

I часть. LIFE INSURANCE

Задача 1

Найти вероятности для 31-летнего страхователя:

I. по таблице смертности жителей г. Москвы за 2016 г. для страхователя – женщины:

II. для функции дожития вида: $s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{102}}, 0 \leq x \leq 102$

III. для интенсивности смертности вида: $\mu_x = 0.002x, x \geq 0$

а) дожить, по крайней мере, до 62 лет

$$\text{I. } {}_{31}p_{31} = \frac{l_{62}}{l_{31}} = \frac{90087}{98351} = 0.91597$$

$$\text{II. } {}_{31}p_{31} = \frac{s(62)}{s(31)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{62}{102}}}{\sqrt{1 - \frac{31}{102}}} = 0.75058$$

$$\text{III. } {}_{31}p_{31} = \exp(-\int_{31}^{62} 0.002u du) = \exp(-2.883) = 0.05596$$

б) умереть до достижения возраста 52 лет;

$$\text{I. } {}_{21}q_{31} = \frac{l_{31} - l_{62}}{l_{31}} = \frac{98351 - 90087}{98351} = 0.09181$$

$$\text{II. } {}_{21}q_{31} = \frac{s(31) - s(62)}{s(31)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{31}{102}} - \sqrt{1 - \frac{62}{102}}}{\sqrt{1 - \frac{31}{102}}} = 0.24941$$

$$\text{III. } {}_{21}q_{31} = 1 - \exp(-\int_{31}^{52} 0.002u du) = 1 - \exp(-1.743) = 0.825$$

в) умереть в возрасте 44 лет;

$$\text{I. } {}_{13|}q_{31} = \frac{l_{44} - l_{45}}{l_{31}} = \frac{96668 - 96479}{98351} = 0.00192$$

$$\text{II. } {}_{13|}q_{31} = \frac{s(44) - s(45)}{s(31)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{44}{102}} - \sqrt{1 - \frac{45}{102}}}{\sqrt{1 - \frac{31}{102}}} = 0.00782$$

$$\text{III. } {}_{13|}q_{31} = {}_{13}p_x - {}_{14}p_x = \exp(-\int_{31}^{44} 0.002u du) - \exp(-\int_{31}^{45} 0.002u du) = \exp(-0.975) - \exp(-1.064) = 0.03211$$

г) умереть в возрасте от 44 до 52 лет;

$$\text{I. } {}_{13|8}q_{31} = \frac{l_{44} - l_{52}}{l_{31}} = \frac{96668 - 94737}{98351} = 0.01963$$

$$\text{II. } {}_{13|8}q_{31} = \frac{s(44) - s(52)}{s(31)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{44}{102}} - \sqrt{1 - \frac{52}{102}}}{\sqrt{1 - \frac{31}{102}}} = 0.06464$$

$$\text{III. } {}_{13|8}q_{31} = {}_{13}p_x - {}_{21}p_x = \exp(-\int_{31}^{44} 0.002u du) - \exp(-\int_{31}^{52} 0.002u du) = \exp(-0.975) - \exp(-1.743) = 0.2022$$

д-ж) прожить ещё 3 месяца

I. - в предположении о линейности функции дожития;

$${}_{0.25}p_{31} = 1 - {}_{0.25}q_{31} = 1 - 0.25q_{31} = 1 - 0.25 * 0.000732 = 0.999817$$

- в предположении о постоянстве силы смертности;

$${}_{0.25}p_{31} = p_{31}^{0.25} = (1 - 0.000732)^{0.25} = 0.999816$$

- в предположении гипотезы Балдуччи;

$${}_{0.25}p_{31} = \frac{p_{31}}{p_{31} + 0.25q_{31}} = \frac{1-0.000732}{1-0.000732+0.25*0.000732} = 0.999817$$

$$\text{II. } {}_{0.25}p_{31} = \frac{s(31.25)}{s(31)} = \frac{\sqrt{1-\frac{31.25}{102}}}{\sqrt{1-\frac{31}{102}}} = 0.99824$$

$$\text{III. } {}_{0.25}p_{31} = \exp(-\int_{31}^{31.25} 0.002udu) = \exp(-0.0156) = 0.98452$$

з) средняя округленная продолжительность оставшейся жизни по таблицам смертности: $e_{31} = [T_{31}] = [50.50] = 50$; и средняя полная продолжительность оставшейся жизни по функции дожития: $\dot{e}_{31} = E(T_{31}) = \frac{1}{s(31)} \int_{31}^{102} \sqrt{1-\frac{u}{102}} du = 1.1986 * 39.491 = 47.334$

