1 $E(x_i) = m_x$ $\quad E(\bar{x}) = m_x$ $\quad V(\bar{x}) = \sigma_x^2/n$ $\quad \bar{x} \to m_x, \ n \to \infty$

$V(x_i) = \sigma_x^2$ $\quad E(S^2) = \sigma_x^2$ $\quad \bar{x} \overset{a.s.}{\sim} N(m_x, \frac{\sigma_x^2}{n})$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$\hat{p} = \frac{m}{n}$ $\quad E(\hat{p}) = p$ $\quad V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$

- $E(\hat{\theta}) = \theta$ – несмещенность $\quad bias \equiv E(\hat{\theta}) - \theta$
- $\hat{\theta} \to \theta, \ n \to \infty$ – состоятельность
- $\hat{\theta}^* \in C$ – наиболее эффективна в классе C,

если $MSE(\hat{\theta}^*) \leqslant MSE(\hat{\theta}) \quad \forall \hat{\theta} \in C$

где $MSE = V(\hat{\theta}) + bias^2$

2 $\xi_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} c$

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi, \ \eta_n \xrightarrow{P} c \Rightarrow$ $\quad \xi_n \pm \eta_n \xrightarrow{d} \xi \pm c$

$\xi_n \cdot \eta_n \xrightarrow{d} \xi \cdot c$

$\xi_n / \eta_n \xrightarrow{d} \xi / c, \ c \neq 0$

$h(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{d} h(\xi, c), \ h: R^2 \to R$

– непр. ф-я

Def: $\{\xi_n, \ n = 1, 2 \dots\}$ – асимпт. норм. m, σ^2 $\Leftrightarrow \xi_n \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2)$

если $\sqrt{n}(\xi_n - m) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$

$$\sqrt{n} \frac{\xi_n - m}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

* $\xi_n \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2) \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} m$

* $\sqrt{n}(\bar{x} - m) = \frac{S_n - mn}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$

Дельта – метод: результат опис. распр. ф-и от ас. норм. ст. оценка при изв. ас. дисперсии этой оценки

$g(\xi_n) \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2 (g'(m))^2)$, где $\xi_n \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2)$, т.е. $\sqrt{n}(\xi_n - m) \sim N(0, \sigma^2)$

Нер-во Йенсена $\quad E(f(\xi)) \geq f(E(\xi))$, где f – вып. ф-я

Лемма Н.П.

(Ex.) X – сл. вел. одно набл. $f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & x \in (0;1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$

$H_0: \theta = 1$ $\quad H_a: \theta = 2$ $\quad$ постр. по ЛНП $\alpha = 0{,}05$

$$S_c = \{x : f_1(x) \geq c f_0(x)\}$$

где c: $P_{H_0}(\{X \in S_c\}) = \alpha$

при H_0 $\quad f_0(x) = 1, \ x \in (0;1)$

при H_a $\quad f_a(x) = 2x, \ x \in (0;1)$

$P_{H_0}(\{f_0(x) = 0\}) = 0$ $\qquad S_c = \left\{x : \frac{f_1(x)}{f_0(x)} \geq c\right\}$

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} = \frac{2x}{1} \geq c \Rightarrow x \geq c/2$$

$P_{H_0}(\{X \in S_c\}) = \alpha$ $\qquad P_{H_0}(\{X \geq c/2\}) = \alpha$

$$1 - F_X(c/2, \theta = 1) = 1 - c/2 = \alpha \Rightarrow c = 2(1-\alpha) = 1{,}9$$

$$S_c = \{x : x \geq c/2\} = \{x : \underbrace{x \geq 0{,}95}_{c}\}$$

если $x \geq 0{,}95 \Rightarrow H_a$

$x < 0{,}95 \Rightarrow H_0$

(ML) $\xi \sim U[0, \theta]$

$$L(\theta) = \underbrace{C_5^2}_{const} \cdot p(\xi < 1)^{n_1} \cdot p(\xi \geq 1)^{n_2} \Rightarrow \hat{\theta}_{ML} = \frac{n}{n - n_2} = \frac{n}{n_1}$$

② Сходимость случайных величин

1) $m = E(X)$, $\sigma^2 = V(X)$

$S_n = \sum x_i$

тогда $\sqrt{n}(\bar{x} - m) = \frac{S_n - mn}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

2) $\hat{m}_2 = \sqrt[n]{x_1, \ldots, x_n}$ ~~оценка~~ ($E(X) = m$)

$\ln(\hat{m}_2) = \frac{1}{n} \sum \ln(x_i) \xrightarrow{p} E(\ln(X))$

$E(\ln(X)) \leqslant \ln(E(X))$

$\hat{m}_2 \xrightarrow{p} e^{E(\ln(X))} < m$, т.е. оценка несостоятельна

③ Метод максимального правдоподобия

1)

x	1	2	3
$p(x)$	p	$1/2$	q

$x_1 = 1, \; x_2 = 2, \; x_3 = 3, \; x_4 = 1$

$$f(p,q) = \frac{1}{2} p^2 \cdot q = \frac{1}{2} p^2 \cdot (1/2 - p) \xrightarrow[0 \le p \le 0{,}5]{} \max \quad \Rightarrow \hat{p} = 1/3$$

в общ. случае:

$$f(p,q) = p^{m_1} \cdot (0{,}5)^{m_2} \cdot q^{m_3}$$

$$P(x_1, \dots, x_n) = p^{m_1} (0{,}5)^{m_2} (1-p)^{m_3} \xrightarrow[0 \le p \le 0{,}5]{} \max \quad \Rightarrow \hat{p} = \frac{0{,}5\, m_1}{m_1 + m_3}$$

2) $L(\lambda; x_1, \dots, x_n) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)}$

$l(\lambda; x_1, \dots, x_n) = n \cdot \ln \lambda - \lambda n \bar{x}$

$\partial l / \partial \lambda = 0 \iff n/\lambda - n\bar{x} = 0 \Rightarrow \lambda = 1/\bar{x}$

$\partial^2 l / \partial \lambda^2 = -n/\lambda^2 < 0 \Rightarrow \lambda$ – т. max.

