$Y_d = Y - T = C + S$, $T = Tx - Tr$, $Nx = Ex - Im$

$AE = C + I + G + Nx$ – спрос (агр. расходы)

потока (ВВП), запаса (капитал)

Мод. кругооборота

a) $Y = AE = C + I + G \Rightarrow \underbrace{I + G}_{\text{инъекц.}} = \underbrace{T + S}_{\text{утечки}}$

$$I = \underbrace{S}_{S_{част.}} + (\underbrace{T - G}_{S_{гос}}) = S_{нац.}$$

b) $-Nx = S_{ин.} = Im - Ex$

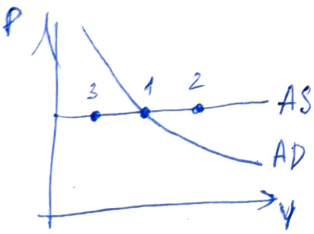
$$I + G + Ex = T + S + Im$$

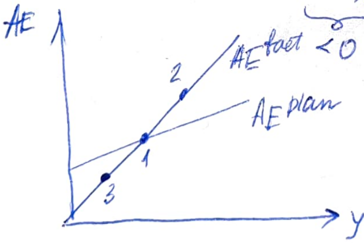
$$I = \underbrace{S + (T - G)}_{S_{нац.}} \underbrace{- Nx}_{S_{ин}} = S_{нац.} + S_{ин}$$

Кейнсианский крест

$I = S + (T - G)$ – инв. пол. должна ед. тожд. чтобы дох = расх.

$I^{max} = PV \Rightarrow I = I_0 + \underbrace{I'_R}_{<0} \cdot R \; (+ I'_Y \cdot Y)$





$T = T_0 + t \cdot Y$

$C = C_0 + C'_Y (Y - T)$

$G = G_0$

$Nx = Ex_0 - (Im_0 + I'_{mY})$

$$AE^{plan} = C_0 + C'_Y (Y - T) + I_0 + I'_R \cdot R + G =$$

$$= AE_0 + \alpha Y$$

Отр. наклон AS

1) C → эф. Пигу (W^R): $P\uparrow \to W^R\downarrow \to Y\downarrow$
2) I → эф. Кейнса (i): $P\uparrow \to C\uparrow \to D\downarrow \to i\uparrow \to I\downarrow$
3) Nx → $P\uparrow \to Nx\downarrow$ ($Ex\downarrow$ $Im\uparrow$)

IS:

$$\begin{cases} Y = AE \\ AE = AE_0 + \alpha Y = A_0 + I_R' \cdot R + \alpha Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = A_0 + I_R' \cdot R + \alpha Y$$

$$Y = \frac{A_0 + I_R' \cdot R}{1-\alpha}$$

$A_0 = C_0 - C_y' \cdot T_0 + I_0 + G_0 + Nx_0$

$\alpha = C_y'(1-t) - I_{m_y}' + I_y'$

$I_R' \uparrow \Rightarrow IS \swarrow$

$t \uparrow \Rightarrow IS \swarrow$

$I_m' \uparrow \Rightarrow IS \swarrow$

$$\frac{dR}{dY} = \frac{1-\alpha}{I_R'}$$

$$\frac{dY}{dAE} = \frac{1}{1-\alpha} \qquad \frac{dY}{dG} = \frac{1}{1-\alpha} \qquad \frac{dY}{dT} = \frac{-mpc}{1-\alpha}$$

$$\frac{dY}{dG} + \frac{dY}{dT} = \frac{1-mpc}{1-\alpha} \quad (=1 \text{ iff } \alpha = mpc)$$

- автом.: стабилизаторы (подох. налог, пос. по безр., прогр. нал. на приб.)
- дискрец.

LM:

$$M^s + B^s + E^s = M^d + B^d + E^d$$

$M^s = C + D$ — ден. масса

$H = C + RR$ — ден. база

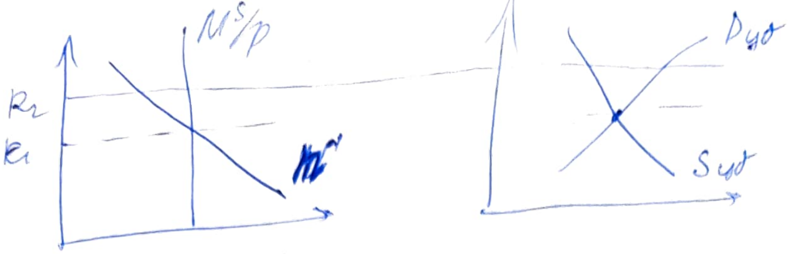
$$mult = k = \frac{M}{H} = \frac{C+D}{C+RR} = \frac{C/D + 1}{C/D + RR/D} = \frac{cr+1}{cr+rr}$$

$$rr = rr_{обяз} + \underbrace{rr_{добр.}}_{er}$$

$$M \cdot V = P \cdot Y$$

$$m^d = \frac{M}{P} = \frac{Y}{V}$$

$$m^d = \underbrace{m^{d\prime}_Y}_{>0} \cdot Y + \underbrace{m^{d\prime}_R}_{<0} \cdot R$$



$$\begin{cases} M^s/p = m^d \\ m^d = m^{d\prime}_y \cdot y + m^{d\prime}_R \cdot R \end{cases}$$

$$M^s/p = m^{d\prime}_y \cdot y + m^{d\prime}_R \cdot R$$

$$y = \frac{M^s/p - m^{d\prime}_R \cdot R}{m^{d\prime}_y}$$

$$\frac{dR}{dY} = \frac{-m^{d\prime}_y}{m^{d\prime}_R}$$

$M^s/p \uparrow \Rightarrow LM \rightarrow$

$|m^{d\prime}_R| \uparrow \Rightarrow LM \searrow$

$m^{d\prime}_y \uparrow \Rightarrow LM \nwarrow$

<u>Мон. пол.</u>:
- $rr \uparrow$ $RR \uparrow$ $\frac{1}{rr} \downarrow$ $M^s \downarrow$ $(Y \downarrow)$
- $r_{ref} \uparrow$ $M^s \downarrow$ $(Y \downarrow)$
- (перв.) фин. пр-во пр. гос. обл. $(\Delta V = \Delta B$; $\Delta M = 0)$ < $\Delta G = \Delta B$

(втор.) мон. д/х пр-и пок. у ЦБ $\Delta V = 0$ $\Delta B = -\Delta B^{ЦО}$

$V = B^{д/х} + B^{ЦО}$

$\Delta B^{ЦО} \uparrow \Rightarrow M^s \downarrow$ $(Y \downarrow)$

-

А	П
OR	$C \downarrow$
$B^{ЦО} \downarrow$	RR

$\Rightarrow H \downarrow \Rightarrow M \downarrow$

- диспр. (по ост.)
- правила ($MV = PY \Rightarrow g_M + 0 = \pi + 0$ при V, y - const)

Макроэкономика

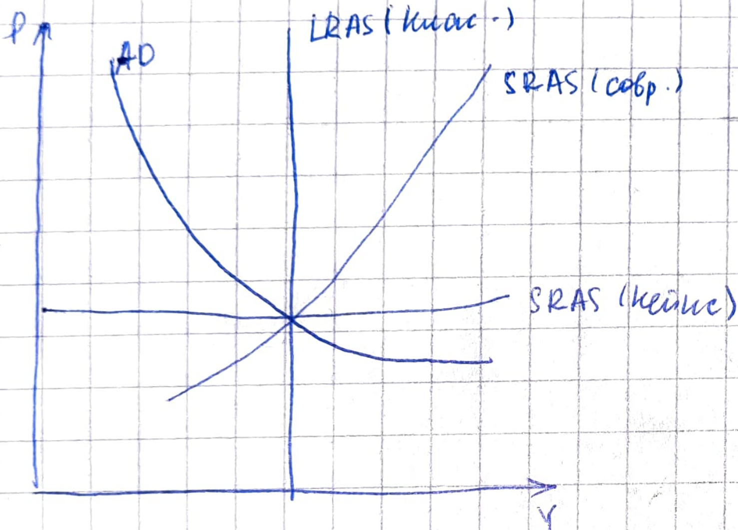
$$E = Y = C(Y-T) + I + G \qquad AD = C + I + G + N_x$$

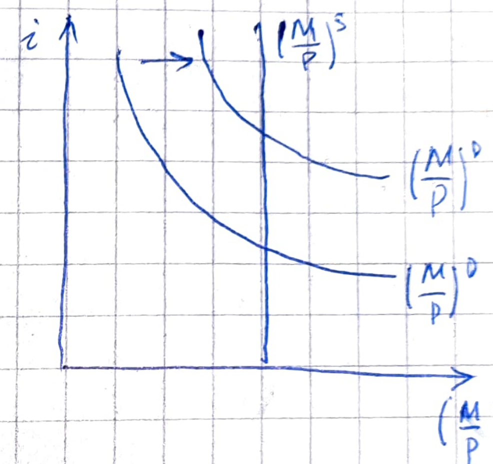
$$r = \frac{i-\pi}{i+\pi} \approx i - \pi$$

$$u = \frac{U}{U+E} \cdot 100\% \qquad \frac{Y-\bar{Y}}{\bar{Y}} = -a(u-u_e) = -a \cdot u_c$$

$$\frac{Y_2 - Y_1}{Y_1} = c - d(u_2 - u_1)$$

$$u_2 - u_1 = -b(g_{y2} - \bar{g})$$





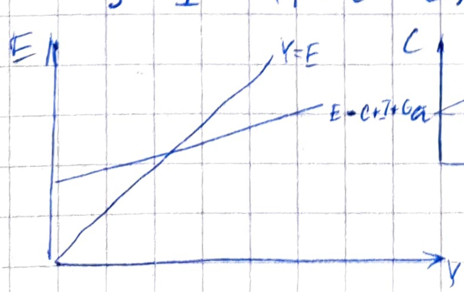
$$C = a + b \cdot (Y-T) \qquad b = MPC = \frac{\Delta C}{\Delta(Y-T)}$$

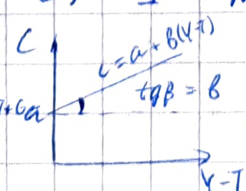
$$APC = \frac{C}{Y-T} = b + \frac{a}{Y-T}$$

$$\begin{cases} Y = E \\ E = a + b(Y-T) + I + G \end{cases} \qquad Y = \frac{a + b \cdot T + I + G}{1-b}$$

$$Y - T = C + S \qquad \Delta Y = \Delta G \cdot \frac{1}{1-b}$$

$$S - I = (Y - C - G) - I = N_x \qquad \Delta Y = \Delta a \cdot \frac{1}{1-b}$$





$$\Delta Y = \Delta T_r \cdot \frac{b}{1-b}$$

$$\Delta Y = -\Delta T \cdot \frac{b}{1-b}$$

$R = rr \cdot D$ $\quad \frac{1}{rr}$ – ден. мульт

$\Delta M = \frac{1-rr}{rr} \cdot D$ – банк. депозит

$\Delta M = \frac{1}{rr} \cdot D$ – ЦБ

$MV = PT$ $\quad m = \frac{\Delta M}{M}$

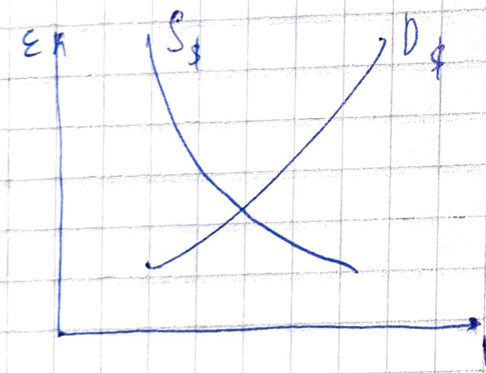
$MV = PY$ $\quad PY$ – Δ ном. ВВП

$m + v = \pi + g$ $\quad Y$ – Δ реал. ВВП

$t_a = \frac{T}{Y}$ $\quad t_m = \frac{\Delta T}{\Delta Y}$

$D_t = \sum_{i=1}^{N} Def_{t-i}$

$D^r_{t+n} = \frac{D_t}{(1+\pi)^n}$ $\quad n = \frac{0,5}{\pi}$



$E = \frac{1}{X}$

$\Delta E = \frac{E_t}{E_{t-1}} - 1 = \frac{X_{t-1}}{X_t} - 1$

$1 + i = \frac{E_t(1+i^*)}{E_{t+1}}$

$E^r = E \cdot \frac{P}{P^*}$

$\frac{1}{P} = \frac{E}{P^*}$

Стандартные ошибки:

$$\sigma^2_{\hat\beta_0} = \frac{1}{n} \frac{Var[H_i u_i]}{[E(H_i^2)]^2}, \quad H_i = 1 - \frac{\mu_x}{E(x_i^2)} \cdot x_i$$

$$\sigma^2_{\hat\beta_1} = \frac{1}{n} \frac{Var[(x_i - \mu_x) \cdot u_i]}{[Var(x_i)]^2}$$

$$\sigma^2_{\hat\beta_0} = \frac{S^2_{\hat u} \cdot \sum x_i^2}{n \cdot \sum (x_i - \bar x)^2} \xrightarrow{d} \frac{\sigma^2_u E(x_i^2)}{n \cdot \sigma^2_x} \quad Var(\hat\beta_0 | X) = \frac{\sigma^2 \cdot \sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar x)^2}$$

$$\sigma^2_{\hat\beta_1} = \frac{S^2_{\hat u}}{\sum (x_i - \bar x)^2} \xrightarrow{d} \frac{\sigma^2_u}{n \cdot \sigma^2_x} \quad Var(\hat\beta_1 | X) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar x)^2}$$