и) умереть в течение последующих 5 лет

по де Муавру с предельным возрастом 100 лет: ${}_5q_{31} = \frac{s(31) - s(36)}{s(31)} = (\frac{100-31}{100} - \frac{100-36}{100}) / \frac{100-31}{100} = 0.07246$

$$\text{I. } {}_5q_{31} = \frac{l_{31} - l_{36}}{l_{31}} = \frac{98351 - 97868}{98351} = 0.00491$$

$$\text{II. } {}_5q_{31} = \frac{s(31) - s(36)}{s(31)} = 0.03585$$

$$\text{III. } {}_5q_{31} = 1 - \exp(-\int_{31}^{36} 0.002udu) = 1 - \exp(-0.335) = 0.28466$$

к) кривая смертей $f(x)$, интенсивность смертности μ_x , функция дожития $s(x)$

$$\text{I. } f(x) = -s'(x) = -\frac{d}{dx}(\sqrt{1-\frac{x}{102}}) = \frac{1}{204\sqrt{1-\frac{x}{102}}}$$

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{1}{204(1-\frac{x}{102})}$$

$$\text{II. } s(x) = \exp(-0.001x^2)$$

$$f(x) = -s'(x) = 0.002 \exp(-0.001x^2)x$$

Задача 2

Эффективная годовая процентная ставка $i_1 = 7\%$ в течение первых 10 лет, $i_2 = 4\%$. В 2015 году покупается 8-летняя финансовая рента с выплатами каждый год, начиная с 2020-го года (ровно через 5 лет), в первый год выплат - 1000 у.е., *уменьшающуюся* ежегодно на 100 у.е.

$$\nu_1 = 0.9346, \nu_2 = 0.9615$$

$$a_{\bar{5}|@i_1} = \frac{1-0.9346^5}{0.07} = 4.099$$

$$(Ia)_{\bar{5}|@i_1} = \frac{4.099}{1-0.9346} - \frac{5*0.9346^5}{0.07} = 11.743$$

$$(Da)_{\bar{5}|@i_1} = \frac{(5*0.07-1)*4.099}{0.07} + \frac{5*0.9346^5}{0.07} = 12.87$$

$$a_{\bar{3}|@i_2} = \frac{1-0.9615^3}{0.04} = 2.778$$

$$(Ia)_{\bar{3}|@i_2} = \frac{2.778}{1-0.9615} - \frac{3*0.9615^3}{0.04} = 5.489$$

$$(Da)_{\bar{3}|@i_2} = \frac{(3*0.04-1)*2.778}{0.04} + \frac{3*0.9615^3}{0.04} = 5.551$$

а) Стоимость в момент заключения договора:

- через возрастающую ренту

$$A = (1100 * a_{\bar{5}|@i_1} - 100 * (Ia)_{\bar{5}|@i_1} + 600 * a_{\bar{3}|@i_2} * \nu_1^5 - 100 * (Ia)_{\bar{3}|@i_2} * \nu_1^5) * \nu_1^5 = (1100 * 4.099 - 100 * 11.743 + 600 * 2.778 * 0.9346^5 - 100 * 5.489 * 0.9346^5) * 0.9346^5 = 2946.194$$

- через убывающую ренту

$$A = (500 * a_{\bar{5}|@i_1} + 100 * (Da)_{\bar{5}|@i_1} + 200 * a_{\bar{3}|@i_2} * \nu_1^5 + 100 * (Da)_{\bar{3}|@i_2} * \nu_1^5) * \nu_1^5 = (500 * 4.099 + 100 * 12.87 + 200 * 2.778 * 0.9346^5 + 100 * 5.551 * 0.9346^5) * 0.9346^5 = 2943.888$$

Стоимость, накопленная к концу платежного периода:

- через возрастающую ренту

$$S = (1100 * a_{\bar{5}|@i_1} * (1+i_1)^5 - 100 * (Ia)_{\bar{5}|@i_1} * (1+i_1)^5 + 600 * a_{\bar{3}|@i_2} - 100 * (Ia)_{\bar{3}|@i_2}) * (1+i_2)^3 = (1100 * 4.099 * 1.07^5 - 100 * 11.743 * 1.07^5 + 600 * 2.778 - 100 * 5.489) * 1.04^3 = 6518.417$$

- через убывающую ренту.

$$S = (500 * a_{\bar{5}|@i_1} * (1+i_1)^5 + 100 * (Da)_{\bar{5}|@i_1} * (1+i_1)^5 + 200 * a_{\bar{3}|@i_2} + 100 * (Da)_{\bar{3}|@i_2}) * (1+i_2)^3 = (500 * 4.099 * 1.07^5 + 100 * 12.87 * 1.07^5 + 200 * 2.778 + 100 * 5.551) * 1.04^3 = 6513.316$$