λ_{ML} – смещенная, состоятельная оценка

3) $\varepsilon \sim Be(p)$ $\qquad \theta - p$

$$l_n(p) = \ln p \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i + \ln(1-p) \cdot \sum_{i=1}^{n} (1 - \varepsilon_i)$$

$$= k \ln p + (n-k) \cdot \ln(1-p)$$

$\dfrac{\partial l_n(p)}{\partial p} = 0 \Rightarrow \hat{p}_{ML} = k/n$ $\qquad E(\hat{p}_{ML}) = p \Rightarrow$ несмещ. оценка

$\partial^2 l_n / \partial p^2 < 0 \Rightarrow \max$

4) $X \sim U[a, b]$, $x_1, \dots, x_n$ $\qquad \theta = [a, b]', \; a < b$

$$L(\theta) = \frac{1}{(b-a)^n} \xrightarrow[a,b]{} \max$$

при $a \le x_i \le b$ $\quad i = 1, \dots, n$ $\qquad \max L(\theta)$ дост. при $a = \min\{x_i, i = \overline{1,n}\}$

$b = \max\{x_i, i = \overline{1,n}\}$

④ Метод моментов

1) $X \sim U[0, \theta]$

$E(X) = \theta/2$ $\qquad V(X) = \theta^2/12$

$\theta = 2 \cdot E(X)$ $\qquad \hat{\theta}_{MM} = \sqrt{12 S^2}$

$\hat{\theta}_{MM} = 2 \cdot \overline{X}$

Теория вероятностей
и мат. статистика

II Сходимость

<u>Лемма</u> $\xi_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} c$

$\xi_n \xrightarrow{d} c \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} E(f(\xi_n)) = E(f(\xi)) \quad \forall f \in C$ — непрер., огран.

Пусть $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < \varepsilon$

$f(\cdot): f(\cdot) = 0$ при $|x-c| < \delta$

$f(\cdot) = 1$ при $|x-c| > \varepsilon$

f-линейна на $[c-\varepsilon, c-\delta]$ и $[c+\delta, c+\varepsilon]$

Тогда $E(f(\xi_n)) \geq E(f(\xi_n) \cdot \mathbb{1}(|\xi_n - c| > \varepsilon)) = P(|\xi_n - c| > \varepsilon)$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} E(f(\xi_n)) = E(f(\xi)) = f(c) = 0$

то $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n - c| > \varepsilon) = 0$

<u>Дельта - метод</u>: $\xi_n \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2)$ (т.е. $\sqrt{n}(\xi_n - m) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$)

$g(x)$ - числовая ф-я : $g'(m) \neq 0$

тогда $g(\xi_n) \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2 \cdot (g'(m))^2)$

$\triangleright$ по ф-ле Лагранжа $g(\xi_n) = g(m) + g'(\eta_n)(\xi_n - m)$

$|\eta_n - m| \leq |\xi_n - m|$

$\sqrt{n}(\xi_n - m) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$

$(\xi_n - m) \xrightarrow{d} 0 \Rightarrow (\xi_n - m) \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\eta_n - m) \xrightarrow{P} 0$

(*) $\exists c \in [a, b]$: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$

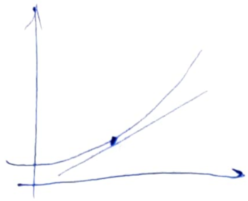
$g'(\eta_n) \xrightarrow{d} g'(m)$

$\sqrt{n}(g(\xi_n) - g(m)) = g'(\eta_n)\sqrt{n}(\xi_n - m)$

$\sqrt{n}(g(\xi_n) - g(m)) \xrightarrow{d} g'(m) \cdot N(0, \sigma^2)$

Нер-во Иенсена: f - вып ф-я

$$E(f(\xi)) \geq f(E(\xi))$$



▷ $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $\quad x = \xi,\ x_0 = m$

$$E(f(\xi)) \geq E(f(m) + \underbrace{f'(m)}_{=0}(\xi - m))$$

$$E(f(\xi)) \geq E(f(m) + \underbrace{f'(m)(\xi - m)}_{=0})$$

$$= E(f(m)) = f(m) = f(E(\xi))$$

ММП

Опр. $L_n(\theta) = L_n(\theta; x_1, \dots, x_n) = f(x_1; \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n; \theta)$

где $X : f(x, \theta)$, $x \in R$ $\quad \theta \in \Theta \subset R^k$

$y = [x_1, \dots, x_n]'$: $f_n(y; \theta)$, где $y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$

$$f_n(y; \theta) = f(y_1, \theta) \cdot f(y_2, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta)$$

Опр. $L_n(\theta; x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \max\limits_{\theta \in \Theta} \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_{ML}$

Свойства ОМП:

Усл. регулярности $M = \{x \in R^n : f(x; \theta) > 0\}$ не зав. от θ

+ непрерывность и дифференцируемость МП-оценки $\Rightarrow$

1) $\hat{\theta}_n \to \theta$, $n \to \infty$

2) $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \longrightarrow N(0, \sigma^2)$, $n \to \infty$