где $S^2_{\hat u} = \frac{1}{n-2} \sum \hat u_i^2 = \frac{RSS}{n-2}$

HC - ошибки Уайта: (HC1)

$$\hat\sigma^2_{\hat\beta_0} = \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n-2} \cdot \sum \hat H_i^2 \cdot \hat u_i^2}{\left(\frac{1}{n} \cdot \sum \hat H_i^2\right)^2}, \quad H_i = 1 - \frac{\bar X}{\frac{1}{n} \sum X_i^2} \cdot X_i$$

$$\hat\sigma^2_{\hat\beta_1} = \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n-2} \sum (x_i - \bar x)^2 \cdot \hat u_i^2}{\left(\frac{1}{n} \cdot \sum (x_i - \bar x)^2\right)^2}$$

$$\hat\sigma^2_{\hat\beta_0} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n-2} \cdot \sum \hat u_i^2 \cdot \sum x_i^2}{\sum (x_i - \bar x)^2}$$

$$\hat\sigma^2_{\hat\beta_1} = \frac{\frac{1}{n-2} \cdot \sum \hat u_i^2}{\sum (x_i - \bar X)^2}$$

$$\hat{Var}(u) = \frac{RSS}{n-k} \cdot I$$

$$HC0 \Rightarrow \hat{Var}_{HC0}(u) = \begin{pmatrix} \hat u_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat u_n^2 \end{pmatrix}$$

$$HC1 \Rightarrow \hat{Var}_{HC1}(u) = \frac{n}{n-k} \cdot \begin{pmatrix} \hat u_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat u_n^2 \end{pmatrix}$$

$$HC2 \Rightarrow \hat{Var}_{HC2}(u_j) = \frac{\hat u_j^2}{1 - H_{jj}}, \text{ где } H = X(X'X)^{-1}X'$$

$$HC3 \Rightarrow \hat{Var}_{HC3}(u_j) = \frac{\hat u_j^2}{(1 - H_{jj})^2}, \text{ где } H = X(X'X)^{-1}X'$$

Проверка гипотез:

a) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$ $\qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$

ЦПТ: $\sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \overset{d}{\sim} N(0;1) \Rightarrow \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 \overset{d}{\sim} N\left(\mu_1 - \mu_2;\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

$$t = \frac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - d_0}{SE(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)} \overset{d}{\sim} N(0;1)$$

где $SE(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$, где $S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum (Y_i - \bar{Y})^2$

$\Rightarrow$ P-value $= P_{H_0}\left[|t| > |t^{act}|\right] \overset{d}{=} P(|Z| > |t^{act}|) = 2\Phi(-|t|^{act})$

$\star$ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$

$t^{cr}_{5\%/2} = 1{,}96 \Rightarrow |t^{act}| > t^{cr}_{0{,}025} \Rightarrow H_0$ отв

$\star$ $H_1: \mu_1 - \mu_2 > d_0 \Rightarrow$ p-value $= 1 - \Phi(t^{act}) \Rightarrow t^{act} > t^{cr}_{0{,}05}$
$= 1{,}64$
$\Rightarrow H_0$ отв.

$\star$ при малых n $t \nsim N(0;1)$

если $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\quad SE(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) = \sqrt{\frac{S^2_{pooled}}{n_1} + \frac{S^2_{pooled}}{n_2}}$, где $S^2_{pooled} = \frac{1}{n_1+n_2-2}\cdot\left[\sum (Y_i - \bar{Y}_1)^2 + \sum (Y_i - \bar{Y}_2)^2\right]$

если $\bar{Y}_i \sim N(0; S_i^2) \Rightarrow t \sim t_{n_1+n_2-2}$

b) $H_0: \beta_1 = \beta_{1,0}$

$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{SE(\hat{\beta}_1)}$, где $SE(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n-2}\cdot\sum(X_i - \bar{X})^2\cdot\hat{u}_i^2}{\left(\frac{1}{n}\cdot\sum(X_i - \bar{X})^2\right)^2}} \xrightarrow{d} \sqrt{\frac{1}{n}\,\frac{Var[(X_i - \mu_X)u_i]}{(Var(X_i))^2}}$

$\beta_i : \{\hat{\beta}_i \pm 1{,}96\cdot SE(\hat{\beta}_i)\}$ $\qquad$ при $H_1: \beta_i \neq \beta_{i0}$

$\beta_i \leq \hat{\beta}_i + 1{,}64\cdot SE(\hat{\beta}_i)$ $\qquad$ при $H_1: \beta_i > \beta_{i,0}$

c) $H_0: \beta_0 = \beta_{0,0}$

$t = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0,0}}{SE(\hat{\beta}_0)}$, где $SE(\hat{\beta}_0) = \sqrt{\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n-2}\sum H_i^2\cdot\hat{u}_i^2}{\left(\frac{1}{n}\sum H_i^2\right)^2}} \xrightarrow{d} \sqrt{\frac{1}{n}\,\frac{Var[H_i u_i]}{(E(H_i^2))^2}}$

где $H_i = 1 - \frac{\bar{X}}{\frac{1}{n}\sum X_i^2}\cdot X_i$ $\qquad$ где $H_i = 1 - \frac{\mu_X}{E(X_i^2)}\cdot X_i$

d) $H_0: \beta_1 = 0 \vee \beta_2 = 0$

Метод Бонферрони

т.к. использ. t-стат. не оправдано (зав. от $corr(t_1, t_2)$ и $corr(\hat\beta_1, \hat\beta_2)$)

H_0 не отв., если $|t_1| \le c \vee |t_2| \le c$, где $c: \{p\text{-value} \le \alpha\}$

Нер-во Бон-ни: $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$

Поправки Бон-ни: $p\text{-value} \le \alpha/m$, где m – число пров. гип.

$P_{H_0}[\,|t_1| > c \vee |t_2| > c\,] \le m \cdot P(|Z| > c)$

e) $H_0: \beta_1 = \beta_{1,0} \vee \beta_2 = \beta_{2,0}$. $(m=2)$

$$F^{HC} = \frac{1}{2}\left(\frac{t_1^2 + t_2^2 - 2\hat\rho_{t_1 t_2} \cdot t_1 t_2}{1 - \hat\rho^2_{t_1 t_2}}\right) \overset{d}{\sim} F_{m,\infty} = \frac{\chi^2_m}{m}$$

$$F = \frac{(R^2_{UR} - R^2_R)/m}{(1 - R^2_{UR})/n-k} = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/m}{(RSS_{UR})/n-k} \sim F(m, n-k)$$

f) Тест значимости регрессии:

$H_0: \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0$ (условно $R^2 = 0$)

$$F = \frac{ESS/k}{TSS/n-(k+1)} = \frac{R^2/k}{1-R^2/n-(k+1)} \sim F(k, n-k-1)$$

* $R^2 > R^2_{cr}(F^{cr}) \Rightarrow H_0$ отв.

g) $H_0: \beta_1 = \beta_2$

$F \overset{d}{\sim} F_{1,\infty}$ или преобразование $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 \cdot Z_i + u_i$

$$\hat Y_i = \hat\beta_0 + \underbrace{(\hat\beta_1 - \hat\beta_2)}_{\hat\gamma_1} X_i + \hat\beta_2 \cdot \underbrace{(X_i + Z_i)}_{W_i}$$

$\Rightarrow H_0: \hat\gamma_1 = 0$

$$t = \frac{\hat\gamma_1}{SE(\hat\gamma_1)}$$

h) $H_0: R\beta = r$, e.g. $[\,I_q \; 0_{q\times(k+1-q)}\,] \cdot \beta = 0_q$

$$F^{HC} = (R\hat\beta - r)' \, [R \cdot \hat\Sigma_{\hat\beta} R']^{-1} \cdot (R\hat\beta - r)/q \overset{d}{\sim} F_{q,\infty}$$

(АС) Тест Дарбина - Уотсона

- АС 1 порядка: $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$
- есть св. член, нет лаг. знач., нет пропусков пер.
- $u_t \sim N(0; \sigma_u^2)$
- строгая экзогенность $E(u_t | X) = 0$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_t + u_t$$

где $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$

1) $Y_t(X_t) \Rightarrow$ вычислить ост. $\hat{u}_t$

2) $H_0: \rho = 0$ $\quad H_1: \rho > 0$

$$DW = \frac{\sum (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum \hat{u}_t^2} \xrightarrow{d} 2 - 2\rho \in [0, 4]$$

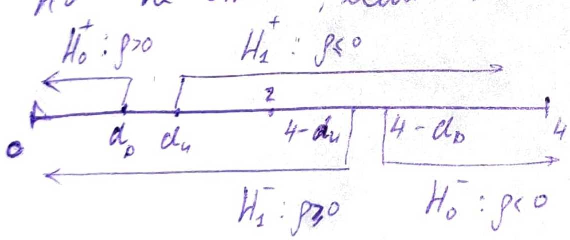
для $H_0; H_1$:

$0 < d^{cr}_{D\alpha} < d^{cr}_{\alpha} < d^{cr}_{U\alpha} < 2$

H_0 отв., если $DW < d^{cr}_{D\alpha}$

H_0 не опр., если $DW \in (d^{cr}_{D\alpha}; d^{cr}_{U\alpha})$

H_0 не отв., если $DW > d^{cr}_{U\alpha}$



(МС) Тест VIF (фактор вздутия вариации)

1) $x_j(x_{-j}) \Rightarrow R^2_j$

2) $VIF(x_j) = \dfrac{1}{1-R^2_j}$

$VIF > 10 \Rightarrow$ мультиколлинеарность

$> 3 \Rightarrow$ средняя МК

(u) Тест Харке-Бера

1) $H_0: \underset{\text{skewness}}{S} = 0 \vee \underset{\text{kurtosis}}{k} = 3$

2) $JB = n \cdot \dfrac{S^2}{6} + n \cdot \dfrac{(k-3)^2}{24} \sim \chi^2_2$

$S = \mu_3/\sigma^3$; $K = \mu_4/\sigma^4 - 3$; $\mu_k = \frac{1}{n}\sum(\hat{u}_i - \bar{u})^k$

(НС) Тест Голдфелда-Квандта

$Var(u_i|X) = \alpha \cdot x_i$

$u_i \sim N(0; \sigma^2_u)$ + др. усл. ТМ

1) сорт. по возр. x_i (т.к. $Var_i \uparrow$)

2) $-\underset{(20\%)}{?}$ центр. наблюд.

3) $H_0: Var(u_i|X_i) = const$

$$F = \frac{RSS_u/n_u-k}{RSS_d/n_d-k} \sim F_{1-\alpha}(n_u-k, n_d-k)$$

$F^{act} > F^{cr} \Rightarrow H_0$ - отв. (H_0 не отв., если $RSS_u < RSS_d$)

(НС) Тест Глейзера

Пусть $Var(u_i|X) = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_i^\gamma$

1) $Y_i(x_i) \Rightarrow$ вычисл. ост. $\hat{u}_i$

2) $|\hat{u}_i(x_i)| \Rightarrow \hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1$ при фикс. γ

3) $H_0: \theta_1 = 0$; $t = \dfrac{\hat{\theta}_1}{SE(\hat{\theta}_1)}$

если θ_1 значим при ≥ 1 γ, то выбир. наилучшая ф.

