cong Mat(4; \mathbb{C})$

$e \to E$

$n=1$ $e_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad U = ue + u'e_1 \to \begin{pmatrix} u+u' & 0 \\ 0 & u-u' \end{pmatrix}$

$n=2$ $e_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $e_2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $e_{12} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$V = ue + u'e_1 + u^2 e_2 + u^{12} e_{12} = \begin{pmatrix} u+u' & u^2+u^{12} \\ u^2-u^{12} & u-u' \end{pmatrix}$$

переход

$n=2k$ $\quad e_1, \dots, e_n \to \gamma_1, \dots, \gamma_n$

$n=2k+1$ $\quad e_a \to \begin{pmatrix} \gamma_a & 0 \\ 0 & -\gamma_a \end{pmatrix}$ $\quad a=1,\dots,2k$

$e_{2k+1} \to \begin{pmatrix} i^k \gamma_1 \dots \gamma_{2k} & 0 \\ 0 & -i^k \gamma_1 \dots \gamma_{2k} \end{pmatrix}$

$n=2k+2$ $\quad e_a \to$ (-//-)

$e_{2k+1} \to$ (-//-)

$e_{2k+2} \to \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$

$$V^+ = \begin{cases} e_{1\dots p}\, \tilde{\bar{U}}\, (e_{1\dots p})^{-1} & p \text{ — неч.} \\ e_{1\dots p}\, \hat{\bar{U}}\, (e_{1\dots p})^{-1} & p \text{ — чет} \end{cases}$$

$$V^{\tau} = \begin{cases} e_{p+1\dots n}\, \tilde{\bar{U}}\, (e_{p+1\dots n})^{-1} & q \text{ — чет} \\ e_{p+1\dots n}\, \hat{\tilde{\bar{U}}}\, (e_{p+1\dots n})^{-1} & q \text{ — неч} \end{cases}$$

③ $Cl^{\mathbb{R}}_{0,0} \simeq \mathbb{R} \ni U = ue$

$Cl^{\mathbb{R}}_{1,0} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \ni U = ue + u^1 e_1$, де $(e_1)^2 = e$

$Cl^{\mathbb{R}}_{0,1} \simeq \mathbb{C} \ni U = \underbrace{u}_{a}\underbrace{e}_{} + \underbrace{u^1}_{b}\underbrace{e_1}_{i}$ де $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right\}$

$Cl^{\mathbb{C}}_{0,0} \simeq \mathbb{C}$ $\quad 1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $i \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$Cl_{2,0} \simeq Cl_{1,1} \neq Cl_{0,2} \simeq \mathbb{H} \ni ue + u^1 i + u^2 j + u^{12} k$

$e_1^2 = \quad e \quad e \quad -e$

$e_2^2 = \quad e \quad -e \quad -e$

$e_{12}^2 = \quad -e \quad e \quad -e_1^2 \cdot e_2^2 = -e$

U

$\Updownarrow$

$\begin{pmatrix} u+u^1 & u^2+u^{12} \\ u^2-u^{12} & u-u^1 \end{pmatrix}$

де $e \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$e_2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$e_1 e_2 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$Cl_{3,0}$: $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underbrace{\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{м-ці Паулі}}$

$\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3$ $\qquad (\sigma_i)^+ = \sigma_i$

$\sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1$ $\qquad (\sigma_2)^+ = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^{\overline{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_1 \sigma_3 = i \sigma_2$ $\qquad tr(\sigma_i) = 0$

$\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i \quad i \neq j$

$Cl_{3,0} \ni U = \overset{\sigma_0}{ue} + \overset{\sigma_1}{u^1 e_1} + u^2 e_2 + u^3 e_3 +$

$\underbrace{u^{12} e_{12}}_{i\sigma_3} + \underbrace{u^{13} e_{13}}_{i\sigma_2} + \underbrace{u^{23} e_{23}}_{i\sigma_1} + \underbrace{u^{123} e_{123}}_{i\sigma_0}$

$Cl_{3,0} \simeq \underbrace{Mat(2, \mathbb{C})}_{dim = 8} = \left\{\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ k+ei & n+mi \end{pmatrix}\right\}$ $\qquad A^+ = A$

$(iA)^+ = \bar{i} A^+ = -iA$

$\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3} \simeq Mat(4, \mathbb{C})$

$dim^{\mathbb{C}} = 16$

$dim^{\mathbb{R}} = 32$

$(\gamma_a)^+ = \gamma_0 \gamma_a \gamma_0$

М-ці Дірака

$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad (\gamma_0)^2 = \mathbb{1}$