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{V(\hat{\theta}_n)}{V(\tilde{\theta}_n)} \leq 1$ $\quad \forall \tilde{\theta}_n$ — ас. норм. оценка

↑ асимпт. эф-ть

4) инвариантность: $\mu = g(\theta)$, где $g(\cdot)$ — гладкая ф-я

$\Rightarrow$ $\hat{\mu}_{ML} = g(\hat{\theta}_{ML})$

Метод моментов

$\theta \subset R^k$, $m_1(X), \dots, m_k(X)$:

$E(m_j(X)) = f_j(\theta)$, $j = \overline{1,k}$

где $f_j(\theta)$, $j = \overline{1,k}$ известны

тогда для получения $\hat{\theta}_{MM}$

$E(m_j(X))$ заменяются на $\overline{m_j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m_j(x_i)$

$f_j(\theta) = \overline{m_j}$, $j = \overline{1,k}$ => k уравнений , k неизвестных
(моментные рав-ва)

$\hat{\theta}_{MM}$ м.б. состоятельна при выполнении нек. условий

III Распр. связ. с норм.

Лемма Неймана – Пирсона:

$g_0(y),\ g_1(y),\ y \in R^n$ — плотности

$L(k) = \{y \in R^n : g_0(y) \le k \cdot g_1(y)\}$, $\forall k \ge 0$

если $k_1 < k_2$, то $L(k_1) \subset L(k_2)$, $L(k) \downarrow \emptyset$ $\forall k \downarrow 0$

$L(k) \uparrow R^n$ $\forall k \uparrow \infty$

Пусть вып. усл. непр-сти:

$\forall\ 0 < \alpha < 1\ \ \exists k_\alpha : \int\limits_{L(k_\alpha)} g_0(y)dy = \alpha.$ (*)

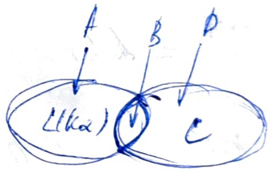
Лемма: Пусть $C \subset R^n : \int\limits_C g_0(y)dy \le \alpha$,

тогда $\int\limits_{L(k_\alpha)} g_1(y)\,dy \ge \int\limits_C g_1(y)dy$

▷ $B = L(k_\alpha) \cap C$, где $C \subset R^n : \int\limits_C g_0(y)dy \le \alpha$

$A = L(k_\alpha) \setminus B$

$D = C \setminus B$



$$\left.\begin{array}{l} \int\limits_{L(k_\alpha)} g_0(y)dy = \alpha \\ \int\limits_C g_0(y)\,dy \le \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \int\limits_A g_0(y)\,dy \ge \int\limits_D g_0(y)\,dy$$

$$\int\limits_{L(k_\alpha)} g_1(y)\,dy - \int\limits_C g_1(y)dy = \int\limits_A g_1(y)\,dy - \int\limits_D g_1(y)dy$$

$$\left.\begin{array}{l} g_1(y) \ge g_0(y)/k \quad \forall x \in A \\ g_1(y) < g_0(y)/k \quad \forall x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \int\limits_{K_\alpha} g_1(y)dy - \int\limits_C g_1(y)dy = \int\limits_A - \int\limits_D$$

$$\ge \frac{1}{k}\left(\int_A g_0(y)dy - \int_D g_0(y)dy\right) \ge 0$$ ■

л. Н-П – утв. о том, что в зад. проверки простой стат. гип. против простой альт-вы критерий, осн. на отн. пр-ия явл. наиболее мощным

Пусть X, $f(x,\theta)$ – п.р.в.; α; вып. усл. непр-ти (*)

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta = \theta_1$

Пусть $x = [x_1, \dots, x_n]'$ – выборка

$g(y;\theta) = f(y_1;\theta) \cdot \ldots \cdot f(y_n,\theta)$, $y = [y_1, \dots, y_n]' \in R^n$

$g_0(y) = g(y, \theta_0)$

$g_1(y) = g(y, \theta_1)$

$$T(x) = \begin{cases} H_0, & \text{если } x \notin L(k_\alpha) \\ H_1, & \text{если } x \in L(k_\alpha) \end{cases}$$

$C^* = L(k_\alpha)$ – крит. обл. теста

по л. Н-П. любой тест $\alpha' \leq \alpha$ имеет мощность $1-\beta' \leq 1-\beta$

▷ $C \subset R^n$: $\alpha' \leq \alpha$

$$P(x \in C \mid \theta = \theta_0) = \int_C g_0(y)\,dy \leq \alpha$$

$$power(T') = \int_C g_1(y)\,dy \leq \int_{L(k_\alpha)} g_1(y)\,dy = power(T)$$

т.е. в силу л. Н-П $T(x)$ обл. наиб. мощн. среди всех тестов с ур. зн-ти не больше α (most powerful test)

Тестирование гипотез

Г.С. зависит от $\theta \in \Theta$

$\Theta_1, \Theta_2 \subset \Theta$, $\Theta_1 \cap \Theta_2 = \varnothing$

$H_0 : \theta \in \Theta_1$ $H_a : \theta \in \Theta_2$

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ – выборка

Тест $T(x)$, $x \in R^n$ – ф-я с 2 значениями

↗ H_0 не отв. $T(x) = H_0$

↘ H_0 отв. $T(x) = H_a$

$R^n = C \cup D$ где $C = \{x \in R^n : T(x) = H_a\}$ ⟶ крит. обл. места

$\varnothing - C \cap D$ $D = \{x \in R^n : T(x) = H_0\}$

Type I error (значимость) $\alpha(\theta) = Pr(\text{reject } H_0 \mid H_0 \text{ is true}) =$