НМНК

$$Y_i = f(X_{1i},\dots,X_{ki},\beta_0,\dots,\beta_k)+u_i$$

$$\min_{\hat\beta} \sum \left(Y_i - f(X_{1i},\dots,X_{ki},\hat\beta_0,\dots,\hat\beta_k)\right)^2$$

а) Полиномиальная регрессия

$$Y_i = \beta_0+\beta_1\cdot x_i+\dots+\beta_r\cdot x_i^r+u_i$$

Выбор спецификации: $\uparrow$ гибкость vs $\downarrow$ точность оц. коэф.

$r\uparrow$ $\qquad r\uparrow$

Алгоритм посл. тест. гипотез:

1) Пусть r – макс. $\Rightarrow$ $Y_i(X_i,\dots,X_i^r)$ – оценить

2) $H_0: \beta_r=0$

$$t=\frac{\hat\beta_r}{se(\hat\beta_r)}$$

3) H_0 не отв. $\Rightarrow$ X_i^r искл. из регр.

$\Rightarrow$ продолжать, пока коэф. при X_i^{r-k} не ст. значим : $[\beta_{r-k}\neq 0]$

Гипотеза о линейности:

$$H_0: \beta_2=\dots=\beta_r=0 \Rightarrow F = \frac{(RSS^1-RSS^2)/\overbrace{r-1}^{q}}{RSS^2/(n-\underbrace{(r+1)}_{k})} \sim F(r-1,\, n-(r+1))$$

b) логарифмические регрессии

(lin-lin): $Y_i\ (X_{1i}, \dots, X_{ki})$ $\qquad \beta_m = \partial Y / \partial X_m$

(lin-log): $Y_i\ (\ln(X_{1i}), \dots, \ln(X_{ki}))$ $\qquad \beta_m = \partial Y / \partial X_m / X_m$

(log-lin): $\ln(Y_i)\ (X_{1i}, \dots, X_{ki})$ $\qquad \beta_m = \partial Y / Y / \partial X_m$

(log-log): $\ln(Y_i)\ (\ln(X_{1i}, \dots, X_{ki}))$ $\qquad \beta_m = \partial Y / Y / \partial X_m / X_m$

Тест Зарембки

① log-log против lin-log: $Z_{mi} = \ln(X_{mi})$

② log-lin против lin-lin: $Z_{mi} = X_{mi}$

⊕ $u \sim N(0; \sigma_u^2)$

⊕ $X_{ki}, Y_i > 0$

H_0: нет различий между моделями

1) $\overline{Y}^G = \sqrt[n]{\prod Y_i} = \left(e^{\log_e \prod Y_i}\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \log_e \prod Y_i\right) =$

$= \exp\left(\frac{1}{n} \sum \log_e Y_i\right) = \exp\left(\overline{\ln Y_i}\right)$

2) $\tilde{Y}_i = \dfrac{Y_i}{\overline{Y}^G} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{Y}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot Z_{1i} + \dots + \beta_k \cdot Z_{ki} + u_i \Rightarrow RSS_1 \\ \ln(\tilde{Y}_i) = \beta_0 + \beta_1 \cdot Z_{1i} + \dots + u_i \Rightarrow RSS_2 \end{cases}$

3) $\dfrac{n}{2} \left| \ln \dfrac{RSS_1}{RSS_2} \right| \sim \chi^2_1$

если H_0 отв., то выбир. меньший RSS

Тест Бокса – Кокса

1) $\overline{Y}^G = \sqrt[n]{\prod Y_i} \Rightarrow \tilde{Y}_i = \dfrac{Y_i}{\overline{Y}^G}$

2) $Y_i(\lambda) = \dfrac{(\tilde{Y}_i)^\lambda - 1}{\lambda}$, где при $\lambda \to 0$
$Y_i(\lambda) \to \ln(\tilde{Y}_i)$

$Y^* = \beta_0 + \beta_1 \cdot X^* + u_i$

1) $Y^* = \dfrac{Y^{\lambda_1} - 1}{\lambda_1}$

$X^* = \dfrac{X^{\lambda_2} - 1}{\lambda_2}$

2) $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ – находятся с пом. $\min\limits_{\lambda, \beta} RSS$ с пом. числ. мет.

3) проверка гип. о конкр. знач. λ_1, λ_2 – тест Б-К

Диф. уравнения

1) д.у. с разд. пер. $dy \cdot f(y) = dx \cdot g(x)$

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + c$$

2) О.д.у. 1ого порядка

[проверка] $x \to \lambda x$, $y \to \lambda y$ (произв. не трог.)

замена $\left.\begin{array}{l} y = t(x)\cdot x \\ y' = (tx)' = t'x + t \end{array}\right\} \Rightarrow$ ур. с р.п.

2) линейные н.д.у. 1ого порядка

$y' + p(x)\cdot y = q(x)$

а) замена (метод Бернулли)

$y = u\cdot v$

$y' = u'v + v'u$

$u'v + \underbrace{(v' + p(x)\cdot v)}_{=0}\, u = q(x)$

$y(x)$

3

$\Rightarrow \boxed{u(x) + C}$

$\Rightarrow \begin{cases} u'v = q(x) \\ v' + p(x)\cdot v = 0 \Rightarrow \text{ур. с р.п.} \Rightarrow v(x) \end{cases}$

2

1

б) мет. вар. произв. пост. (мет. Лагр.)

$$y' + p(x)y = q(x)$$

① $y' + p(x)y = 0 \Rightarrow$ ур. с р. п.

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\, dx + C$$

$\boxed{C = u}$ с.д.

$\Downarrow$ $y = ue^{x^2}$

$y(u) \rightarrow y' + p(x)y = q(x)$

$\boxed{\Rightarrow u(x)}$

$\Rightarrow y(x)$

Для м. в. п. п. д.у. 2 пор.

с.д. $y = \underbrace{z_1(x)e^{2x}\cos x}_{y_1} + \underbrace{z_2(x) \cdot e^{2x}\sin x}_{y_2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1'(x)y_1 + z_2'(x)y_2 = 0 \\ z_1'(x)y_1' + z_2'(x)y_2' = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

↳ при y''

[по Крамеру:]

$\Rightarrow z_1, z_2 \Rightarrow y$.

3) д.у. Бернулли

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$$

$$y^{-n} \cdot y' + p(x) \underbrace{\boxed{y^{-n+1}}}_{= z} = q(x)$$

$$\Rightarrow z' = (-n+1)y^{-n}y'$$

$$z' + (-n+1)p(x) \cdot z = q(-n+1)$$

4) д.у. высших порядков

I. $y^{(n)} = f(x) \Rightarrow \underbrace{\iiint}_{n} f(x) + c_1 \ldots + c_n$

II. отсут. в явном виде y $(y'' = f(x, y'))$

$y' = z \Rightarrow y'' = z' \Rightarrow$ д.у. 1 пор.

III. отс. в явном виде x $(y'' = f(y', y))$

$y' = z(y) \Rightarrow y'' = z'(y) \cdot y' = z'_y(y) \cdot z(y)$

$\Rightarrow$ д.у. 1 пор.

5) ~~од.~~ лин. д.у 2 пор. с пост. коэф.

$y'' + py' + qy = 0$

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow y = c_1 e^{\lambda_1 x} \cdot x + c_2 e^{\lambda_1 x}$
- $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta i \Rightarrow y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \cdot \sin \beta x)$

6) неод. д.у. 2 пор.

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$

- $f(x) = 4x^3 \Rightarrow \tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
- $f(x) = (2x - 3) e^{\beta x}$ ($\lambda_{1,2}$ не совп. с β) $\Rightarrow \tilde{y} = (Ax + B) e^{\beta x}$
- $\lambda_{1,2} = \beta \Rightarrow \tilde{y} = x(Ax + B) e^{-2x}$

• $f(x) = a\cos 3x - 4\sin 3x \Rightarrow \tilde{y} = A\cos 3x + B\sin 3x$

• $f(x) = x\cos x + 2\sin x \Rightarrow \tilde{y} = (Ax+B)\cos x +$
$(Cx+D)\sin x$

• $f(x) = \frac{1}{3} e^{-3x} \sin x \Rightarrow \tilde{y} = e^{-3x}(A\cos x + B\sin x)$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$f(x) = e^{-3x}(5\cos 2x - 3\sin 2x) \Rightarrow \tilde{y} = e^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$
$\cdot x$
если $\lambda_{1,2}$ совп. с $-3 \pm 2i$

7) системы

$$\begin{cases} dx/dt = \ldots \\ dy/dt = \ldots \end{cases} \Rightarrow x \Rightarrow dx \quad \Rightarrow y \Rightarrow dy$$

① ②

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

Эконометрика

1) предп. МНК 1) $E(u_i | X) = 0$

2) (x_i, y_i) – i.i.d.

3) $0 < E(x_i^4) < \infty$

$0 < E(y_i^4) < \infty$

ТГМ 1) $E(u_i | X) = 0$

2) $Var(u_i | X) = \sigma_u^2$ $\Rightarrow \hat{\beta}_{МНК}$ – BLUE

3) $E(u_i u_j | X) = 0$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T Y \; ; \; \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{yx}}{S_x^2}$$

$$* \; \hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \; (\beta_0 = 0)$$

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1 | X) = -\frac{\bar{x} \cdot \sigma^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$Var(\hat{\beta}_0 | X) = \frac{\sigma^2 \cdot \sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$Var(\hat{\beta}_1 | X) = \frac{\sigma^2}{n \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2} \qquad Var(\hat{\beta}_j | X) = \frac{\sigma^2}{RSS_j}$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = [corr(X, Y)]^2 ; \quad SER = \hat{S}_u^2 = \frac{\sum u_i^2}{n-2} = \frac{RSS}{n-2}$$

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{RSS/n-(k+1)}{TSS/n-1} \; ; \; \hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-(k+1)}$$

- $H_0 : \beta_n = \beta$

$$\frac{\hat{\beta}_m - \beta}{se(\hat{\beta}_n)} \sim t_{n-(k+1)}$$

- $H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0 \iff R^2 = 0$

$$\frac{ESS/(k+1)-1}{RSS/n-(k+1)} \sim F(k, n-(k+1)) ;$$

$$= \frac{R^2/k}{(1-R^2)/n-(k+1)}$$

- H_0 : m л. огр. знач.

$$\frac{(RSS_R - RSS_{UR})/m}{RSS_{UR}/n-(k+1)} \sim F(m, n-(k+1))$$

$$= \frac{(R^2_{UR} - R^2_R)/m}{(1-R^2_{UR})/n-(k+1)}$$

Лин. алгебра

1) $A+B=B+A$, $A+(B+C)=(A+B)+C$

$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ $\quad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$(AB)C=A(BC)=ABC$ $\quad (\lambda A)B=A(\lambda B)$

$A(B+C)=AB+AC$ $\quad (A+B)C=AC+BC$

$(A+B)^T=A^T+B^T$ $\quad (\lambda A)^T=\lambda\cdot A^T$

$(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

если 2 стр./стол. проп., то $|A|=0$

если в опр. пом. мест. строки/столб, он мен. знак.

из стр./стол. можно вын. множ.

$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ $\quad |A^T|=|A|$ $\quad |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix}=|A|\cdot|C|$$

$A\cdot\hat{A}=\hat{A}\cdot A=|A|\cdot E_n$ $\quad \hat{A}=|A|\cdot A^{-1}$

$A\cdot A^{-1}=A^{-1}A=E$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ $\quad (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

$(k\cdot A)^{-1}=k^{-1}\cdot A^{-1}$

если $|A|\neq 0$, то на (i,j) стоит $\frac{A_{ij}}{|A|}$

$$A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{d\cdot(-1)^2}{ad-bc} & \frac{b(-1)^3}{ad-bc} \\ \frac{c(-1)^3}{ad-bc} & \frac{a(-1)^4}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot B^T$ ← алг. доп. (мин. / со см. зн.)

