МАТЕМАТ.
АНАЛИЗ
1 КУРС

Определения I

1. Дополнение $C_M A = \{x : x \in M$ и $x \notin A\}$

2. Разность $A \setminus B = \{x : x \in A$ и $x \notin B\}$

3. Законы де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

4. Сюръективное $f(X) = Y \Leftrightarrow \forall y \in Y \ \exists x \in X \ f(x) = y$

Инъективное $\forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Биективное – сюръективное и биективное отображ

5. Аксиома о полноте

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$, $\forall x \in X, y \in Y : x \leq y$

Тогда $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x, y \quad x \leq c \leq y$

6. Система влож. отр. $I_1 \supset I_2 \ldots \supset I_n \ldots$, где $I_n = [a_n; b_n]$

Система стяг. отр. $I_1 \supset I_2 \ldots \supset I_n \ldots$:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_n : \quad |I_n| = b_n - a_n < \varepsilon$

Теорема $\{I_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – сист. влож отр.

Тогда 1. $\exists c \in \mathbb{R} : c \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. $\{I_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – стягив. $\Rightarrow$ c – единственна

7. Предельная точка a мн. A : $\forall \delta : \mathring{U}_\delta(a) \cap A \neq \varnothing$

Теорема $A \subset \mathbb{R}$ – беск., огр. мн-во

тогда $\exists c$ – пред. точка

8. Предел п-ти $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = A$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \quad |x_n - A| < \varepsilon$

9. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty \quad \forall c > 0 \quad \exists N_c \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_c \quad x_n < -c$

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty \quad \forall c > 0 \quad \exists N_c \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_c \quad x_n > c$

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \infty \quad \forall c > 0 \quad \exists N_c \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_c \quad |x_n| > c$

10. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq A$ $\quad \exists \varepsilon>0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_\varepsilon \quad |x_n - A| > \varepsilon$

11. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ – не сущ. $\quad \exists \varepsilon>0 \quad \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall m,n > N_\varepsilon \quad |x_n - x_m| > \varepsilon$

12. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ по Гейне

$\forall \{x_n\} \to a, \quad x_n \neq a$

$f(x_n) \to A, \quad n \to \infty$

$\lim\limits_{n\to a} f(x_n) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \forall c>0 \quad \exists x_n \quad \forall x \in D(f): \ x > x_n \quad f(x) > c$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \forall c>0 \quad \exists x_n \quad \forall x \in D(f): \ x > x_n \quad f(x) < -c$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty \quad \forall c>0 \quad \exists x_n \quad \forall x \in D(f): \ x > x_n \quad |f(x)| > c$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \forall c>0 \quad \exists x_n \quad \forall x \in D(f): \ x < x_n \quad f(x) > c$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \forall c>0 \quad \exists x_n \quad \forall x \in D(f): \ x < x_n \quad f(x) < -c$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \forall c>0 \quad \exists x_n \quad \forall x \in D(f): \ x < x_n \quad |f(x)| > c$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \quad \forall c>0 \quad \exists x_n \quad \forall x \in D(f): \ |x| > x_n \quad f(x) > c$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \forall c>0 \quad \exists x_n \quad \forall x \in D(f): \ |x| > x_n \quad f(x) < -c$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \forall c>0 \quad \exists x_n \quad \forall x \in D(f): \ |x| > x_n \quad |f(x)| > c$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq -\infty \quad \exists c>0 \quad \forall x_n \quad \forall x \in D(f): \ |x| > x_n \quad f(x) > -c$

14. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq A \quad \exists \varepsilon>0 \quad \forall \delta>0 \quad \forall x \in D(f): 0<|x-a|<\delta \quad |f(x)-A| > \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq A \quad \exists \varepsilon>0 \quad \forall x_n \quad \forall x \in D(f): \ x > x_n \quad |f(x)-A| > \varepsilon$

15. Левый предел $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta \quad \forall x: \ -\delta < x-a < 0 \quad |f(x)-A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta \quad \forall x: \ 0 < x-a < \delta \quad |f(x)-A| < \varepsilon$

Теорема $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B: \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, если $B \neq 0$

17. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = B: \quad \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, если $B \neq 0$

18. Предельный переход

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n \le b_n \Rightarrow A \le B$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \quad f(x) \le g(x) \Rightarrow A \le B$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

20. Теор. о зажатой п-ти

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \quad \exists N \ \forall n \geq N \ a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$

21. Моном. возр. п-ть $\{x_n\} : \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < x_{n+1}$

Теор. Вейерштрасса $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – моном. неуб. п-ть

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сходится $\Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – огр. сверху

22. Критерий Коши

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N_\varepsilon \ |x_n - x_m| < \varepsilon$

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(a) : 0 < |x_1 - a| < \delta, \ 0 < |x_2 - a| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta_\varepsilon > 0 \ \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(a) \quad 0 < |x_1 - a| < \delta, \ 0 < |x_2 - a| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$

23. Нер-во Бернулли $x \geq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$

24. $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

25. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e$, если $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$

26. $f(x) = o(g(x)), \ x \to a \quad \exists \alpha(x)$ – б.м.ф. $x \to a \quad f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$

$f(x) = O(g(x)), \ x \to a \quad \exists \gamma(x), \ x \to a \quad f(x) = \gamma(x) \cdot g(x)$

$f(x) \sim g(x), \ x \to a \quad \exists \gamma(x), \ x \to a : \lim\limits_{x\to a} \gamma(x) = 1 \quad f(x) = \gamma(x) \cdot g(x)$

27. $f(x) \in C(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \ |x - a| < \delta \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

$f x \notin C(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \quad \forall x \quad |x - a| < \delta \quad |f(x) - f(a)| > \varepsilon$

28. Локальные св-ва

1) $f, g \in C(a)$ $\quad \alpha f + \beta g \in C(a)$
2) $f, g \in C(a)$ $\quad f \cdot g \in C(a)$
3) $f, g \in C(a)$, $g(a) \neq 0$ $\quad \frac{f}{g} \in C(a)$
4) $f \in C(a)$ $\quad g \in C(b)$, $b = f(a)$ $\quad \left.\begin{array}{l} f: A \to \mathbb{R} \\ g: X \to A \end{array}\right\} \Rightarrow g(f(x)) \in C(a)$
5) $f \in C(a) \Rightarrow \exists \mathring{V}_\delta(a)$, где $f(x)$ – огранич.
$f(a) \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathring{V}_\delta(a) \quad |f(x)| > 0$

29. Глобальные св-ва

1) $f(x) \in C[a;b]$, $f(a) = A$ $\quad f(b) = B$ $\quad \forall C \in [A; B]$ $\quad \exists c \in [a;b]$ $\quad f(c) = C$
2) $f(x) \in C[a;b]$ – $f(x)$ – огр. на $[a;b]$
3) $f(x) \in C[a;b]$ – $f(x)$ – дост. max и min на $[a;b]$

30. $f \in UC(A)$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in A \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$
$f \notin UC(A)$ $\quad \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in A \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$

31. $f \in D(a) \Leftrightarrow \exists A$ – const: $f(x) - f(a) = A(x-a) + o(x-a)$, $x \to a$

$f(a+h) - f(a) = f'(a) + o(h)$, где $f'(a) - A$

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ – производная $f(x)$

32. Диф-ть сложной ф-и

$f: X \to R$ $\quad f \in D(x)$ $\quad y = f(x)$, то $g \circ f \in D(x)$
$g: Y \to X$ $\quad g \in D(y)$ $\quad (g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$

33. Вторая пр-ая $\quad f(x) \in D^2(x) \quad f''(x) = (f'(x))'$
Ф-ла Лейбница
Если $\exists u^{(n)}(x), v^{(n)}(x)$, то $(u(x), v(x))^{(n)} = \sum\limits_{m=0}^{n} \binom{n}{m} u^{(m)}(x) v^{(n-m)}(x)$

34. Эластичность

y – опр. в $\mathring{V}(x)$
$y \in D(x)$ $\quad E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'$
$y(x) \neq 0$

35. Теорема Ферма

$y = f(x)$ – опр. в $\mathring{U}(a)$, a – extr $f(x)$

$\exists f'(a) \Rightarrow f'(a) = 0$

36. Теорема Ролля

$$\left.\begin{array}{l} f \in C[a;b] \\ f \in D(a;b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a;b) : f'(c) = 0$$

37. Теорема Лагранжа

$$\left.\begin{array}{l} f \in C[a;b] \\ f \in D(a;b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a;b) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

38. Теорема Коши

$$\left.\begin{array}{l} f, g \in C[a;b] \\ f, g \in D[a;b) \\ g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a;b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a;b) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

I. 1. Мн-ва. Законы де Моргана

$a \in M$

$A \subseteq B$, где A – подмн-во

$A = \{\varnothing\} \Rightarrow A \subset \forall B$

$\left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow A = B$

$A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$

$A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$

$C_M A = \{x : x \in M$ и $x \notin A\}$

$A \setminus B = \{x : x \in A$ и $x \notin B\}$

Св-ва: 1) $A \cup B = B \cup A \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap B = B \cap A \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

2) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

3) $C_M M = \varnothing$

$C_M \varnothing = M$

Законы де Моргана

1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \wedge x \in M \Leftrightarrow$

$x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in M \Leftrightarrow ((x \notin A) \wedge (x \in M)) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \in M))$

$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \wedge x \in M \Leftrightarrow$

$(x \notin A \vee x \in B) \wedge x \in M \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \in M) \vee (x \notin B \wedge x \in M)$

$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

2. Аксиома о полноте. Верхняя и нижняя грань

Аксиома Пусть $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ $\forall x \in X, y \in Y : x \leq y$
Тогда $\exists c \in \mathbb{R}$ $\forall x, y$ $x \leq c \leq y$

Верх. грань $A \in \mathbb{R}$ мн-ва X $\forall x \in X$ $x \leq A$
Нижн. грань $A \in \mathbb{R}$ мн-ва X $\forall x \in X$ $x \geq A$

Точная верх. грань $A \in \mathbb{R}$ мн-ва X $\forall x \in X$ $x \leq A$
$\forall a < A$ $\exists x_1 \in X$ $x_1 > a$

Точная нижн. грань $A \in \mathbb{R}$ мн-ва X $\forall x \in X$ $x \geq A$
$\forall a > A$ $\exists x_2 \in X$ $x_2 < a$

Теор. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ – непустое, огр. сверху
Тогда $\exists$ точная верхняя грань мн-ва X – $\sup X = c$

▶ Пусть Y – мн-во верх. граней X
$\forall x \in X$ $\forall y \in Y$ $x \leq y$

По акс. о полноте $\exists c \in \mathbb{R} :$ $\forall x \in X$ $\forall y \in Y$ $x \leq c \leq y$

Тогда $\left.\begin{array}{l} c \text{ – верх. грань } X \\ c \text{ – min из верх. гр.} \end{array}\right\} \Rightarrow \sup X = c$

Теор. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ – непустое, огр. снизу
Тогда $\exists$ точная нижняя грань мн-ва X – $\inf X = c$

3. Покрытие. Лемма Бореля-Лебега

Покрытие мн-ва X $\mathcal{U}$, если $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$, где $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_n\}_1^{\infty}$

<u>Теор.</u> Если $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ - произв. покрытие $I = [a; b]$,
то $\exists$ конечное покрытие

▶ Пусть $\nexists$ конечн. покрытия $\mathcal{U}$

$I_1 = [a; b]$ $\qquad |I_1| = b - a$

$|I_2| = \frac{|I_1|}{2} = \frac{b-a}{2}$

...

$|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$ $\qquad |I_n| \to 0, n \to +\infty$

$\{I_n\}$ - сист. стяг. отр. $\Rightarrow \exists c \in [a; b]$ $\quad c \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Для $\mathcal{U}$ $\exists \mathcal{U}' = (\alpha; \beta) : c \in \mathcal{U}$

Пусть $\varepsilon = \frac{\min(\beta - c; c - \alpha)}{2}$

Тогда $\exists N \in \mathbb{N} : |I_N| < \varepsilon \Rightarrow I_N \subset \mathcal{U}'$ - противореч.,
т.к. $\mathcal{U}'$ кон. подпок.
для I_N

4. Предельные точки. Лемма Больцано-Вейерштрасса

Пред. точка a мн-ва A : $\forall \delta$: $\mathring{U}_\delta(a) \cap A \neq \varnothing$

Теор. a - пред. точка A $\Rightarrow$ $\mathring{U}_\delta(a) \cap A$ - M - беск. мн-во

▶ $a_1 \in A \wedge a_1 \in \mathring{U}_\delta(a)$

$\delta_1 = |a_1 - a|$ $\quad a_2 \in A \wedge a_2 \in \mathring{U}_{\delta_1}(a)$, причем $a_1 \neq a_2$, $a_2 \in \mathring{U}_\delta(a)$

...

$\delta_n = |a_n - a|$ $\quad a_{n+1} \in A \wedge a_{n+1} \in \mathring{U}_{\delta_n}(a)$, причем $a_1 \neq a_{n+1}$, $a_n \in \mathring{U}_\delta(a)$

$n \to \infty$ $\Rightarrow$ бесконечное мн-во отл. друг от друга точек

Теор. A - беск. огр. мн-во, $A \subseteq \mathbb{R}$

Тогда $\exists c$ - пред. точка мн-ва A

▶ A - огр. мн-во $\Rightarrow$ $A \subseteq [a_1; b_1]$

Пусть $A \notin [a_1; b_1]$, т.е. $\forall x \in [a_1; b_1]$ $\exists \delta$:

$\mathring{U}_\delta(x) \cap A = \varnothing \vee \mathring{U}_\delta(x) \cap A$ - конечно

Совокупность $\mathring{U}_\delta(x)$ для $\forall x \in [a_1; b_1]$ дает покрытие $[a_1; b_1]$

Из пот. по лемме Бореля-Лебега выд. конечн. подпок.

$\mathring{U}_\delta(x_1) \cup \ldots \cup \mathring{U}_\delta(x_s) \supset [a_1; b_1]$ - конечное число окрестностей с центром в т. из мн-ва A

$\Rightarrow$ A - конечное $\Rightarrow$ противоречие

5. Предел п-ти. Три замечания

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$: $\forall \varepsilon>0$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_\varepsilon$ $|x_n - A| < \varepsilon$

(I) Записи равносильны:

$\forall \varepsilon>0$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\forall n > N_\varepsilon$ $|x_n - A| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon_1 \in (0; 0{,}01)$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\forall n > N_{\varepsilon_1}$ $|x_n - A| < \varepsilon_1$

▶ $\Rightarrow$ $\varepsilon_1 \in \varepsilon$ (>0)

$\Leftarrow$ Пусть $\varepsilon \geq 0{,}01$. Тогда $\varepsilon = 7$ $\varepsilon_1 = 0{,}001$

$\Rightarrow$ для ε_1 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_{\varepsilon_1}$ $|x_n - A| < \varepsilon_1 = 0{,}001 < 7 < \varepsilon$

(II) Записи равносильны

▶ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\forall n > N_\varepsilon$ $|x_n - A| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon_2 > 0$ $\exists N_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$ $\forall n > N_{\varepsilon_2}$ $|x_n - A| < 10^4 \cdot \varepsilon_2$

$\Rightarrow$ если $\varepsilon = \varepsilon_2$, то $\varepsilon < 10^4 \varepsilon$

$\Leftarrow$ Пусть $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{10^4}$

$\Rightarrow$ для ε_2 $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ $\forall n > N_{\varepsilon_2}$ $|x_n - A| < 10^4 \cdot \dfrac{\varepsilon}{10^4} = \varepsilon$

(III) Если для $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\exists N^* \in \mathbb{N}$: $\forall n > N^*$ $a_n = b_n$,

то если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

▶ Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$: $\forall \varepsilon>0$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_\varepsilon$ $|a_n - A| < \varepsilon$

тогда для $N = \max\{N_\varepsilon ; N^*\}$

$\forall n > N$ $|a_n - A| < \varepsilon$

$\forall n > N$ $a_n = b_n$ $\Rightarrow$ $|b_n - A| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = A$

Аналогично если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

6. Бесконечно малые величины. Арифметические св-ва пределов

$\{\alpha_n\}$ - б.м.п $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

$\alpha(x)$ - б.м.ф. при $x\to a$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$

Теор. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \alpha_n = a_n - A$ - б.м.п.

▶ $\forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \forall n>N \ |a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow |\alpha_n - 0| < \varepsilon$

Теор. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \alpha(x) = f(x) - A$ - б.м.ф при $x\to a$

▶ $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta \ \forall x: 0<|x-a|<\delta \ |f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow |\alpha(x)-0|<\varepsilon$

Теор. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ - б.м.п. $\{\gamma_n\}$ - огр. п-ть,
то 1) $\{\alpha_n + \beta_n\}$ - б.м.п.
2) $\{\alpha_n - \beta_n\}$ - б.м.п.
3) $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ - б.м.п.
4) $\{\alpha_n \cdot \gamma_n\}$ - б.м.п.

▶ Для $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ $\forall \varepsilon>0 \ \exists N_1, N_2: \forall n>N_1 \ |\alpha_n| < \varepsilon/2$
$\forall n > N_2 \ |\beta_n| < \varepsilon/2$

$\exists N > N_1$ и $N>N_2$ $\forall n>N$ $\begin{cases} |\alpha_n| < \varepsilon/2 \\ |\beta_n| < \varepsilon/2 \end{cases}$

1) т.к. $|a+b| \le |a|+|b|$, то $\forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \forall n>N \ |\alpha_n+\beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon$

2) $|a-b| \le |a|+|b|$ $\quad |\alpha_n - \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon$

4) Для $\{\alpha_n\}$ $\forall\varepsilon>0 \ \exists N \ \forall n>N \ |\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{c}$

$\{\gamma_n\}: \forall n \ |\gamma_n| \le c$

$|\alpha_n \cdot \gamma_n| = |\alpha_n| \cdot |\gamma_n| < \dfrac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon$

3) т.к. $\{\beta_n\}$ имеет конечный предел $= \{\beta_n\}$ - огр. $\Rightarrow$ 4

Теор $\alpha(x), \beta(x)$ - б.м.ф $x\to a$
$\gamma(x)$ - огр. ф. $x\to a$, то $\alpha(x) \pm \beta(x), \alpha(x)\cdot\beta(x), \alpha(x)\cdot\gamma(x)$ - б.м.ф $x\to a$

Теор. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$, если $B \neq 0$

Теор. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = A - B$

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$

4) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}$

▶

⑦ Предельный переход в неравенствах. Первый зам. предел.

<u>Теор.</u> $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \\ \exists N \quad \forall n > N \quad a_n \le b_n \end{array}\right\} \Rightarrow A \le B$

▶ Предположим $A > B$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \varepsilon = \frac{A-B}{2}$ $\quad \exists N_1 \ \forall n > N_1 \ |a_n - A| < \varepsilon : A - \varepsilon < a_n$

$\exists N_2 \ \forall n > N_2 \ |b_n - B| < \varepsilon : b_n < B + \varepsilon$

$N = \max\{N_1, N_2\} \quad \forall n > N \quad b_n < B + \varepsilon = \frac{A+B}{2} = A - \varepsilon < a_n$

<u>Первый зам. предел</u> $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Следствия

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

4) $\lim \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

⑧ Теорема о зат. посл-ти (ф-и). Теорема Вейерштрасса

Теор. $\left.\begin{array}{l}\exists N \ \forall n \geq N \quad a_n \leq c_n \leq b_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$

▶ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \ \forall n > N_1 \quad n \in \mathbb{N} \quad |a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < a_n$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \ \forall n > N_2 \quad n \in \mathbb{N} \quad |b_n - A| < \varepsilon \Rightarrow b_n < A + \varepsilon$

Для $\forall N \geq \max\{N_0, N_1, N_2\}$ $A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon$

$\Rightarrow |c_n - A| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$

Теор. $\left.\begin{array}{l}\exists \delta \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \quad f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A \quad \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Теор. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – монотонно неуб. п-ть

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ огр. сверху

▶ $\Rightarrow$ сходится $\Rightarrow$ огр.
$\Leftarrow$ $\exists \sup S$ – точная верх. грань
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_N \quad x_n \leq S \leq x_N + \varepsilon$

т.к. $\{x_n\}$ – мон. неуб. $\Rightarrow \forall n \geq N$

$x_N \leq x_n \leq S \leq x_N + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ |x_n - S| < (x_N + \varepsilon) - x_n = \varepsilon$

$\Rightarrow \{x_n\}$ – сходится $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = S$

⑩ Критерий сущ-ние предела п-ти, ф-ии

Критерий Коши для п-ти

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \iff \forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \forall m,n>N_\varepsilon\ |x_n-x_m|<\varepsilon$

▶ $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \forall n>N_\varepsilon\ |x_n-A|<\varepsilon/2$

$\forall m>N_\varepsilon\ |x_m-A|<\varepsilon/2$

$|x_n-x_m| = |(x_n-A)-(x_m-A)| \le |x_n-A|+|x_m-A| < \varepsilon$

$\Leftarrow \{x_n\}:\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n>N\ |x_n-x_m|<\varepsilon/3$

$\forall n\ge N:\ x_N-\varepsilon/3 < x_n < x_N+\varepsilon/3$

$a_k=\inf\limits_{s\ge k} x_s,\ b_k=\sup\limits_{s\ge k} x_s \qquad a_k\le a_{k+1}\le\ldots\le b_{k+1}\le b_k$

$I_k=[a_k;b_k]$ – сист. влож. отр. $\Rightarrow \exists A\in\mathbb{R}:\ A\in I_k\ \forall k\in\mathbb{N}$

$\exists \lim\limits_{x\to\infty} x_n = A$

$a_n\le x_n\le b_n \quad a_n\le A\le b_n \quad \forall n\ge N$

$x_N-\varepsilon/3 \le \inf\limits_{s\ge N} x_s = a_N \le a_n \le x_n\le b_n\le b_N = \sup\limits_{s\ge N} x_s \le x_N+\varepsilon/3$

$A, x_n \in [x_N-\varepsilon/3;\ x_N+\varepsilon/3]$

$|A-x_n| \le \mu[x_N-\varepsilon/3;\ x_n+\varepsilon/3] = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

Критерий Коши для ф-и

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0\ \forall x_1,x_2\in \mathring{U}_\delta(a)$

$0<|x_1-a|<\delta \quad 0<|x_2-a|<\delta \quad |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

⑨ Число e. Теорема о композиции предела. Второй зам. предел

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

▶ $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

y_n - убывающая $\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} =$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \geqslant \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} y_n = e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{e}{1} = e$$