$= Pr_\theta(x \in C)$, $\theta \in \Theta_1$

Type II error ((1-β) мощность) $\beta(\theta) = Pr(\text{not reject } H_0 \mid H_a \text{ is true}) =$

$= Pr_\theta(x \in D)$, $\theta \in \Theta_2$

Мат. стат. (3)

1) $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0;1)$ $\left(\begin{matrix}\text{независимы} \\ \Leftrightarrow Z = [Z_1, \dots, Z_n]' \sim N(0_n, I_n)\end{matrix}\right)$

$\chi^2(n) = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = Z' Z$ — хи-квадрат с n с.с.

$f_{\chi^2(n)}(x) = C_n \, x^{n/2 - 1} \cdot e^{-x/2}, \quad x \geq 0$

$C_n = \dfrac{1}{2^{n/2} \cdot \Gamma(n/2)}$

$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \quad a > 0$

$E(\chi^2(n)) = n \qquad Var(\chi^2(n)) = 2n$

2) $Z_0 \sim N(0,1)$, Z_0 — не зав. от Z

$t(n) = \dfrac{Z_0}{\sqrt{(1/n) \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i^2}} = \dfrac{N(0,1)}{\sqrt{1/n \cdot \chi^2(n)}}$ — t-распр. с n с.с.

$f_{t(n)}(x) = C_n \cdot \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$

$C_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}} \; \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$

$E(t(n)) = 0 \qquad Var(t(n)) = \dfrac{n}{n-2}, \quad n \geq 3$

3) $U_1, \dots, U_m \sim N(0,1)$ (независимы $\Leftrightarrow U = [U_1, \dots, U_m]' \sim N(0_m, I_m)$ и независим от Z)

$F(m,n) = \dfrac{(1/m) \sum_{i=1}^{m} U_i^2}{(1/n) \sum_{i=1}^{n} Z_i^2} = \dfrac{1/m \cdot \chi^2(m)}{1/n \cdot \chi^2(n)}$ — F-распр. Фишера с (m,n) с.с.

Лемма Фишера

Пусть $x_1, \dots, x_n \sim N(m, \sigma^2)$ и $X \sim N(m_n, \sigma^2 I_n)$

$1_n = [1, \dots, 1]'$ тогда $X \sim N(m \cdot 1_n, \sigma^2 I_n)$

$\bar{x} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s^2 = \dfrac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

Теор.

1) $\bar{X}$ и S^2 — незав. с.в.

2) $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}) \sim \chi^2(n-1)$

3) $t = \frac{(\bar{X} - m)\sqrt{n}}{S} \sim t(n-1)$

Лемма

1) Z

Метод моментов:

Любой момент с.в. X_1 зависит от θ

$\Rightarrow$ θ м.б. ф-ей от теор. k-ого момента

Подставив в эту ф-ю вместо теор. k-го мом. его выб. аналог получаем $\hat{\theta} = \hat{\theta}_{MM}$

Пусть $x_1, \dots, x_n$ из F_θ, $\theta \in \Theta$

$g(y)$: $\exists$ $E_\theta g(X_1) = h(\theta)$ (*) и h обратима в обл. Θ

тогда $\hat{\theta}_{MM}$ – решение ур-я $\overline{g(x)} = h(\hat{\theta})$

(это те самое, что решить (*) отн. θ и взять вместо ист. момента выборочный)

$\theta = h^{-1}(E_\theta g(x_1))$ $\quad \hat{\theta} = h^{-1}(\overline{g(X)}) = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right)$

(обычно в кач-ве $g(y)$ берут $g(y) = y^k$)

$$\begin{cases} E_\theta x_1^k = h(\theta) \\ \theta = h^{-1}(E_\theta x_1^k) \\ \theta^* = h^{-1}(\overline{x^k}) = h^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right) \end{cases}$$

т.е. мы берем в кач-ве оценки такое значение $\hat{\theta}$ при кот. ист. момент совп. с выборочным

ex $X \sim [0, \theta]$

$E_\theta X_1 = \theta/2 \Rightarrow \theta = 2E_\theta X_1 \Rightarrow \hat{\theta}_{MME} = 2\overline{X}$

$E_\theta X_1^k = \int_0^\infty y^k \frac{1}{\theta} dy = \frac{\theta^k}{k+1} \Rightarrow \theta = \sqrt[k]{(k+1)E_\theta X_1^k}$

$\Rightarrow \hat{\theta}_k = \sqrt[k]{(k+1)\overline{X^k}}$

ex $\hat{\theta} = h^{-1}(\overline{g(X)}) \notin \Theta$

тогда $\theta \in \Theta$ корректируют: $\hat{\theta}_{мм}$ — ближайш. к $h^{-1}(\overline{g(X)})$ т. из Θ или из замыкания Θ

$X_1, \dots, X_n \sim N(a, 1)$, где $a \geq 0$

$E_a X_1 = a \Rightarrow a^* = \overline{X}$

по усл $a \geq 0$, но $\overline{X}$: м. б. $\overline{X} < 0$ $\Rightarrow$ коррект.

$\hat{a}_{мм} = \max\{0, \overline{X}\}$

Мат. стат. (1)

SRS - simple random sample (p of each group of n people to be chosen is equal)

1) X - chosing one by one n times
2) X - chosing n objects at once

X: are distr. the same?
are independent?