2) $AX = B \Rightarrow x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$; $A^{-1}AX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

$XA = B \Rightarrow A^T X^T = B^T \Rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1}$

$X = BA^{-1}$

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — эллипс

$\ast$ $AXB = C$

$X = A^{-1}CB^{-1}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гипербола

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — X

$x^2 = a^2$ — //

$x^2 = 0$ — /

4) $(A \mid E) = (E \mid A^{-1})$

$\dim S+T = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$

$3 \quad 2 \quad 2 \Rightarrow ?$

rank A = max n лин. нез. стр./столб. = max порядок ненул. мин.

rank $A \leq \min\{m, n\}$

rank A = rank $(A \mid b)$ => сист. совм.

m (~~[illegible]~~ вект. фунд. сист.) = n (неизв.) − rank (A) = кол-во своб. неизвестных $\Rightarrow \bar{x}_{oo} = c_1\bar{a}_1, c_1 \in \mathbb{R}$

Теор. вероятностей

1) $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(t)\,dt = 1 \qquad P(X = x) = 0$

$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_x(t_1, t_2)\,dt_1 dt_2$

$P((X,Y) \in \Omega) = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$

$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

$\Leftrightarrow X, Y$ – нез.

$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

$f_Y(y) = f_X(x) \cdot |x'_y|$, где $x = \varphi(y)$

2) $E(X) = \sum x_i p_i = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$

$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - E^2(X)$

$= \sum (x_i - E(X))^2 p_i = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x - E(x))^2 dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 dx - E^2(x)$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$

$S^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$

$Cov(XY) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

$Cov(aX + b, cY + d) = ac\, Cov(XY)$

$cov_{YX} = \frac{1}{n} \sum\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

$= \overline{X \cdot Y} - \bar{X} \cdot \bar{Y}$

3). $X \sim Bin(n, p)$ $\quad P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$E(X) = np$; $Var(X) = npq$

- $X \sim Ber(p) = Bin(1, p)$ $\quad P(X=k) = \begin{cases} p, & k=0 \\ q, & k=1 \end{cases}$

$E(X) = p$ $\quad Var(X) = pq$

- $X \sim pois(\lambda)$ $\quad P(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

$E(X) = \lambda$ $\quad Var(X) = \lambda$

- $X - exp(\lambda)$ $\quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ $\quad Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

$P(X > s+t \mid X \geq s) = P(X > t) \leftarrow$ отс. памяти

- $X \sim U[a; b]$ $\quad F_X(x) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{x-a}{b-a} \\ 1 \end{cases}$

$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

$Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

- $X = \sum^{k} Z_i^2 \sim \chi^2_k$, $\quad Z_i \sim N(0; 1)$

$X \sim \chi^2_{k_1}, Y \sim \chi^2_{k_2} \Rightarrow X+Y \sim \chi^2_{k_1+k_2}$ $\quad F = \dfrac{X/k_1}{Y/k_2} \sim F(k_1, k_2)$

$E(X) = k$ $\quad Var(X) = 2k$

4) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P(|X-\mu| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$

$\Rightarrow (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ напр. 99,7%

н. Маркова $P(X \geq \varepsilon) \leq E(x)/\varepsilon \quad , \forall \varepsilon > 0$

н. Чебышева $P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > 0$

WLLN $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\bar{x}_n - E(x_i)| < \varepsilon) = 1, \forall \varepsilon > 0$

$\bar{x}_n \xrightarrow{P} \mu$

SLLN $P(\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = \mu) = 1$

т. Бернулли $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad \frac{m}{n} \xrightarrow{P} p$

т. Пуассона $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m_i}{n} - \bar{p}\right| < \varepsilon\right) = 1$

ЦПТ $\frac{x - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

~~ЦПТ~~ коши-буняк. $(E(\xi \cdot \eta))^2 \leq E(\xi^2) \cdot E(\eta^2)$

5) несм. $E(\hat{\theta}_n) = \theta$

сост. $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1 \quad \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$

эфф. $Var[\hat{\theta}_n]$ min

и. эфф. по РФК $e(\hat{\theta}_n) = \frac{\Delta_n}{Var(\hat{\theta}_n)}$

$\Delta_n = \frac{1}{n \cdot I(\theta)}$

$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$

$P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = \gamma$, где γ – надежность

ε – точность

ош. 1ого рода α $\qquad P(S^{obs} \in D^{crit} \mid H_0)$

ош. 2ого рода β $\qquad P(S^{obs} \notin D^{crit} \mid H_1)$

мощность $1-\beta$

б) $E(Y) = E[E(Y|X)]$

$E(Y|X) = const = \mu_Y \iff cov(X,Y) = 0$

$E(Y^2) = \sigma_y^2 + \mu_2^2$

$E(XY) = \sigma_{XY} + \mu_X \mu_Y$

$|\sigma_{XY}| \leq \sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}$, т.к. $|corr(X,Y)| \leq 1$

$Var(S) = Var(E(S|R)) + E(Var(S|R))$

$Var(AY) = A\, Var(Y) \cdot A^T$

$(X^T X)^T = X^T (X^T)^T = X^T X$

$\Rightarrow ((X^T X)^{-1})^T = (X^T X)^{-1}$

I. <u>Крит. Коши</u> $\sum a_n$ - сход $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \ \forall m, n \geq N, n \geq m$

$$|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n| \leq \varepsilon$$

<u>Необх. призн</u> $\sum a_n$ - сход $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = 0$

<u>Призн. сравн.</u> $\sum a_n, \sum b_n;\ a_n, b_n \geq 0,\ c > 0$

1. $a_n \leq c \cdot b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ — сход. (B) → сход. (A); расх. (A) → расх. (B)
2. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$
3. $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n / b_n = k \in (0; +\infty)$ — (A) $\underset{\text{сх./рас.}}{\Longleftrightarrow}$ (B)
4. $a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$, $p > 1$ сх., ≤ 1 р.

<u>Призн. Коши</u> $a_n \in \mathbb{C};\quad q = \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ — $q > 1$ расх., $q < 1$ сход. $q = 1$?

<u>Инт. пр. Коши</u> $f(x)$ - моном. $[1; +\infty)$, $a_n = f(n)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underset{\text{сх./рас.}}{\Longleftrightarrow} \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

<u>Призн. Куммера</u> $\sum a_n, \sum c_n;\ a_n, c_n > 0$

1. $\sum 1/c_n$ - расх
2. $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \left(c_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) = k$

$\Rightarrow$ $k > 0$ сход. A; $k < 0$ расх. A; $k = 0$?

<u>Призн. Даламбера</u> $\sum a_n, a_n > 0;\ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ — $q > 1$ расх, $q < 1$ сход, $q = 1$?

<u>Призн. Раабе</u> $\sum a_n, a_n > 0;\ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} n \cdot \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = R$ — $R > 1$ сход, $R < 1$ расх, $R = 1$?

<u>Призн. Бертрана</u> $\sum a_n, a_n > 0;\ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} \left(n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \cdot \ln n = B$ — $B > 1$ сход, $B < 1$ расх, $1 = ?$

<u>Призн. Гаусса</u> $\sum a_n, a_n > 0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n \cdot \ln n}\right),\ n \to +\infty$$

$\lambda > 1$ - сход. $\lambda = 1, \mu > 1$ - сход, ин.-расх

$$\exists \varepsilon: \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),\ n \to +\infty$$

<u>Ряд Дирихле</u> $\sum \dfrac{1}{k^\alpha}$ — $\alpha > 1$ - сход, $\alpha \leq 1$ - расх

II. Призн. Лейбница $\sum (-1)^{n+1} \cdot b_n$; $b_n \geqslant (\leqslant) 0$

$$b_n \downarrow\downarrow 0 \Rightarrow b_n - \text{сход.}$$

Призн. Абеля b_n – моноп., огранич., $\sum a_n$ – сход
то $\sum a_n \cdot b_n$ – сход

Призн. Дирихле $\sum a_n b_n$, $\forall N \left|\sum_{k=1}^{N} a_k\right| \leq C$, $b_n \downarrow\downarrow 0 \Rightarrow$ сход

Призн. сход. $\sum (-1)^n \cdot b_n$, $b_n > 0$

$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \to +\infty$ $\mu > 0$ – сход
$\mu < 0$ – расх.

Опр. усл. сход $\sum a_n$ – сход $\sum |a_n|$ – расх
абс. сход $\sum |a_n|$ – сход

Теор. $\sum a_n, \sum b_n$ – сход, $a_n, b_n > (<) 0$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$
то $\sum (a_n \pm b_n)$, $\sum \alpha \cdot a_n$ – сход.

Теор $\sum a_n$ – абс. сход. к $A \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_{\delta(n)}$ – абс. сход. к $A \in \mathbb{R}$, $\delta(n)$ – прои. перест.

Теор. Римана $\sum a_n$ – усл. сход. $\Rightarrow \forall S \in \mathbb{R}$ $\exists \delta(n): \sum a_{\delta(n)} = S$

III. Теор. $\sum a_n, b_n$ – абс. сход к $A, B \Rightarrow \sum a_{k_i} \cdot b_{l_i}$ – абс. сход к $A \cdot B$

Теор. $\sum a_n, b_n$ – сход, причем одна абс. $\Rightarrow c_n = \sum a_k b_{n-k+1}$ – сход

Опр. 1. $f_n \to f$ поточ. на X $\forall x, \forall \varepsilon, \exists N, \forall n$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

2. $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$ равном. $\forall \varepsilon, \exists N, \forall n, \forall x$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

3. $S_n(x) = \sum^{n} a_n(x)$; $\sum^{\infty} a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S$, если $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – сход. на X

$\Leftrightarrow S_n \underset{X}{\rightrightarrows} S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, \forall x$ $\sup \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \sup |\,| = 0$

Крит. Коши $\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n > m\ \forall x$ $|a_m(x) + \ldots + a_n(x)| < \varepsilon$
$f(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \ldots$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Призн. Вейерштр. $\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$
1. $|a_n(x)| \leqslant b_n(x)$; $\sum b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \Rightarrow \sum a_n(x) \rightrightarrows$ абс.
2. $\sup |a_n(x)| \leqslant c_n$ $\sum c_n(x)$ – сход

Призн. Аб.-Дирх. $\sum a_n(x)\cdot b_n(x)$ на X ; $b_n(x)$ – мон. п-ть

0. Дир.
1. $b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$
2. $\sup |\sum a_n(x)| \le C$.

0. Аб.
1. $\sup |b_n(x)| \le C$
2. $\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

$\Rightarrow$ сход.

Теор. $f_n \in C[a;b]$, $f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \in C[a;b]$

Теор. $a_n \in C[a;b]$, $\sum a_n(x)$ равн.сх. на $[a;b] \Rightarrow \sum a_n(x) \in C[a;b]$

IV. Теор. $a_n(x) \in R[a;b]$, $\sum a_n(x) \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} \Rightarrow \sum a_n(x) \in R[a;b]$
$\int \sum a_n(x)dx = \sum \int a_n(x)dx$

Теор. $\exists \lim\limits_{x\to a} a_n(x) = C_n$, $S_n(x) = \sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$ ($a \in X$ пр.т. $X \setminus a$)

$\Rightarrow \sum C_n$ – сход ; $\lim\limits_{x\to a} \sum a_n(x) = \sum \lim\limits_{x\to a} a_n(x)$

Теор. $\left.\begin{array}{l} S(x) = \sum a_n(x) \text{ сход. в } x=x_0 \in [a;b] \\ \forall n \ a_n(x) \in D[a;b] ; \ \sum a_n'(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S(x) \in D[a;b] \\ \left(\sum a_n(x)\right)' = \sum a_n'(x) \end{array}$

Теор. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in C[a;b]$ – моном. ; $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in C[a;b] \Rightarrow f_n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$

След. $a_n(x) \ge 0 \in C[a;b]$; $S(x) = \sum a_n(x) \in C[a;b] \Rightarrow \sum a_n(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows}$

Теор $\sum C_n (z-z_0)^n$, $z \in \mathbb{C}$; $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{C_n}} = \lim \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

1. $|z-z_0| < R \Rightarrow$ абс. сход.
2. $|z-z_0| > R \Rightarrow$ расх

3. $= R$ – ?