Теорема о композиции предела

$g: Y\to\mathbb{R}$, $\mathbb{B}_Y$ $f: X\to Y$, $\mathbb{B}_X$

I. $\left.\begin{array}{l}\lim_{\mathbb{B}_Y} g(y) = A \\ \forall B_Y \in \mathbb{B}_Y \quad \exists B_X \in \mathbb{B}_X \quad f(B_X)\subset B_Y\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\mathbb{B}_X} g(f(x)) = A$

▶ $\left.\begin{array}{l}\forall \varepsilon>0 \quad \exists B_Y \in \mathbb{B}_Y \quad g(B_Y)\subset V_\varepsilon(A) \\ \qquad\quad \exists B_X\in\mathbb{B}_X \quad f(B_X)\subset B_Y\end{array}\right\} \Rightarrow g(f(B_X)) \subset g(B_Y) \subset V_\varepsilon(A)$

II. $\left.\begin{array}{l}g(y)\in C(\mathring{U}_\delta(b)) \quad f(x)\in C(\mathring{U}_\delta(a)) \quad \lim_{y\to b} g(y) = g(b) \\ \lim_{x\to a} f(x) = b\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$

▶ Аналогично

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

(11) Непрерывность и т. разрыва. Локальные св-ва непрер. ф-й

Непрерывность $f(x) \in C(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Точка разрыва: $f(x)$ опр. в т. a и $f(x) \notin C(a)$

1) $f \in C(a)$ $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$

2). т. устранимого разрыва a $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) \neq f(a)$

3) т. разрыва первого рода a $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

4) т. разрыва второго рода не $\exists$ или бесконечен $\exists \lim\limits_{x \to a\pm 0} f(x)$

Локальные св-ва непрерывных ф-й

1) $f, g \in C(a) \Rightarrow \alpha f + \beta \cdot g \in C(a)$

2) $f, g \in C(a) \Rightarrow f \cdot g \in C(a)$

3) $f, g \in C(a)$, $g(a) \neq 0 \Rightarrow f/g \in C(a)$

4) $f \in C(a) \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(a) - f(x)$ ограничена

5) $f \in C(a)$, $f(a) \neq 0 \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(a) : \forall x$ $f(x) > 0$ либо $f(x) < 0$

6) $\left.\begin{matrix} f : X \to R & f \in C(a) & \\ g : Y \to X & g \in C(b) & b = f(a) \end{matrix}\right\}$ $g(f(x)) \in C(a)$

(12) Глобальные св-ва непрер. ф-й

$f(x) \in C(A) \Rightarrow \forall a \in A \quad f(x) \in C(a)$

Больцано-Коши $f(x) \in C[a;b] \quad f(a) = A \quad f(b) = B$
$\Rightarrow \forall C \in [A;B] \quad \exists c \in [a;b] \quad f(c) = C$

▶ по лемме $\left.\begin{matrix} g \in C[a;b] \\ g(a) < 0 \quad g(b) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a;b) \quad g(c) = 0$

$g(x) = f(x) - C$

Теорема $f \in C[a;b] \Rightarrow f$ - ограничена на $[a;b]$

▶ $f \in C(x) \Rightarrow \exists U_\delta(x) \quad |f|U_\delta(x)|| \le C$

$\cup U_\delta(x)$ - покрытие $[a;b] \Rightarrow U_{\delta_1}(x_1) \dots U_{\delta_k}(x_k) \Rightarrow [m_1, M_1] \dots [m_k, M_k]$

Пусть $m = \min\{m_1 \dots m_k\} \quad M = \max\{M_1, \dots, M_k\}$

$\forall x \in [a;b] : \quad m \le f(x) \le M$

Вейерштрасс $f(x) \in C[a;b] \Rightarrow$ дост. max и min

(13) Равномерная непрерывность

Равн. непрер. $f \in UC(A)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in A \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Теорема Кантора $f \in C[a;b] \Leftrightarrow f \in UC[a;b]$

▶ $\Leftarrow$ очевидно

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a;b] \quad f \in C[a;b] \Rightarrow f \in C(x) \quad \omega(f, x) = 0$

$\Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x) : \omega(f, \overset{\circ}{U}_\delta(x)) < \varepsilon$

$\overset{\circ}{\cup} U_{\delta/2}(x)$ – покрытие $[a;b]$: $U_{\delta_1/2}(x_1) \dots U_{\delta_k/2}(x_k)$

$[a;b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} \overset{\circ}{U}_{\delta_i/2}(x_k)$

Пусть $\delta^* = \min\{\delta_1/2, \dots, \delta_k/2\}$

$\forall x_1, x_2 \quad |x_1 - x_2| < \delta^* \quad \exists U_{\delta_m/2}(x_m) \quad x \in U_{\delta_m/2}(x_m)$

$|x_2 - x_m| < |x_2 - x_1| + |x_1 - x_m| < \delta^* + \delta_m/2 \leq \delta_m$

$\Rightarrow x_1 \in U_{\delta_m}(x_m) \quad x_2 \in U_{\delta_m}(x_m)$

$\Rightarrow \omega(f, U_{\delta_m}(x_m)) < \varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

(14) Производная. Правила дифференцирования.

Опр. f - дифференцируема в т. a

$f(a+h) - f(a) = f'(a)\,h + o(h)$

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + o(1)$ $\qquad f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Утв. $f \in D(a) \Rightarrow f \in C(a)$

► $\lim\limits_{h\to 0} (f(a+h) - f(a)) = 0 \Leftrightarrow f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теор. $f, g \in D(a)$

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$ в $x=a$
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ в $x=a$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(\frac{f' g - f \cdot g'}{g^2}\right)$, если $g(a) \neq 0$ в $x=a$

►1. $(f+g)(a+h) - (f+g)(a) = (f(a+h) - f(a)) + (g(a+h) - g(a)) =$
$= (f'(a)h + o(h)) + (g'(a)h + o(h)) = (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))h + o(h)$ $\quad h\to 0$

2. $f(a+h)\cdot g(a+h) - f(a)g(a) = (f(a+h) - f(a))\, g(a+h) + (g(a+h) - g(a))\, f(a) =$
$= (f'(a)h + o(h))\,(g(a) + o(1)) + (g'(a)h + o(h))(f(a)) =$
$= (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))h + o(h)$ $\quad h\to 0$

3. $\left(\frac{f}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a+h)\,g(a) - f(a)\,g(a+h)}{g(a+h)\,g(a)} = \frac{1}{g(a+h)g(a)} \cdot (f(a+h)g(a) - f(a)g(x+h)) =$
$= \left(\frac{1}{g^2(a)} + o(1)\right) \cdot (f'(a)g(a) - f(a)g'(a))h + o(h)) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}h + o(h)$ $\quad h\to 0$

Теор. $f: X \to R \quad f \in D(x)$
$g: Y \to X \quad g \in D(y) \quad y = f(x) \Rightarrow$ $g \circ f \in D(x)$
$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$

(15) Производные высших порядков. Теорема Лейбница

Опр. $f \in D(a;b)$, если $\exists f'(x)$, то $f''(x) = (f'(x))'$
$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Формула Лейбница $\exists u^{(n)}(x), v^{(n)}(x) : (u(x)v(x))^{(n)} = \sum\limits_{m=0}^{n} \binom{n}{m} u^{(m)}(x) v^{(n-m)}(x)$

▶ $n=1$ $\quad C_1^0 u'(x)v(x) + C_1^1 u(x)\cdot v'(x) = (u(x)v(x))'$

$n>1$ верно

тогда $n = n+1$ $\quad (u(x)\cdot v(x))^{(n+1)} = ((u(x)v(x))^{(n)})' = \left(\sum\limits_{m=0}^{n} \binom{n}{m} u^{(m)}(x) v^{(n-m)}(x)\right)' =$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \cdot (u^{(m)}(x) v^{(n-m)}(x))' = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (u^{(m+1)}(x) v^{(n-m)}(x) + u^{(m)}(x) v^{(n-m+1)}(x))$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} u^{(m+1)}(x) v^{(n-m)}(x) + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} u^{(m)}(x) v^{(n-m+1)}(x) =$$

$$= C_n^n u^{(n+1)} v + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{m}{n} u^{(m+1)}(x) v^{(n-m)}(x) + C_n^0 u v^{(n+1)} + \sum_{m=1}^{n} \binom{m}{n} v^{(m)}(x) v^{(n-m+1)}(x) =$$

$(s=m+1)$ $$= u^{(n+1)} v + \sum_{s=1}^{n} \binom{s-1}{n} u^{(s)}(x) v^{(s-k+1)}(x) + u v^{(n+1)} + \sum_{m=1}^{n} \binom{m}{n} u^{(m)}(x) v^{(n-m+1)}(x) =$$

$$= u^{(n+1)} v + \sum_{m=1}^{n} (C_n^m + C_n^{m-1}) u^{(m)}(x) v^{(n-m+1)}(x) + u v^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n+1} \binom{m}{n+1} u^{(m)}(x) v^{(n-m+1)}(x)$$ по лемме $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$

(16) Эластичность. Максимум непрерывной функции на отрезке

Опр. y – опр. в $\mathring{U}(x)$, $y \in D(x)$, $y(x) \neq 0$ $\quad E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'$

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right)$$

1. $y>0$, то $\frac{y'}{y} = (\ln y)'$ $\Rightarrow E_x(y) = x \cdot \ln(y)$
2. $y<0$, то $\frac{y'}{y} = \frac{(-y)'}{(-y)} = (\ln(-y))'$ $\Rightarrow E_x(y) = x \cdot (\ln(-y))'$

$E_x(y) = x \cdot (\ln|y|)'$

Теор. 1) u, v : $E_x(u)$, $E_x(v)$, то

$$\begin{cases} E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v) \\ E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v) \end{cases}$$

2) $y = y(x) \in D(X)$, $y(x)$ – опр. на X, $y'(x) \neq 0$ $\quad \exists\, x(y) = x$, то $\forall x/0, y/0$ $\exists\, E_x(y), E_y(x)$

$$E_y(x) = \frac{1}{E_x(y)}$$

Максимум (минимум) $y = f(x)$
$\exists\, \delta > 0$ $\forall x \in \mathring{U}_\delta(a)$: $f(x) \leq f(a)$ $\quad (f(x) \geq f(a))$

(17) Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши

<u>Теорема Ферма</u> $y=f(x)$ – опр. в $U(a)$, a – extr $y=f(x)$, $\exists f'(a) \Rightarrow f'(a)=0$

▶ $f(a+h)-f(a) = h(f'(a)+\alpha(h))$, где $\alpha(h)$ – б.м.ф. $h\to 0$

Пусть $f'(a)\neq 0$: $f'(a)>0$

тогда $\exists \mathring{U}_\delta(a)$: $f'(a)+\alpha(h)>0$

Отсюда $f(a+h)-f(a) = \begin{cases} >0, & \text{при } 0<h<\delta \\ <0, & \text{при } -\delta<h<0 \end{cases} \Rightarrow a$ – не extr

<u>Теорема Ролля</u> $\left.\begin{array}{l} f\in C[a;b] \\ f\in D(a;b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in(a;b) \quad f'(c)=0$

▶ по т. Вейерштрасса m – min, M – max $\in[a;b]$

1) $m=M$, то $y=f(x)$ – const на $[a;b] \Rightarrow f'(c)=0$, $\forall c\in(a;b)$

2) $m\neq M$, то $\exists c\in[a;b]$ $c=m$ или $c=M \Rightarrow c$ – extr $\Rightarrow f'(c)=0$

<u>Теорема Лагранжа</u> $\left.\begin{array}{l} f\in C[a;b] \\ f\in D(a;b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in(a;b) \quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

▶ $F(x)=\begin{vmatrix} f(x)-f(a) & x-a \\ f(b)-f(a) & b-a \end{vmatrix} = (b-a)(f(x)-f(a)) - (x-a)(f(b)-f(a))$

$\left.\begin{array}{l} F(x)\in C[a;b] \\ F(x)\in D(a;b) \end{array}\right.$ $\left.F(a)=F(b)=0\right\}$ по т. Ролля $\exists c\in(a;b)$: $F'(c)=0$

$f'(c)(b-a)-(f(b)-f(a))=0$

<u>Теорема Коши</u> $\left.\begin{array}{l} f,g\in C[a;b] \\ f,g\in D(a;b) \\ g'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(a;b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in(a;b) \quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-f(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

▶ $F(x)=\begin{vmatrix} f(x)-f(a) & g(x)-g(a) \\ f(b)-f(a) & g(b)-g(a) \end{vmatrix}$ $\quad F'(x)=(g(b)-g(a))f'(x) - g'(x)(f(b)-f(a))$

$\left.\begin{array}{l} F(x)\in C[a;b] \\ F(x)\in D(a;b) \\ F(a)=F(b)=0 \end{array}\right\}$ по т. Ролля $\exists c\in(a;b)$ $F'(c)=0$

$(g(b)-g(a))f'(c) = g'(c)(f(b)-f(a))$

Коллоквиум 2

③ Ряд Тейлора $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}, \; c \in (0; x)$

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

㉚ Ряд Тейлора $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\sin(c + \frac{\pi(2n+2)}{2}) x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

⑭ Ряд Тейлора $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos(c + \frac{\pi}{2}(2n+2)) x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

㉟ Ряд Тейлора $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)x^n}{n!} + \frac{\alpha \ldots (\alpha+n)}{n!}(1+c)^{\alpha-n+1} \cdot (x-c)^n \cdot x$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+k-1)\, x^k}{k!}, \quad |x| < 1, \; \alpha \notin \mathbb{Z}_+$$

㉞ Ряд Тейлора $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \frac{(-1)^n \cdot n! \, (1+c)^{-n-1}}{n!}(x-c)^n \cdot x$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}, \quad |x| < 1$$

② Неравенство Гёльдера $x_k, y_k \geq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \neq 0, 1$

то $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p > 1$

$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p < 1 / \{0\}$

㊵ Неравенство Минковского $x_k, y_k \geq 0$

то $\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$

$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p < 1 / \{0\}$

⑨ Теорема о т. перегиба

1) $f(x) \in D^2(\mathring{U}(x_0))$ $\left.\begin{array}{l} \forall x \in \mathring{U}^-(x_0) \quad f''(x) > (<) 0 \\ \forall x \in \mathring{U}^+(x_0) \quad f''(x) < (>) 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0$ – т. перег.

2) $f(x) \in D^n(x_0)$ $\quad f''(x_0) = \ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$

если $n = 2k+1$, то x_0 – перег.

$n = 2k$, то x_0 – не явл. перегиб.

⑯ Ф-и Торнквиста

1) $y = \dfrac{ax}{x+c}$, $a, c, x > 0$

2) $y = \dfrac{a(x-b)}{x-c}$, $a > 0$, $b > c > 0$, $x > c$

P) $y = \dfrac{ax(x-b)}{x-c}$, $a > 0$, $b > c, > 0$, $x > c$

㊱ Правило Бернулли – Лопиталя

1) $f, g \in D(a;b)$

2) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a;b)$

3) $\exists \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(c)} = A$, $A \in \mathbb{R}$

4) либо $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$, либо $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty$

то $\exists \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

④ Открытое мн-во $G \subset X$, если $\forall x \in G \ \exists B(x,\delta) \subset G$

Замкнутое мн-во $F \subset X$, если $X \setminus F$ – открытое

где $B(x,\delta) = \{y \in X : d(x,y) < \delta\}$ – откр. шар

㊶ Открытое мн-во

1) $G = \varnothing$

2) $G = \mathbb{R}$

3) $G = \bigsqcup\limits_{k\geq 1} (a_k, b_k)$ $\qquad y, z, a_k, b_k \notin G$

4) $G = \left(\bigsqcup\limits_k (a_k; b_k)\right) \sqcup (y; +\infty)$

5) $G = (-\infty; z) \sqcup \left(\bigsqcup\limits_k (a_k; b_k)\right)$

6) $G = (-\infty; z) \sqcup \left(\bigsqcup\limits_k (a_k; b_k)\right) \sqcup (y; +\infty)$

(42.10) Замкнутое мн-во

1) $F = \varnothing$

2) $F = \mathbb{R}$

3) $F = [A;B] \setminus \bigsqcup_k (a_k, b_k)$ $\qquad y, z, a_k, b_k \in F$

4) $F = [A;B] \setminus \bigsqcup\limits_k (a_k; b_k) \sqcup [y; +\infty)$

5) $F = (-\infty; z] \sqcup [A;B] \setminus \bigsqcup\limits_k (a_k; b_k)$

6) $F = (-\infty; z] \sqcup [A;B] \setminus \bigsqcup\limits_k (a_k; b_k) \sqcup [y; +\infty)$

⑳ Компакт K – $\forall$ покрытия откр. мн-вами $\exists$ кон. подпокр.

⑰ Критерий компактности K – компакт $\Leftrightarrow \begin{cases} K \text{ – ограничено} \\ K \text{ – замкнуто} \end{cases}$

(19) Критерий Коши $\mathbb{R}^d$ $\exists \lim\limits_{Bx} f(x)$ - конечный $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$
$\omega(f, \mathring{U}_\delta(a)) < \varepsilon$

(1,26) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = A$, $A \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall \bar{x} : 0 < d_{\mathbb{R}^d}(\bar{x}; \bar{a}) < \delta \quad d_{\mathbb{R}^m}(f(\bar{x}), A) < \varepsilon$

(23) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) \neq A$, $A \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$

$\exists \varepsilon>0 \ \forall \delta>0 : \forall \bar{x} : 0 < d_{\mathbb{R}^d}(\bar{x}, \bar{a}) < \delta \quad d_{\mathbb{R}^m}(f(\bar{x}), A) > \varepsilon$

(28) $\nexists \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})$ $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$

$\exists \varepsilon>0 \ \forall \delta>0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(a) \quad \left.\begin{matrix} 0 < d_{\mathbb{R}^d}(\bar{x}_1, \bar{a}) < \delta \\ 0 < d_{\mathbb{R}^d}(\bar{x}_2, \bar{a}) < \delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow d_{\mathbb{R}^m}(f(x_1), f(x_2)) >$

(21) $f(\bar{x}) \in C(\bar{a}) \Leftrightarrow \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : \forall x : 0 < d_{\mathbb{R}^d}(\bar{x}, \bar{a}) < \delta, \quad d_{\mathbb{R}^m}(f(\bar{x}), f(\bar{a})) < \varepsilon$

(7,32) $f(\bar{x}) \notin C(\bar{a}) \Leftrightarrow \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) \neq f(\bar{a})$

$\exists \varepsilon>0 \ \forall \delta>0 : \forall x : 0 < d_{\mathbb{R}^d}(\bar{x}, \bar{a}) < \delta \quad d_{\mathbb{R}^m}(f(\bar{x}), f(\bar{a})) > \varepsilon$

(13) Локальные св-ва $f, g \in C(\bar{a})$; $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$

1) $\alpha f + \beta g \in C(\bar{a})$
2) $f \cdot g \in C(\bar{a})$
3) $\left.\begin{matrix} m=1 \\ g(\bar{a}) \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{f}{g} \in C(\bar{a})$
4) $\left.\begin{matrix} f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m & f \in C(\bar{a}) \\ g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s & g \in C(\bar{b}), \ \bar{b} = f(\bar{a}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \circ g \in C(\bar{a})$

(8) Глобальные св-ва
1) $f \in C(K) \Rightarrow f$ - огр. на K
2) $f \in C(K) \Rightarrow \exists \bar{a}, \bar{b} \in K :$
$f(\bar{a}) = \min\limits_K f(\bar{x})$
$f(\bar{b}) = \max\limits_K f(\bar{x})$

3) $\left.\begin{matrix} \bar{a}, \bar{b} \in G \text{ - лин. св. мн-во} \\ f(\bar{a}) = A \in \mathbb{R} \\ f(\bar{b}) = B \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \forall C \in [A; B] \ \exists \bar{c} \in G : f(\bar{c}) = C$

(12) О композиции $f: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$

1) $\exists \lim\limits_{B_y} g(y) = A$

2) $\forall b_y \in B_y : \exists B_x \in \mathcal{B}_x : f(B_x) \subset B_y$

$\Rightarrow \lim\limits_{B_x} g \circ f = A$

(11) о-малое

$f(\bar{x}) = o(g(\bar{x}))$, $f, g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \to \bar{a}$

$\exists \alpha(\bar{x}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ – б.м.ф. $\bar{x} \to \bar{a}$: $f(\bar{x}) = \alpha(\bar{x}) g(\bar{x})$

(18, 27) Отношение пределов ф-й $f, g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = A \\ \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{b}} g(\bar{x}) = B \quad B \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \frac{A}{B}$$

(24) Линейная связность $G \subseteq X$ – лин. связ. мн-во ; $\forall x_1, x_2 \in G$

$\exists \Gamma(t) : \mathbb{R}^1 \to X$: $\Gamma(t_1) = x_1$, $\Gamma(t_2) = x_2$, $\Gamma(t) \in G$, $\forall t \in [t_1; t_2]$

(39) Дифференцируемость $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $x^0, x^0 + h \in \mathbb{R}^d$

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{d} h_k L_k + o(h), \quad \text{где } L_k = L(x^0) \cdot e_k$$

Пусть $\bar{h} = (0, \dots, 0, h_k, 0, \dots, 0)$

$$\frac{f(x_1^0, \dots, x_k^0 + h_k, \dots, x_d^0) - f(x_1^0, \dots, x_d^0)}{h_k} = L_k + o(1) \quad h_k \to 0^+$$

$$L_k = \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\bar{x} = \bar{x}^0} = \lim_{h_k \to 0} \frac{f(\bar{x}^0 + h_k \bar{e}_k) - f(\bar{x}^0)}{h_k}$$

(6, 22) Дифф-ть сложной ф-й

Пусть $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$ $f \in D(\bar{x})$

$g: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ $g \in D(\bar{y})$ $\bar{y} = f(\bar{x})$

Тогда $g \circ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$

$g \circ f \in D(\bar{x})$

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(\bar{y}) \cdot f'(\bar{x})$$

(31) Теорема Лагранжа $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $f \in D(\bar{a}, \bar{b})$, $f \in C[\bar{a}; \bar{b}]$

то $\exists \bar{c} \in (\bar{a}, \bar{b})$: $f(\bar{b}) - f(\bar{a}) = f'(\bar{c})(\bar{b} - \bar{a}) = \sum\limits_{k=1}^{n} f'_{x_k}(\bar{c})(b_k - a_k)$

(37) Смешанная производная $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y\, \partial x} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f(x_0, y_0+h)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}{h}$

для $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(x_0, y_0)$

Теорема $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

если $\exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \in C(\bar{a})$, то $f''_{x_k x_l}(\bar{a}) = f''_{x_l x_k}(\bar{a})$