Sample of size n $\equiv x_1, \dots, x_n \equiv$ r.v. has the same distr as X

(Population $\equiv$ r.v. X)

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\sigma^2 = s^2 \cdot \frac{n-1}{n}$;

$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$; $\quad Var(X) = E((X - M)^2)$

$s = \sqrt{s^2}$

$E(\bar{x}) = \frac{1}{n} E(\sum x_i) = m$

$V(\bar{x}) = Var(\frac{1}{n} \cdot \sum x_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

$\sum(x_i - \bar{x})^2 = \sum(x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i \cdot \bar{x}) = \sum x_i^2 + n\bar{x}^2 - 2\bar{x}\underbrace{\sum x_i}_{n \cdot \bar{x}}$

$= \sum x_i^2 - n\bar{x}^2$

$E(X^2) = V(X) - m^2$

$E(\sum(x_i - \bar{x})^2) = n(\sigma^2 + m^2) - n(\frac{\sigma^2}{n} + m^2) = (n-1)\sigma^2$

$E(s^2) = \sigma^2$

$X \equiv$ pop.

$x_1, \dots, x_n \equiv$ sample

$F(x;\theta)$

$\theta \in \Theta \subset R^k$

$X \sim N(m, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$\theta = \begin{bmatrix} m \\ \sigma^2 \end{bmatrix}$ $\Theta = \begin{bmatrix} R \\ [0;+\infty) \end{bmatrix}$

$g(x_1, \dots, x_n) = \hat{\theta}$

the estimator of θ

1) unbiased estimator $\hat{\theta}$ iff

$E(\hat{\theta}) = \theta$

$E(\hat{\theta}) - \theta = bias(\hat{\theta})$

2) $E[(\hat{\theta}-\theta)^2] = MSE(\hat{\theta})$

if $\hat{\theta}$ is unbiased $MSE(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta})$

$E(\hat{\theta}) = \theta$

$E(\hat{\theta}) = m_{\hat{\theta}}$

$$E[(\hat{\theta}-\theta)^2] = E[(\hat{\theta} - m_{\hat{\theta}} + m_{\hat{\theta}} - \theta)^2]$$

$$= E[(\hat{\theta} - m_{\hat{\theta}})^2 + (m_{\hat{\theta}} - \theta)^2 + \underbrace{2(\hat{\theta} - m_{\hat{\theta}}) \cdot (m_{\hat{\theta}} - \theta)}_{=0}]$$

$$= Var(\hat{\theta}) + Bias^2(\hat{\theta})$$

$E(\hat{\theta} - m_{\hat{\theta}}) = 0$

- The est. $\hat{\theta}_1$ is more effective then $\hat{\theta}_2$

  if $MSE(\hat{\theta}_1) < MSE(\hat{\theta}_2)$

- For C - some class of estimators of θ

  The estimator $\hat{\theta}^*$ is called opt. est. in C

  if $MSE(\hat{\theta}^*) \le MSE(\hat{\theta})$ $\forall \hat{\theta} \in C$

3) consistency

$\hat{\theta}_n = g_n(x_1, \dots, x_n)$

$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ as $n \to \infty$

$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$

Prop. If $MSE(\hat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

then $\hat{\theta}_n$ is consistent

▷ by M. ineq.: If $\xi > 0$, $a > 0$

$P(\xi > a) \le \frac{E(\xi)}{a}$

$P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) \le \frac{MSE(\hat{\theta}_n)}{\varepsilon^2} \to 0$

Мат. стат. (1)

$E(\bar{X}) = m_x$

$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

$E(s^2) = \sigma_x^2$

$E(\hat{p}) = p$

$V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$

$bias = E(\hat{\theta}) - \theta$

$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = Var(\hat{\theta}) + bias^2$

Опр. $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ сход. по вер.-ти к с.в. X

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0$

- $X_n \xrightarrow{P} X, \; n \to \infty$
- $\operatorname{plim}\limits_{n\to\infty} X_n = X$

Нер-во Чебышева пусть X – н.с.в.

$\forall \varepsilon > 0 \quad P(\{X \geq \varepsilon\}) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$

$\triangleright \quad E[X] \geq E[X \cdot \mathbb{1}_{\{X > \varepsilon\}}] \geq E[\varepsilon \cdot \mathbb{1}_{\{X > \varepsilon\}}] = \varepsilon \cdot P(\{X > \varepsilon\})$

След. 1 X – с.в.

$\forall \varepsilon > 0 \quad P(\{X \geq \varepsilon\}) \leq \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2}$

$\triangleright \quad P(\{X \geq \varepsilon\}) \leq P(\{|X| \geq \varepsilon\}) = P(\{X^2 \geq \varepsilon^2\}) \leq \frac{E[X^2]}{\varepsilon^2}$

След. 2 X – с.в.