Теор (I) $\sum C_n(z-z_0)^n$ – сход в $\zeta \Rightarrow$ сход абс. и равн. $K_q = \{z \in \mathbb{C} \ |z-z_0| \le q|z_0-\zeta|\}$, $q \in (0;1)$

Теор. $f(z) = \sum C_n (z-z_0)^n$, $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \le r < R\}$, R – рад-сх
то $f(z) \in C^\infty(K_r)$

Теор (II) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} C_n (z-z_0)^n$ сход. в $\zeta \Rightarrow \rightrightarrows$ на $I = \{z \in \mathbb{C} : z_0 + t(\zeta - z_0)\}$, $t \in [0;1]$
$\in C(I)$

I. Опр. $p_n \ne 0$, $\prod\limits^{\infty} p_n$ – сход $\Leftrightarrow \exists$ кон. $\lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits^{N} p_n = P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Необх. $\prod$ – сход $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$

Теор. $\prod\limits^{\infty} p_n$, $p_n > 0$ – сход. $\Leftrightarrow \sum\limits^{\infty} \ln p_n$ – сход.

$\int \left[\sum a_n (x-a)^n\right] dx = C + \sum \dfrac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$; $d/dx[\ ] = \sum (n+1) a_{n+1} (x-a)^n$

Теор. $p_n > 0$, $p_n = 1 + \alpha$
1) $\operatorname{sgn} \alpha_n = const$, $\prod$ - сход $\Leftrightarrow$ $\sum \alpha_n$ - сход.
2) $\prod$ - сход $\Leftrightarrow$ $\sum \alpha_n$, $\sum \alpha_n^2$ - сход.

Опр. $f(z) \in A(\mathbb{C})$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $c_n \in \mathbb{C}$: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$

Т. Вейерштр. $f(z) \in A(\mathbb{C})$, $f(0) \neq 0$, a_n — только прост. нули

$$f(z) = f(0) \cdot \exp\left(\frac{z \cdot f'(0)}{f(0)}\right) \cdot \prod \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

Валлиса $\dfrac{\pi}{2} = \prod \dfrac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \lim \left(\dfrac{1}{2N+1} \left(\dfrac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\right)^2\right)$

Стирл. $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n \alpha_n$, $\alpha_n = 1 + o(1)$, $n \to \infty$

Теор. $\begin{pmatrix} p_{11} & & \\ p_{21} & p_{22} & \dots \\ \dots & & \end{pmatrix}$ $p_{nk} \in \mathbb{R}$
$p_{nk} \geq 0$; $\sum p_{nk} = 1$, $\lim p_{nk} = 0$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$

то $\lim \sum p_{nk} x_k = \lim x_n = a$

Опр. $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ сум. к S, (C,k) - сум., если $\lim \dfrac{S_n^k}{A_n^k} = S$,
где $S_n^0 = S_n$; $S_n^k = \sum S_j^{k-1}$, $A_n^0 = 1$; $A_n^k = \sum A_j^{k-1}$

Опр. $\sum a_n$ сум. к S, если $\{S_n\}^{\infty}$ сум. (C,k) к S

Опр. $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $a_n, b_n \in \mathbb{C}$

$a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ $\qquad a_n \neq 0$ (чёт.)

$b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ $\qquad b_n \neq 0$ (неч.)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} = -\arccos\frac{x}{a}$ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$ $\int \frac{dx}{\sin x} = -\operatorname{ctg} x$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}|$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$

$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$ $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|$

$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$ $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $x = 2\operatorname{arctg} t$

$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

7) $\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3(1+t^2)+5(1-t^2)} = \int \frac{2dt}{8-2t^2} =$

$= \int \frac{dt}{4-t^2} = \int \frac{dt}{(2+t)(2-t)} = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{2+t} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{2-t} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$ $\sin(\arcsin x) = x$ $x \in [-1;1]$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$ $\arcsin(\sin x) = x$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x + C$

$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x}$ $1+\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$

1) $\int x^2 \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\int x^2 \cdot de^{-2x} = -\frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx^2 =$

$= -\frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-2x} + \int e^{-2x} x \cdot dx = -\frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}\int x\, de^{-2x} = -\frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}x \cdot e^{-2x}$

$+ \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$

1) $\int x\cos 6x\, dx = \frac{1}{6}\int x\, d\sin 6x = \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\int \sin 6x\, dx = \frac{1}{6}x\sin 6x + \frac{1}{36}\cos 6x + C$

1) $\int \arcsin x\, dx = \langle\ldots\rangle = x\arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

$$\int (x^4-3)^5 x^3 dx = \frac{1}{4}\int (x^4-3)^5 (d(x^4-3)) = \frac{1}{24}(x^4-3)^6 + c$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = 2\int e^{\sqrt{x}} d\sqrt{x} = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

$$\int \frac{\ln^2 x\, dx}{x} = \int \ln^2 x \; d\ln(x) = \frac{1}{3}\ln^3 x + c$$

$$\int \frac{\cos 2x dx}{\sin x\cos x} = \frac{2}{2}\int \frac{d\sin 2x}{\sin 2x} = \ln|\sin 2x| + c$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \int \frac{(x+\frac{1}{2})+\frac{3}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos x \cos^4 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 d\sin x = \int (1-2\sin^2 x + \sin^4 x) d\sin x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 7x} = -\frac{1}{7}\int (1+\mathrm{ctg}^2 7x)\, d\,\mathrm{ctg}\, 7x = -\frac{1}{7}\mathrm{ctg}\,7x - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 7x + c$$

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x+1}} = \left\{ \begin{matrix} t=\sqrt{x+1} \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right\} = \int \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int t^2 dt - 2\int dt = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}(x+1) - 2\sqrt{x+1} + $$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+6x+12} + \int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+12} = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0}\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+3}$$

$$+ \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+3} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{3}}\Big|_{-b}^{0} + \lim_{c\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{3}}\Big|_0^c =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\sqrt{3}}_{\to const} + \frac{1}{\sqrt{3}}\underbrace{\mathrm{arctg}\Big(\frac{+b-3}{\sqrt{3}}\Big)}_{\to\frac{\pi}{2}}\Big) + \lim_{c\to\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\underbrace{\mathrm{arctg}\frac{c+3}{\sqrt{3}}}_{\to\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\sqrt{3}}_{\to const}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\sqrt{3} + \frac{\pi}{\sqrt{3}\cdot 2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\sqrt{3} + \frac{\pi}{\sqrt{3}\cdot 2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$ → сход.

2) $$\int_{-1}^{2,5}\frac{dx}{x^2-5x+6} = \int_{-1}^{2,5}\frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int_{-1}^{2,5}\frac{dx}{x-3} - \int_{-1}^{2,5}\frac{dx}{x-2} =$$

$$\ln|x-3|\Big|_{-1}^{2,5} - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{2-\varepsilon}\frac{dx}{x-2} - \lim_{\delta\to 0}\int_{2+\delta}^{2,5}\frac{dx}{x-2} =$$

$$\ln|x-3|\Big|_{-1}^{2,5} - \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x-2|\Big|_{-1}^{2-\varepsilon} - \lim_{\delta\to 0}\ln|x-2|\Big|_{2+\delta}^{2,5} =$$

$$\ln|x-3|\Big|_{-1}^{2,5} - \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\underbrace{\ln|-\varepsilon|}_{\to+\infty} - \underbrace{\ln|-3|}_{=\ln 3}\Big) - \lim_{\delta\to 0}\Big(\underbrace{\ln|\tfrac{1}{2}|}_{=\ln 2} - \underbrace{\ln|\delta|}_{\to+\infty}\Big) =$$

$$\ln\frac{1}{2} - \ln 4 - \lim_{\varepsilon\to 0}|\ln\varepsilon| + \ln 3 - \ln 2 + \lim_{\delta\to 0}|\ln\delta| \neq$$ $\xrightarrow{?}$ расход.

$$\ln\frac{1}{2} - \ln 4 + \ln 3 - \ln 2$$?

Производные:

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\quad$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad$ $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad$ $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(e^x)' = e^x$ $\quad$ $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\ln x)' = 1/x$ $\quad$ $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$

Интегралы:

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $\quad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$ $\quad$ $\int \cos x = \sin x + c$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\, x + c$ $\quad$ $\int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$ $\quad$ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg\, x + c$ $\quad$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + c$

$\int \frac{1}{\sin x} = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + c$ $\quad$ $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + c$

$= \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + c$ $\quad$ $= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + tg\, x\right| + c$

$\int e^x dx = e^x + c$ $\quad$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c = \ln|kx|$ $\quad$ $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + c$ $\quad$ $\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2+x^2| + c$

$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \pm\sqrt{a^2+x^2} + c$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{(e^{+i\varphi} - e^{-i\varphi})}{2i}$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n}\cdot \alpha_n, \quad \alpha_n = 1 + o(1)$$

$$t = tg\, x/2$$

$$\sin x = 2t/_{1+t^2}$$

$$\cos x = 1-t^2/_{1+t^2}$$

$$dx = 2dt/_{1+t^2}$$

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

1) $\frac{m+1}{n} \Rightarrow a + bx^n = t^s$, s - зн. p

2) $\frac{m+1}{n} + p \Rightarrow \frac{a+bx^n}{x^n} = t^s$, s - зн. p

3) $p \Rightarrow x = t^s$, s - нок (m:n)

$$F_f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

$$F_g^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$$

$$e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) = \sum \frac{(\pm x)^k}{k!} \quad (\mathbb{R})$$

$$\sin(\pm x) = \pm x \mp \frac{x^3}{3!} + o(x^4) = \pm \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (\mathbb{R})$$

$$\cos(\pm x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\mathbb{R})$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} + o(x^3) = \sum \frac{(-1)^{n+1} (\pm x)^n}{n} \quad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1) x^2}{2!} + o(x^2) = \sum \frac{\alpha \dots (\alpha - n + 1) \cdot x^n}{n!} \quad (|x| < 1)$$

$$tg(\pm x) = \pm x \pm \frac{x^3}{3} \pm \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$arctg(\pm x) = \pm x \mp \frac{x^3}{3} \pm \frac{x^5}{5} + o(x^6) = \sum \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$\arcsin(\pm x) = \pm x \pm \frac{x^3}{3!} \pm \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^8) = \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + o(x^4)$$

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \pm \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^5) \quad (|x| < 1)$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0 \qquad \forall \alpha, \beta > 0$$

$[0^0], [\infty^0], [1^\infty]$

$$\lim_{x \to A} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \to A} e^{g(x) \cdot \ln(f(x))} = e^{\lim_{x \to A} g(x) \cdot \ln(f(x))} = B$$

$(A \in \mathbb{R})$

1) Знакопостоянные ряды

- $\exists S = \lim\limits_{N\to+\infty} S_N \Rightarrow$ ряд сход.
- Критерий Коши $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n, m \; |a_m + \ldots a_n| < \varepsilon$
- Необх. признак $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- Признак сравнения:
  1) $a_n \leq C \cdot b_n$
  2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$

  $\Bigg\}$ (A) – расх. => (B) – расх.
  (B) – сход. => (A) – сход.

  3) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0; +\infty)$ $(A) \Leftrightarrow (B)$
- Коши (радикальный) $c_n \in \mathbb{C}$ $q = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ $q > 1$ расх, $q < 1$ сход.
- Коши (интегральный) $f(x)$ – моност. $[1; +\infty)$, $a_n = f(n)$ $\Big\} \Rightarrow \sum\limits_1^\infty a_n \Leftrightarrow \int\limits_1^\infty f(x)dx$
- Ряд Дирихле $\sum \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ сход., $p \leq 1$ расх.
- Куммера $\sum \frac{1}{c_n}$ – расх $\Rightarrow k = \lim\limits_{n\to\infty} \left(c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right)$ $k > 0$ сх., $k < 0$ расх.
- Даламбер $q = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то $q > 1$ – расх, $q < 1$ – сход.
- Раабе $R = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$, то $R > 1$ – сход., $R < 1$ – расх.
- Бертран $B = \lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \ln n$, то $B > 1$ – сход., $B < 1$ – расх.
- Гаусс $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{m}{n} + o\left(\frac{1}{n \cdot \ln n}\right)$, то сх. $\lambda > 1$; $\lambda = 1, m > 1$

  (общий) $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{n} + \frac{\lambda_3}{n \cdot \ln n} + \frac{\lambda_4}{n \cdot \ln n \cdot \ln\ln n} + o\left(\frac{1}{\ldots}\right)$

2) Знакочередующиеся ряды

- $\sum |a_n|$ – сход. абс.; $\sum a_n$ – сход, $\sum |a_n|$ – расх. => сх. усл.
- Дирихле: $|\sum a_n| \leq C$, $b_n \downarrow\downarrow 0$, то $\sum a_n b_n$ – сход.
- Абеля: b_n – моност., огр., $\sum a_n$ – сход., то $\sum a_n b_n$ – сход
- Лейбница $b_n \geq 0 \; (\leq 0)$, $b_n \downarrow\downarrow 0$, то $\sum (-1)^{n+1} b_n$ – сход.
- Гаусс: $\sum (-1)^n \cdot b_n$, $b_n > 0$

  $\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ $\mu > 0$ – сход., $\mu < 0$ – расх.