(25) Теорема о неявной ф-и $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$

$f(x_0, y_0) = 0$ $f, f'_x, f'_y \in C(U_\delta(x_0, y_0))$ $f'_y \neq 0$

то $\exists\ I_\delta = [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$: 1) $\exists\ \varphi(x) = y \in C^1(I_\delta)$: $f(x, \varphi(x)) = 0$

2) $y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$

(35) Теорема о неявной ф-и $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$, $k = \overline{1,d}$

$f(\bar{x}_0, y_0) = 0$ $f, f'_{x_k}, f'_y \in C(U_\delta(\bar{x}_0, y_0))$ $f'_y(\bar{x}_0, y_0) \neq 0$

то $\exists\ I_\delta = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : |x_k - x_k^0| \leq \delta\}$: $\exists\ y = \varphi(x) \in C^1(I_\delta)$ 1) $f(x, \varphi(x)) = 0$

2) $y'_{x_k} = -\frac{f'_{x_k}}{f'_y}$

(33) Необх. условие экстремума

$f \in D(\bar{x}^0)$ $\bar{x}^0$ - loc extr $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f'_{x_1}(\bar{x}^0) = 0 \\ \dots \\ f'_{x_d}(\bar{x}^0) = 0 \end{cases}$

(29) Достаточн. условие экстремума $f \in C^2(U(\bar{x}^0))$, $f'_{x_k}(\bar{x}^0) = 0$ $\forall k = \overline{1,d}$

$Q(\bar{h}, \bar{h}) = \sum\limits_{k,l=1}^{d} a_{kl} h_k h_l$ $a_{kl} = f''_{x_k x_l}(\bar{x}^0)$

1) Q - пол. опр. $\Rightarrow$ x_0 - loc min

2) Q - отр. опр. $\Rightarrow$ x_0 - loc max

3) Q - знакопер. $\Rightarrow$ x_0 - не extr

(18) Квадратичная форма $Q(\bar{h}, \bar{h}) = \sum\limits_{k,l=1}^{d} a_{kl} h_k h_l$, $a_{kl} \in \mathbb{R}$

Q - пол. опр., если $\forall \bar{h} \in \mathbb{R}^d / \bar{0}$ $Q(\bar{h}, \bar{h}) > 0$

Q - отр. опр. если $\forall \bar{h} \in \mathbb{R}^d / \bar{0}$ $Q(\bar{h}, \bar{h}) < 0$

(5) **Критерий Сильвестра** $Q(\bar{h}, \bar{h}) = \sum\limits_{k=1}^{d} a_{ke} h_k h_e$, $a_{ke} \in \mathbb{R}$

Q — пол. опр., если $\Delta_1 > 0 \ldots \Delta_d > 0$
Q — отр. опр., если $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^d \Delta_d > 0$

(43) **Метод наим. квадратов** — миним. сумм ($S(a,b) \to min$) квадратов отклонений нек. ф-й от искомых переменных

пусть $y = ax + b$

$(x_i, y_i) \approx y(x)$, $\delta_i = y_i - (ax_i + b_i)$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b_i))^2 = S(a;b)$

I. Формула Тейлора

$f \in D^n(x_0)$

$f(x) = P_n(x; x_0) - R_n(f; x; x_0) =$

$= f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$

<u>Теор.</u> $\varphi, f^{(n)} \in C[x; x_0) \vee [x_0; x]$

$\varphi, f^{(n)} \in D(x; x_0)$

$\varphi'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x; x_0)$

то $\exists c \in (x; x_0)$:

$$f(x) - P_n(x; x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x - c)^n$$

▶ $F(t) = f(x) - P_n(x; t) = f(x) - \left(f(t) + \dfrac{f'(t)}{1!}(x - t)\right.$

$\left. + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n\right)$

$\left.\begin{array}{l} \varphi, F \in D(x; x_0) \\ \varphi, F \in C(x; x_0) \\ \varphi'(x) \neq 0 \ \forall x \in (x; x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (x; x_0)$

$$\frac{F(x_0) - F(x)}{\varphi(x_0) - \varphi(x)} = \frac{F'(c)}{\varphi'(c)}$$

$F'(t) = -\left(f'(t) + \left(\dfrac{f''(t)}{1}(x - t) - f'(t)\right) + \ldots +\right.$

$\left. + \left(\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - \dfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1}\right)\right) =$

$= -\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!}(x - t)^n$

$$\frac{F(x_0) - F(x)}{\varphi(x_0) - \varphi(x)} = \frac{f(x) - P_n(x; x_0) - 0}{\varphi(x_0) - \varphi(x)} = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x - c)^n \cdot \frac{1}{\varphi'(c)}$$

$$\Rightarrow f(x) - P_n(x; x_0) + \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

Ост. в форме Коши: $\varphi(t) = x - t$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$$

Ост. в форме Лагранжа $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

Ост. в форме Шлемильха - Роша $\varphi(t) = (x-t)^\alpha, \alpha > 0$

$$R_n = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^{n+1}\cdot\left(\frac{x-x_0}{x-c}\right)^\alpha$$

Ост. в форме Пеано

$f \in D^n(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),\ x \to x_0$$

2. Разложение основных ф-й в ряд Тейлора. Мн-во сходимости.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

① Ряд Тейлора $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \quad c \in (0; x)$$

$$f^{(n)} = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1 \qquad f^{(n+1)}(c) = e^c$$

Остаток для $x \in [-A; A]$:

$$|R_n(e^x)| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \leq e^A \cdot \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad n \to +\infty$$

Бесконечный ряд

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

② Ряд Тейлора $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos\left(c + \frac{\pi}{2}(2n+2)\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$f^{(2k+1)}(0) = 0; \quad f^{(2k)}(0) = (-1)^k; \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

Остаток для $x \in [-A; A]$

$$|R_n(\cos x)| \leq \frac{A^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0, \quad n \to +\infty$$

Бесконечный ряд

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

③ Ряд Тейлора $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\sin(c + \frac{\pi}{2}(2n+2))}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \qquad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

Остаток ряда для $x \in [-A; A]$

$$|R_n(\sin x)| \leq \frac{A^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0, \quad n \to +\infty$$

Бесконечный ряд:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n (x - x_0)$$

④ Ряд Тейлора $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x_0 = 0$, $\alpha \notin \mathbb{Z}_+$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}(1+c)^{\alpha-n-1} \cdot (x-c)^n \cdot x$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

Пусть $|x| < 1$, $c \in (0; x)$, $\psi(c) = \frac{x-c}{1+c}$ – моном. на $(0; x)$

$$|\psi(c)| = \left|\frac{x-c}{1+c}\right| \leq |\psi(0)| = |x|$$

$$|R_n((1+x)^\alpha)| \leq \left|\frac{\alpha \cdot (\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\right| \cdot \frac{(x-c)^n}{(1+c)^{n+\alpha-1}} \cdot |x| =$$

$$\left|\frac{\alpha \ldots \alpha-n}{n!}\right| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(1+c)^{\alpha-1}}$$

где $|x| \leq q < 1$, $c \in (0; x) \cup (x; 0)$

Пусть $C(\alpha, q) = \max\left\{\frac{1}{(1-q)^{\alpha-1}}; \frac{1}{(1+q)^{\alpha-1}}\right\}$

$$\frac{1}{(1+c)^{\alpha-1}} \leq C(\alpha, q)$$

то $\left|\frac{\alpha \cdot (\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\right| \frac{|x|^{n+1}}{(1+c)^{\alpha-1}} \leq C(\alpha, q) \cdot q^{n+1} \cdot \left|\alpha \cdot \left(1-\frac{\alpha}{1}\right) \cdot \left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \ldots \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|$

③ Монотонность. Достаточные усл. сущ-ия экстремума

f возр. на $(a;b)$: $\forall x_{1,2} \in (a;b)$ $f(x_1) < f(x_2) \Leftarrow x_1 < x_2$ $\Leftrightarrow f'(x)$

f убыв. на $(a;b)$: $\forall x_{1,2} \in (a;b)$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f'(x)$

Теор. (Необх. усл. сущ. экстр) Если x - extr $f(x)$

то $f \in D(x_0)$ или $f \in D(x_0), f'(x_0) = 0$

Теор. (Дост. усл. сущ. экстр.) $f \in D(\mathring{U}(x_0))$

1) $\left.\begin{array}{l} f'(x) > (<) \text{ в } \mathring{U}^-(x_0) \\ f'(x) < (>) \text{ в } \mathring{U}^+(x_0) \end{array}\right\}$ x_0 – loc max (min)

2) $>^-, >^+$ или $<^-, <^+$ x_0 – не явл. extr

▶ 1) $\left.\begin{array}{l} \forall x \in \mathring{U}^-(x_0) : f(x) < f(x_0) \\ \forall x \in \mathring{U}^+(x_0) : f(x) < f(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow x_0$ – loc max

2) $\left.\begin{array}{l} \forall x \in \mathring{U}^-(x_0) : f(x) < f(x_0) \\ \forall x \in \mathring{U}^+(x_0) : f(x) > f(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow$ extr нет

Теор. (Дост. усл. сущ. экстр.) $f \in D^n(x_0)$, $\left\{\begin{array}{l} f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \end{array}\right.$

то $\left[\begin{array}{l} n = 2k+1, \text{ то } x_0 \text{ - не явл extr} \\ n = 2k, \text{ то если } f^{(n)}(x_0) > (<) 0 \to x_0 \text{ - loc min (max)} \end{array}\right.$

▶ $f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\dfrac{(x-x_0)^n}{n!} + o(x-x_0)^n$, $x \to x_0$ (Тейлор сост. Пеано)

$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n \left(\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n} + o(1)\right)$, $x \to x_0$

$\operatorname{sign}(f(x) - f(x_0)) = \operatorname{sign}(x-x_0)^n \operatorname{sign}(f^{(n)}(x_0))$, $\forall x \in U_\delta(x_0)$

при $n = 2k+1$ $\operatorname{sign}(x-x_0)^n$ не им. extr $\Rightarrow x_0$ – не м. б. extr

$n = 2k$ $\operatorname{sign}(x-x_0)^n$ имеет extr $\Rightarrow x_0$ – extr

④ Выпуклость и касательная. Теоремы о выпуклости

Опр. $f(x)$ – вып. вниз на $(a;b)$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$:

$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ $x_1 < x_2$: $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$

Теор. f – вып. вниз $\Leftrightarrow$ f' не убывает (на $a;b$) для $f \in D(a;b)$

▶ 1) $\Rightarrow$ $x_1 < x < x_2 \in (a;b)$: $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ крит. в-ти

при $x \to x_1$ $f'(x_1) \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$x \to x_2$ $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2)$ $\Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$ для $\forall x_1 < x_2$

2) $\Leftarrow$ $x_1 < x < x_2 \in (a;b)$

по т. Лагранжа $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$,

где $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2$

$\Rightarrow f(x)$ – вып. вниз на $(a;b)$

Теор. $f \in D^2(a,b)$, то f – вып. вниз $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ (на $(a;b)$)

f – вып. вверх $\Leftrightarrow f'' \leq 0$ (на $(a;b)$)

Теор. $f(x) \in D(a;b)$

f – вып. вниз $\Leftrightarrow f(x) \geq y_{кас}(x;x_0)$ $\forall x_0 \in (a;b)$,

где $y_{кас}(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

▶ 1) $\Rightarrow$ $f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0)$ $\Uparrow$, $x > x_0$

f – вып $\Rightarrow$ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c) \geq f'(x_0)$

2) $\Leftarrow$ $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

$x_1 < x_0 < x_2$: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq f'(x_0)$

$\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \geq f'(x_0) \geq \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

$\Rightarrow f$ – вып. вниз

⑤ Точки перегиба. Неравенство Йенсена. Ф-и спроса Торнквиста

<u>Опр.</u> x_0 – точка перегиба $\Leftrightarrow$ f – вып. вверх на $(a; x_0)$
f – вып. вниз на $(x_0; b)$

<u>Теор.</u> $f(x) \in D^2(\mathring{U}(x_0))$ $\quad \forall x \in \mathring{U}^-(x_0) \quad f''(x) > (<) 0$
$\forall x \in \mathring{U}^+(x_0) \quad f''(x) < (>) 0$ $\Rightarrow$ x_0 – т. перег.

<u>Теор.</u> $f(x) \in D^n(x_0)$ $\quad f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
то $\quad n = 2k+1$, то x_0 – перегиб
$n = 2k$, то x_0 – не явл. перег.

▶ $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = f^{(n)}(x_0)\dfrac{(x-x_0)^n}{n!} + o(x-x_0)^n \quad x \to x_0$

$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = (x-x_0)^n \left(\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right) \quad x \to x_0$

при $n = 2k+1$ $\quad x_0$ – перегиб
$n = 2k$ $\quad x_0$ – не явл. пер.

<u>Нер-во Йенсена</u> f – вып. вниз на $[a, b]$, $x_1, \dots, x_n \in [a; b]$, $\alpha_1, \dots \alpha_n \geq 0$ $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

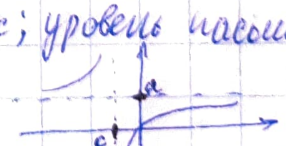
▶ $m = 2$ $\quad f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ – верно
верно для $m = n-1$
тогда для $m = n$: $\beta = \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $\alpha_1, \beta \geq 0$ $\quad \alpha_1 + \beta = 1$

$f\left(\alpha_1 x_1 + \beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right)\right) \leq \alpha_1 f(x_1) + \beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2 + \dots \frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n)$

<u>Ф-и Торнквиста</u> $y = f(x) + \varepsilon$, где $\varepsilon = 0$, y – $Q(x)$ потр. спрос по доходу

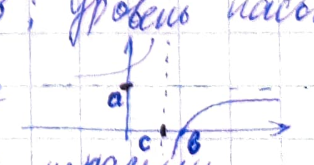
Товары 1ой необ-ти – спрос возр. при $\forall x$; уровень насыщ. a

$y = \dfrac{ax}{x+c}$; $a, c, x > 0$



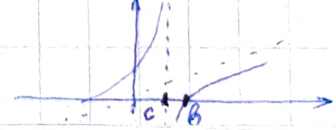
Товары 2ой необ-ти – спрос возр. при $x > b$; уровень насыщ. a

$y = \dfrac{a(x-b)}{x-c}$; $a > 0$, $b > c > 0$, $x > c$



Товары роскоши – спрос возр. при $x > b$; ненасыщ.

$y = \dfrac{ax(x-b)}{x-c}$; $a > 0$, $b > c > 0$, $x > b$



⑥ Правило Бернулли - Лопиталя

Теор
1) $f, g \in D(a;b)$
2) $g'(x) \neq 0 \quad , \forall x \in (a;b)$
3) $\exists \lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in R$
4) $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a_+} g(x) \; / \; g(x) \to +\infty, \; x \to a_+$

то $\exists \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

▶ по т. Коши $\dfrac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \quad \Big| : g(x)$

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)$$

при $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0 \quad , y \to a^+ \quad \Rightarrow c \to a^+$, т.к. $c \in [x;y]$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f(y)}{g(x)}}_{\to 0} + \frac{f'(c)}{g'(c)} \underbrace{\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)}_{\to 1}$$

т.к. $\lim f(y) = \lim g(y)$,

при $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = +\infty \quad , x \to a+ \; , y \to a^+ \Rightarrow c \to a^+$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f(y)}{g(x)}}_{\to 0} + \frac{f'(c)}{g'(c)} \underbrace{\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)}_{\to 1}$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

⑦ Пространство $\mathbb{R}^d$, предел, непрерывность

(X, d) - метрическое пр-во : X - мн-во, $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ - метрика

Аксиомы расстояния:

1. Неотрицательность $\forall x, y \in X$ $d(x,y) \geq 0$
   $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. Симметричность $\forall x, y \in X$ $d(x,y) = d(y,x)$
3. Нер-во треугольника $\forall x, y, z \in X$ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$B(x, \delta) = \{y \in X : d(x,y) < \delta\}$ - открытый шар
$B(x, \delta) = \{y \in X : d(x,y) \leq \delta\}$ - замкнутый шар

$G \subset X$: $\forall x \in G$ $\exists B(x,\delta) \in G$ - открытое мн-во

$F \in X$: $X \setminus F$ - открытое - ~~закрытое~~ замкнутое мн-во

$\bar{E} = E + E'$, где $\bar{E}$ - замыкание мн-ва E
E' - мн-во предельных точек

Теор. $F = \bar{F} \iff F$ - замкнутое

▶ Пусть $x \notin F = \bar{F}$, тогда $\exists B(x, \delta) \cap F$ - $x_1 \dots x_n$:

$\exists B(x, \delta_1) : x_1 \notin B(x, \delta_1)$, $\delta_1 < d(x, x_1)$
...
$\exists B(x, \delta_n) : x_n \notin B(x, \delta_n)$, $\delta_n < d(x, x_n)$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1 \dots \delta_n\}$, то $B(x, \delta) \cap F = \emptyset$

Следовательно $X \setminus F$ - открытое $\Rightarrow$ F - замкнутое

◀ F - замкнутое, для $x \notin F$

$X \setminus F$ - открытое, то $\exists B(x, \delta) \cap F = \emptyset$

$\Rightarrow x$ - не явл. пред. т.

Теор. G_α – откр. мн-ва, F_α – замк. мн-ва

1. $\bigcup_\alpha G_\alpha$ – откр. мн-во
2. $\bigcap_{\alpha=1}^{n} G_\alpha$ – откр. мн-во
3. $\bigcup_{\alpha=1}^{n} F_\alpha$ – замк. мн-во
4. $\bigcap_{\alpha} F_\alpha$ – замк. мн-во

▶ 1) Пусть $\forall x \in \bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha^* : x \in G_\alpha$

Тогда $\exists B(x, \delta) \subset G_{\alpha^*} \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$

2) Пусть $\forall x \in \bigcap_{\alpha=1}^{n} G_\alpha \Rightarrow$ Поскольку $x \in G_\alpha, \forall \alpha$,

то $\exists B(x, \delta_\alpha) \subset G_\alpha \quad \forall \alpha = \overline{1,n}$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \dots \delta_n\}$, то $B(x, \delta) \subset \bigcap_{\alpha=1}^{n} G_\alpha$

3) $C(\bigcup_{\alpha=1}^{n} F_\alpha) = \bigcap_{\alpha=1}^{n} C(F_\alpha)$

4) $C(\bigcap_\alpha F_\alpha) = \bigcup_\alpha C(F_\alpha)$

K – компакт, если из $\forall$ покрытие откр. мн-вами можно выделить конечное подпокрытие

Теор. 1) K – компакт $\Rightarrow$ K – замкнуто

2) F – замкнуто, $F \subset K \Rightarrow$ F – компакт

▶ 1) Для $\bar{x} \notin K$

$$\forall \bar{y} \in K \quad \exists B\left(\bar{y}, \frac{d(\bar{x}, \bar{y})}{2}\right) \not\ni \bar{x}$$

Получаем покрытие K – компакта мн-вами
Выделяем конечное подпокрытие:

$$B_1, \dots, B_n \text{ – откр.} \qquad K \subset \bigcup_{l=1}^{n} B_l$$

$$B(y_1, \delta_1) \dots B(y_n, \delta_n) \qquad K \subset \bigcup_{l=1}^{n} B(y_l, \delta_l)$$

$\delta = \frac{1}{2} \min \{ d(\overline{y_k}, \overline{x_k}) - \delta_k \}$

$B(\delta, \overline{x}) \cap B(y_k, \delta_k) = \varnothing$

$\Rightarrow$ $B(\delta, \overline{x}) \in \overline{x}$ и не им. т. пересеч. с K, т.к. $\overline{x}$ - произв.

$\Rightarrow$ B мн-во откр. $\Rightarrow$ K - замкнуто

2) Пусть G_α - произв. покр. откр. мн-вами F

$G = \mathbb{R}^d \setminus F$ - открытое

$G_\alpha \cap G$ - покрытие K

$\exists\, G_1, \dots, G_n, G$ - покрытие K

$G \cap F = \varnothing \Rightarrow G_1, \dots, G_n$ - покр. F

$\Rightarrow$ F - компакт

Теор. (Критерий комп-ти в $\mathbb{R}^d$) K - компакт $\Leftrightarrow$ K - огр. и замкн.

▶ K - компакт $\Rightarrow$ K - замкнуто

$B_n = B(\overline{0}, n)$, $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$

Выделим конечное подпокр. $\exists\, B_{k_1}, \dots, B_{k_n}$

$K \subset B_{k_n}$ n - макс $\Rightarrow$ K - ограничено

◀ $\exists\, I = \{ \overline{x} \in \mathbb{R}^d : a_k \le x_k \le b_k \}$

$K \subset I$, K - замкн. I - компакт $\Rightarrow$ K - компакт

$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2}$ - расст. в $\mathbb{R}^d$

Предел $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$

$\lim_{\bar{x} \to a} f(\bar{x}) = A \iff$

1) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \bar{x} : 0 < d_{\mathbb{R}^d}(\bar{x}, \bar{a}) < \delta$

$d_{\mathbb{R}^m}(f(\bar{x}), A) < \varepsilon$

2) $\forall V_\varepsilon(A) \; \exists \mathring{V}_\delta(\bar{a}) : f(\mathring{V}_\delta(\bar{a})) \subset V_\varepsilon(A)$

Критерий Коши

$\exists \lim_{\beta_x} f(x)$ кон. пред. $\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \omega(f, \mathring{V}_\delta(a)) < \varepsilon$

Непрерывность

$f \in C(a) \iff f(\bar{a}) = \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) \iff \lim_{\delta \to 0} \omega(f, \mathring{V}_\delta(\bar{a})) = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x : 0 < d_{\mathbb{R}^d}(\bar{x}, \bar{a}) < \delta$

$d_{\mathbb{R}^m}(f(\bar{x}), f(\bar{a})) < \varepsilon$

Лок. св-ва: $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $f, g \in C(\bar{a})$

1. $\alpha f + \beta g \in C(\bar{a})$
2. $f \cdot g \in C(\bar{a})$
3. Пусть $m = 1$, $g(\bar{a}) \neq 0$ $\quad f/g \in C(\bar{a})$
4. Пусть $\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s \\ g : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m \\ f \in C(\bar{a}) \quad g \in C(\bar{b}) \quad \bar{b} = f(\bar{a}) \end{array}\right\} = g \circ f \in C(\bar{a})$

Глобальные св-ва:

1. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ $\quad f \in C(K) \Rightarrow f$ - огр. на K
2. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\quad f \in C(K) \Rightarrow \exists \bar{a}, \bar{b} \in K$

$f(\bar{a}) = \min_K f(\bar{x}) \quad f(\bar{b}) = \max_K f(\bar{x})$

3. $\left.\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ G - \text{лин. связ.}, \bar{a}, \bar{b} \in G \\ f(\bar{a}) = A \in \mathbb{R} \\ f(\bar{b}) = B \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall C \in [A; B] \\ \exists \bar{c} \in G \; f(\bar{c}) = C \end{array}$

⑧ Дифференцируемость, частные производные.