$\forall \varepsilon > 0 \quad P(\{|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

$\triangleright \quad P(\{|X - EX| \geq \varepsilon\}) = P(\{(X - EX)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[(X - EX)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

Теор. (Дост. усл. сост-ти оценки): Если

$\Leftarrow$ MSE $\to 0$

1) $\forall \theta \in \Theta: \; E[\hat{\theta}_n] \longrightarrow \theta, \; n \to \infty$

2) $\forall \theta \in \Theta: \; D[\hat{\theta}_n] \longrightarrow 0; \; n \to \infty$

$\Rightarrow \quad \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta, \; n \to \infty$ (сост. оценка)

$\triangleright \quad MSE(\hat{\theta}_n; \theta) = D(\hat{\theta}_n) + bias^2(\hat{\theta}_n)$,

где $MSE(\hat{\theta}_n; \theta) := E[(\hat{\theta}_n - \theta^2)]$

$bias(\hat{\theta}_n; \theta) = E[\hat{\theta}_n] - \theta$

$MSE(\cdot) = E[(\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n] + E[\hat{\theta}_n] - \theta)^2] =$

$= \Big(\underbrace{E[(\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n])^2]}_{D(\hat{\theta}_n)} + 2\underbrace{E[\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n]]}_{=0} \cdot (E[\hat{\theta}_n] - \theta) + \cancel{E\ldots} \; \underbrace{(E[\hat{\theta}_n] - \theta)^2}_{= bias^2} \Big) = \ldots \; \square$

при $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$:

$\triangleright$ $P(\{|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon\}) = P(\{(\hat{\theta}_n - \theta)^2 > \varepsilon^2\}) \leq$

$\leq \dfrac{E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]}{\varepsilon^2} = \dfrac{D(\hat{\theta}_n) + bias(\hat{\theta}_n; \theta)}{\varepsilon^2} \longrightarrow 0$

Теорема (Слуцкого): $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\in C(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$X_n \xrightarrow{P} a$, $Y_n \xrightarrow{P} b$

то $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a, b)$

След. • $\forall c \in \mathbb{R}$ $cX_n \xrightarrow{P} c \cdot a$

• $X_n + Y_n \xrightarrow{P} a + b$

• $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{P} ab$

• $X_n / Y_n \xrightarrow{P} a/b$ $(b \neq 0)$

• $g(X_n) \xrightarrow{P} g(a)$

$\triangleright$ Пусть $\varepsilon > 0$

$g \in C(a, b) \Rightarrow \exists \delta : \forall |x - a| < \delta ; |y - b| < \delta$

$|g(x, y) - g(a, b)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ для $\omega \in \Omega$: $|X_n(\omega) - a| < \delta$ и $|Y_n(\omega) - b| < \delta$

выполн. $|g(X_n(\omega), Y_n(\omega)) - g(a, b)| < \varepsilon$

Поэтому $\{|X_n - a| < \delta\} \cap \{|Y_n - b| < \delta\} \subseteq \{|g(X_n(\omega), Y_n(\omega)) - g(a, b)| < \varepsilon\}$

$\{|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{|X_n - a| \geq \delta\} \cup \{|Y_n - b| \geq \delta\}$

$P(\{|g(X_n, Y_n) - g(a, b)| \geq \varepsilon\}) \leq P(\{|X_n - a| \geq \delta\}) + P(\{|Y_n - b| \geq \delta\}) \to 0$

$n \to \infty$ $\square$

Закон больших чисел: $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ — i.i.d. с кон. мат. ож.

то $\overline{X}_n \xrightarrow{P} E[X_i]$, $n \to \infty$

Мат. стат (2)

$\xi_n \xrightarrow{d} C \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} C$

$\triangleright$ $\xi_n \xrightarrow{d} C \iff \lim\limits_{n\to\infty} E(f(\xi_n)) = E(f(\xi)) \quad \forall f(\cdot)$

Пусть $\varepsilon > 0 \quad 0 < \delta < \varepsilon$

$f(|x-c| \leq \delta) = 0$

$f(|x-c| > \varepsilon) = 1$

f лин. на $[c-\varepsilon, c-\delta], [c+\delta, c+\varepsilon]$

$E(f(\xi_n)) \geq E(f(\xi_n)) \cdot \mathbb{1}_{(|\xi_n - c| > \varepsilon)} = P(|\xi_n - c| > \varepsilon)$

$\lim\limits_{n\to\infty} E(f(\xi_n)) = E(f(\xi)) = f(c) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n - c| > \varepsilon) = 0$

Теор. (Слуцкого): $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} c$

$h: R^2 \to R$, $h \in C \Rightarrow h(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{d} h(\xi, c)$

Опр. $\sqrt{n}(\xi_n - m) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \iff \sqrt{n}\,\frac{\xi_n - m}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1) \Rightarrow \xi_n \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2)$

$* \ \xi_n \xrightarrow{P} m$

ex. $\sqrt{n}(\bar{x} - m) = \frac{S_n - mn}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ по ЦПТ $\Rightarrow \bar{X}_n \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2)$

Дельта-метод

Пусть $\xi_n \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2)$, $g'(x) \in C(U(m))$, $g'(m) \neq 0$

тогда $g(\xi_n) \overset{a}{\sim} N(g(m), \sigma^2 (g'(m))^2)$

$\triangleright$ $g(\xi_n) = g(m) + g'(\eta_n)(\xi_n - m)$, $|\eta_n - m| \leq |\xi_n - m|$

$\sqrt{n}(\xi_n - m) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \Rightarrow (\xi_n - m) \xrightarrow{d} 0 \Rightarrow (\xi_n - m) \xrightarrow{P} 0$

$\Rightarrow (\eta_n - m) \xrightarrow{P} 0$

по т. Слуцкого $g'(\eta_n) \xrightarrow{d} g'(m)$

$\sqrt{n}(g(\xi_n) - g(m)) = g'(\eta_n) \cdot \sqrt{n}(\xi_n - m)$

по т. Слуцкого

$\sqrt{n}(g(\xi_n) - g(m)) \xrightarrow{d} g'(m)\, N(0, \sigma^2)$

$g(\xi_n) \xrightarrow{d} N(g(m), \sigma^2 (g'(m))^2)$

MLE: $L_n(\theta; x_1 \ldots x_n) \longrightarrow \max\limits_{\theta \in \Theta}$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \hat{\theta}_{ML}$