3) Функциональные ряды

- Равномерная сх-ть $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n(x)-f(x)\|_{C(X)} = 0$

  $\sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$, если $\{S_n(x)\} \underset{X}{\rightrightarrows}$

- Крит. Коши $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$ $\quad \forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n,m\ \forall x\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

  $\sum a_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}$ $\quad \forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n,m\ \forall x\ |a_m(x)+\dots+a_n(x)|<\varepsilon$

- Вейерштрасс

  1) $|a_n(x)|\le b_n(x)$, $\sum b_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}$, то $\sum a_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}$ абс.

  2) $\sup\limits_X |a_n(x)|\le c_n$, $\sum c_n$ - сход., то $\sum a_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}$

- Абель $\left.\begin{array}{l}\sup\limits_X |b_n(x)|\le C,\ b_n \text{ - монот.}\\ \sum a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n(x)\cdot b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

- Дирихле $\left.\begin{array}{l}\sup\limits_X |a_n(x)|\le C\\ \sum b_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} 0,\ b_n \text{ - монот.}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n(x)\cdot b_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$

- Дини $\left.\begin{array}{l}f_n(x)\in C[a;b] \text{ - мон. по } n\\ f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ f(x)\in C[a;b]\end{array}\right\} f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$

- Непрерывность $f_n\in C$, $f_n\underset{X}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f\in C$

  $a_n(x)\in C$, $\sum a_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} \Rightarrow \sum a_n(x)\in C$

- Интегрируемость $f_n\in R$, $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f\in R$ $\quad \lim\int f_n(x)\,dx=\int f(x)\,dx$

  $a_n(x)\in R$ $\quad \sum a_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} \Rightarrow \sum a_n(x)\in R$ $\quad \int\sum a_n(x)\,dx=\sum\int a_n(x)\,dx$

- Дифференцируемость $\left.\begin{array}{l}\sum a_n(x) \text{ - сход. в } x\in X;\ \sum a_n'(x)\underset{X}{\rightrightarrows}\\ a_n(x)\in D,\ \forall n\end{array}\right\} \begin{array}{l}\sum a_n(x)\in D\\ \left(\sum a_n(x)\right)'=\sum a_n'(x)\end{array}$

- Перест. предела $\exists \lim\limits_{x\to a} a_n(x)=c_n$ $\quad \sum a_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows} \Rightarrow \sum c_n$ - сход. $\lim\sum a_n(x)=\sum\lim$

4) Степенные ряды $\sum c_n\cdot(z-z_0)^n$, $z\in\mathbb{C}$ $\quad \{z_n\}$: $\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\ |z_n-z_0|<\varepsilon$ $\ (z_n\to z_0)$

- $|z-z_0|<R=\dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim\dfrac{c_n}{c_{n+1}}$

- Абель $\sum c_n(z-z_0)^k$ - сход в $\xi \Rightarrow \sum c_n(z-z_0)^k \underset{K_q,\ I}{\rightrightarrows}$ $\quad$ 1) $K_q=\{|z-z_0|=q|\xi-z_0|\}$ $\quad$ 2) $I=\{z=z_0+q(\xi-z_0)\}$ $\quad q\in(0;1)$

- R для $\sum c_n(z-z_0)^n$, $\sum c_n\cdot n(z-z_0)^{n-1}$, $\sum c_n\frac{1}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$

5) Бесконечные произведения $\lim\prod\limits^N p_n = P$ $\quad P\in\mathbb{R}\setminus 0$ - сход. $\quad P=0$ - расх. к 0

- Необх. $\prod\limits^\infty p_n$ - сход $\Rightarrow \lim p_n=1$; — $\prod\limits^\infty p_n$ - сход $\Leftrightarrow \sum \ln p_n$ - сход.

- $p_n=1+\alpha_n$ $\quad$ 1) $\alpha_n\ge(\le)0$ $\quad \prod\limits^\infty p_n$ - сход. $\Leftrightarrow \sum\alpha_n$ - сход.

  2) $\sum\alpha_n$, $\sum\alpha_n^2$ - сход. $\Rightarrow \prod\limits^\infty p_n$ - сход.

– Вейерштрасс $f(z) = f(0)\cdot \exp\left(\frac{z\cdot f'(0)}{f(0)}\right)\cdot \prod^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\cdot \exp\left(\frac{z}{a_n}\right)$

a_n – все прост. нули

– Кратн. корень ст. n $f(z)=0$: $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$

– Валлис $\frac{\pi}{2} = \prod \frac{(2n)^2}{(2n+1)(2n-1)} = \lim\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!}\right)^2\right)$

Стирлинг $n! = \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot \alpha_n$, где $\alpha_n = 1+o(1)$

– Фурье $S(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k\cdot\cos kx + b_k \sin kx)$

$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt$

$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\, dt$

– Прин. сх-ти $S(f,x)\to S \iff \int_0^{\delta} \frac{\sin(n+1/2)t}{t}\,\varphi_{x,S}(t)\,d(t) = o(1)$

$\varphi_{x,S}(t) = \{f(x+t) + f(x-t) - 2S\}$

– $f\in C'(\mathbb{R}) \Rightarrow S(f,x) = f(x)$

– $f, f' \in KC(\mathbb{R}) \Rightarrow S(f,x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

– $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum \cos kt = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2}$

– Риман-Лебег $f, |f| \in R(\mathbb{R})$ $\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt \to 0 \iff \begin{cases}\int f(t)\cos\lambda t\, dt\to 0\\ \int f(t)\sin\lambda t\, dt\to 0\end{cases}$

① $\bar{x} \overset{a.s.}{\sim} N\left(m_x, \frac{\sigma_x^2}{n}\right)$; $\hat{p} = m/n$ $\quad E(\hat{p}) = p \quad Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$

$bias = E(\hat\theta) - \theta$, $\quad MSE = V(\hat\theta) + bias^2$; $\quad \lim_{n\to\infty} P(|\hat\theta_n - \theta| < \varepsilon) = 1 \iff \hat\theta_n \xrightarrow{P} \theta$

② $\xi_n \xrightarrow{d} c \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} c$; $\quad h(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{d} h(\xi, c)$;

$\xi_n \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2) \iff \sqrt{n}\,\frac{\xi_n - m}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$; $\quad \xi_n \xrightarrow{P} m \iff \xi_n \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2)$

$\sqrt{n}(\bar{x} - m) = \frac{S_n - mn}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$

ΔM: $g(\xi_n) \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2 (g'(m))^2)$, где $\xi_n \overset{a}{\sim} N(m, \sigma^2)$

Й: $E(f(\xi)) \geq f(E(\xi))$, где f – вып. ф-я

③ $X = [X_1 \dots X_n]' \sim N([m, \dots, m]', \sigma^2 I_n) = N(m\,\iota_n, \sigma^2 I_n)$

Thm Фишера 1) $\bar{X}$ и s^2 независимы 2) $\frac{n-1}{\sigma^2} s^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi(n-1)$

3) $t = \frac{(\bar{X} - m)\sqrt{n}}{s} \sim t(n-1)$

Лемма $Z'DZ \sim \chi^2(r)$, где $Z = [X_1, \dots, X_n]'$, $X_i \sim N(0,1)$, D – идемп. $\operatorname{rank}(D) = r$

$I_\alpha = (a(\cdot), b(\cdot)) \iff P(\theta \in I) \geq 1 - \alpha$

ex1 $z = \frac{(\bar{x} - m)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0,1)$ $\quad I_{1-\alpha} = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + \overbrace{z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}^{\text{Мак. ошибка}}\right)$ $\quad (\sigma = \sigma)$

$t = \frac{(\bar{x} - m)\sqrt{n}}{s} \sim t(n-1)$ $\quad I_{1-\alpha}(m) = \left(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

$J_{1-\alpha}$: $P(U = g(x, \theta, n) \in J_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$: $\quad g(x, \theta, n) \in J_{1-\alpha} \iff \theta \in I_{1-\alpha} = I_{1-\alpha}(x, n)$

ex2 $\hat{p} = m/n$ $\quad z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ $\quad p = \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$, где $p = \hat{p}$ (можно зам.)

ex3 $X = X_1, \dots, X_n$ $\quad E(X) = m$ $\quad Var(X) = \sigma^2$ $\quad \bar{x} \approx N(m, \sigma^2/n)$ $\quad m = \bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$

④ ex4 $X \sim N(m, \sigma^2)$ $\quad \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi(n-1)$ $\quad P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

$P\left((n-1)s^2/\chi^2_{\alpha/2} < \sigma^2 < (n-1)s^2/\chi^2_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

ex5 $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ $\quad \bar{X}_m - \bar{Y}_n \sim N\left(m_1 - m_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\right)$ $\quad m_1 - m_2 = \bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$ $\quad (\sigma_1, \sigma_2)$

если апр. изв. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ $\quad m_1 - m_2 = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(m+n-2) \cdot S_p\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$, $\quad S_p^2 = \frac{(m-1)S_x^2 + (n-1)S_y^2}{m+n-2}$ (или $\sigma_i^2 = S_i^2$ прибл.)

ex6 $\hat{p}_i \approx N\left(p_i, \sqrt{\frac{p_i(1-p_i)}{n_i}}\right)$, $i = 1,2$ $\quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \approx N\left(p_1 - p_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$ $\quad p_1 - p_2 = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\sum_{i=1,2}\frac{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{n_i}}$

ex7 $\{(x_i, y_i), i = \overline{1,n}\}$ $\quad \Delta = \mu_x - \mu_y$ $\quad d_i = x_i - y_i$ $\quad E(d_i) = \Delta$ if $d \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \Delta = \bar{d} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}}$

Условия регулярности: R1 $M = \{x \in R^n : f(x, \theta) > 0\}$ не зав. от θ $\quad$ R2: $\theta_1 \neq \theta_2 \Rightarrow f(x, \theta_1) \neq f(x, \theta_2)$

R3 θ_0 – внутр. точка (*) $\Rightarrow$ Thm1 $\lim_{n\to\infty} P(L(\theta_0; x_1, \dots, x_n) > L(\theta; x_1, \dots, x_n)) = 1$ $\quad \forall \theta \neq \theta_0$

θ_0 – ист. значение пар-ра θ $\quad$ (A) $\hat\theta - \theta_0 \approx N(0, 1/I(\theta_0))$

Thm 2 $R_1-R_4 \Rightarrow \hat\theta_{ML} \xrightarrow{P} \theta_0, n\to\infty$; Thm 3 $\hat\eta_{ML} = g(\hat\theta_{ML})$, где $\eta = g(\theta)$ — инвариантность

$s(\theta) = \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}$ - score function $\quad S_n(\theta) = \sum^n s^i(\theta) \quad I_n(\theta) = E(S_n^2(\theta))$

$I(\theta) = E(S^2(\theta)) = E[(\partial\ell/\partial\theta(\theta,x))^2] = -E[(\partial^2\ell/\partial\theta^2(\theta,x))]$

$E(S(\theta)) = 0$; $I_n(\theta) = n I(\theta)$

(5) Thm DPK R_1-R_3 $\partial/\partial\theta(\int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_n(y,\theta)\,dy) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,\partial f_n/\partial\theta(y,\theta)\,dy$

$\Rightarrow V(\hat\theta) \geq \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{1}{nI(\theta)}$

$R_1-R_3 \Rightarrow \hat\theta_{ML}$
1) сост. 3) ас. норм.
2) инв. 4) ас. опт.