Пусть $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $x^0;\ x^0+h \in \mathbb{R}^d$

Если $f(x^0+h) = f(x^0) + L(x^0)h + o(h)$, $h \to 0$

то $f \in D(x^0)$, где $L(x^0): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ - дифференц.

$$\bar h = h_1 \bar e_1 + \dots + h_d \bar e_d$$

$$L(x^0)\bar h = h_1 L(x^0)\bar e_1 + \dots + h_d L(x^0)\bar e_d$$

$$o(h) = \alpha(x^0, h)\cdot|h|, \text{ если } \lim_{\bar h \to \bar 0} \alpha(\bar x, \bar h) = 0$$

$L(x^0)\bar h = (L^1(x^0)\bar h, \dots, L^m(x^0)\bar h)$,

то $L^j(x^0)\bar h$ $\quad f^j: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, где $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$

$$f(x^0+h) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{d} h_k L_k + o(h), \text{ где } L_k = L(x^0)e_k$$

Пусть $\bar h = (0, \dots, 0, h_k, 0, \dots, 0)$, то

$$\frac{f(x_1^0, \dots, x_k^0 + h_k, \dots x_d^0) - f(x_1^0, \dots, x_d^0)}{h_k} = L_k + o(1),\ h_k \to 0_+$$

$$L_k = \lim_{h_k \to 0_+} \frac{f(\bar x^0 + h_k \bar e_k) - f(\bar x^0)}{h_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\Big|_{\bar x = \bar x^0}$$

Теор. (Лагранжа) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $f \in D(\bar a, \bar b)$ $f \in C[\bar a, \bar b]$

тогда $\exists \bar c \in (\bar a, \bar b)$: $f(\bar b) - f(\bar a) = f'(\bar c)(\bar b - \bar a) =$

$$= \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(\bar c)(\bar b_k - \bar a_k)$$

▶ $[\bar a; \bar b] = \{\bar a t + (1-t)\bar b;\ t \in [0;1]\}$

$$F(t) = f(\bar a(1-t) + t\bar b) = f(\bar a + t(\bar b - \bar a))$$

$$\left.\begin{matrix} F \in C[0;1] \\ F \in D[0;1] \end{matrix}\right\} \Rightarrow F(1) - F(0) = F'(\theta) = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(\bar a + \theta(\bar b - \bar a))(b_k - a_k)$$

где $\theta \in (0;1)$, $\bar c \in (\bar a; \bar b)$

Дост. усл. дифф-сти $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$

если $\exists f'_{x_1}, \dots f'_{x_m} \in C(\bar{a})$, то $f \in D(\bar{a})$

▶ $f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) =$

$$= \big(f(a_1+h_1, \dots, a_m+h_m) - f(a_1, a_2+h_2, \dots, a_m+h_m)\big) +$$
$$+ \big(f(a_1, a_2+h_m, \dots, a_m+h_m) - f(a_1, a_2, a_3+h_3, \dots, a_m+h_m)\big) + \dots$$
$$\dots + \big(f(a_1, \dots, a_{m-1}, a_m+h_m) - f(a_1, \dots, a_m)\big) =$$

$$= f'_{x_1}(a_1+\theta h_1, a_2+h_m, \dots, a_n+h_n)h_1 +$$
$$+ f'_{x_2}(a_1, a_2+\theta h_2, \dots a_n+h_m)h_2 + \dots$$
$$\dots + f'_{x_m}(a_1, \dots, a_{m-1}, a_m+\theta h_m)h_m =$$

$$= (f'_{x_1}(\bar{a}) + o(1))h_1 +$$
$$+ (f'_{x_2}(\bar{a}) + o(1))h_2 + \dots$$
$$\dots + (f'_{x_n}(\bar{a}) + o(1))h_m$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(\bar{a})h_k + o(|h|)$$

⑨ Смешанные производные. Формула Тейлора

Опр $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\,\partial x} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f(x_0,y_0+h)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}}{h}$

для $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(x_0,y_0)$

Теор $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

если $\exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_e}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_e \partial x_k} \in C(\bar a)$, то $f''_{x_k x_e}(\bar a) = f''_{x_e x_k}(\bar a)$

▶ Пусть $y_1 = x_k$, $y_2 = x_e$

$G(y_1,y_2) = F(y_1+h_1, y_2+h_2) - F(y_1, y_2+h_2) - F(y_1+h_1, y_2) + F(y_1,y_2)$

~~$\varphi(y_1+t) = F(y_1+t, y_2+h_2) - F(y_1+t, y_2)$~~

по т. Лагранжа $G(y_1,y_2) = (F(y_1+h_1, y_2+h_2) - F(y_1+h_1,y_2)) - ((F(y_1,y_2+h) - F(y_1,y_2))$

$= (F'_{y_2}(y_1+h_1, y_2+\theta_2 h_2) - F'_{y_2}(y_1, y_2+\theta_2 h_2))h_2 = F''_{y_2 y_1}(y_1+\theta_1 h_1, y_2+\theta_2 h_2) \cdot h_1 \cdot h_2$

где $\theta_1, \theta_2 \in (0;1)$

$F''_{y_2 y_1}(y_1+\theta_1^* h_1, y_2+\theta_2^* h_2) = F''_{y_1 y_2}(y_1+\theta_1 h_1, y_2+\theta_2 h_2)$

$\Rightarrow F''_{y_2 y_1}(y_1,y_2) + o(1) = F''_{y_1 y_2}(y_1,y_2) + o(1)$, $|h| = \sqrt{h_1^2+h_2^2} \to 0$

Теор $\bar x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$ $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $f \in C^{n+1}(U(\bar x_0))$; $[\bar x_0, \bar x_0+\bar h] \in U(\bar x_0)$

то $f(\bar x_0+\bar h) = f(\bar x_0) + \left(\sum\limits_{k=1}^d h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^1 f\Big|_{\bar x=\bar x_0} + \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^d h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2 f\Big|_{\bar x=\bar x_0}}{2!} + \dots$

$+ \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^n f\Big|_{\bar x=\bar x_0}}{n!} + \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^d h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{n+1} f\Big|_{\bar x=\bar x_0+\theta \bar h}}{(n+1)!}$ $\theta \in (0;1)$

▶ $[\bar x_0, \bar x_0+\bar h] = \{x \in \mathbb{R}^d : \bar x_0 + t\bar h,\ t \in [0;1]\}$ но $t \in \mathbb{R}^1$: $F(t) = f(\bar x_0 + t\bar h)$, $t\in[0;1]$

$F(t) \in C^{n+1}[0;1]$ $F(t) \in D^{n+1}[0;1]$:

$t=1$ $F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$ $\theta \in (0;1)$

$F(1) = f(x_0+h)$

$F(0) = f(x_0)$ $F'(0) = \sum\limits_{k=1}^d f'_{x_k}(\bar x_0) h_k = \left(\sum\limits_{k=1}^d h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) f\Big|_{\bar x=\bar x_0}$ ... $F^{(n)}(0) = \left(\sum\limits_{k=1}^d h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^n f$

(10) Теорема о неявной функции

Теор. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_0, y_0) = 0$

$f, f'_x, f'_y \in C(U_\delta(x_0, y_0))$

$f'_y \neq 0$

то $\exists\ I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$: 1) $\exists!\ y = \varphi(x) \in C(I_\delta)$: $f(x, \varphi(x)) = 0$

2) $y = \varphi(x) \in C(I_\delta)$: $y'_x = -\dfrac{f'_x}{f'_y}$

▶ $f \in C(U_\delta(x_0, y_0))$ $\quad \exists\, U^0(x_0, y_0)$: $|f'_y| \geq m > 0$

$|f'_x| \leq M$

1) Пусть $f'_y(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow f(x_0, y)$ – возр. на $\mathring{U}(y_0)$

т.к. $f(x_0, y_0) = 0$ $\quad \exists\, \tilde{\delta}_1 > 0$: $f(x_0, y_0 - \tilde{\delta}_1) < 0$

$f(x_0, y_0 + \tilde{\delta}_1) > 0$

$f \in C(U_\delta(x_0, y_0)) \Rightarrow \exists\, \delta^*$: $\forall x \in [x_0 - \delta^*; x_0 + \delta^*]$: $f(x, y_0 - \tilde{\delta}_1) < 0$

$f(x, y_0 + \tilde{\delta}_1) > 0$

$\exists\, y = \varphi(x)$ $\quad f(x, \varphi(x)) = 0$

по т. Лагранжа $0 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x$

$+ f'_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y$

$\theta \in (0, 1)$

$$\Delta y = -\frac{f'_x}{f'_y}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x \Rightarrow |\Delta y| \leq \frac{M}{m}|\Delta x|$$

при $\Delta y \to 0$ $\quad y = \varphi(x) \in C[x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*]$

$\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_x}{f'_y}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Теор. $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\quad f(\bar{x}_0, y_0) = 0$ $\quad k = \overline{1, d}$

$f, f'_{x_k}, f'_y \in C(U_\delta(\bar{x}_0, y_0))$

$f'_y \neq 0$

$\exists\ I_\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_k - x_k^0| \leq \delta\}$: $\exists\ y = \varphi(x) \in C^1(I_\delta)$ 1) $f(x, \varphi(x)) = 0$

2) $y'_{x_k} = -\dfrac{f'_{x_k}}{f'_y}$

(11) Экстремум функций многих переменных. Необходимые и достаточные условия

$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\quad \bar{x}^0$ – loc min, если $\exists\, U_\delta(\bar{x}^0): \forall \bar{x} \in U_\delta(\bar{x}_0)$
$: f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}_0)$

Теор. (Необходим. условие)
$f \in D(\bar{x}^0)$, $\bar{x}^0$ – loc extr $\Leftrightarrow \begin{cases} f'_{x_1}(\bar{x}_0) = 0 \\ f'_{x_d}(\bar{x}_0) = 0 \end{cases}$

▶ $\varphi(t) = f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, t, x_{k+1}^0, \ldots, x_d^0)$

для $\mathbb{R}^1$ $\quad \varphi(t)$ имеет loc extr в $x_k^0 \Rightarrow \varphi'(t)\big|_{t = x_k^0} = 0$

$\Rightarrow f'_{x_k}(\bar{x}^0) = 0$

Теор. (Дост. условие) $f \in C^2(U(\bar{x}^0))$ $\quad f'_{x_k}(x_0) = 0 \quad \forall k = \overline{1,d}$

$Q(\bar{h}, \bar{h}) = \sum_{k=1}^{d} a_{kl} h_k h_l$, $a_{kl} = f''_{x_k x_l}(\bar{x}^0)$

1) Q – пол. опр. $\Rightarrow x_0$ – loc min
4) Q – отр. опр. $\Rightarrow x_0$ – loc max
3) Q – знаконер. $\Rightarrow x_0$ – не extr

▶ $f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \dfrac{d^2 f(\bar{x}^0)}{2!} + o(|\bar{x} - \bar{x}_0|^2) \quad \bar{x} \to \bar{x}^0$

$h_k = x_k - x_k^0$, $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_d) = \dfrac{\bar{h}}{|\bar{h}|}$

$f(\bar{x}) - f(\bar{x}^0) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \sum_{l=1}^{d} h_k h_l f''_{x_k x_l}(x^0) + o(|\bar{h}|^2) = \frac{1}{2} |\bar{h}|^2 \Big(\sum_{k,l=1}^{d} \frac{h_k}{|\bar{h}|} \cdot \frac{h_l}{|\bar{h}|} f''_{x_k x_l}(x^0) + o$

$= \frac{1}{2} |\bar{x} - \bar{x}^0|^2 \Big(\sum_{k,l=1}^{d} e_k e_l f''_{x_k x_l}(\bar{x}^0) + o(1) \Big)$

1) $Q(\bar{e}, \bar{e}) = g(\bar{e})$ – пол. опр., где $|\bar{e}| = 1$
$g \in C(S^{d-1})$, $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$, S^{d-1} – компакт $\Rightarrow \exists \min \bar{e}^*: |\bar{e}^*| = 1$
$g(\bar{e}) \geq g(\bar{e}^*) = m > 0$

$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) \geq \frac{m}{2} |h|^2 > 0$, $\bar{h} \neq \bar{0} \Rightarrow f(\bar{x}) > f(\bar{x}^0) \quad \forall x \in U_\delta(\bar{x}^0)$

3) $\exists\, \bar{h}_1, \bar{h}_2 \in \mathbb{R}^d: \quad Q(\bar{h}_1, \bar{h}_1) < 0 \quad Q(\bar{h}_2, \bar{h}_2) > 0$
$e = \dfrac{h}{|h|} \quad Q(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = m_1 < 0 \quad Q(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = m_2 > 0$

Пусть $\bar{x}_1(\rho) = \bar{x}_0 + \rho \bar{e}_1$ $\quad f(\bar{x}_1(\rho)) - f(\bar{x}^0) = \frac{1}{2} \rho^2 (m_1 + o(1)) < \rho^2 \frac{m_1}{4} < 0$
$\bar{x}_2(\rho) = \bar{x}_0 + \rho \bar{e}_2$ $\quad f(\bar{x}_2(\rho)) - f(\bar{x}^0) = \frac{1}{2} \rho^2 (m_2 + o(1)) > \rho^2 \frac{m_2}{4} > 0$ ◼
$0 < \rho < \delta$

(12) Метод наименьших квадратов

— миним. суммы квадратов откл. иск. ф-й ($S(a,b) \to min$) от нескольких переменных

Пусть $y = ax + b$ $\quad \delta_i = y_i - (ax_i + b)$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 = S(a,b)$$

Для a, b х-ся гипот. отклонение от данных жел. $\Rightarrow S(a,b) \to min$

1) $$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (ax_i + b)) \cdot (-x_i) = -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (ax_i + b)) \cdot (-1) = -2\sum_{i=1}^{n} y_i + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2bn$$

2) $$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = 0 : \begin{cases} a \cdot \sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a \cdot \sum x_i + bn = \sum y_i \end{cases}$$

Решение : $(a; b)$

3) $$A = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum x_i^2 \overset{\Delta_1}{>0} \qquad B = \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum x_i$$

$$C = \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n$$

$$\Delta_2 = AC - B^2 = 4n\sum x_i^2 - 4\left(\sum x_i\right)^2 > 0 \quad , \text{ т.к.}:$$

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (x_i - x_j)^2 > 0$$

$(a; b)$ — loc min

Rümplestiltskin

Коллоквиум 3

① Стационарные точки $x^0 \in \mathbb{R}^d$ $\begin{cases} df = \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s = 0 \\ \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} dx_s = 0, \quad j = \overline{1,m} \end{cases}$

② Множители Лагранжа $\lambda_j = const$

$L(x_1, \dots, x_d, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_d) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x_1, \dots, x_d)$

③ Теорема о стац. точках и множителях Лагранжа

$f, \varphi_k(x) \in C^1(\mathbb{R}^d), \quad k = \overline{1,m}$

$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m}(x^0) \end{vmatrix} \neq 0$, тогда для $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_s} = \frac{\partial f}{\partial x_s} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} & s=\overline{1,d} \\ \varphi_j = 0 & j=\overline{1,m} \end{cases}$

1) Каждому (x^0, λ^0) соотв. x^0: $\begin{cases} df = \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s = 0 \\ \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} dx_s = 0 & j = \overline{1,m} \end{cases}$

2) x^0 – стац. точка : $\exists$ единств. $\lambda_1, \dots \lambda_m$, что сист. верна при $x = x^0$

④ Окаймленный Гессиан

$$\det(H_{d+m}) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & (\varphi_1)'_{x_1} & \dots & (\varphi_1)'_{x_d} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & (\varphi_m)'_{x_1} & \dots & (\varphi_m)'_{x_d} \\ (\varphi_1)'_{x_1} & \dots & (\varphi_m)'_{x_1} & L''_{x_1x_1} & \dots & L''_{x_1x_d} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_1)'_{x_d} & \dots & (\varphi_m)'_{x_d} & L''_{x_dx_1} & \dots & L''_{x_dx_d} \end{vmatrix}$$

⑤ Достаточные условия усл. extr для 3 переменных и 1 ур. связи

$f(x,y,z) = 0 \quad \varphi(x,y,z) = 0 \qquad L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda \cdot \varphi(x,y,z)$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ \varphi'_z & L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{vmatrix}$$

Для $A_0 = (x_0, y_0, z_0, \lambda^0)$ – стац. точки:

1) если $(-1)\det H_3 > 0$, $(-1)\det H_4 > 0$ в A_0, то A_0 – усл. min
2) если $(-1)\det H_3 < 0$, $(-1)\det H_4 > 0$ в A_0, то A_0 – усл. max
3) если $(-1)\det H_4 < 0$ в A_0, то A_0 – не extr
4) если $H_3 = 0$ или $H_4 = 0$ в A_0, доп. информ. треб

⑥ Достаточные условия условного экстремума

$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$: $G \subset \mathbb{R}^d$

$f, \varphi_k(x) \in C^2(G)$, $k = \overline{1,m}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m}(x^0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Для $A_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_d^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_d^0)$ – стац. точке

1) $(-1)^m \det H_{2m+1} > 0$, $(-1)^m \det H_{2m+2} > 0$, $(-1)^m \det H_{m+d} > 0$ в A_0, то в A_0 – усл. min

2) знаки черед., начиная с $(-1)^{m+1}$: $(-1)^{m+1} \det H_{2m+1} > 0$, $(-1)^{m+2} \det H_{2m+2} > 0$, $(-1)^d \det H_{m+d} > 0$ в A_0, то A_0 – усл max

⑦ Глобальный экстремум $G \subset \mathbb{R}^d$ $f: G \to \mathbb{R}$

$\forall x \in G$ $f(x) \geq f(x^0)$ X^0 – глоб ~~мин~~ (макс $\leq$)

⑧ Функции спроса по Маршаллу. Косвенная полезность

$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda \cdot (M - p_1 x_1 - p_2 x_2)$

$$\begin{cases} L'_{x_1} = U'_{x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ L'_{x_2} = U'_{x_2} - \lambda p_2 = 0 \\ L'_{\lambda} = M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

$\tilde{x}_1(p_1, p_2, M)$, $\tilde{x}_2(p_1, p_2, M)$ – ф-и спроса по Маршаллу

$U(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = V(p_1, p_2, M)$ – ф-я косвенной полезности

⑨ Тождество Роя

$V'_M = \tilde{\lambda}$ $V'_{p_1} = -\tilde{\lambda} \cdot \tilde{x}_1$ $V'_{p_2} = -\tilde{\lambda} \cdot \tilde{x}_2$

⑩ Функции спроса по Хиксу. Функция расходов

$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda(\tilde{u} - u(x_1, x_2))$

$$\begin{cases} L'_{x_1} = p_1 - \lambda u'_{x_1} = 0 \\ L'_{x_2} = p_2 - \lambda u'_{x_2} = 0 \\ L'_{\lambda} = \tilde{u} - u(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

$\tilde{x}_1(p_1, p_2, \tilde{u})$, $\tilde{x}_2(p_1, p_2, \tilde{u})$, ~~ккр~~ – ф-и спроса по Хиксу

$m(p_1, p_2, \tilde{u}) = p_1 \tilde{x}_1(p_1, p_2, \tilde{u}) + p_2 \tilde{x}_2(p_1, p_2, \tilde{u})$ – ф-и расходов

⑪ Тождество Шепарда

$m'_{\tilde{u}} = \tilde{\lambda}$ $m'_{p_1} = \tilde{x}_1$ $m'_{p_2} = \tilde{x}_2$

⑫ Первообразная F для $f(x)$ на $[a; b]$: $F'(x) = f(x)$

(13) Неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

(14, 15) Свойства неопределенного интеграла

1. $f, g \in C[a;b]$, то на $[a;b]$ $\int(\alpha f + \beta g)dx = \alpha\int f\,dx + \beta\int g\,dx$
2. $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, то $\int f\,dg = fg - \int g\,df$
3. $f \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $x = \varphi(t)$, то $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

(16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + C$

(17) $\int \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha} + C$

(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\alpha} + C$

(19) $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$

(20) Алгебраический полином: $P_n(x) = \sum_I C_I x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$, $I = (i_1, \dots, i_n)$

Рациональная ф-я $r, n \in \mathbb{N}$ $R(x) = \frac{P_r(x)}{Q_n(x)}$, где $P_r(x) \in P_r$, $Q(x) \in P_n$

(21) Правильная дробь $r, n \in \mathbb{N}$ $R(x) = \frac{P_r(x)}{Q_n(x)}$, где $r < n$ $P_r(x) \in P_r$, $Q_n(x) \in P_n$

Лемма о выделении $(x - x_1)$

$m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ $Q_n(x) = (x-x_1)^k \cdot Q_1(x)$, $Q_1(x_1) \neq 0$

$\exists A, P_1(x)$: $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{P_1(x)}{(x-x_1)^{k-1} Q_1(x)}$

(22) Лемма о выделении $(x^2 + \alpha x + \beta)$

$m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $Q_2(x) = \frac{Q_n(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^\ell}$ $D_1 = \alpha^2 - 4\beta < 0$

$Q_2 \not\vdots (x^2 + \alpha x + \beta)$, то $\exists M, N$, $P_2(x)$

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+\alpha x+\beta)^\ell} + \frac{P_2(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^{\ell-1} Q_2(x)}$

(23) Рациональная функция от двух переменных u, v, C_{nk} - const

$R(u, v) = \frac{P_n(u,v)}{Q_m(u,v)} = \sum_{n,k}^{N} C_{nk} u^n v^k$

(24) Теорема Чебышева

биномиальный дифференциал $x^m(a + bx^n)^p dx$

(24) Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$
1. если $p \in \mathbb{Z}$, то замена $t = \sqrt[\lambda]{x}$, λ - НОК(знам. m; знам. n)
2. если $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то замена $t = \sqrt[\lambda]{a + bx^n}$, где λ - знам. p
3. если $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то замена $t = \sqrt[\lambda]{ax^{-n} + b}$, где λ - знам. p
4. иначе не инт. в эл. ф-ях