$e \to \mathbb{1}_4 \quad e_i \to \gamma_{a-1} \; (a = \overline{1,4})$

$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ $i = \overline{1,3}$ $\qquad (\gamma_i)^2 = -\mathbb{1}$

$e_{ij} \to \gamma_{a-1} \gamma_{b-1}$ $\qquad tr\, \gamma_a = 0 \quad a = \overline{0,3}$

$e_{1234} \to \gamma_0 \cdot \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$

$\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = 2\eta_{ab} \cdot \mathbb{1}_4$, $\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

④ $Cl^k_{p,q} := \{ \sum_{|A|=k} u^A e_A \}$, $k=\overline{0,n}$ subspace of grade k

$\dim Cl^k_{p,q} = C^k_n$

$$Cl_{p,q} = \bigoplus_{k=0}^{n} Cl^k_{p,q} = Cl^{(0)}_{p,q} + Cl^{(1)}_{p,q}$$

$Cl^{(0)}_{p,q} = \bigoplus_{k=0,2,\dots} Cl^k_{p,q}$ — подпр-во и подалгебра $\dim Cl^{(0)}_{p,q} = \dim Cl^{(1)}_{p,q} = 2^{n-1}$

$Cl^{(1)}_{p,q} = \bigoplus_{k=1,3\dots} Cl^k_{p,q}$ — лин. пр-во

$Cl_{p,q}$ явл. супералгеброй ($\mathbb{Z}_2$ градуированной)

$A = \mathbb{L} \oplus \mathbb{M}$ — A явл. прям. суммой двух подпр-в с билинейной операцией умножения $\circ: A \times A \to A$ тогда A — $\mathbb{Z}_2$ градуирована, если $\forall A, B$ выполняется:

$\overset{L}{A} \circ \overset{L}{B}, \overset{M}{A} \circ \overset{M}{B} \in \mathbb{L}$ $\overset{L}{A} \circ \overset{M}{B}, \overset{M}{B} \circ \overset{L}{A} \in \mathbb{M}$

четные   нечетные

$$Cl^{(i)}_{p,q} \cdot Cl^{(j)}_{p,q} \subset Cl^{(i+j) \bmod 2}_{p,q} \qquad i,j = 0,1$$

$\mathbb{Z}_2$

	+1	−1
+1	1	−1
−1	−1	1

$$Cl^{\overline{k}}_{p,q} = \bigoplus_{m=k \bmod 4} Cl^m_{p,q}, k = 0,1,2,3$$

$$\dim Cl^{\overline{k}}_{p,q} = \sum_{m=k \bmod 4} C^m_n$$

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} C^k_n \cdot i^k = (\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{\pi n}{4} + i \sin\frac{\pi n}{4}\right)$$

$$\dim Cl^{\overline{0}}_{p,q} = \frac{2^{n-1} + 2^{n/2}\cos\frac{\pi n}{4}}{2} \quad \left(+\dim Cl^{\overline{2}}_{p,q} = 2^{n-1}\right)$$

$$\dim Cl^{\overline{1}}_{p,q} = \frac{2^{n-1} + 2^{n/2}\sin\frac{\pi n}{4}}{2} \quad \left(+\dim Cl^{\overline{3}}_{p,q} = 2^{n-1}\right)$$

$$Cl^{\overline{2}}_{p,q} \cdot Cl^{\overline{2}}_{p,q} \oplus Cl^{\overline{0}}_{p,q} \cdot Cl^{\overline{2}}_{p,q} \oplus Cl^{\overline{1}}_{p,q} \cdot Cl^{\overline{2}}_{p,q} + Cl^{\overline{3}}_{p,q}$$

— подалг. Ли в $Cl_{p,q}$ (алг. Ли отн. взятия коммут.)

⑤ **Реверс** $\quad U = \sum_{k=0}^{n} \overset{k}{U} \Rightarrow \widetilde{U} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \overset{k}{U}$

$$(e^{a_1} \dots e^{a_k})^{\sim} = e^{a_k} \dots e^{a_1}$$

- $\widetilde{\widetilde{U}} = U$
- $(U \cdot V)^{\sim} = \widetilde{V} \cdot \widetilde{U}$
- $(U + V)^{\sim} = \widetilde{U} + \widetilde{V}$
- $(\widetilde{\lambda U}) = \lambda \widetilde{U}, \ \lambda \in \mathbb{R}$

$Cl^{\bar 0}_{p,q} = \{U : \hat{U} = U, \widetilde{U} = U\}$

$Cl^{\bar 1}_{p,q} = \{U : \hat{U} = -U, \widetilde{U} = U\}$

$Cl^{\bar 2}_{p,q} = \{U : \hat{U} = U, \widetilde{U} = -U\}$

$Cl^{\bar 3}_{p,q} = \{U : \hat{U} = -U, \widetilde{U} = -U\}$

Чет. сопр. $\quad U = \sum_{k=0}^{n} \overset{k}{U} \Rightarrow \hat{U} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \overset{k}{U}$