T1 R_1-R_3 $\sqrt{n}(\hat\theta_{ML}-\theta) \xrightarrow{d} N(0,1)$ $\sigma^2 = 1/I(\theta)$

T2 $\tilde\theta$ - ас. норм. оценка θ $E(\tilde\theta)=\theta$, $Var(\tilde\theta) = \sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 \geq 1/I(\theta) \Rightarrow \hat\theta_{ML}$ - ас. оптим. в классе ас. норм. оц.

$\Theta_1, \Theta_2 \subset \Theta$, $\Theta_1 \cap \Theta_2 = \emptyset$ $\quad H_0: \theta\in\Theta_1$, $H_a: \theta\in\Theta_2$

$C = \{x\in R^n : T(x) = H_a\}$ $\quad D = \{x\in R^n : T(x) = H_0\}$, $C\cap D = \emptyset$, $C\cup D = R^n$

$\alpha(\theta) = Pr(t\,I\,e) = Pr(\text{reject } H_0 \mid H_0 \text{ is true}) = P_\theta(x\in C)$, $\theta\in\Theta_1$

$\beta(\theta) = Pr(t\,II\,e) = Pr(\text{not reject } H_0 \mid H_a \text{ is true}) = P_\theta(x\in D)$, $\theta\in\Theta_2$

(6) Лемма НП Пусть $C\subset R^n$: $\int_C g_0(y)dy \leq \alpha$, тогда $\int_{L(k_\alpha)} g_1(y)\,dy \geq \int_C g_1(y)dy$

где $L(k) = \{y\in R^n : g_0(y) \leq k\cdot g_1(y)\}$ + усл. непр. $\forall\, 0<\alpha<1\ \exists k_\alpha: \int_{L(k_\alpha)} g_0(y)dy = \alpha$

★ $H_0: \theta=\theta_0$ $H_1: \theta=\theta_1$; α; тест(★) $x\in L(k_\alpha) \Rightarrow H_a$ / $x\notin L(k_\alpha) \Rightarrow H_0$) $C^* = L(k_\alpha)$

Сл. $\forall$ тест $\alpha' \leq \alpha$ имеем $\beta' \leq \beta^{(*)}$ $\to$ (★) – most powerful test

(ex) $X\sim N(m,\sigma^2)$, σ^2, $H_0: m=m_0$, $H_a: m=m_1$; α; $m_0<m_1$

$g(y; m,\sigma) = L(\cdot) \Rightarrow g_0(y) \leq k\cdot g_1(y) \Leftrightarrow \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(\sum^n(y_i-m_0)^2 - \sum^n(y_i-m_1)^2)) \leq k \Leftrightarrow \bar y \geq \frac{\sigma^2}{n(m_1-m_0)}\ln k - \frac{m_1-m_0}{2}$

$\Rightarrow$ MPT: $\bar x \geq b \Rightarrow H_a$ $\bar x < b \Rightarrow H_0$, где $b: P(\bar x \geq b \mid m=m_0) = \alpha = P(Z \geq \frac{\sqrt n(b-m_0)}{\sigma})$, $b = \frac{\sigma}{\sqrt n}\cdot z_\alpha + m_0$

b - не зав. от $m_1 \Rightarrow$ UMPT

(ex) $X\sim U[0,\theta]$, $H_0:\theta=\theta_0$; $H_1:\theta=\theta_1$; $g_0(y) = 1/\theta_0^n\cdot I_{M_0}(y)$, $g_1(y) = 1/\theta_1^n\cdot I_{M_1}(y)$ $\quad \frac{g_0(y)}{g_1(y)} = \begin{cases}(\theta_1/\theta_0)^n, & y\in M_0\\ 0, & y\in M_1\setminus M_0\end{cases}$

$\Rightarrow$ усл. непр. не вып. $\Rightarrow L(k) = \begin{cases} M_1\setminus M_0, & 0<k<(\theta_1/\theta_0)^n \\ M_1, & k\geq(\theta_1/\theta_0)^n\end{cases} \Rightarrow P(x\in L(k)\mid\theta=\theta_0) = \{0, 1\}\ \forall k$

I) CI $X\sim N(m,\sigma^2)$ $m = \bar x \pm t_{\alpha/2}(n-1)\,s/\sqrt n$ если $m_0\in CI_{1-\alpha} \Rightarrow H_0$ $P(\text{reject } H_0\mid H_0) = P(m_0\notin CI_{1-\alpha}\mid m=m_0) = \alpha$

II) стат. $m_0\in CI_{1-\alpha} \Leftrightarrow \left|\frac{\bar x - m_0}{s/\sqrt n}\right| < t_{\alpha/2}$ при H_0 $t\sim t(n-1)$ e.g. $H_a: m\neq m_0$ $|t| < t_{\alpha/2}(n-1) \Rightarrow H_0$

III) p-value $= P(T_{n-1} > t)$, где $T_{n-1}\sim t(n-1)$ $\quad H_a: m>m_0$ $\quad t > t_\alpha(n-1) \Leftrightarrow$ p-value $<\alpha$

1) $X\sim N(m,\sigma^2)$ $H_0: m=m_0$ $\quad t = \frac{\bar x - m_0}{s/\sqrt n} \sim t(n-1)$ ← t-тест для (одиночного) среднего

2) $H_0: p=p_0$ $\hat p = X/n$ $\quad z = \frac{X-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{\hat p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx N(0,1)$ ← z-тест для одной пропорц.

3) $X\sim N(\mu_1,\sigma)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma)$ $H_0: \mu_1=\mu_2$ $\quad t = \frac{\bar x - \bar y}{s_p\cdot\sqrt{\frac1m+\frac1n}} \sim t(m+n-2)$ ← t-тест для двух средн.

4) $H_0: p_1=p_2$ $\quad z = \frac{\hat p_1 - \hat p_2}{\sqrt{\hat p(1-\hat p)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$, $\hat p = \frac{n_1\hat p_1 + n_2\hat p_2}{n_1+n_2}$, $z\approx N(0,1)$ ← z-тест для разн. двух проп.

(7) LRT $H_0: \theta=\theta_0$ (R) $H_1: \theta\neq\theta_0$ (UR) $\hat\theta_{ML} = \hat\theta$ $\quad$ (eg) $X\sim N(m,\sigma^2)$, σ^2; $H_0: m=m_0$ $\Lambda = \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}n(\bar x - m_0)^2)$

$\Lambda = L(\theta_0)/L(\hat\theta)$; THM: R1-R3 $LR = -2\ln\Lambda \xrightarrow{d} \chi^2(1)$ $\quad \sum(x_i-m)^2 = \sum(x_i-\bar x)^2 + n(\bar x - m)^2$

кр. согл. χ^2 (кр. Пирсона) $H_0: F_n(x) = F(x,\theta)$ 1) $x_{(0)}, \ldots, x_{(k)}$ 2) $p_i(\theta) = F(x_{(i)},\theta) - F(x_{(i-1)},\theta)$

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i/n - p_i(\theta))^2}{p_i(\theta)} \sim \chi^2(k-1)$$

полином. схема $X_1,\ldots X_n$: $P(X_i = j) = p_j,\ j=\overline{1,k}$ $\quad y_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i = j\}},\ j=\overline{1,k}$, $Y = [y_1, \ldots, y_k]'$

$$P_Y(y) = \begin{cases} \binom{n}{y_1 y_2 \ldots y_k} p_1^{y_1}\ldots p_k^{y_k}, & \sum_{j=1}^k y_j = n \\ 0, & \sum y_j \neq n \end{cases}$$

$E[y_j] = np_j$

$\sigma_{jj} = D[y_j] = np_j(1-p_j)$

THM $\sum_{j=1}^{k}\frac{(y_j - np_j)^2}{np_j} \xrightarrow{d} \chi^2(k-1) \Rightarrow \chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = N\sum\frac{(O_i/N - p_i)^2}{p_i} = \sum\frac{(m_i - Np_i)^2}{Np_i} \overset{a}{\approx} \chi^2(n-1)$

$\sigma_{ij} = cov(y_i; y_j) = -np_ip_j,\ i\neq j$

★ Напр.: $\Delta_j = (a_{j-1}, a_j]$ $\quad \pi_j = P_2(X\in\Delta_j) = P_2(a_{j-1} < X \leq a_j) = P_2\left(\frac{a_{j-1}-m}{\sigma} < Z \leq \frac{a_j - m}{\sigma}\right)$

$E_j = \pi_j N$ $\quad O_j = \#\{i : x_i \in \Delta_j\} \Rightarrow \chi^2 = \sum\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\approx} \chi^2(n-1)$ $\quad (a: O_j \geq 5)$

χ^2 for indep./of association $\quad \pi_{ij}$ – совм. попул. распр. $\quad H_0: \pi_{ij} = \pi_{i\cdot}\cdot\pi_{\cdot j}$ $\quad E_{ij} = n\cdot p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$ (при H_0)

$$\chi^2 = \sum_i\sum_j \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \overset{a}{\approx} \chi^2((r-1)\cdot(c-1))$$

(B) X, $F(x,\theta)$, $\theta\in\Theta\subset R$; $f(\theta) = \pi(\theta)$ – prior; $\quad \pi(\theta|x_1\ldots x_n) = \pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)\cdot f(x_1;\theta)\ldots f(x_n;\theta)}{\int_\Theta f(x_1;\theta)\ldots f(x_n;\theta)\pi(\theta)d\theta}$

★ $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)}{\int f_{X|Y}(x|y)\cdot f_Y(y)dy}$ $\quad = \frac{\pi(\theta)\cdot L(\theta,x)}{\int_\Theta L(\theta;x)\cdot\pi(\theta)d\theta} \Rightarrow \hat\theta_B = E(\theta|x_1,\ldots,x_n)$

$= \int_\Theta \theta\,\pi(\theta|x_1\ldots x_n)d\theta$

лемма $\hat\theta = \hat\theta(x_1\ldots x_n)$; $\quad E((\hat\theta_B - \theta)^2|x_1\ldots x_n) \leq E((\hat\theta-\theta)^2|x_1\ldots x_n)$

$\Rightarrow \hat\theta_B$ – опт. в среднекв. смысле: $E((\hat\theta_B - \theta)^2) \leq E((\hat\theta - \theta)^2)$

апр. норм., усл. норм

1) $X\sim N(\theta,\sigma^2)$, σ^2, $\theta\sim N(m,\delta^2)$, m, δ^2 $\quad L(\theta; x_1\ldots x_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(n(\theta-\bar x)^2 + (n-1)s^2)\right)$

$\pi(\theta|x) \propto \pi(\theta)\cdot L(\theta,x) = \exp\left(-\frac{(\theta-m)^2}{2\delta^2} - \frac{1}{2\sigma^2}(n(\theta-\bar x)^2 + (n-1)s^2)\right) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\Delta^2}(\theta-a)^2\right)$

$\Rightarrow \pi(\theta|x) \sim N(a,\Delta^2)$; $a = \left(\bar x + m\,\sigma^2/n\delta^2\right)/\left(1+\sigma^2/n\delta^2\right)$ $\quad \Delta^2 = \sigma^2/\left(1+\frac{\sigma^2}{n\delta^2}\right) \Rightarrow \hat\theta_B = a$ $\quad \hat\theta_B \to \bar x,\ n\to\infty$; $\hat\theta_B \to m,\ \delta\to 0$

апр. бета, усл. бин.

2) $\theta\in(0,1)$ $\quad L(\theta,x) = C_n^x\,\theta^x(1-\theta)^{n-x}$; $\quad \pi(\theta)\sim Be(a,b)$

$\pi(\theta|x) \propto \theta^x(1-\theta)^{n-x}\,\theta^{a-1}\cdot(1-\theta)^{b-1} \propto \theta^{x+a-1}(1-\theta)^{n-x+b-1} \Rightarrow \pi(\theta|x)\sim Be(x+a, n-x+b)$

$\hat\theta_B = E(\theta|x) = \frac{x+a}{n+a+b} = \frac{\hat\theta_{ML} + (a/n)}{1 + (a+b)/n}$, где $\hat\theta_{ML} = x/n$ $\quad \lim_{n\to\infty}\hat\theta_B = \hat\theta_{ML}$

3) апр. гамма, усл. Пуас.