(25) Подстановки Эйлера $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$
1. $a>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\cdot x$
2. $c>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$
3. $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, $x_1 \neq x_2$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$

(26) Подстановка Абеля $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\ell+1/2}}$: $t = \sqrt{y}' = \frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$

(27) Три замены для интегрирования ф-й вида $R(\sin x, \cos x)$
1. $R(-u, v) = -R(u, v) \Rightarrow R(\sin x, \cos x)dx = R_3(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,dx = -R_3(1-\cos^2 x, \cos x)d\cos x$
   $t = \cos x$
2. $R(u, -v) = -R(u, v) \Rightarrow R(\sin x, \cos x)dx = R_4(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,dx = R_4(\sin x, 1-\sin^2 x)d\sin x$
   $t = \sin x$
3. $R(-u, -v) = R(u, v) \Rightarrow R(u, v) = R_*(\frac{u}{v}, v^2) = R_*(\operatorname{tg} x, \cos^2 x) = R_*(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}) = R^*(\operatorname{tg} x)$
   $t = \operatorname{tg} x$
   $R(\sin x, \cos x)dx = R^*(\operatorname{tg} x)dx = R^*(t)\frac{dt}{1+t^2}$

(28) Универсальная замена
$R(\sin x, \cos x)\,dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$ $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$, $x \in (-\pi; \pi)$

(29) Квадрируемые мн-ва G: $S^*(G) = S_*(G) = S(G)$

(30) Разбиение отрезка $[a;b]$ - совокупность $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
Диаметр разбиения $\lambda(P) = \max_{k=\overline{1,n}} |\Delta x_k|$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

(31) Интегральная сумма $f(x)$: $\sigma = \sigma(f, (P, \xi)) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$
Определенный интеграл $f(x)$ на $[a;b]$ $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, (P, \xi))$

(32) Критерий Коши $f \in R[a;b]$
$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall (P', \xi'), (P'', \xi'')\ \lambda(P')<\delta, \lambda(P'')<\delta\ |\sigma(f, (P', \xi')) - \sigma(f, (P'', \xi''))| < \varepsilon$

(33) Ф-я не интегрируема на $[a;b]$ $f \notin R[a;b]$
$\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists (P', \xi'), (P'', \xi'')\ \lambda(P')<\delta, \lambda(P'')<\delta\ |\sigma(f, (P', \xi')) - \sigma(f, (P'', \xi''))| \geq \varepsilon$

(34) Необходимое условие интегрируемости $f \in R[a;b] \Rightarrow f$ - ограничена на $[a;b]$

35 Модуль непрерывности ф-и на мн-ве $\{x\}$

$\omega(f,\delta)$ $\forall\delta>0$ $\omega(f,\delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|: |x'-x''|<\delta\}$ $x',x''\in\{x\}$

40 Множество Лебеговой меры "0" $A\subset\mathbb{R}^1$ $\mu(A)=0$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ кон./счетный набор $\{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – откр. интервалы

1) $A\subset\bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$ 2) $\sum_{k=1}^{+\infty}|I_k|<\varepsilon$

36 Суммы Дарбу $s(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$, $m_k=\inf\limits_{x\in\Delta x_k} f(x)$

$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$, $M_k=\sup\limits_{x\in\Delta x_k} f(x)$

37 Интегралы Дарбу $\underline{I}=\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)$, $\overline{I}=\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)$

38 Критерий интегрируемости по Дарбу $f(x)\in\mathcal{R}$ и огр. на $[a;b]$

$f\in\mathcal{R}[a;b]$ $\Leftrightarrow$ $\underline{I}=\overline{I}$, причем $\int_a^b f(x)\,dx=\overline{I}=\underline{I}$

39 Критерий интегрируемости в терм. ω $f(x)\in\mathcal{R}$ и огр. на $[a;b]$

$f\in\mathcal{R}[a;b]$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\Delta x_k)|\Delta x_k|=0$

41 Критерий Лебега $f\in\mathcal{R}[a;b]$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ – ограничен. на } [a;b] \\ f \text{ – непрер. почти всюду на } [a;b] \end{cases}$

42 Формула Тейлора $f\in C^n(U(x_0))$ $x\in U(x_0)$

$f(x)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)}{k!}+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt$

43 I теорема о среднем $f,g\in\mathcal{R}[a;b]$, $g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a;b]$ $m\leq f\leq M$ $\forall x\in[a,b]$

$\exists\mu\in[m,M]$: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)\,dx$

44 II теорема о среднем $f\in\mathcal{R}[a;b]$, $g(x)$ – монот. на $[a;b]$

то $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a+0)\int_a^{\xi} f(x)\,dx+g(b-0)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx$

45 Интегрируемость в несобственном смысле

$f(x)\notin\mathcal{R}[a,\omega)$ $\forall b\in(a,\omega)$: $f(x)\in\mathcal{R}[a;b]$

$\exists\lim\limits_{b\to\omega^-}\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{\omega} f(x)\,dx$

46 Критерий Коши сходимости несобственного интеграла $f\in\mathcal{R}[a;b]$ $\forall b\in[a,\omega]$

Нес. инт. сходится $\int_a^{\omega} f(x)\,dx$ $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists B\in[b,\omega]$: $\forall b_1,b_2\in[B,\omega)$ $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$

(47) Ф-я не интегрируема в нес. смысле на $[a,\omega)$ $f \notin R[a;b]\ \forall b \in [a,\omega)$

Несобств. инт. расх. $\int_a^{\omega} f(x)\,dx \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall B \in [b,\omega):\ \forall b_1, b_2 \in [B,\omega)\ \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| > \varepsilon$

(48) Площадь под графиком ф-и $f \in R[a;b]$ $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b]\ y \in [0, f(x)]\}$

$S(\Omega) = \int_a^b f(x)\,dx$

Площадь в пол. сист. коорд. $r = r(\varphi) \in R[\alpha,\beta]$, $r = r(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$

$S(\Omega) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$

(49) Объем вращения (Ox) $f^2 \in R[a;b]$ $y = f(x)$ $V_{y=0} = V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

(50) Объем вращения (Oy) $f(x) \in R[a,b]$ $y = f(x)$ $V_{Oy} = 2\pi \int_a^b |x f(x)|\,dx$

Коллоквиум 3. Математический анализ.

1) Условный экстремум. Необходимые условия. Метод множителей Лагранжа

__Усл. экстр.__ $G \subset \mathbb{R}^d$

для $X=(x_1, \dots, x_d)$ $\quad \varphi_1(x_1, \dots, x_d)=0$

$\dots$

$\varphi_m(x_1, \dots, x_d)=0$ $\quad m<d$

$\varphi_k \in C^1(G)$, $1 \le k \le m$

$f: G \to R$ усл. мин. (макс.) в т. X^0,

$\exists$ окрестность $U(x^0) \in G$, что $f(x^0) \ge f(x)$ $\left(f(x^0) \le f(x)\right)$

для $\forall x \in U(x^0)$: $\varphi_k(X)=0$, $1 \le k \le m$

__Необх. условие__

ф-я Лагранжа $L(x_1, \dots, x_d, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_d) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x_1, \dots, x_d)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, & i=\overline{1,d} \\ \varphi_j = 0, & j=\overline{1,m} \end{cases}$$

__Метод мн-лей Лагранжа__

1) Ввести ф-ю L

2) Найти т. $N_0 = (X^0, \lambda_1^0, \dots \lambda_m^0) \in \mathbb{R}^{d+m}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_s} = \dfrac{\partial f}{\partial x_s} + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} = 0, & s=\overline{1,d} \\ \varphi_j = 0, & j=\overline{1,m} \end{cases}$$

3) Исследовать $d^2L(X)$ как квадр. ф-ю от $dx_1, \dots, dx_d$

в т. $N_0 = (X^0, \lambda^0)$

если $d^2L(X)\Big|_{(x^0, \lambda^0)} > 0$ (<0), то N_0 – усл. loc min (max)

② Достаточные условия экстремума. Окаймленный гессиан

$$\xcancel{\det(\underset{d+1}{H}(L)) = \begin{vmatrix} 0 & (\varphi_m)'_{x_1} & (\varphi_m)'_{x_2} & \dots & (\varphi_m)'_{x_d} \\ (\varphi_m)'_{x_1} & L''_{x_1x_1} & L''_{x_1x_2} & & L''_{x_1x_d} \\ \dots & & & & \\ (\varphi_m)'_{x_d} & L''_{x_dx_1} & L''_{x_dx_2} & & L''_{x_dx_d} \end{vmatrix}}$$

$$d^2L = H_{m+d}(L) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & (\varphi_1)'_{x_1} & \dots & (\varphi_1)'_{x_d} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & (\varphi_m)'_{x_1} & \dots & (\varphi_m)'_{x_d} \\ (\varphi_1)'_{x_1} & \dots & (\varphi_m)'_{x_1} & L''_{x_1x_1} & \dots & L''_{x_1x_d} \\ \dots & & \dots & \dots & & \\ (\varphi_1)'_{x_d} & \dots & (\varphi_m)'_{x_d} & L''_{x_dx_1} & \dots & L''_{x_dx_d} \end{pmatrix}$$

$\det H$ – <u>окаймленный Гессиан</u> для

$f(x_1, \dots, x_d) = 0 \qquad \varphi_1(x_1, \dots, x_d) = 0 \ \dots \ \varphi_m(x_1, \dots, x_d) = 0$

$L(x_1, \dots x_d, \lambda) = f(x_1, \dots, x_d) + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot \varphi_k(x_1, \dots, x_d)$

<u>Дост. условие</u> $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1, \ G \subset \mathbb{R}^d$

Пусть $f \in C^2(G)$ $\varphi_k(x) \in C^2(G)$, $k = \overline{1,m}$

$$\begin{vmatrix} \partial\varphi_1/\partial x_1 (x_0) & \dots & \partial\varphi_1/\partial x_m (x_0) \\ \dots & & \\ \partial\varphi_m/\partial x_1 (x_0) & \dots & \partial\varphi_m/\partial x_m (x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

для стац. т. $A_0 = (x_1^0, \dots, x_d^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_d^0)$

1) $(-1)^m \det H_{2m+1} > 0$, $(-1)^m \det H_{2m+2} > 0$, $(-1)^m \det H_{m+d} > 0$
в A_0, то A_0 – усл. мин. f

2) знаки гл. мин. чередуются, начиная с $(-1)^{m+1}$:
$(-1)^{m+1} \det H_{2m+1} > 0$, $(-1)^{m+2} \det H_{2m+2} > 0$, $(-1)^d \det H_{m+d} > 0$
в A_0, то A_0 – усл. макс. f

③ Задача рац. поведения потр. на рынке: Ф-и спроса по Маршаллу. Ф-я косв. полезности, её свойства

$U(x_1, x_2) \to max$

$p_1x_1 + p_2x_2 \leq M$

Найти усл. extr $U(x_1, x_2)$

1) Построить ф-ю Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2)$

2) $\begin{cases} L'_{x_1} = U'_{x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ L'_{x_2} = U'_{x_2} - \lambda p_2 = 0 \\ L'_{\lambda} = M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \end{cases}$

3) Решение системы ур. $\begin{cases} \tilde{x}_1(p_1, p_2, M) \\ \tilde{x}_2(p_1, p_2, M) \\ \tilde{\lambda}(p_1, p_2, M) \end{cases}$ → ф-и спроса по Маршаллу

Ф-я косв. полезности $U(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = V(p_1, p_2, M)$

$\begin{cases} U'_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{\lambda} p_1 \\ U'_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{\lambda} p_2 \end{cases}$

Ур-ие связи $p_1\tilde{x}_1 + p_2\tilde{x}_2 = M$

φ'_M : $p_1\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial M} + p_2\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial M} = 1$ $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ – дифференц. ф-и

φ'_{x_k} : $\tilde{x}_k + p_1\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial p_k} + p_2\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial p_k} = 0$ $k = 1,2$, p_k – перем. величина $M, p_{k\pm1}$ не зав. от p_k

Тожд-во Роя $V'_M = \tilde{\lambda}$; $V'_{p_k} = -\tilde{\lambda}\tilde{x}_k$, $k = 1,2$

$V'_M = \frac{\partial}{\partial M}(U(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)) = U'_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\cdot\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial M} + U'_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial M}$

$= \tilde{\lambda}\left(p_1\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial M} + p_2\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial M}\right) = +\tilde{\lambda}$

$V'_{p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k}(U(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)) = U'_{x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\cdot\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial p_k} + U'_{x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial p_k} =$

$= \tilde{\lambda}\left(p_1\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial p_k} + p_2\frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial p_k}\right) = -\tilde{\lambda}\tilde{x}_k$

④ Задача минимизации расх. потребителя при фикс. уровне полезности. Ф-я спроса по Хиксу. Ф-я расходов, её св-ва

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \to max$$
$$U(x_1, x_2) = \tilde{u}$$

Найти min

1) Ф-я Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda(\tilde{u} - u(x_1, x_2))$

2) $\begin{cases} L'_{x_1} = p_1 - \lambda u'_{x_1} = 0 \\ L'_{x_2} = p_2 - \lambda \cdot u'_{x_2} = 0 \\ L'_{\lambda} = \tilde{u} - u(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$

3) Решение сист. ур. $\begin{cases} \tilde{x}_1(p_1, p_2, \tilde{u}) \\ \tilde{x}_2(p_1, p_2, \tilde{u}) \\ \tilde{\lambda}(p_1, p_2, \tilde{u}) \end{cases}$ > ф-и спроса по Хиксу

Ф-я расходов $m(p_1, p_2, \tilde{u}) = p_1 \tilde{x}_1(p_1, p_2, \tilde{u}) + p_2 \tilde{x}_2(p_1, p_2, \tilde{u})$

$$p_k = \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_k}, \quad k = 1,2$$

Т-ва Шепарда $m'_u = \tilde{\lambda}$; $m'_{p_k} = \tilde{x}_k$, $k = 1,2$

▶ $m'_{\tilde{u}} = p_1 \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{u}} + p_2 \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial \tilde{u}} = \tilde{\lambda}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \cdot \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \cdot \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial \tilde{u}}\right) = \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{u}} = \tilde{\lambda}$

$m'_{p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}(p_1 x_1 + p_2 x_2) = x_1 + p_1 \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial p_1} =$

$= \tilde{x}_1 + \tilde{\lambda}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \cdot \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \cdot \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial p_1}\right) = \tilde{x}_1 + \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial p_1} = \tilde{x}_1$

$\tilde{u}'_{p_1} = 0$, то Аналогично $m'_{p_2} = \tilde{x}_2$

⑤ Первообразная, неопределенный интеграл. Таблица неопр. интегралов и правила интегрирования

<u>Первообразная</u> $f(x)$ на $[a;b]$: $F'(x) = f(x)$

Пусть F_1, F_2 – первообр. для $f(x)$, то $\exists C \in \mathbb{R} : F_1 - F_2 = C$ на $[a;b]$

▶ $g(x) = F_1(x) - F_2(x)$

по т. Лагранжа $g(\beta) - g(\alpha) = g'(c)(\beta - \alpha)$ $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, $c \in (\alpha,\beta)$

$g'(c) = 0 \Rightarrow g(x) = C, \ \forall [a,b]$

<u>Неопр. интеграл</u> $f(x)$ – совок. всех первообр. $f(x)$ $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C & \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,arctg\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$$

$$\int sh\,x\,dx = ch\,x + C$$

$$\int ch\,x\,dx = sh\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\,x + C$$

<u>Правила интегрирования</u>

1) $f, g \in C[a;b]$, то на $[a;b]$ $\int(\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha\int f\,dx + \beta\int g\,dx$

2) $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, то $\int f\,dg = fg - \int g\,df$

3) $f \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $x = \varphi(t)$, то $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

(*) Интегрирование рациональных функций

I. Сведение к правильной дроби. $Q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k=\overline{0,n}$

если $r \geq n$, то $R(x) = \frac{P_r(x)}{Q_n(x)} = S_{r-n}(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $r \geq n$ $m<n$,

где $S_{r-n}(x) = b_{r-n}x^{r-n} + \dots + b_2x^2 + b_1x + b_0$

II. Разложение на простейшие дроби $Q_n(x) = a_n \prod_{s=1}^{q}(x-z_s)^{k_s}$, $k_1+\dots+k_q = n$

для $z_l = x_l + iy_l$, $\bar z_l = x_l - iy_l$ к-ти k_l: $(x-z_l)\cdot(x-\bar z_l) = x^2 + \alpha_l x + \beta_l$,

где $D = \alpha_l^2 - 4\beta_l = -4y_l^2 < 0$

$Q_n(x) = a_n (x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_s)^{k_s}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{l_1}\dots(x^2+\alpha_p x+\beta_p)^{l_p}$,

где $D = \alpha_m^2 - 4\beta_m < 0$, $1\le m\le p$

Лемма $m,n\in N$, $m<n$ $Q_n(x) = (x-x_1)^{k_1}Q_1(x)$, $Q_1(x_1)\neq 0$; то $\exists A, P_1(x)$ ст $\le m-1$

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{P_1(x)}{(x-x_1)^{k_1-1}Q_1(x)}$$

Лемма $m,n\in N$, $m<n$ $Q_2(x) = \frac{Q_n(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}$, где $D_1 = \alpha^2-4\beta<0$, $Q_2(x) \not\vdots (x^2+\alpha x+\beta)$,

то $\exists M,N, P_2(x)$ ст. $\le m-2$, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+\alpha x+\beta)^l} + \frac{P_2(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^{l-1}Q_2(x)}$

$$R(x) = \frac{P_r(x)}{Q_n(x)} = \sum_{k=0}^{r-n} c_k x^k + \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{k_k}\frac{A_{k,\nu}}{(x-x_k)^\nu}\right) + \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\mu=1}^{l_k}\frac{M_{k,\mu}x+N_{k,\mu}}{(x^2+\alpha_k x+\beta_k)^\mu}\right)$$

III. Вычисление интегралов $\int R(x)\,dx$:

1) $\int x^k dx$, $k\in N$

2) $\int \frac{dx}{(x-x_k)^\nu}$, $\nu \in N$

3) $\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}$, где $D=\alpha^2-4\beta<0$, $l\in N$

▶ $t = x+\frac{\alpha}{2} \Rightarrow x^2+\alpha x+\beta = t^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) = t^2+\gamma^2$, $\gamma>0$, $\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)>0$

$$Mx+N = Mt + \left(N - \frac{\alpha}{2}M\right) = Mt + N_1$$

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^l} = \int\frac{(Mt+N_1)dx}{(t^2+\gamma^2)^l} = M\int\frac{t\,dt}{(t^2+\gamma^2)^l} + N_1\int\frac{dt}{(t^2+\gamma^2)^l} = \frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+\gamma^2)}{(t^2+\gamma^2)^l} + B =$$

$$\frac{M(t^2+\gamma^2)^{l-1}}{2(1-l)} + B = \frac{M(t^2+\gamma^2)^{l-1}}{2(1-l)} + \frac{N_1}{1-l}\left(\frac{t}{(t^2+\gamma^2)^{l-1}} - I_{l-1}\right)$$

* Введём рек. соотн. $I_l = \int\frac{dt}{(t^2+\gamma^2)^l}$ $l>1, l\in N$; $I_l = \frac{1}{\gamma^2}\left(\left(1-\frac{1}{2(l-1)}\right)I_{l-1} + \frac{1}{2(l-1)}\frac{t}{(t^2+\gamma^2)^{l-1}}\right)$

* $B = \int\frac{t\,dt}{(t^2+\gamma^2)^l} = \int\frac{t\,d(t^2+\gamma^2)}{(t^2+\gamma^2)^l} = \frac{1}{1-l}\int t\,d\left((t^2+\gamma^2)^{1-l}\right) = \frac{1}{1-l}\left(\frac{t}{(t^2+\gamma^2)^{l-1}} - I_{l-1}\right)$

⑥ Разложение рациональной функции на простейшие дроби

$$Q_n(x) = a_n \prod_{s=1}^{q} (x - z_s)^{k_s}, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_q = n,$$

причем $\forall\, z_l = x_l + i y_l$ кратности k_l $\exists\, \bar{z}_l = x_l - i y_l$ — корень $Q_n(x)$ кратности k_l

$$(x - z_l)\cdot(x - \bar{z}_l) = x^2 - 2x_l x + (x_l^2 + y_l^2) = x^2 + \alpha_l x + \beta_l,$$

где $D = \alpha_l^2 - 4\beta_l = -4y_l^2 < 0$

$\Rightarrow Q_n(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_s)^{k_s} \cdot (x^2 + a_1 x + \beta_1)^{l_1} \ldots (x^2 + a_p x + \beta_p)^{l_p}$,

где $D_m = \alpha_m^2 - 4\beta_m < 0$, $1 \le m \le p$

<u>Лемма</u> $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $Q_n(x) = (x - x_1)^{k_1} Q_1(x)$, $Q_1(x_1) \ne 0$,
то $\exists\, A$, $P_1(x)$, ст. $\le m-1$, что

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{P_1(x)}{(x - x_1)^{k_1 - 1} Q_1(x)}$$

▶ $P_m(x) = A\, Q_1(x) + P_1(x)(x - x_1)$

$x = x_1 \quad A = \dfrac{P_m(x_1)}{Q_1(x_1)} \Rightarrow \quad x = x_1$ — корень $P_m(x) - A Q_1(x) = 0$

$(P_m(x) - AQ(x))$ — полином $\to (P_m(x) - AQ_1(x)) \vdots (x - x_1)$, то

$$P_1(x) = \frac{P_m(x) - AQ_1(x)}{x - 1}$$

<u>Лемма</u> $m, n \in \mathbb{N}$ $m < n$ $Q_2(x) = \dfrac{Q_n(x)}{(x^2 + \alpha x + \beta)^l}$ $D_1 = \alpha^2 - 4\beta < 0$
$Q_2(x) \not\vdots\, (x^2 + \alpha x + \beta)$, тогда $\exists\, M, N$, $P_2(x)$ ст. $\le m-2$, что

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + \alpha x + \beta)^l} + \frac{P_2(x)}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{l-1} Q_2(x)}$$

▶ $P_m(x) = (Mx + N)\, Q_2(x) + (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)\, P_2(x)$

$P_m(x) : (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \to$ ост. $\gamma x + \delta$

$Q_2(x) : (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \to$ ост. $\nu x + \mu$

тогда $((Mx + N)(\nu x + \mu) - (\gamma x + \delta)) \vdots (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)$

$$M\nu x^2 + (N\nu + M\mu - \gamma)x + N\mu - \delta$$

$M\nu(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \vdots (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \Rightarrow (N\nu + M\mu - \gamma - \alpha_1 M\nu)x + (N\nu - \delta - \beta_1 M\nu) = 0$

$$\begin{cases} N\nu + M(\mu - \alpha_1 \nu) = \gamma \\ N\mu - M\beta_1 \nu = \delta \end{cases} \qquad \begin{cases} x^1 = 0 \\ x^0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \nu & \mu - \alpha_1 \nu \\ \mu & -\beta_1 \nu \end{vmatrix} \ne 0 \iff \mu^2 - \alpha_1 \nu\mu + \beta_1 \nu^2 \ne 0 \quad \Rightarrow \exists\, M, N$$

Если $\nu \ne 0$, то $(\mu/\nu)^2 + \alpha_1(-\mu/\nu) + \beta_1 \ne 0$. Если $\nu = 0$, то $\mu \ne 0 \Rightarrow \exists M, N$

$$P_2(x) = \frac{P_m(x) - (Mx + N)\, Q_2(x)}{x^2 + \alpha x + \beta}$$

⑧ Интегрирование иррац. ф-й: интегрирование некоторых радикалов. Теорема Чебышева. Подстановки Эйлера.