Св-ва:

<u>Условие регулярности</u>: множество M

$M = \{x \in R^n : f(x, \theta) > 0\}$ не зав. от θ

* Регулярность семейства распределений

$X_1, \ldots, X_n$ из F_θ пар. сем-ва, $\theta \in \Theta$

Пусть $f_\theta(y)$ – плотность F_θ

носитель сем-ва распр. F_θ $C \subseteq R$: $\forall \theta \in \Theta$:

$$P_\theta(X_1 \in C) = 1$$

(не единств., отл. на м-во нул. вер-ти)

(R) Усл. регулярности $\exists C$ сем-ва F_θ:

$\forall y \in C$ $\sqrt{f_\theta(y)} \in D_\theta$ (во всех точках $\theta \in \Theta$)

(или $\ln f_\theta(y)$)

(RR) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ из F_θ, F_θ удовл.

усл. рег. (R)

Инф. Фишера $\exists\, I(\theta) = E_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_\theta(X_1)\right)^2 > 0$

и $I(\theta) \in C$ (во всех т. θ)

Если усл. рег. выполнено (+ усл. непр. и диф-ти) MLE обладают след. св-вами:

1) Состоятельность: $\hat{\theta}_n \to \theta$, $n \to \infty$

2) Ас. норм.: $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$, $n \to \infty$

3) Ас. эф-ть: $\lim\limits_{n \to \infty} V(\hat{\theta}_n) / V(\tilde{\theta}_n) \leq 1$

4) Инвариантность: $\mu = g(\theta)$, то $\hat{\mu}_{ML} = g(\hat{\theta}_{ML})$, где $g(\cdot)$ – гладкая ф-я

Math. Stat. (2)

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$

Def $F_{\xi_n}(x) \longrightarrow F_{\xi}(x)$

$\forall x$ $F_\xi(x)$ is const. in x $\Rightarrow$ $E(f(\xi_n)) \longrightarrow E(f(\xi))$

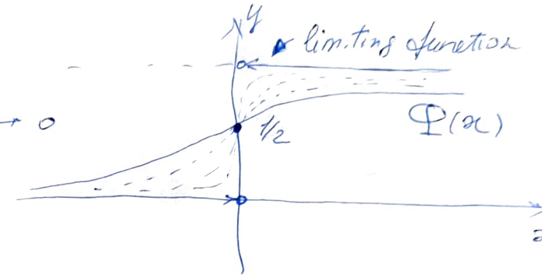
$\forall f$ cont and bounded

e.g. $Z \sim N(0,1)$

$\xi_n = \frac{Z}{n}$

$\xi_n(w) = \frac{Z(w)}{n} \to 0$ $\quad E|\xi_n|^p \to 0$

$E|\xi_n|^p = \frac{1}{n^p} E|Z|^p \longrightarrow 0$



① If $\xi_n \xrightarrow{d} c$ then $\xi_n \xrightarrow{P} c$

$\boxed{c.c.} \rightarrow \boxed{a.s} \xrightarrow{} \boxed{p} \rightarrow \boxed{d}$ ($\exists$ a subseq. $p \dashrightarrow a.s$)

$\boxed{L^s} \rightarrow \boxed{mean\ (L^p)} \rightarrow \boxed{p}$

$s \geq p \geq 1$

② Slutsky's Thm $\quad \xi_n \xrightarrow{d} \xi,\ \eta_n \xrightarrow{P} c \Rightarrow h(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{d} h(\xi, c)$

• $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} \xi + c$; $\xi_n \cdot \eta_n \xrightarrow{d} \xi \cdot c$; $\xi_n / \eta_n \xrightarrow{d} \xi / c$, $c \neq 0$

ex. $m = E(X)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$\hat{m}_2 = \sqrt[n]{x_1, \dots, x_n}$

$\ln(\hat{m}_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \xrightarrow{P} E(\ln(X))$

by Jensen's inequality: $E[f(\xi)] \geq f(E(\xi))$

for convex function f

$f(\xi) \geq f(m) + f'(m)(\xi - \mu)$

const $\quad$ 0

$E[f(\xi)] \geq f[E(\xi)] + 0$

1)	c.c.:	$\sum_{n \geq 1} P(\lvert X_n - X \rvert > \varepsilon) < \infty$
2)	a.s.:	$P(\{w : X_n(w) \to X(w),\ n \to \infty\}) = 1$
3)	L^r:	$E[\lvert X_n - X \rvert^r] \to 0,\ n \to \infty$
4)	p:	$P(\lvert X_n - X \rvert > \varepsilon) \to 0,\ n \to \infty$
5)	d:	$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} F_X(x),\ \forall x \in C(F_X)$

$E(\ln(X)) < \ln(E(X))$

$\ln(\hat{m}_2) \to E(\ln(X)) < \ln(E(X))$

$\hat{m}_2 \to e^{E(\ln(X))} < e^{\ln E(X)} = E(X) = m \Rightarrow$ inconsistent est.