$Cl^{(0)}_{p,q} = \{U : \hat{U} = U\}$

$Cl^{(1)}_{p,q} = \{U : \hat{U} = -U\}$

- $\hat{\hat{U}} = U$
- $(U \cdot V)^{\wedge} = \hat{U} \cdot \hat{V}$
- $(U + V)^{\wedge} = \hat{U} + \hat{V}$
- $(\widehat{\lambda U}) = \lambda \cdot \hat{U}$

$U \cdot \widetilde{U} \subset Cl^{\bar 0} \oplus Cl^{\bar 1}$

$U \in Cl_{p,q}$

Клиф. сопр. $\quad \widetilde{\hat{U}} = \widehat{\widetilde{U}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \overset{k}{U}$

- $((U)^{\widetilde{\wedge}})^{\widetilde{\wedge}} = U$
- $(UV)^{\widetilde{\wedge}} = V^{\widetilde{\wedge}} \cdot U^{\widetilde{\wedge}}$

	0	1	2	3	4	5	...
$\sim$	+	+	−	−	+	+	...
$\wedge$	+	−	+	−	+	−	...
$\widetilde{\wedge}$	+	−	−	+	+	−	...

Компл. сопр. $\quad U = \sum_{A} u^{A} e_{A}, \ u^A \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar{U} = \sum \bar{u}^{A} e_{A}$

- $\bar{\bar{U}} = U$
- $(U + V)^{-} = \bar{U} + \hat{V}$
- $(UV)^{-} = \bar{U} \cdot \bar{V}$
- $(\lambda U)^{-} = \bar{\lambda} \cdot \bar{U}, \ \lambda \in \mathbb{C}$

⑥ $[U,V] := U\cdot V - V\cdot U$ → коммутатор

$\{U,V\} := U\cdot V + V\cdot U$ → антикоммутатор

Thm $[\overset{\bar{k}}{U}, \overset{\bar{k}}{V}] = \overset{\bar{2}}{W}$; $\{\overset{\bar{k}}{U}, \overset{\bar{k}}{V}\} = \overset{\bar{0}}{W}$ $\quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{1, i, j, k\}$ $\quad \bar{2}\ \bar{0}\ \bar{1}\ \bar{3}$

$[\overset{\bar{2}}{U}, \overset{\bar{k}}{V}] = \overset{\bar{k}}{W}$; $\{\overset{\bar{0}}{U}, \overset{\bar{k}}{V}\} = \overset{\bar{k}}{W}$

$[\overset{\bar{0}}{U}, \overset{\bar{1}}{V}] = \overset{\bar{3}}{W}$; $\{\overset{\bar{1}}{U}, \overset{\bar{2}}{V}\} = \overset{\bar{3}}{W}$ $\quad$ четверная группа Клейна

...

$\bar{0}\ \bar{3}\ \ \bar{1}$; $\bar{1}\ \bar{3}\ \ \bar{2}$

...

$\bar{1}\ \bar{3}\ \ \bar{0}$; $\bar{2}\ \bar{3}\ \ \bar{1}$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	1	k	j
j	j	k	1	i
k	k	j	i	1

$Cl_{p,q}$ мн. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ град. по отн. $[U, V]$

где $1 \Leftrightarrow \bar{2}$

по отн. $\{U, V\}$

где $1 \Leftrightarrow \bar{0}$

$T_2(V) = \langle U \rangle_0$

1) $T_2(U+V) = T_2(U) + T_2(V)$

$T_2(\alpha U) = \alpha T_2(U)$

2) $T_2(UV) = T_2(VU) \Rightarrow T_2(UV\cdot W) \overset{\text{цикл.}}{=} T_2(W\cdot UV)$

3) $T_2(T^{-1}UT) = T_2(U) \overset{\text{перест.}}{=} T_2(TT^{-1}U)$

4) $T_2(\hat{U}) = T_2(U)$

5) $T_2(\tilde{U}) = T_2(U)$

Thm $T_2(U) = 2^{-n/2}\, tr(\gamma(U))$

Thm $(U,V) := T_2(\tilde{U}, V)$; $U, V \in Cl^{\#}_{n,0}$ $\qquad (U,U) = 0 \Leftrightarrow U = 0$

скал. произведение $\qquad$ 4) $(U,U) \geq 0$

1) $(U,V) = \overline{(U,V)}$ $\quad$ 2) $(U, \lambda V) = \lambda (U,V)$ $\quad$ 3) $(U+V, W) = (U,W) + (V,W)$