б) Премии, которые должен внести страхователь, если он желает оплатить договор двумя платежами:

$$a_{\bar{1}|@i_1} = \frac{1-0.9346}{0.07} = 0.934$$

$$(Ia)_{\bar{1}|@i_1} = \frac{0.934}{1-0.9346} - \frac{0.9346}{0.07} = 0.9299$$

$$a_{\bar{4}|@i_1} = \frac{1-0.9346^4}{0.07} = 3.386$$

$$(Ia)_{\bar{4}|@i_1} = \frac{3.386}{1-0.9346} - \frac{4*0.9346^4}{0.07} = 8.176$$

$$a_{\bar{3}|@i_2} = \frac{1-0.9615^3}{0.04} = 2.778$$

$$(Ia)_{\bar{3}|@i_2} = \frac{2.778}{1-0.9615} - \frac{3*0.9615^3}{0.04} = 5.489$$

- в момент заключения договора (первые 4 выплаты ренты);

$$A_1 = (1100 * a_{\bar{4}|@i_1} - 100 * (Ia)_{\bar{4}|@i_1}) * \nu_1^5 = (1100 * 3.386 - 100 * 8.176) * 0.9346^5 = 2072.879$$

- в момент начала выплат (последние четыре выплаты).

$$A = (700 * a_{\bar{1}|@i_1} - 100 * (Ia)_{\bar{1}|@i_1} + 600 * a_{\bar{3}|@i_2} * \nu_1 - 100 * (Ia)_{\bar{3}|@i_2} * \nu_1) * \nu_1^5 = (700 * 0.934 - 100 * 0.9299 + 600 * 2.778 * 0.9346 - 100 * 5.489 * 0.9346) * 0.9346^5 = 1144.896$$

Задача 3

Найти и сравнить единовременную (А) и ежегодную (Р) премии по договорам страхования для 32-летнего страхователя-женщины на сумму 20000 у.е. Найти величину страхо-

вого резерва на конец 3-го страхового года ${}_3V_{x:\bar{6}|\delta_1}$ - для стандартной процентной ставки и ${}_3V_{x:\bar{6}|\delta_2}$ - для процентной ставки, соответствующей интенсивности процентов $\delta = 10, 5\%$.

1) на случай смерти на срок 6 лет (с выплатой в конце года смерти);

2) на дожитие на срок 6 лет;

3) смешанного страхования на срок 6 лет (с выплатой в конце года смерти);

а) для коммутационных функций для эффективной годовой процентной ставки $i = 4, 5\%$, представленной в таблице смертности.

1) с единовременной уплатой взносов

$$A_{\frac{1}{32:\bar{6}|}} = \frac{M_{32}-M_{38}}{D_{32}} = \frac{3227.84-3088.94}{24029.21} = 0.00578$$

$${}_3V_{\frac{1}{32:\bar{6}|\delta_1}}^A = \frac{M_{35}-M_{38}}{D_{35}} = \frac{3161.01-3088.94}{20992.4360} = 0.00343$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{\frac{1}{32:\bar{6}|}} = \frac{M_{32}-M_{38}}{N_{32}-N_{38}} = \frac{3227.84-3088.94}{483054.06-353850.19} = 0.00108$$

$${}_3V_{\frac{1}{32:\bar{6}|\delta_1}}^P = \frac{M_{35}-M_{38}}{D_{35}} - \frac{M_{32}-M_{38}}{N_{32}-N_{38}} * \frac{N_{35}-N_{38}}{D_{35}} = 0.00343 - \frac{3227.84-3088.94}{483054.06-353850.19} * \frac{414085.23-353850.19}{20992.4360} = 0.000348$$

2) с единовременной уплатой взносов

$$A_{\frac{1}{32:\bar{6}|}} = \frac{D_{38}}{D_{32}} = \frac{18326.51}{24029.21} = 0.76268$$

$${}_3V_{\frac{1}{32:\bar{6}|\delta_1}}^A = \frac{D_{38}}{D_{35}} = \frac{18326.51}{20992.43} = 0.873$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{\frac{1}{x:\bar{6}|}} = \frac{D_{38}}{N_{32}-N_{38}} = \frac{18326.51}{483054.06-353850.19} = 0.14184$$

$${}_3V_{\frac{1}{32:\bar{6}|\delta_1}}^P = \frac{D_{38}}{D_{35}} - \frac{D_{38}}{N_{32}-N_{38}} * \frac{N_{35}-N_{38}}{D_{35}} = 0.873 - \frac{18326.51}{483054.06-353850.19} * \frac{414085.23-353850.19}{20992.43} = 0.466$$