Интегрирование нек. выражений, сод. радикалы

$R(u,v) = \frac{P_n(u,v)}{Q_m(u,v)}$, $(Q_m) P_n = \sum_{n,k=0}^{N} c_{n,k} u^n v^k$ — рац. ф-я

$m \in N$, $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx$, тогда замена $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$

$x = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}$ $\quad dx = \frac{m\delta t^{m-1}\cdot(\alpha-\gamma t^m) + m\cdot\gamma\cdot t^{m-1}\cdot(\delta t^m - \beta)}{(\alpha-\gamma t^m)^2} dt$

Сгд. $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{s_1}, \dots, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{s_m}\right) dx$, $s_k \in Q$ $s_k = \frac{n_k}{m_k}$, $n_k \in Z$, $m_k \in N$ $\quad t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, $m = \text{НОК}(m_1, \dots, m_k)$

Интегрирование бин. дифф. $x^m(a+bx^n)^p dx$ — биномиальный $a, b \in R$, $m, n, p \in Q$

Теор. Чебышева:

1. $p \in Z$ $\quad t = \sqrt[\lambda]{x}$, $\lambda = \text{НОК}$(знам. m, знам. n)
2. $\frac{m+1}{n} \in Z$ $\quad t = \sqrt[\lambda]{a+bx^n}$, $\lambda =$ знам. p
3. $\frac{m+1}{n} + p \in Z$ $\quad t = \sqrt[\lambda]{ax^{-n}+b}$, $\lambda =$ знам. p
4. $m, n, p \in Q$ бин. диф. не интегр. в эл. ф-ях

▶ 2. $y = x^n$ $\quad \int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int y^q (a+by)^p dy$, $q = \frac{m+1}{n} - 1$, $q \in Z$
$\Rightarrow t = \sqrt[\lambda]{a+by}$, где λ — знам. p

3. $\frac{1}{n}\int y^q (a+by)^p dy = \frac{1}{n}\int y^{p+q}(ay^{-1}+b)^p dy$, $p+q = p + \frac{m-1}{n} - 1$, $p+q \in Z$
$\Rightarrow t = \sqrt[\lambda]{ay^{-1}+b}$, где λ — знам. p

Подстановки Эйлера $\quad \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$

1. $a>0$ $\quad \sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$

▶ $x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}$, $dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2} dt$

2. $c>0$ $\quad \sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$

▶ $x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a-t^2}$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{a-t^2}$, $dx = 2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{(a-t^2)^2} dt$

3. $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, $x_1 \neq x_2$ $\quad \sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$

▶ $x = \frac{x_1t^2 - ax_2}{t^2-a}$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}$, $dx = \frac{2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2} dt$

⑨ Интегрирование рац. ф-й с иррациональностью вида $\sqrt{ax^2+bx+c}$ в знам.

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

I. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, $k\in N$

Рек. ф-ла $\displaystyle J_k=\int\frac{x^k}{y}dx$, где $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$

$$(x^{k-1}\cdot y)'=(k-1)x^{k-2}y+\frac{x^{k-1}\cdot(2ax+b)}{2y}=\frac{2(k-1)x^{k-2}(ax^2+bx+c)+x^{k-1}(2ax+b)}{2y}=$$

$$=ka\frac{x^k}{y}+\left(k-\frac{1}{2}\right)b\cdot\frac{x^{k-1}}{y}+(k-1)\cdot c\cdot\frac{x^{k-2}}{y}$$

$$(x^{k-1}\cdot y)=ka\,J_k+(k-1)\,b\cdot J_{k-1}+(k-1)\cdot c\cdot J_{k-2}$$

$$J_k=\frac{x^{k-1}\cdot y}{ka}-\left(\frac{2k-1}{2ka}\right)b\cdot J_{k-1}-\frac{(k-1)\cdot c}{ka}\cdot J_{k-2}$$

$$J_1=y/a-(b/2a)\cdot J_0 \Rightarrow J_k=P_{k-1}(x)\cdot y+\lambda\cdot J_0$$

II. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\gamma)^{\nu}\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, $\nu\in N$ $\qquad t=\dfrac{1}{x-\gamma}$

$$dx=-\frac{dt}{t}\ ;\quad ax^2+bx+c=\frac{(a\gamma^2+b\gamma+c)t^2+(2a\gamma+b)t+a}{t^2}$$

$$\int\frac{dx}{(x-\gamma)^{\nu}\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int\frac{t^{\nu-1}\,dt}{\sqrt{(a\gamma^2+b\gamma+c)t^2+(2a\gamma+b)t+a}}$$

γ – корень $ax^2+bx+c=0$, то замена $z=(2a\gamma+b)t+a$

γ – не корень $\Rightarrow$ I случай

III. $\displaystyle\int\frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^l\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $D=\alpha^2-4\beta<0$, $l\in N$

a) $ax^2+bx+c=a(x^2+\alpha x+\beta)$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int\frac{(Mx+N)dx}{(ax^2+bx+c)^{l+1/2}}=\frac{M}{2a}\int\frac{2ax+b\,dx}{(ax^2+bx+c)^{l+1/2}}+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{l+1/2}}$

для $\displaystyle\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{l+1/2}}$ подстановка Абеля: $t=\sqrt{y}'=\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}=\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$

$$\Rightarrow 4t^2y=(2ax+b)^2\Rightarrow 4ay-4t^2y=4ac-b^2\Rightarrow 4(a-t^2)y=4ac-b^2$$

$$y^s=\left(\frac{4ac-b^2}{4}\right)^s\frac{1}{(a-t^2)^s}$$

$t\sqrt{y}=ax+b/2$ $\quad\sqrt{y}\,dt+t^2dx=a\,dx$ $\quad\dfrac{dx}{\sqrt{y}}=\dfrac{dt}{a-t^2}$ $\Rightarrow\displaystyle\int\frac{dx}{y^{l+1/2}}=\left(\frac{4}{4ac-b^2}\right)^l\int(a-t^2)^{l-1}dt$

b) $ax^2+bx+c\,/\,x^2+\alpha x+\beta\neq\mathrm{const}$: $b/a\neq\alpha$ $\quad c/a\neq\beta$

$ax^2+bx+c=a(x^2+\alpha'x+\beta'x)$: $\alpha'\neq\alpha$ $\quad\beta'=\beta$ $\qquad(\alpha=\alpha')\ t=x+\alpha/2$ $\begin{cases}x^2+\alpha x+\beta=t^2+\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)\\ x^2+\alpha'x+\beta'=t^2+\left(\beta'-\frac{\alpha'^2}{4}\right)\end{cases}$

$\alpha\neq\alpha'$: <u>Лемма</u> $x^2+\alpha'x+\beta'$ и $x^2+\alpha x+\beta$, что $\alpha'\neq\alpha$, $x^2+\alpha'x+\beta'>0,\ \forall x.$ $\Rightarrow\exists\,\mu,\nu$ $\quad x=\dfrac{\mu t+\nu}{t+1}$

$x^2+\alpha x+\beta=\dfrac{A_1t^2+B_1}{(t+1)^2}$, $x^2+\alpha'x+\beta'=\dfrac{A_2t^2+B_2}{(t+1)^2}$, где A_1, A_2, B_1, B_2 зав. от μ,ν

⑩ Интегрирование тригонометрических функций

Лемма:

1) $R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow R(\sin x, \cos x) = R_1((\sin^2 x), \cos x)$

2) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow R(\sin x, \cos x) = \sin x\, R_2(\sin^2 x, \cos x)$

3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow R(\sin x, \cos x) = R_*(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)$

▶ 1) д-д 2) $R(\sin x, \cos x)/\sin x$ + ①

3) $R(\sin x, \cos x) = R(\operatorname{tg} x \cdot \cos x, \cos x) = R_3(\operatorname{tg} x, \cos x) \Rightarrow R_3(\operatorname{tg} x, -\cos x) = R_3(\operatorname{tg} x, \cos x)$

$R(\operatorname{tg} x, \cos x) = R_*(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)$

<u>1 случай</u> $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ $\quad t = \cos x$

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R_3(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,dx = -R_3(1-\cos^2 x, \cos x)\,d\cos x$$

<u>2 случай</u> $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ $\quad t = \sin x$

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R_4(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,dx = R_4(\sin x, 1-\sin^2 x)\,d\sin x$$

<u>3 случай</u> $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ $\quad t = \operatorname{tg} x$

$$R(\sin x, \cos x) = R_*(\operatorname{tg} x, \cos^2 x) = R_*\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) = R_*(\operatorname{tg} x)$$

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R_*(\operatorname{tg} x)\,dx = R^*(t)\frac{dt}{1+t^2}$$

Унив. <u>4 случай</u> $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, $x \in (-\pi; \pi)$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad x = 2\operatorname{arctg} t$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$R(\sin x, \cos x)\,dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

<u>Теорема</u> $a^2+b^2 \neq 0$

$$\int \frac{a_1\sin^2 x + 2b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}\,dx = A\sin x + B\cos x + C\int\frac{dx}{a\sin x + b\cos x},$$

где $A = \dfrac{bc_1 - a_1 b + 2ab_1}{a^2+b^2}$ $\quad B = \dfrac{ac_1 - aa_1 - 2bb_1}{a^2+b^2}$ $\quad C = \dfrac{a_1 b^2 + a^2 c_1 - 2abb_1}{a^2+b^2}$

<u>Теорема</u> $b \neq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq a, c$

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2 x}\,dx = A\int\frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B\int\frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

где $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$u_j = (a-\lambda_j)\sin x + b\cos x \qquad k_j = \dfrac{1}{a-\lambda_j}$, $j = 1, 2$

$A = -\dfrac{a_1(a-\lambda_2) + bb_1}{b(\lambda_1-\lambda_2)} \qquad B = \dfrac{bb_1 + a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)}$

(11) Площадь плоской фигуры. Разбиение отрезка. Инт. суммы. Определение интеграла. Необходимое условие инт-ти функц.

$S_*(G)$ - нижн. площадь G $\{P, P \subset G\}$ $S^*(G)$ - верхн. площадь G $\{P, P \supset G\}$

Квадрируемая площадь: $S(G) = S^*(G) = S_*(G)$

Разбиение отрезка $[a; b]$ $P = ($совокупность $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b)$

Диаметр разбиения $\lambda(P) = \max_{k=\overline{1,n}} |\Delta x_k|$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$

Разбиение отр. с отм. точками $(P; \xi)$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$

на $\forall$ отрезке разбиения P т. $\xi_{k-1} \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$

Интегральная сумма $f(x)$, соотв. $(P; \xi)$ на $[a, b]$: $\sigma = \sigma(f, (P, \xi)) = \sum_{1=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$

Интеграл $f(x)$ на $[a, b]$ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f, (P, \xi))$ $\in R$

$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$; $\int_a^a f(x)dx = 0$

Необх. усл. $f \in R[a, b] \Rightarrow f$ - огр. на $[a, b]$

▶ Пусть $f \in R[a; b]$, но f не огр. на $[a, b]$. Ф-я не инт-ма:

$\exists \varepsilon > 0$ $\forall \delta > 0$ $\exists (P', \xi'), (P'', \xi'')$: $\lambda(P') < \delta$, $\lambda(P'') < \delta$ $|\sigma(f, (P', \xi')) - \sigma(f, (P'', \xi''))| > \varepsilon$

Пусть $\varepsilon = 1$, фикс. $\delta > 0$. (P', ξ'), что $\lambda(P') < \delta$, ξ' - произвольная

В силу неогр. ф-и f на $[a; b]$ найдется $[x_{k-1}, x_k]$ на ком. $f(x)$ неогр. $\Rightarrow$

$\exists \xi_k^*$, что $|f(\xi_k^*)|$ - сколь угодно большое значение

(P'', ξ'') : $\xi'' = (\xi'_1, \ldots, \xi'_{k-1}, \xi_k^*, \xi'_{k+1}, \ldots, \xi'_n)$ $\quad$ $f \in R[a; b]$

$|\sigma(f, (P', \xi')) - \sigma(f, (P'', \xi''))| = |(f(\xi'_k) - f(\xi_k^*))(x_k - x_{k-1})| \geq (|f(\xi_k^*)| - |f(\xi'_k)|)|\Delta x_k| \geq 1$

12. Критерий Коши. Достаточное усл. инт-ти ф-и

Критерий Коши $f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0$
$\forall (P',\xi'),(P'',\xi''): \lambda(P')<\delta \quad \lambda(P'')<\delta \quad |\sigma(f,(P',\xi'))-\sigma(f,(P'',\xi''))|<\varepsilon$

Дост. усл. $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega(f,\Delta x_k)|\Delta x_k| = 0 \quad \Rightarrow f\in R[a;b]$

$\blacktriangleright$ $\varepsilon>0$. Т.к. $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega(f,\Delta x_k)|\Delta x_k| = 0$, то $\exists\ \delta=\delta_\varepsilon>0$:

$\forall P[a;b],\ \lambda(P)<\delta \quad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\omega(f,\Delta x_k)|\Delta x_k| < \varepsilon/2$

Для (P,ξ); $(\tilde{P},\tilde{\xi})$ - продолжение разбиения

$|\sigma(f,(P,\xi))-\sigma(f,(\tilde{P},\tilde{\xi}))| = |\sum_{\ell=1}^{n} f(\xi_\ell)|\Delta x_\ell| - \sum_{\ell=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k_\ell} f(\tilde{\xi}_{\ell_j})|\Delta x_{\ell_j}|)| =$

$= |\sum_{\ell=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k_\ell}(f(\xi_\ell)-f(\tilde{\xi}_{\ell_j}))|\Delta x_{\ell_j}|)| \leq \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_\ell}|f(\xi_\ell)-f(\tilde{\xi}_{\ell_j})||\Delta x_{\ell_j}| \leq$

$\leq \sum_{\ell=1}^{n}\omega(f,\Delta x_\ell)\sum_{j=1}^{k_\ell}|\Delta x_{\ell_j}| = \sum_{\ell=1}^{n}\omega(f,\Delta x_\ell)|\Delta x_\ell| < \varepsilon/2$

Для (P',ξ'), (P'',ξ''), что $\lambda(P')<\delta_\varepsilon$, $\lambda(P'')<\delta_\varepsilon$. $\tilde{P}=P'\cup P''$ - прод. разбиений
Тогда $\lambda(\tilde{P})<\delta_\varepsilon$; $\tilde{\xi}$ - любые отм. точки из $\tilde{P}$, то

$$\left.\begin{aligned}&|\sigma(f,(P',\xi'))-\sigma(f,(\tilde{P},\tilde{\xi}))|<\varepsilon/2\\&|\sigma(f,(P'',\xi''))-\sigma(f,(\tilde{P},\tilde{\xi}))|<\varepsilon/2\end{aligned}\right\} |\sigma(f,(P',\xi'))-\sigma(f,(P'',\xi''))|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

(13) Суммы Дарбу. Критерий интегр-ти ф-и

Суммы Дарбу $s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \quad m_k = \inf\limits_{x \in \Delta x_k} f(x)$

$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \quad M_k = \sup\limits_{x \in \Delta x_k} f(x)$

След. $s(f,P) \leq \sigma(f,(P,\xi)) \leq S(f,P)$

Лемма $s(f,P) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f,(P,\xi)) \quad S(f,P) = \sup\limits_{\xi} \sigma(f,(P,\xi))$

▶ $\exists \xi_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$, что $f(\xi_k^*) \geq M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$

$S(f,P) \geq \sigma(f,(P,\xi^*)) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^*)\Delta x_k \geq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \varepsilon = S(f,P) - \varepsilon$

$s(f,P) \leq \sigma(f,(P,\xi^{**})) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{**})\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k + \varepsilon = s(f,P) + \varepsilon$

Интеграл Дарбу $\underline{I} = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) \quad \overline{I} = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)$

Критерий интегрируемости ф-и $f(x)$ - вещ. и огр. на $[a,b]$, то $f \in R[a,b] \iff \overline{I} = \underline{I} = \int_a^b f(x)dx$

▶ $\Rightarrow \varepsilon > 0 : \quad \underbrace{-\varepsilon + \sigma(f,(P,\xi^{**}))}_{\lambda(P)\to 0 \;\to\; -\varepsilon + I} \leq s(f,P) \leq \underbrace{\sigma(f,(P,\xi))}_{\to I} \Rightarrow \overline{I} = \underline{I} = I$

$\Leftarrow \quad \underbrace{s(f,P)}_{\lambda(P)\to 0 \;\to \underline{I}} \leq \sigma(f,(P,\xi)) \leq \underbrace{S(f,P)}_{\to \overline{I}}$, т.к. $\underline{I} = \overline{I}$ по т. о зам. п-ти $\exists\, \underline{I} = I = \overline{I}$

(14) Инт-ть монотонной ф-и. Инт-ть непрерывной ф-и. Критерий Лебега. Мн-во Лебеговой меры "0"

Дост. усл. $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta x_k)|\Delta x_k| = 0 \Rightarrow f \in R[a;b]$

f - монот. на $[a;b] \Rightarrow f \in R[a;b]$

▶ Если f - монот. $\Rightarrow |f(x)| \leq \max\{|f(a)|, 1, |f(b)|\} = C$ → ограниченная
Пусть $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2C}$, то (P,ξ) и $\lambda(P) < \delta$:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta x_k) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})||\Delta x_k| \leq \delta \left|\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\right| = \delta|f(b) - f(a)| \leq 2C\delta \leq \varepsilon$$

$f \in C[a;b] \Rightarrow f \in R[a;b]$

▶ Из дост. усл. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall (P,\xi): \lambda(P) < \delta \ \sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta x_k)|\Delta x_k| < \varepsilon \Rightarrow f \in R[a;b]$

Если $f \in C[a;b]$, то по т. Кантора $f(x)$ равномерно непрер. на $[a;b]$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$, что $\omega(f,\Delta x_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ для $\forall |\Delta x_k| < \delta_\varepsilon$, где $\Delta x_k \subseteq [a;b]$

Отсюда $\sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta x_k)|x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}|\Delta x_k| = \varepsilon$

Мн-во Лебеговой меры "0" $\mu(A) = 0$, $A \subset \mathbb{R}^1$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ не более чем сч. наб. $\{I_k\}_{k=1}^{+\infty}$
что $A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| \leq \varepsilon$

Критерий Лебега $f \in R[a;b] \Leftrightarrow$ f - огр. на $[a;b]$
f - непрер. почти всюду на $[a;b]$

▶ $\Leftarrow$ 1,2

$\Rightarrow$ мн-во т. E не яв. мн-вом меры "0". Пусть $E_n = \{x \in [a;b] : \omega(f,x) \geq \frac{1}{n}\}$
Тогда $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ и $\exists N$, что E_N не яв. мн-вом меры "0"

Пусть P - произв. разбиение. Положим $A = \{\Delta x_k : \Delta x_k \cap E_N \neq 0$ либо $\omega(f;\Delta x_k) \geq \frac{1}{2N}\}$

Тогда справедливо $E_n \subseteq A$. Определим $B = \{$все ост. $\Delta x_k\}$

Построим $\xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$, $\xi^{**} = (\xi_1^{**}, \dots, \xi_n^{**})$:
1) на A $\xi_k^*, \xi_k^{**} \in \Delta x_k$: $|f(\xi_k^*) - f(\xi_k^{**})| > \frac{1}{3N}$
2) на B произв. $\xi_k^* = \xi_k^{**} \in \Delta x_k$

Тогда $|\sigma(f,(P,\xi^*)) - \sigma(f,(P,\xi^{**}))| \geq \sum\limits_{k:\Delta x \text{ из } A} |f(\xi^*) - f(\xi^{**})||\Delta x_k| \geq \frac{1}{3N} \cdot \sum\limits_{k:\Delta x \text{ из } A} \Delta x_k > \frac{\varepsilon}{3N}$
$\Rightarrow f(x)$ не инт., что против.

(18) Опр. интеграл с переменным верхним пределом. Ф-ла Ньютона – Лейбница

Лемма 1) $f \in R[a,b] \Rightarrow \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \in C[a,b]$

2) $f \in C[a,b] \Rightarrow \Phi(x) \in C'[a,b]$, $\Phi'(x) = f(x)$

▶ 1) $|\Phi(x+h) - \Phi(x)| = \left|\int_a^{x+h} - \int_a^x\right| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \leq C\left|\int_x^{x+h} dt\right| = C\cdot h$, $h \to 0$

2) $\dfrac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \dfrac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \dfrac{\int_x^{x+h} f(x) + \alpha(x,h)\,dt}{h} = f(x) + \alpha(x,h)$

где $\alpha(x,h) = o(1)$, $h \to 0$

$\Rightarrow$ дифф. ф-и $\Phi(x)$

$\Phi'(x) = f(x)$. т.к. $f \in C[a,b]$, $\Phi(x) \in C'[a,b]$

Теор. Формула Ньютона – Лейбница $f \in C[a,b]$, то $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

▶ $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow \Phi \in C'[a,b]$ $\Phi'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

Пусть $F(x)$ – произвольная первообр.

$\Rightarrow \exists\, C$ – const, что $F = \Phi(x) + C \Rightarrow F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$

(19) Замена переменной и интегрирование по частям в опр. интеграле. Ф-ла Тейлора с ост. в инт. виде.