Def. Asymptotic Normality: $\{\xi_n, n = 1, \dots\}$ is called as. normal

$\sqrt{n}(\xi_n - m) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \iff \xi_n \hat{\sim} N(m, \sigma^2)$

$\sqrt{n}\left(\frac{\xi_n - m}{\sigma}\right) \to Z \sim N(0,1)$

$\sqrt{n}(\xi_n - m) \approx \sigma Z$

$\xi_n \approx \sigma/\sqrt{n}\, Z + m \to m$ $\quad$ (* by LLN $\bar{x} \xrightarrow{P} m$; $(\xi_n - m) \to 0$, but $\sqrt{n}(\xi_n - m) \to N$)

of LLN $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i \xrightarrow{P} E(x) = m$

$\bar{x} - m \xrightarrow{P} 0$, $S_n = \sum x_i$

$\sqrt{n}(\bar{x} - m) = \dfrac{S_n - m \cdot n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ (speed of convergence to constant is $\sqrt{n}$)

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ is as. normal sequence

Delta-method: Let $\xi_n \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2)$, $g(x) \in D$

then if $g'(m) \neq 0 \Rightarrow \eta_n = g(\xi_n) \overset{a}{\sim} N(g(m), (g'(m))^2\sigma^2)$

MLE:

e.g.

x	1	2	3
$p(x)$	p	$1/2$	q

, $p + q = 1/2$

a) estimate

$f(p,q) = 1/2\, p^2 q \rightarrow \max\limits_{p,q}$ $\quad x_1 = x_4 = 1;\ x_2 = 2,\ x_3 = 3)$

$x_2 = x_4 = 1;\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$

$g(p) = 1/2\, p^2(1/2 - p) \rightarrow \max\limits_{0 \le p \le 1/2}$ $\Rightarrow \hat{p} = 1/3$

b) estimator $x_1, \dots, x_n$

$p(x_1, \dots, x_n)$ $\quad m_i = \#\{j : x_j = i,\ j = \overline{1,n}\}$, $i = \overline{1,3}$

$$\begin{cases} p(x_1, \dots, x_n) = p^{m_1} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{m_2} \cdot q^{m_3} \rightarrow \max\limits_{p,q} \\ q = 1/2 - p \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{p} = \dfrac{0{,}5\, m_1}{m_1 + m_3}$

HW:
1. $\hat{p}$
2. prove $\hat{p}$ is consistent
3. is $\hat{p}$ unbiased

Def. LF: $L(\theta, x) = f(x_1; \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n; \theta)$

Def. $\ell(\theta, x) = \sum \ln f(x_i; \theta)$

e.g. 1) $f(y, \lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$ $\Rightarrow \hat{\lambda}_{ML} = \dfrac{1}{\bar{x}}$

by Jensen's ineq.

1. Biased? $\ominus$

$E[\hat{\lambda}_{ML}] = E\left(\frac{1}{\bar{x}}\right) > \dfrac{1}{E(\bar{x})} = \lambda$

$\Rightarrow$ biased

2. Consistency $\oplus$

$\bar{x} \rightarrow E(x) = \frac{1}{\lambda}$ (LLN)

$\hat{\lambda}_{ML} \xrightarrow{P} \dfrac{1}{1/\lambda} = \lambda$

2) $X \sim Po(\lambda) \Rightarrow \hat{\lambda}_{ML} = \bar{x}$

1) $E(\hat{\lambda}_{ML}) = \lambda$ – unbiased

2) $\hat{\lambda}_{ML} \xrightarrow{P} \lambda$ – consistent

3) $\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $X \sim Unif(a, b)$

$L = \frac{1}{(b-a)^n} I_{[a,b]}(x_1) \cdot \ldots \cdot I_{[a,b]}(x_n) \rightarrow \max\limits_{a<b}$

$a \le \min\{x_1, \dots, x_n\}$ $\quad \Rightarrow \quad \hat{a}_{ML} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$

$b \le \max\{x_1, \dots, x_n\}$ $\quad \hat{b}_{ML} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$

— Properties of MLE —

Regularity condition:

$M = \{ y \in R \; f(y; \theta) > 0 \}$ does depend on θ

if holds

1) $\hat{\theta}_{ML} \xrightarrow{P} \theta$ ≡ consistency

2) $\hat{\theta}_{ML}$ is as normal, $\hat{\theta}_{ML} \overset{a}{\sim} N(\theta, \sigma^2)$

3) If $\tilde{\theta}$ is as. normal est of θ, then $\frac{Var(\hat{\theta}_{ML})}{Var(\tilde{\theta})} \leq 1$ (for large n)

4) Invariance property

$g(\theta) = \mu$

$\hat{\mu}_{ML} = g(\hat{\theta}_{ML})$

Method of moments

$X \sim Be(p)$

ε	0	1
$p(\varepsilon)$	1-p	p

$E(\varepsilon) = p$

$E(\varepsilon) \longrightarrow \bar{\varepsilon}$

$\hat{p}_{MM} = \bar{\varepsilon}$

$X \sim U[a; \beta]$

$$\left.\begin{aligned} E[X] &= \frac{\beta + a}{2} \\ E[X^2] &= \frac{\beta^2 - a\beta + a^2}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\beta + a}{2} &= \bar{x} \\ \frac{\beta^2 - a\beta + a^2}{3} &= \overline{x^2} \end{aligned}$$

$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum x_i^2$

$\Downarrow$

$\hat{a}_{MM} = \ldots$

$\hat{\beta}_{MM} = \ldots$

⇒ moment identities

$E(X) = \frac{\beta + a}{2}$ $V(X) = \frac{(\beta - a)^2}{12}$

$$\begin{cases} \frac{\beta + a}{2} = \bar{x} \\ \frac{(\beta - a)^2}{12} = s^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{\beta}_{MM} &= \bar{x} + \sqrt{3}\, s \\ \hat{a}_{MM} &= \bar{x} - \sqrt{3}\, s \end{aligned}$$