3) с единовременной уплатой взносов

$$A_{32:\bar{6}|} = A_{\frac{1}{32:\bar{6}|}} + A_{\frac{1}{32:\bar{6}|}} = 0.00578 + 0.76268 = 0.76846$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\delta_1}^A = {}_3V_{\frac{1}{32:\bar{6}|\delta_1}}^A + {}_3V_{\frac{1}{32:\bar{6}|\delta_1}}^A = 0.00343 + 0.76268 = 0.76611$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{32:\bar{6}|} = P_{\frac{1}{x:\bar{6}|}} + P_{\frac{1}{x:\bar{6}|}} = 0.00108 + 0.14184 = 0.14292$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\delta_1}^P = {}_3V_{\frac{1}{32:\bar{6}|\delta_1}}^A - \frac{D_{38}+M_{32}-M_{38}}{N_{32}-N_{38}} * \frac{N_{35}-N_{38}}{D_{35}} = 0.76611 - \frac{18326.51+3227.84-3088.94}{483054.06-353850.19} * \frac{414085.23-353850.19}{20992.43} = 0.35603$$

б) при интенсивности процентов $\delta = 10, 5\%$.

$$\nu = \exp -0.105 = 0.90032$$

1) с единовременной уплатой взносов

$$A_{\frac{1}{32:\bar{6}|}} = \frac{\nu d_{32} + \dots + \nu^6 * d_{37}}{l_{32}} = 0.00466$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\odot\delta_2}^A = A_{35:\bar{3}|}^1 = 0.00404$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{32:\bar{6}|}^1 = \frac{\nu d_{32} + \dots \nu^6 d_{37}}{l_{32} + \dots \nu^5 d_{37}} = 0.000996$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\odot\delta_2}^1 = {}_3V_{32:\bar{6}|}^A - P_{32:\bar{6}|}^1 * \ddot{a}_{35:\bar{3}|}^1 = 0.00404 - 0.000996 * 3.43497 = 0.00062$$

2) с единовременной уплатой взносов

$$A_{32:\bar{6}|}^1 = \nu^6 \frac{l_{38}}{l_{32}} = 0.52897$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\odot\delta_2}^A = A_{35:\bar{3}|}^1 = 0.72705$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{x:\bar{6}|}^1 = \frac{\nu^6 l_{38}}{l_{32} + \dots \nu^5 d_{37}} = 0.11306$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\odot\delta_2}^P = A_{35:\bar{3}|}^1 - P_{x:\bar{6}|}^1 * \ddot{a}_{35:\bar{3}|}^1 = 0.72705 - 0.11306 * 3.43497 = 0.338692$$

3) с единовременной уплатой взносов

$$A_{32:\bar{6}|} = A_{32:\bar{6}|}^1 + A_{32:\bar{6}|}^1 = 0.00466 + 0.52897 = 0.53363$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\odot\delta_2}^A = A_{35:\bar{3}|}^1 = 0.00404 + 0.72705 = 0.73109$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{32:\bar{6}|} = P_{x:\bar{6}|}^{32:\bar{6}|} + P_{x:\bar{6}|}^1 = 0.000996 + 0.11306 = 0.11405$$

$${}_3V_{32:\bar{6}|\odot\delta_2}^P = A_{35:\bar{3}|}^1 - P_{32:\bar{6}|} * \ddot{a}_{35:\bar{3}|}^1 = 0.73109 - 0.11405 * 3.43497 = 0.33933$$

в) с использованием функции дожития вида: $S(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{100}}, 0 \leq x \leq 100$ при

эффективной учетной ставке $d = 10\%$.

$$\nu = 1 - d = 0.9$$

$$d_x = (s(x) - s(x+1))/s(x) * l_0$$

$$l_x = s(x) * l_0$$

1) с единовременной уплатой взносов

$$A_{32:\bar{6}|}^1 = \frac{\nu d_{32} + \dots \nu^6 d_{37}}{l_{32}} = 0.031649$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{32:\bar{6}|}^1 = \frac{\nu d_{32} + \dots \nu^6 d_{37}}{l_{32} + \dots \nu^5 d_{37}} = 0.006866$$

2) с единовременной уплатой взносов

$$A_{32:\bar{6}|}^1 = \nu^6 \frac{l_{38}}{l_{32}} = 0.50745$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{x:\bar{6}|}^1 = \frac{\nu^6 l_{38}}{l_{32} + \dots \nu^5 d_{37}} = 0.110101$$

3) с единовременной уплатой взносов

$$A_{32:\bar{6}|} = A_{32:\bar{6}|}^1 + A_{32:\bar{6}|}^1 = 0.00466 + 0.52897 = 0.539103$$

с ежегодной уплатой взносов

$$P_{32:\bar{6}|} = P_{x:\bar{6}|}^{32:\bar{6}|} + P_{x:\bar{6}|}^1 = 0.000996 + 0.11306 = 0.116968$$