$L(\theta; x_1\ldots x_n) = L(\theta,x) = e^{-n\theta}\frac{\theta^{x_1}}{(x_1)!}\cdots\frac{\theta^{x_n}}{(x_n)!}$ $\quad \pi(\theta)\sim\Gamma(a,b)$ $\quad f(\theta) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}e^{-b\theta}, & \theta>0 \\ 0, & \theta\leq 0\end{cases}$

$\pi(\theta|x) \propto e^{-n\theta}\cdot\theta^{n\bar x}\cdot\theta^{a-1}\cdot e^{-b\theta} \propto \theta^{n\bar x + a - 1}\cdot e^{-(n+b)\theta}$ $\quad E(\theta) = a/b$ $\quad Var(\theta) = a/b^2$

$\pi(\theta|x) \sim \Gamma(n\bar x + a, n+b) \Rightarrow \hat\theta_B = \frac{n\bar x + a}{n+b}$ $\quad \lim_{n\to\infty}\hat\theta_B \Rightarrow \hat\theta_{ML}$

(НП) $S_c = \{x : f_1(x) \geq c\cdot f_0(x)\}$, где c: $P_{H_0}(\{X\in S_c\}) = \alpha$ $\quad f_1(x)/f_0(x) \geq c \Rightarrow x \geq g(c)$ т.к. $P_{H_0}(\{f_1/f_0(\cdot) = c\}) = 0$

$P_{H_0}(\{X \geq g(c)\}) = \alpha \Rightarrow c = h(\alpha) \Rightarrow S_c = \{x : x \geq \underbrace{g(c(\alpha))}_{C}\}$ $\quad$ Power $= P_{H_1}(X < g(c))$

(ML) $[\theta, 2\theta] \Rightarrow x_i/2 \leq \theta \leq x_i \Rightarrow [\,1/2\max_{1\leq i\leq n} x_i; \min_{1\leq i\leq n} x_i\,]$

$[-\theta, 2\theta] \Rightarrow x_i/2 \leq \theta;\ -x_i \leq \theta \Rightarrow \mathbb{1}_{[\frac{x_i}{2};+\infty)}\cdot\mathbb{1}_{[-x_i;+\infty)} \Rightarrow [\max(\frac{x_i}{2}, -x_i); +\infty) \Rightarrow [\max(\frac{1}{2}\max(x_i); \max(-x_i)); +\infty)$

★ $\bar X = \frac{n_1\bar x_1 + n_2\bar x_2}{n_1+n_2}$; $\sum x_i^2 = (n-1)s^2 + n\bar x$;

$f_y(y) = f_x(x)\cdot|x'_y|$, где $x = \varphi(y)$; $S^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2$, $Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(\cdot)] = E(XY)-\dots$

$cov_{xy} = \frac{1}{n}\sum\sum(x_i-\bar{x})(\cdot) = \overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}$

- $X \sim Bin(n,p)$ $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ $E(X) = np$ $Var(X) = npq$
- $X \sim Be(p) = Bin(1,p)$ $E(X) = p$ $Var(X) = pq$ $E(X^n) = p$
- $X \sim Pois(\lambda)$ $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $E(X) = \lambda$ $Var(X) = \lambda$ $E(X^n) = \lambda^n$
- $X \sim exp(\lambda)$ $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $E(X) = 1/\lambda$ $Var(X) = 1/\lambda^2$ $E(X^n) = n!/\lambda^n$
  $Y = \sum^k X_i \sim \Gamma(k, 1/\lambda)$ $P(X > s+t \mid X \geq s) = P(X > t)$
- $X \sim U(a,b)$ $F(x) = \begin{cases} 0 \\ \frac{x-a}{b-a} \\ 1 \end{cases}$ $E(X) = \frac{a+b}{2}$ $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ $P(|X-\mu| < \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon/\sigma) \Rightarrow (\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma) \Leftrightarrow 99{,}7\%$
  - ▶ $X \sim \ln N(\mu, \sigma^2)$ $f(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ $E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}$ $Var(X) = (e^{\sigma^2}-1)\cdot e^{2\mu+\sigma^2}$
    - ★ $Y = \prod X_i \sim \ln N(n\mu, \sum\sigma_i^2)$
  - ▶ $X = \sum^k Z_i^2 \sim \chi_k^2$ $E(X) = k$ $Var(X) = 2k$ $f(x) = C_n \cdot x^{n/2-1}\cdot e^{-x/2}$, $C_n = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$
    $X_1 + X_2 \sim \chi^2_{k_1+k_2}$ $X \approx N(k, 2k)$ $\frac{X-k}{\sqrt{2k}} \xrightarrow{d} N(0,1)$ $\chi_n^2 = \Gamma(n/2, 2)$
  - ▶ $t(k) = \frac{Z_0}{\sqrt{1/n \cdot \sum^k Z_i^2}} = \frac{N(0,1)}{\sqrt{1/2\, \chi_k^2}}$, $f(x) = C_n\cdot(1 + x^2/n)^{-(n+1)/2}$, $C_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}$
    $E(t_n) = 0$ $Var(t_n) = \frac{n}{n-2}$, $n \geq 3$
  - ▶ $F(m,n) = \frac{1/m \sum^m U_i^2}{1/n \sum^n U_i^2} = \frac{1/m\, \chi_m^2}{1/n\, \chi_n^2}$ $E(F) = \frac{n}{n-2}$, $Var(X) = \frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$
    $F_{m,n} \xrightarrow{d} \delta(x-1)$ $1/F \sim F(n,m)$
- $X \sim Geom(p)$ $P(X=n) = q^{n-1}p$ $E(X) = 1/p$ $Var(X) = q/p^2$; $Geom(p) = NB(1,p)$
  $X = \min_i(X_i) \sim Geom(1 - \prod(1-p_i))$; $P(X > m+n \mid X \geq m) = P(X > n)$; $\sum X_i \sim NB(n,p)$
- $X \sim Log(p)$ $P(X=k) = -\frac{1}{\ln(1-p)}\cdot\frac{p^k}{k}$ $E(X) = \frac{-1}{\ln(1-p)}\,\frac{p}{1-p}$ $Var(X) = -p\frac{p+\ln(1-p)}{(1-p)^2\ln^2(1-p)}$
  $Y = \sum^N X_i \sim NB$, $N \sim P(\lambda)$
- $X \sim NB(r,p)$ $P(X=k) = \binom{k+r+1}{k} p^r q^k$ $E(X) = \frac{rq}{p}$ $Var(X) = \frac{rq}{p^2}$ $\sum X_i \sim NB(\sum r_i, p)$
- $X \sim Be(\alpha,\beta)$ $f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$, $x \in (0,1)$ $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$
  $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ $Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$ $\frac{X}{X+Y} \sim Be(\alpha,\beta)$, где $X \sim \Gamma(\alpha, 1)$ $Y \sim \Gamma(\beta, 1)$
- $X \sim \Gamma(k, \theta)$ $f(x) = x^{k-1}\exp(-x/\theta)/(\Gamma(k)\theta^k)$ $E(X) = k\theta$ $Var(X) = k\theta^2$, $x \in [0, \infty)$
  $Y = \sum X_i \sim \Gamma(\sum k_i, \theta)$, $aX \sim \Gamma(k, \theta\cdot a)$; $\Gamma(k,\theta) \hat{\approx} N(k\theta, k\theta^2)$ $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$
- $X \sim P(k, x_m)$ $f(x) = k x_m^k / (x^{k+1})$ $E(X) = \frac{k x_m}{k-1}$ $Var(X) = \left(\frac{x_m}{k-1}\right)^2 \frac{k}{k-2}$

(4) $P(\{X \geq \varepsilon\}) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}\left(\frac{E[X^2]}{\varepsilon^2}\right)$; $P(\{|X - EX| \geq \varepsilon\}) \leq D(X)/\varepsilon^2$; $(E \to \theta, Var \to 0 \Rightarrow$ сост$)$

Мат. анализ

① $(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad (ctg\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $\quad (a^x)' = a^x \ln a$

$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}$

$(arctg\,x)' = -(arcctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t};\ y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{\varphi'_t}$

② $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + c$ $\quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + c$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\, arctg\,\frac{x}{a} + c$ $\quad \int \frac{x \cdot dx}{a^2+x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2+x^2| + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$ $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a}| + c$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c$ $\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \pm\sqrt{a^2+x^2} + c$

$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + c$

③ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $\quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\quad 1+tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ $\quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$ $\quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$ $\quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

④ $t = tg\, x/2$

$\sin x = 2t/1+t^2$

$\cos x = 1-t^2/1+t^2$

$tg\,x = 2t/1-t^2$

$dx = 2dt/1+t^2$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^a = \lim\limits_{x\to\infty}(1+a)^{1/a} = e$

$\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to a}[(u(x)-1)\cdot v(x)]}$

$[0^0], [\infty^0], [1^\infty]: \lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln(f(x))}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\log_a(1+x)}=\ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{a^x-1}=\frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a\ ,\quad a\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)^a-1}=\frac{1}{a}\ ,\quad a\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta}=0\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^\beta}{e^{\gamma x}}=0$$

⑥ $\alpha\to 0$ или $\alpha=f(x)\to 0$

$\sin\alpha\sim\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$

$\arcsin\alpha\sim\alpha$, $\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha$

$1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\alpha^2$

$\log_\beta(1+\alpha)\sim\frac{\alpha}{\ln\beta}\Rightarrow\ln(1+\alpha)\sim\alpha$

$(\beta>0,\ \beta\neq 1)$ $\Updownarrow$

$\beta^\alpha-1\sim\alpha\ln\beta\Rightarrow e^\alpha-1\sim\alpha$

$(1+\alpha)^\beta-1\sim\alpha\beta\Rightarrow(1+\alpha)^\beta\sim 1+\alpha\beta$

⑦ 1) $D(f)$ — знаменатель, кор. четной ст., логарифм $y=\log_a x$, $a>0, a\neq 1$, $x>0$

2) асимптоты в т. разрыва верт. асимпт. в a хотя бы один $\lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$

гор. $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=b$

(≤ 2) накл. асимптоты $(y=kx+b)$

2) $\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$, $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=b$ $\Leftarrow$ 1) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$

3) нули и пром. знакопостоянства (мет. инт) $f(x)=0$

4) экстр. и инт. монотонности $f'(x)=0$

+ проверки дост. усл. экстремума и $f(x)$ опр., но $f'(x)\nexists$

↳ мет. инт. (с уч. т. разрыва)

5) т. перегиба и инт. (вып. вниз $>$) (вып. вверх $<$) вогнут. $f''(x)=0$

+ пров. дост мет. интервалов и где $f(x)$ опр., но $f''(x)\nexists$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$
[→ кас.]

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$
[→ норм]

$$\frac{\partial z}{\partial l}=z'_x(x_0,y_0)\cdot\cos\alpha+z'_y(x_0,y_0)\cdot\cos\beta$$

$$\bar{a}_0=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}=\frac{mi+nj}{\sqrt{m^2+n^2}}\Rightarrow\alpha,\beta$$

$$\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{e}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{e}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\bar{e}_z$$

$$\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x};\frac{\partial\varphi}{\partial y};\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

2) $AC-B^2>0$ — extr $A>0$ min, $A<0$ max

4) $|\text{Ом. H}|>0\Rightarrow\max$, $<0\Rightarrow\min$

3) $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3>0$ — min; $\Delta_1<0,\ \Delta_2>0,\ \Delta_3<0$ — max

⑨ $e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) = \sum \frac{(\pm x)^n}{n!}$ $[\mathbb{R}]$

$\sin(\pm x) = \pm x \mp \frac{x^3}{3!} + o(x^4) = \pm \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ $[\mathbb{R}]$

$\cos(\pm x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) = \pm \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $[\mathbb{R}]$

$[\,|x|<1\,]$ $\begin{cases} \ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} + o(x^3) = \sum \frac{(-1)^{n+1}(\pm x)^n}{n} \\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + o(x^2) = \sum \frac{\alpha \ldots (\alpha-n+1)\, x^n}{n!} \end{cases}$

$\mathrm{tg}(\pm x) = \pm x \pm \frac{x^3}{3} \pm \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$

$\mathrm{arctg}(\pm x) = \pm x \mp \frac{x^3}{3} \pm \frac{x^5}{5} + o(x^6) = \sum \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$

$\arcsin(\pm x) = \pm x \pm \frac{x^3}{3!} \pm \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^8) = \sum \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + o(x^4)$

$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \pm \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)$ $[\,|x|<1\,]$

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)$