Thm $(U,V) := T_2(U^+ V)$, где $U^+ = U|e_{i_1 \ldots i_k} \to (e_{i_1 \ldots i_k})^{-1}; \lambda \to \bar{\lambda}$

1

1) ком. сложения $a+b=b+a$
2) асоц. слож. $(a+b)+c=a+(b+c)$
3) $\exists 0 \quad a+0=a$
4) $\forall a \quad \exists -a : a+(-a)=0$

$(G,+)$ аб. группа $(G,+)$

5) ком. умножения $a\cdot b=b\cdot a$
6) асоц. умнож. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
7) $\exists e \quad a\cdot e=a$
8) $\forall a \quad \exists a^{-1} \quad a\cdot a^{-1}=e$

аб. группа $(G,\cdot)$

+ 9 ⇒ ком. 5 ас. 6 кольцо с ед. 7

− 5 ⇒ тело

9) дистр. умнож. отн. слож.
$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

группа ⊃ кольцо ⊃ тело ⊃ поле

кватернион — ун., ас., кольцо с делением (тело, но не поле)

кольцо с дел. (тело) — ун. кольцо + 8

поле — асоц., ком. кольцо с делением

2 Лин. пр-во V над полем F $(=\mathbb{R};\mathbb{C})$
– аб. группа по слож., в кот. зад. оп. умн. на скал.

1) $(\alpha+\beta)x=\alpha\cdot x+\beta x \qquad \forall x,y\in V$
2) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x) \qquad \forall \alpha,\beta\in F$
3) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$
4) $1\cdot x=x$

Алгебра A над полем F — лин. пр-во над F, где опр. операция умн. (удовл. св-ву дистр-ти) + согл. с лин. структурой

0) аб. $(G;+)$

1) $(\alpha+\beta)x = \alpha x = \beta x$

2) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ } лин. пр-во

3) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

4) $1\cdot x = x$

5) $(\alpha x + \beta y)\cdot z = \alpha xz + \beta yz$ } алгебра

6) $x\cdot(\alpha y + \beta z) = \alpha xy + \beta xz$

7) $\exists e : ex = xe = x$ => унит. А

8) $(xy)z = x(y\cdot z)$ => асоц. А

9) $xy = yx$ => коммутат. А

10) $xy = -yx$ (антиком.) } А Ли

$x(y\cdot z) + y(zx) + z(xy) = 0$

e.g. $Mat_{n\times n}\,\mathbb{R}$ – унит., асоц., неком. А

$\{\mathbb{Z}, +, \cdot\}$ – кольцо

$\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ – кольцо и поле

Алгебра простая – если она не содержит нетривиальных двуст. идеалов

Алгебра простая центральная – прост. алг., у кот. центр. изоморфен центру поля над кот. алг. рассм.

$\mathrm{Cen}\, A = \mathrm{Cen}\, F$

n-чет. => Cl – центр. простая

$\mathrm{cen}\, Cl_{p,q} = \{ue\} \cong \mathbb{R}$ n-чет.

$\mathrm{cen}\, Cl_{p,q} = \{ae + be_{1\ldots n}\}$ n-нечет

$\mathrm{cen}\, Cl_{p,q} = \{U \in Cl_{p,q} : [U, V] = 0 \quad \forall V \in Cl_{p,q}\}$

$U(n) = \{A \in Mat(n, \mathbb{C}) : A^+ A = E\}$ – ун. группа (Ли)

$u(n) = \{\underbrace{A \in Mat(n, \mathbb{C})}_{gl(n)} : A^+ = -A\}$ – ун. алг. (Ли)

представление $\gamma: A \to gl(V)$

гомоморфизм $\gamma(U, V) = \gamma(U) \cdot \gamma(V)$

идемпотент: $t: \; t^2 = t$, $t \in \mathbb{C} \otimes Cl_{p,q}$

$t^2 = t$

$t^+ = t$

левый идеал связ. с t

$I(t) = \{U : Ut = U\}$

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ и т.д. (0) – трив.

E – всегда идемп.

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset A$

$\uparrow$

4 мерное подпр-во

1 из 4 прим. идемп.

миним. лев. идеал – не сод. друг. лев. идеалов кроме себя и трив.

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \left\{ \begin{pmatrix} a & k & 0 & 0 \\ b & l & 0 & 0 \\ c & m & 0 & 0 \\ d & n & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset A$

прим. идемп. – пот. соотв. мин. левой идеал

$U \in I(t)$
$V \in Cl$ $\Rightarrow V \cdot U \subset I(t) \Leftrightarrow$ лев. идеал. связ. с t

$I(t) = \{U : VUt = VU\}$