Инт. по частям $f, g \in C^1[a, b]$ $\quad \int_a^b f \cdot g' dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f' g \, dx$

▶ $(f \cdot g)' = f'g + fg' \Rightarrow fg\Big|_a^b = \int_a^b f'g \, dx + \int_a^b fg' \, dx$

Ф-ла Тейлора с ост. в инт. виде $f \in C^n(\vartheta(x_0))$ $\quad x \in \vartheta(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) \, dt$$

▶ $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) \, dt = -\int_{x_0}^x f'(t) \, d(x-t) = f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x-t) \, dt =$

$= f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^x f''(t) \, d\left(\frac{(x-t)^2}{2}\right) = f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \frac{1}{2!}\int_{x_0}^x f'''(t)(x-t)^2 dt$

$= \ldots = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) \, dt$

Замена переменной $\quad \varphi \in C^1[\alpha, \beta]$, $f \in C[a; b]$ $\quad \varphi \in [\alpha, \beta]$ $\quad \varphi(\alpha) = a$

$f(\varphi) \in [a, b]$ $\quad \varphi(\beta) = b$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt = \Phi(t)\Big|_\alpha^\beta = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

$x = \varphi(t)$ | $\alpha = \varphi^{-1}(a)$

$dx = \varphi'(t) \, dt$ |

$t = \varphi^{-1}(x)$ | $\beta = \varphi^{-1}(b)$

▶ $(\Phi(x))' = f(x)$ на $[a; b]$

$(\Phi(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

1) $\int_a^b f(x) \, dx = \Phi(b) - \Phi(a)$

2) $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha))$

т.к. $\varphi(\alpha) = a$ $\quad \varphi(\beta) = b$ $\quad 1 = 2$

(15) Теоремы о среднем

Лемма 1) $f, g \in R[a,b]$, $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

2) $f, |f| \in R[a,b] \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

След. 1) $f \in R[a,b] \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

2) $f \in C[a,b] \Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

Первая теорема о среднем $f, g \in R[a,b]$, $g(x) \ge 0$, $\forall x \in [a,b]$; $m \le f \le M$ $\forall x \in [a,b]$ $\Rightarrow \exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$

▶ $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)\,dx$

Если $\int_a^b g(x)dx \ne 0 \Rightarrow m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M \Rightarrow \exists \mu \in [m,M] : \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \mu$

Преобр. Абеля $\{a_k\}_{k=1}^n$ $\{b_k\}_{k=1}^n \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1})b_k$

Лемма $\sum_{k=1}^n a_k b_k : b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n \ge 0$ $m \le \sum_{k=1}^s a_k \le M$ $s = \overline{1,n}$ $\Rightarrow mb_1 \le \sum_{k=1}^n a_k b_k \le Mb_1$

Лемма $f, g \in R[a,b]$, $g(x)$ – неотр., невозр. ф-я на $[a;b] \Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx$$

Вторая теорема о среднем $f \in R[a,b]$, $g(x)$ – монот. на $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0)\int_a^\xi f(x)dx + g(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

▶ Пусть g – невозр. $G(x) = g(x) - g(b-0) \Rightarrow \int_a^b f(x)G(x)dx = G(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx - g(b-0)\int_a^b f(x)\,dx = g(a+0)\int_a^\xi f(x)dx - g(b-0)\int_a^\xi f(x)\,dx$$

Пусть g – неубыв. $G(x) = g(b-0) - g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)G(x)dx = G(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx$

$$-\int_a^b f(x)g(x)dx + g(b-0)\int_a^b f(x)dx = g(b-0)\int_a^\xi f(x)dx - g(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx$$

(16) Несобственный интеграл. Критерий Коши. Признаки сравнения для несобств. интегралов от неотр. ф-й

Несобств. интеграл $f(x) \notin R[a,\omega)$; $\forall b \in (a,\omega)$ $f(x) \in R[a,b]$
$$\exists \lim_{b\to\omega^-} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\omega f(x)\,dx$$

Крит. Коши $f \in R[a,b]$ $\forall b\ [a,\omega]$

Несобств. инт. сходится $\int_a^\omega f(x)\,dx \iff \forall \varepsilon>0\ \exists B: [b,\omega]: \forall b_1, b_2 \in [B,\omega)$
$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

▶ $\lim\limits_{b\to\omega} \int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\omega^-} F(x) \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists B\in[b,\omega)\ \forall b_1, b_2 \in [B,\omega)\ |F(b_1)-F(b_2)|<\varepsilon$

Теор Пусть $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a,\omega)$

1) $\int_a^\omega g(x)dx$ – сход. $\Rightarrow \int_a^\omega f(x)dx$ – сход.

2) $\int_a^\omega f(x)\,dx$ – расх. $\Rightarrow \int_a^\omega g(x)dx$ – расх.

▶ $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \le \left|\int_{b_1}^{b_2} g(x)dx\right|$ + Крит. Коши

Теор Пусть $f, g \in R[a,b]$, $\forall b \in [a,\omega)$, $f(x), g(x) \geqslant 0$; $f(x) \sim g(x)$, $x\to\omega^-$
$\Rightarrow$ (F) $\iff$ (G) сход. и расх. одновременно

▶ $C_2|g| < |f| \le C_1|g|$, $\forall x \in [b,\omega)$

$$C_2\int_{b_1}^{b_2}|g|dx \le \int_{b_1}^{b_2}|f|dx \le C_1\int_{b_1}^{b_2}|g|dx$$

17. Сходимость интегралов вида $\int_1^{+\infty} dx/x^p$, $\int_0^1 dx/x^p$. Признак Абеля – Дирихле.

След. $0 \le f$ $\forall x \in [a; +\infty]$ $\forall b \in [a; +\infty)$, $f \in R[a, b]$

$$f(x) \sim \frac{c}{x^p}, \; x \to \infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \begin{matrix} \text{сходится } p>1 \\ \text{расходится } p \le 1 \end{matrix}$$

След. $0 \le f$ $\forall x \in [a, c]$, $c > a \ge 0$, $\forall b \in [a, c]$, $f \in R[b, c]$

$$f(x) \sim \frac{c}{(x-a)^p}, \; x \to a^+ \Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx \quad \begin{matrix} \text{сходится } p<1 \\ \text{расходится } p \ge 1 \end{matrix}$$

Признак Абеля – Дирихле Пусть $f, g \in R[a, b]$, $\forall b \in [a, \omega)$; $g(x)$ – монот. на $[a, \omega)$

Если (Дирихле): $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le C, \forall b \in [a, \omega)$ $\quad \lim_{x \to \omega^-} g(x) = 0$

или (Абеля): $\int_a^\omega f(x)\,dx$ – сходится $\quad |g(x)| \le C, \; \forall x \in [a, \omega)$

то $\int_a^\omega f(x) g(x)\,dx$ – сходится

▶ $\int_{b_1}^{b_2} f(x) g(x)\,dx = g(b_1+0)\int_{b_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(b_2-0)\int_{\xi}^{b_2} f(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_{b_1}^{b_2} f(x) g(x) \le C_1 \varepsilon + C_2 \varepsilon \le \varepsilon C$

(20) Площадь криволинейной трапеции. Площадь в полярных координатах. Объем тела вращения

Площадь крив. трапеции $f \in R[a,b]$, $\Omega = \{(x,y) \in R^2 : x \in [a,b]\ y \in [0, f(x)]\}$
$\Rightarrow S(\Omega) = \int_a^b f(x)\,dx$

▶ $m_k = \inf_{x \in \Delta x_k} f(x)$ $M_k = \sup_{x \in \Delta x_k} f(x)$ $S_k = S(\Omega)$ $y = f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k]$
$\lambda(P) = \max_{k=\overline{0,n-1}} \Delta x_k$ $\Rightarrow$ $m_k \Delta x_k \leq S_k \leq M_k \Delta x_k$
$\sum m_k \Delta x_k \leq \Omega \leq \sum M_k \Delta x_k$
$\lambda(P) \to 0 \Rightarrow S(\Omega) \to \int_a^b f(x)\,dx$, как суммы Дарбу

Площадь в пол. коорд. $r = r(\varphi) \in R[\alpha, \beta)$ $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$
$\Rightarrow S(\Omega) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$

▶ $r_k = \inf_{\varphi \in \Delta\varphi_k} r(\varphi)$ $R_k = \sup_{\varphi \in \Delta\varphi_k} r(\varphi)$, $\Omega_k \Rightarrow S(\Omega)$, $r = r(\varphi)$ φ_{k-1}, φ_k
$\lambda(P) = \max_{k=\overline{0,n-1}} \Delta\varphi_k$ $\frac{1}{2} r_k^2 \Delta\varphi_k \leq \Omega_k \leq \frac{1}{2} R_k^2 \Delta\varphi_k$
$\frac{1}{2}\sum r_k^2 \varphi_k \leq \Omega \leq \frac{1}{2}\sum R_k^2 \Delta\varphi_k$
$\lambda(P) \to 0 \Rightarrow S(\Omega) \to \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$, как суммы Дарбу

Объем отн. оси O_x $f^2 \in R[a,b]$ $y = f(x)$: $V_{y=0} = V_{O_x} = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

▶ $m_k = \inf_{x \in \Delta x_k} |f(x)|$, $M_k = \sup_{x \in \Delta x_k} |f(x)|$. $V_k \Rightarrow V_{Ox}$
$\lambda(P) = \max_{k=\overline{0,n-1}} \Delta x_k$ $\pi m_k^2 \Delta x_k \leq V_k \leq \pi M_k^2 \Delta x_k$
$\pi\sum m_k^2 \Delta x_k \leq V \leq \pi \sum M_k^2 \Delta x_k$
$\lambda(P) \to 0$ $V \to \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$, как суммы Дарбу

Объем отн. оси O_y $f(x) \in R[a,b]$ $y = f(x)$: $V_{x=0} = V_{O_y} = 2\pi\int_a^b |x f(x)|\,dx$

▶ $m_k = \inf_{x \in \Delta x_k} |f(x)|$ $M_k = \sup_{x \in \Delta x_k} |f(x)|$, $V_k \Rightarrow V_{Oy}$
$\lambda(P) = \max_{k=\overline{0,n-1}} \Delta x_k$ $V_k \leq \pi M_k |x_k^2 - x_{k-1}^2| = \pi M_k |2x_{k-1}\Delta x_k + \Delta x_k^2| \leq 2\pi M_k |x_{k-1}|\Delta x_k + \lambda(P)\pi M_k \Delta x_k$
$V_{Oy} \leq 2\pi\sum_{k=1}^n M_k |x_{k-1}| \Delta x_k + \lambda(P)\pi\sum_{k=1}^k M_k \Delta x_k$
$\lambda(P) \to 0$ $\sum_{k=1}^k M_k \Delta x_k \to \int_a^b f(x)\,dx$ $\Rightarrow V_{Oy} \leq 2\pi\int_a^b |x f(x)|\,dx$
Аналогично $V_{Oy} \geq 2\pi\int_a^b |x f(x)|\,dx$

Коллоквиум 4

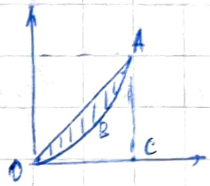
① Спрямляемая кривая $\exists$ и конечен $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{A_kA_{k-1}}|$ – длина кривой, где $\lambda(P)=\max\limits_{k=\overline{1,n}}|\overrightarrow{A_kA_{k-1}}|$ – параметр разбиения

② Длина кривой $x(t), y(t), z(t) \in C^1[\alpha;\beta]$

$$l_{[\alpha,\beta]}=\int_\alpha^\beta dl, \text{ где } dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt$$

③ Площадь поверхности $x(t), y(t) \in C^1[a,b]$; $S_{Ox}=2\pi\int_a^b y\,dl$

④ Дисконтирование $K=\int_0^T f(t)e^{-nt}dt$



Кривая Лоренца. Коэф. Джини $k=\frac{S_{OAB}}{S_{OAC}}$

⑤ Кратный интеграл $f\in R(I)$, если $\exists$ конечный $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,(P,\xi))$

$$=\int_I f(\vec{x})\,d\vec{x}$$

⑥ Критерий Коши $f\in R(I) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(P_1,\xi_1),(P_2,\xi_2): \lambda(P_{1,2})<\delta$

$$|\sigma(f,(P_1,\xi_1))-\sigma(f,(P_2,\xi_2))|<$$

⑦ Необх. признак интегрируемости $f\in R(I) \Rightarrow f$ – ограничена на I

⑧ Мн-во меры "0" по Лебегу A, если для $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ набор d-мерных пром. $\exists I_k$, $k=\overline{1,\infty}$

1. $A\subseteq\bigcup_{k=1}^{+\infty}I_k$ 2. $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(I_k)<\varepsilon$

⑨ Критерий Лебега $f\in R(I) \Leftrightarrow f$ – огр. на I, непрер. почти всюду на I

⑩ Суммы и интегралы Дарбу $s(f,P)=\sum_{k=1}^{N}m_k\mu(I_k)$ $\underline{J}=\sup\limits_P s(f,P)$

$S(f,P)=\sum_{k=1}^{N}M_k\mu(I_k)$ $\overline{J}=\inf\limits_P S(f,P)$

⑪ Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу

$f\in R \Leftrightarrow f$ – ограничена, $\overline{J}=\underline{J}$

⑫ Квадрируемое мн-во $E \subset \mathbb{R}^d$, если 1. E – огран. мн-во
2. ∂E – мн-во Лебег. меры "0"

⑬ Измеримость по Жордану E – изм. по Жордану, если $\exists$ конечн. интеграл $\mu(E) = \int_E 1 \cdot dx$ – мера Жордана

Мн-во меры "0" по Жордану E, при $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ I_k : $k = \overline{1, n}$

1. $E \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ 2. $\sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) < \varepsilon$

⑭ Критерий измеримости по Жордану

E – измер. по Жордану $\Leftrightarrow$ E – ограничено в $\mathbb{R}^d$
∂E – Жорданова мера "0"

⑮ Теорема Фубини $I = I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^d$. $(x, y) \in \mathbb{R}^d$ $x \in \mathbb{R}^m$ $y \in \mathbb{R}^{d-m}$

$f \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow \exists$ и $\int_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x,y)\,dx \right) dy$

⑯ Теорема о замене переменного

1) $G_{u,v} \xrightarrow{F} G_{x,y}$
2) D, D^* – квадр. и замкн. мн-ва : $\overline{D} \subset G_{u,v}$; $\overline{D^*} \subset G_{x,y}$
3) $J = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ $\forall (u,v) \in G_{u,v}$
4) $f(x,y) \in \mathcal{R}(D^*)$, где $D^* = F(D)$

то $\iint_{D^*} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J| \cdot du\,dv$

⑰ Якобиан в обобщенной полярной системе координат

$\begin{cases} x = ar\cos^\alpha \varphi \\ y = br\sin^\alpha \varphi \end{cases}$ $J = ab\alpha r \cos^{\alpha-1}\varphi \sin^{\alpha-1}\varphi$, где $a, b, \alpha > 0$

$\begin{cases} x = a r^{1/p} \cos^{\alpha/p}\varphi \\ y = b r^{1/q} \sin^{\alpha/q}\varphi \end{cases}$ $J = \frac{ab\alpha}{pq} r^{1/p + 1/q - 1} \cos^{\alpha/p - 1}\varphi \sin^{\alpha/p - 1}\varphi$, где $a, b, \alpha, p, q > 0$

(18) Якобиан в обобщенной сферической системе координат

$$\begin{cases} x = a\, R \cos^{\alpha}\varphi \cos^{\beta}\theta \\ y = b\, R \sin^{\alpha}\varphi \cos^{\beta}\theta \\ z = c\, R \sin^{\beta}\theta \end{cases} \qquad a, b, c, \alpha, \beta > 0$$

$$J = abc\alpha\beta\, R^2 \cos^{\alpha-1}\varphi \sin^{\alpha-1}\varphi \cos^{2\beta-1}\theta \sin^{\beta-1}\theta$$

$$\begin{cases} x = aR^{1/p} \cos^{\alpha/p}\varphi \cos^{\beta/p}\theta \\ y = bR^{1/q} \sin^{\alpha/q}\varphi \cos^{\beta/q}\theta \\ z = cR^{1/s} \sin^{\beta/s}\theta \end{cases} \qquad a, b, c, \alpha, \beta, p, q, s > 0$$

$$J = \frac{abc\alpha\beta}{pqs} R^{1/p + 1/q + 1/s - 1} \cos^{\alpha/p - 1}\varphi \sin^{\alpha/q - 1}\varphi \cos^{\beta/q + \beta/p - 1}\theta \sin^{\beta/s - 1}\theta$$

(19) Исчерпание мн-ва $D \subset \mathbb{R}^d$ — п-ть изм. по Жордану мн-в $\{D_n\}_{n=1}^{+\infty}$

1) $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots,\ D_n \subset D$
2) $\forall x \in D : \exists N : x \in D_N$, т.е. $D = \bigcup\limits_{n \in N} D_n$

(20) Несобственный интеграл $\{D_n\}_n^{+\infty}$ — допуст. исчерпание $f(x)$ мн-ва D,

если $\exists$ кон. предел, не завис. от исчерп. $\int\limits_D f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f\,dx$
то $f(x)$ — инт. в несобств. смысле на D

(21) Теоремы о несобств. интеграле D — квадр. мн-во

1) $f \in R(D)$ в нес. смысле $\Leftrightarrow$ f — абсолютно инт. на D

2) $f \in R(D_n)$, $f \geq 0$ на D
$\exists$ хотя бы 1 исчерпание D_n: $\lim \int\limits_{D_n} f(x)dx$ сход. и конечен,

то интеграл сходится в несобств. смысле

(22) Интеграл Эйлера-Пуассона $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

(23) Гладкая поверхность S : $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$
отобр. квадр. мн-ва $D \to S$

1. $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v) \in C^1(D)$
2. $\bar{r}_u \times \bar{r}_v \neq 0$, $\forall (u,v) \in D$, $\bar{r} = (x, y, z)$

(24) Площадь поверхности

$$\iint\limits_S dS = \lim_{h\to 0} \sum_{k:\Delta_k \subset D} \sigma_k = \iint\limits_D |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|\, du\, dv$$

(25) Тождество Лагранжа $A^2+B^2+C^2 = EF - G^2$

$\bar{r}_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$, $\bar{r}_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$

$$|\bar{r}_u \times \bar{r}_v| = |\bar{r}_u|\cdot|\bar{r}_v|\cdot \sin\alpha = |\bar{r}_u||\bar{r}_v|\sqrt{1-\cos\alpha} =$$
$$= \sqrt{(\bar{r}_u,\bar{r}_u)(\bar{r}_v,\bar{r}_v) - (\bar{r}_u,\bar{r}_v)^2} = \sqrt{EF - G^2}$$

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) = (A,B,C)$$

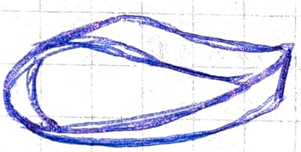
(26) $A(u,v), B(u,v), C(u,v)$: $dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$

(27) Ориентация п-ти $\bar{v}: S \to \mathbb{R}^3$ для $S \subset \mathbb{R}^3$ задана в каждой т. поверхности S: $|\bar{v}| = 1$

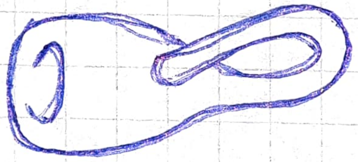
Ориент. п-ть $S \subset \mathbb{R}^3$ имеет ориент. $\bar{v}$

(28) Неориент. п-ти – п-ти, не допуск. ориент.

Лист Мебиуса



Бутылка Клейна



(29) Поверхностный интеграл I

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS = \iint_D \tilde{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EF-G^2}\,du\,dv$$

(30) Поверхностный интеграл II $\bar{v} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$\bar{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ зад. на S гладк. ориент. п-ти

$$\iint_S \bar{a}\,d\bar{S} = \iint_S \bar{a}\bar{v}\,dS = \iint (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

(31) Теорема о поверхностных интегралах

Φ - непрер. ф-я на S ; S - глад. п-ть на D - квадр. мн-ве

$$\sigma_1 = \sum_{k: D_k \subset D} \Phi(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k), z(u_k, v_k)) \mu(S_k) \to \iint_S \Phi dS$$

$$\sigma_2 = \sum_{k: D_k \subset D} \Phi(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k), z(u_k, v_k)) \cos\alpha \, \mu(S_k) \to \iint_S \Phi \, dy dz$$

$$\sigma_3 = \sum_{k: D_k \subset D} \Phi(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k), z(u_k, v_k)) \cos\beta \, \mu(S_k) \to \iint_S \Phi \, dz dx$$

$$\sigma_4 = \sum_{k: D_k \subset D} \Phi(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k), z(u_k, v_k)) \cos\gamma \, \mu(S_k) \to \iint_S \Phi \, dx dy$$

$\max \mu(S_k) \to 0, \ k \to +\infty$

(32) Гладкая кривая ℓ, если $x, y, z \in C^1[a;b]$

$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2 \neq 0, \ \forall t \in [a;b]$

(33) Криволинейный интеграл I. Свойства

ℓ - спрямляемая кривая, $\Phi(x,y,z)$ инт. по ℓ, $\exists$ и конечен:

$$\int_{AB} \Phi(x,y,z) \, dl = \int_0^L \Phi(x(l), y(l), z(l)) \, dl$$

1) $\int_{AB} \Phi dl = \int_{BA} \Phi dl$

2) $\int_{AB} \Phi \, dl = \int_0^L \Phi(x(l), y(l), z(l)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} \, dt$

(34) Криволинейный интеграл II. Свойства

$P, Q, R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$

ℓ - гладкая кривая, τ - ед. вектор кас. к ℓ

$\bar{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\bar{a} : (P, Q, R)$

$$\int_{AB} \bar{a} \, d\bar{\tau} = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) \, dl$$

$$\tau = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{x'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}, \frac{y'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}, \frac{z'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}} \right.$$

1) $\int_{AB} \bar{a} \, d\bar{\tau} = -\int_{BA} \bar{a} \, d\bar{\tau}$

2) $\int \bar{a} \, d\bar{\tau} = \int_0^L (P x'_t + Q y'_t + R z'_t) \, dt$

35 Теорема о криволинейных интегралах

l - гладкая кривая, $l = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [\alpha; \beta]$; $\Phi \in C(l)$

то $\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \Phi(x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k)) \Delta l_k \xrightarrow{\max(\Delta l_k) \to 0} \int_{AB} \Phi dl$

$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} \Phi(x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k)) x'_t(\xi_k) \Delta t_k \to \int_{AB} \Phi \cos\alpha \, dl$

36 Криволинейная трапеция по оси O_x и O_y

Ω : $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C[a; b]$ по O_x

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

Ω : $\psi_1(x), \psi_2(x) \in C[c; d]$ по O_y

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$

37 Простое мн-во $\mathbb{R}^2$

Ω, если предст. в виде кон. объед. Ω_{0x}, Ω_{0y}

38 Формула Грина

1) Ω - простая область
2) $P, Q \in C^1(\overline{\Omega})$
3) Обход границы так, чтобы обл. ост. слева

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} (Q'_x - P'_y) dx dy$$

39 Вычисл. площади по зад. параметр. границы

$$\left.\begin{matrix} P = x & Q = 0 \\ P = 0 & Q = y \\ P = x & Q = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow S(\Omega) = \int_{\partial\Omega} y dx = -\int_{\partial\Omega} x dy = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} y dx - x dy = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} y^2 d\left(\frac{x}{y}\right)$$

40 Потенциальное поле $\overline{a} = (P, Q)$, если $\exists U = U(x, y)$:

$U'_x = P$, $U'_y = Q$ в D

41. **Односвязное мн-во** D, если произв. замкн. контур огр. мн-во целиком лежащ. в мн-ве D

42. **Усл. независимости криволинейного интеграла от пути инт.**

$P, Q, P'_y, Q'_x \in C(\tilde{D})$, D – простое односв. мн-во

Усл. эквивалентны:

1) $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$
2) $\int_{A_1A_2} P\,dx + Q\,dy = \int^*_{A_1A_2} P\,dx + Q\,dy$
3) $\bar{a} = (P, Q)$ – потенциально в D
4) $P'_y = Q'_x$ в D

43. **Криволинейный цилиндр по Oz** $D \in \mathbb{R}^3$

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega \quad Z_1(x, y) \leq Z \leq Z_2(x, y)\}$

Ω – прост. обл. в $\mathbb{R}^2$

$Z_1(x, y),\ Z_2(x, y)$ – огр. гладкие п-ти S_1, S_2

44. **Простое мн-во $\mathbb{R}^3$** $D \in \mathbb{R}^3$, если представимо в виде кон. числа объед. крив. цилиндров по Oz $(D = D_1^2 \cup \ldots \cup D_n^2)$, по Ox, по Oy

45. **Формула Остроградского**

1) $P, Q, R, P'_x, Q'_y, R'_z \in C(D)$
2) D – простое ориент. мн-во в $\mathbb{R}^3$, огр. S

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint_{D_k} (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dx\,dy\,dz$$

46. **Вычисление объёма по зад. параметр. границы**

$D \in \mathbb{R}^3$ – простое ориент., огр. S

$$\left.\begin{array}{l} P = x \quad Q = R = 0 \\ Q = y \quad P = R = 0 \\ R = z \quad Q = P = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow V(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_S x\cos\alpha\,dS = \iint_S y\cos\beta\,dS =$$

$$= \iint_S z\cos\gamma\,dS = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$$

(47) Край поверхности ∂S – мн-во краевых точек

если т. (u,v) граница к D, то $\bar{r}(u;v)$ краевая к S

(48) Формула Стокса

1) $S \in C^2(D_{u,v})$ – гладкая, $D_{u,v}$ – простая $\in \mathbb{R}^2$, ∂S – край S
2) $P, Q, R, P'_y, P'_z, Q'_x, Q'_z, R'_x, R'_y \in C(S)$
3) Обход по пр-лу буравчика

$$\oint\limits_{\partial S} P dx + Q dy + R dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \iint (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx + (Q'_x - P'_y) dx dy$$

Мат. анализ Коллоквиум 4

① Длина кривой. Площадь поверхности вращения

$\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}|\overrightarrow{A_k A_{k-1}}|$ – длина спрямляемой кривой

Теор. $x(t), y(t), z(t) \in C^1[\alpha, \beta]$

$$l_{[\alpha;\beta]} = \int_\beta^\alpha dl, \text{ где } dl = \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt$$

► по т. Лагранжа $\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\xi_k)\Delta t_k$; $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$

$\Delta y_k = y'(\mu_k)\Delta t_k$, $\mu_k \in (t_{k-1}, t_k)$

$\Delta z_k = z'(\eta_k)\Delta t_k$, $\eta_k \in (t_{k-1}, t_k)$

Откуда $\sum\limits_{k=1}^{n}|\overrightarrow{A_{k-1}A_k}| = \sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2+(\Delta z_k)^2}$

Пусть $v(\xi_k, \mu_k, \eta_k) = \sqrt{(x'(\xi_k))^2+(y'(\mu_k))^2+(z'(\eta_k))^2}$

тогда $\sum\limits_{k=1}^{n}|\overrightarrow{A_{k-1}A_k}| = \sum\limits_{k=1}^{n} v(\xi_k, \mu_k, \eta_k)\Delta t_k =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} v(t_k, t_k, t_k)\Delta t_k + \sum\limits_{k=1}^{n}(v(\xi_k, \mu_k, \eta_k)\Delta t_k - v(t_k, t_k, t_k)\Delta t_k) \to \int_\alpha^\beta v(t,t,t)dt + 0$

$(\lambda(P) = \max \Delta t_k \to 0)$

$|v(\xi_k, \mu_k, \eta_k) - v(t_k, t_k, t_k)| \le \omega(v, \sqrt{3}\Delta t_k) \le \omega(v, \sqrt{3}\lambda(P)) \to 0 \quad (\lambda(P)\to 0)$

$\sum|v(\xi_k, \mu_k, \eta_k) - v(t_k, t_k, t_k)|\Delta t_k \le \omega(v, \sqrt{3}\lambda(P))\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta t_k = (\beta-\alpha)\omega(v, \sqrt{3}\lambda(P)) \to 0$

$(\lambda(P)\to 0)$

Теор. $x(t), y(t) \in C^1(a, b)$, $S_{ox} = 2\pi\int_a^b y\,dl$

► Площадь п-ти усеч. конуса $S = \pi(R_1+R_2)l$

$S_k \le \pi(M_k + M_k)\Delta l_k \le 2\pi M_k \Delta l_k$

$\Rightarrow \sum S_k \le \sum \pi(2M_k)\Delta l_k$

$\downarrow$ $\Delta t_k \to 0 \Rightarrow \Delta l_k \to 0$

$2\pi\int_a^b y\,dl$

② Объем выпускаемой продукции. Дисконтированный доход. Коэффициент Джини.

1) Ф-я Кобба-Дугласа $f(x_1, x_2) = ab\, x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$

$g(t) = (\alpha t + \beta) e^{\gamma t}$ – затраты тр. мн. зав. от t
затраты капит. – const

Объем выпускаемой продукции за T лет: $Q = \int_0^T (\alpha t + \beta) e^{\gamma t} dt$

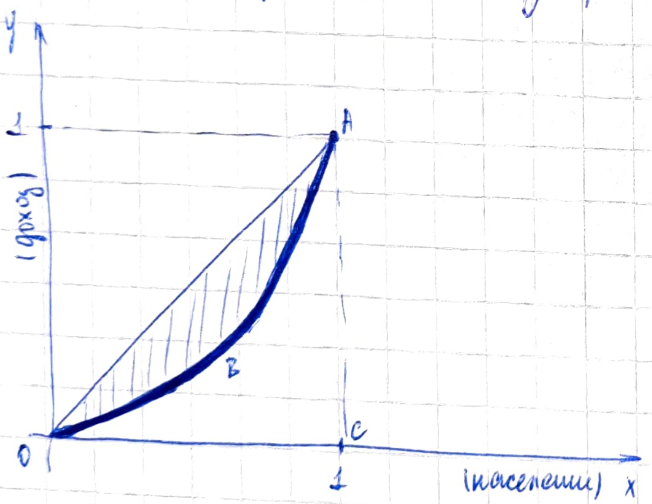
2) Дисконтирование – определение нач. суммы по её кон. величине, получ. через t лет при проц. ставке p

K_t – кон. сумма, K – нач. сумма

прост. проценты: $K_t = K(1 + mt)$, $m = \frac{p}{100}$ $\Rightarrow K = \frac{K_t}{1 + mt}$
сложн. проценты: $K_t = K(1 + mt)^t$ $\Rightarrow K = \frac{K_t}{(1 + mt)^t}$

$f(t)$ – поступ. доход, m – удельная норма проц. $K = \int_0^T f(t) e^{-mt} dt$

3) Кривая Лоренца – метод граф. изображения уровня концентрации.



OA – линия равномерного распр.
OBA – линия Лоренца

Коэффициент Джини – хар-ка степени неравенства в распределении $\frac{S_{OAB}}{S_{OAC}}$

③ Кратный интеграл. Необходимый признак интегрируемости. Примеры мн-ва меры "0" по Лебегу. Критерий Лебега

$f \in R(I)$, если $\exists$ и конечен $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,(P,\xi)) = \int\limits_I f(\bar{x})d\bar{x}$,

где $I = [\bar{a}, \bar{b}] = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : a_k \le x_k \le b_k,\ k=\overline{1,d}\}$ — брус

$\lambda(P) = \max\limits_{k=\overline{1,N}} diam(\Delta_k)$, где $diam(\Delta_k) = \sup\limits_{x_1,x_2\in\Delta_k} |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$

$\sigma(f,(P,\xi)) = \sum\limits_{k=1}^{N} f(\xi_k)\mu(\Delta_k)$, где $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_N)$, $\xi_k \in \Delta_k$, $k=\overline{1,N}$

$\mu(I) = \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k)$ — объем

Необходимый признак $f \in R(I) \Rightarrow f$ — ограничена на I

▶ Пусть $f \in R(I)$ и неограничена

$I = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ — разбиение, где хотя бы на одном I_ℓ ф-я неогранич.

Поэтому можно выбрать ξ^* : $|f(\bar{\xi}_\ell) - f(\bar{\xi}^*)|\mu(I_\ell) > 1$

Второй набор $\tilde{\xi} = \begin{cases} \bar{\xi}_k, & k = \overline{1,n} \setminus \{\ell\} \\ \bar{\xi}_*, & k = \ell \end{cases}$

Тогда $|\sigma(f,(P,\xi)) - \sigma(f,(P,\tilde{\xi}))| = |f(\bar{\xi}_\ell) - f(\bar{\xi}^*)|\mu(I_\ell) > 1$

противоречие: $f \notin R(I)$ по крит. Коши

Мн-во лебеговой меры "0" в $\mathbb{R}^d$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ набор d-мерных брус.
$\exists I_k$, $k = \overline{1,n}$, что
1. $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \varepsilon$

Примеры: 1) $A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : x_k \in \mathbb{Q},\ k = \overline{1,d}\}$

2) $\Gamma_f = \{(x, f(x)),\ x \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^d$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d-1}$
$f \in C[a;b] \Rightarrow f \in UC[a;b]$

$\Gamma_f \subseteq \bigcup_{k-1}^{N} I_k$; $\sum_{k=1}^{N} \mu(I_k) \le \delta(2\varepsilon)^{d-1}$,
где $I_k = [x_k, x_{k-1}] \times [f_1(\xi_k) - \varepsilon; f_1(\xi_k) + \varepsilon] \times \ldots \times [f_{d-1}(\xi_k) - \varepsilon; f_{d-1}(\xi_k) + \varepsilon]$

3) $\Gamma_f = \{(\bar{x}, f(\bar{x})),\ \bar{x} \in I\}$, где $f: \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$

Критерий Лебега $f \in R(I) \Leftrightarrow f$ — ограничена на I
непрерывна почти всюду на I

④ Суммы Дарбу. Сущ-е предела верхней (нижней) суммы Дарбу
Критерий интегрируемости

Пусть P – произвольное разбиение I.

Нижняя сумма Дарбу $s(f,P)=\sum_{k=1}^{N} m_k \mu(I_k)$; верхняя $S(f,P)=\sum_{k=1}^{N} M_k \mu(I_k)$
Нижний инт. Дарбу $\underline{J}=\sup_P s(f,P)$; верхний $\overline{J}=\inf_P S(f,P)$

Лемма для $\forall$ огр. ф-и $f: I\to\mathbb{R}$, $|f(x)|\le M$ 1) $\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) \Rightarrow \underline{J}$
2) $\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) \Rightarrow \overline{J}$

▶ $\varepsilon>0$; $P: s(f,P_\varepsilon) > \underline{J}-\varepsilon$
Γ_ε – совокупность тог. промежутка I на границе P_ε
Γ_ε – мн-во меры "0" $\Rightarrow$ для $\forall$ $P=\bigcup_{k=1}^{N} I_k$ $\exists\, \delta_\varepsilon>0$,
что из $\lambda(P)<\delta_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k:\, I_k\cap\Gamma_\varepsilon\ne\varnothing} \mu(I_k)<\varepsilon$

Пусть P – произв. разбиение с $\lambda(P)<\delta_\varepsilon$; $P'=P\cup P_\varepsilon$

$\underline{J}\ge s(f,P')\ge s(f,P_\varepsilon)>\underline{J}-\varepsilon$ по св-вам сумм Дарбу
$|s(f,P')-s(f,P)|<2M\varepsilon$, т.к. у P' и P все пром. одинак., кроме с Γ_ε

$\Rightarrow$ $\underline{J}-s(f,P)=\underline{J}-s(f,P')-s(f,P')-s(f,P)<(2M+1)\varepsilon$

$0<\underline{J}-s(f,P)\le(2M+1)\varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)=\underline{J}$

Критерий интегрируемости $f\in\mathcal{R} \Leftrightarrow$ f – ограничена
$\underline{J}=\overline{J}$

▶ 1) $f\in\mathcal{R}(I)\Rightarrow f$ – ограничена $\Rightarrow \exists\, \underline{J},\overline{J}$

$f\in\mathcal{R}(I)\Rightarrow s(f,P)=\inf_\xi \sigma(f,(P,\xi))\le \sigma(f,(P,\xi))\le \sup_\xi \sigma(f,(P,\xi))=S(f,P)$

2) f – огранич. $\underline{J}=\overline{J}$ $\Rightarrow$ $\underset{\downarrow\,\underline{J}}{s(f,P)} < \sigma(f,P,\xi) < \underset{\downarrow\,\overline{J}}{S(f,P)}$

⑤ Квадрируемые мн-ва. Мера Жордана. Критерий измеримости

Квадрируемое мн-во $E \subset \mathbb{R}^d$

1) E – огранич. мн-во
2) ∂E – мн-во Леб. меры "0"

Примеры: 1) Шар: $\{x \in \mathbb{R}^d : |\bar{x}| \le R\}$
2) Параллелепипед: $\{x \in \mathbb{R}^d : |x_k| \le a_k, \forall k = \overline{1,d}, a_k > 0\}$
3) $\{x \in [0;1]^d : x_k \in \mathbb{Q}, k = \overline{1,d}\}$ – не квадр. мн-во

Ω – мн-во из $\mathbb{R}^d$ $\quad \int\limits_\Omega f(x)dx = \int\limits_I f(x)\, \chi_\Omega(x)\, dx$,

где $\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$

Мера Жордана $\quad \exists$ конечный инт. $\mu(E) = \int\limits_E 1 \cdot dx$

Мн-во меры "0" $\quad$ при $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, I_k : k = \overline{1,n}$

1) $E \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$
2) $\sum_{k=1}^n \mu(I_k) < \varepsilon$

Теор. $\quad E$ – измеримо по Жордану $\Leftrightarrow$ E – огранич. в $\mathbb{R}^d$
∂E – Жорд. мера "0"

⑥ Теорема Фубини. Следствие

Сведение к повторному интегралу (теорема Фубини)

$I = I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^d$, $(x,y) \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{d-m}$

если $f \in R(I)$, то $\exists \int\limits_I f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{I_x}\left(\int\limits_{I_y} f(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_{I_y}\left(\int\limits_{I_x} f(x,y)\,dx\right)dy$

▶ Пусть $F(x) = \int\limits_{I_y} f(x,y)\,dy$

$$s(f,P) = \sum_{\substack{k_1=\overline{1,n_1}\\ k_2=\overline{1,n_2}}} \inf_{(x,y)\in\Delta_x^{k_1}\times\Delta_y^{k_2}} f(x,y)\,\mu(\Delta_x^{k_1})\mu(\Delta_y^{k_2}) \le \sum_{k_1=1}^{n_1} \inf\left(\sum_{k_2=1}^{n_2} \inf f(x,y)\,\mu(\Delta_y^{k_2})\right)\mu(\Delta_x^{k_1}) \le$$

$$\le \sum_{k_1=1}^{n_1} \inf_{x\in\Delta_x^{k_1}} \left(\int f(x,y)\,dy\right)\mu(\Delta_x^{k_1}) \le \sum_{k_1=1}^{n_1} \inf_{x\in\Delta_x^{k_1}} F(x)\,\mu(\Delta_x^{k_1}) \le$$

$$\le \sum_{k_1=1}^{n_1} \sup_{x\in\Delta_x^{k_1}} F(x)\,\mu(\Delta_x^{k_1}) \le \sum_{k_1=1}^{n_1} \sup_{x\in\Delta_x^{k_1}} \left(\int\limits_{I_y} f(x,y)\,dy\right)\mu(\Delta_x^{k_1}) \le$$

$$\le \sum_{k_1=1}^{n_1} \sup\left(\sum_{k_2=1}^{n_2} \sup f(x,y)\,\mu(\Delta_y^{k_2})\right)\mu(\Delta_x^{k_1}) \le \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} \left(\sup_{(x,y)\in\Delta_x^{k_1}\times\Delta_y^{k_2}} f(x,y)\right)\mu(\Delta_y^{k_2})\mu(\Delta_x^{k_1}) = S(f,P)$$

т.к. $s(f,P) = S(f,P)$ верно рав-во

Следствие D — огранич. мн-во в $\mathbb{R}^{d-1}$, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d : (x \in D) \wedge (\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ $\varphi_{1,2} \in C(D)$

Если $f \in R(\Omega)$, то $\int\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_D dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$

▶ Пусть $\Omega_x = \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}^d : \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}, & x \in D \\ \varnothing, & x \notin D \end{cases}$

$\chi_\Omega(x,y) = \chi_D(x)\cdot\chi_{\Omega_x}(y) \Rightarrow$

$$\int\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{I\supset\Omega} f(x,y)\cdot\chi_\Omega(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{I_x\supset D} dx \int\limits_{I_y\supset\Omega_x} f(x,y)\,\chi_\Omega(x,y)\,dy = \int\limits_{I_x}\left(\int\limits_{I_y} f(x,y)\cdot\chi_{\Omega_x}(y)\,dy\right)\chi_D(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{I_x}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)\chi_D(x)\,dx = \int_D dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

⑦ Замена переменных в двойном интеграле

Теор. 1) Пусть $G_{u,v} \xrightarrow{?} G_{x,y}$

2) D – квадрир. и замкнутое мн-во, $\overline{D} \subset G_{u,v}$

D^* – мн-во при отображении $\overline{D^*} \subset G_{x,y}$

3) $\mathcal{J} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall (u,v) \in G_{u,v}$

4) $f(x,y) \in R(D^*)$, где $D^* = F(D)$,

тогда $\iint\limits_{D^*} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D} f(x(u,v)\, y(u,v)) \cdot |\mathcal{J}|\, d u\, dv$

▶ разбиение $\mathbb{R}^2_{u,v}$ сеткой по x, y с шагом $h = h_k \to 0$, $k \to \infty$

$h_k = \frac{1}{2^k}$

$\overline{P}_1, \overline{P}_2 \in \Delta_e : |\overline{P}_1 - \overline{P}_2| \leq \sqrt{2}\, h_k$

$\overline{M}_1 = F(\overline{P}_1)$

$|\overline{M}_1 - \overline{M}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{\omega^2(x_1, \sqrt{2}h) + \omega^2(y, \sqrt{2}h)} \to 0$

D – квадр. мн-во $\Rightarrow \partial D$ – меры "0" $\Rightarrow$ площадь всех $\Delta_e \to 0$

$\sum\limits_{e: \Delta_e \subset D} f(\xi_e, \eta_e)\, \mu(\underbrace{F(\Delta_e)}_{\Delta e^*}) = \sum\limits_{e: \Delta_e^* \subset D^*} f(\xi_e, \eta_e)\, \mu(\Delta_e^*) \to \iint\limits_{D^*} f(x,y)\,dx\,dy \quad \begin{matrix} k \to +\infty \\ h_k \to 0 \end{matrix}$

где $(u_e, v_e) \in \overline{\Delta}_e \quad \begin{cases} \xi_e = x(u_e, v_e) \\ \eta_e = y(u_e, v_e) \end{cases}$

Мн-во всех квадратов, целиком лежащих в D – компакт

$\Rightarrow \Sigma = \sum\limits_{e: \Delta_e \subset D} f(x(u_e, v_e), y(u_e, v_e))((|\mathcal{J}|_{(u_e, v_e)} \mu(\Delta_e^*)) + \varepsilon(u_0, v_0, \Delta_e^*)\mu(\Delta_e^*)$

$\Sigma' \to \iint\limits_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\, |\mathcal{J}|\, du\, dv, \quad k \to +\infty, \; h_k \to 0$

$k \geq K : |\varepsilon(u_0, v_0, \Delta_e^*)| \leq \frac{\varepsilon}{C\mu(D^*)} \qquad |f| \leq C$

$|\Sigma^2| \leq \sum |f| \cdot |\varepsilon(u_0, v_0, \Delta_e^*)\, \mu(\Delta_e^*)| \leq C\, |\varepsilon(u_0, v_0, \Delta_e^*)| \sum \mu(\Delta_e^*) \leq \varepsilon \quad k \geq K$

8) Обобщенные полярные и сферические координаты

Полярная система координат Пусть $\begin{cases} x = r\cos\varphi & \varphi \in [-\pi; \pi], \\ y = r\sin\varphi & r \geq 0 \end{cases}$

J отображения $(x,y) \to (r,\varphi)$

$$\begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$

Обобщ. полярная система $\begin{cases} x = ar\cos^\alpha\varphi & a, b, \alpha > 0 \\ y = br\sin^\alpha\varphi \end{cases}$

$$J = ab\alpha r\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$$

$$\begin{cases} x = ar^{1/p}\cos^{\alpha/p}\varphi & a, b, \alpha, p, q > 0 \\ y = br^{1/q}\sin^{\alpha/q}\varphi \end{cases}$$

$$J = \frac{ab\alpha}{pq} r^{1/p + 1/q - 1}\cos^{\alpha/p - 1}\varphi\cos^{\alpha/q - 1}\varphi$$

Сферическая система коорд. (x, y, z): $\begin{cases} x = R\cos\varphi\cos\theta & \varphi \in [-\pi; \pi] \\ y = R\sin\varphi\cos\theta & \theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ z = R\sin\theta & R \geq 0 \end{cases}$

$$J_{(x,y,z) \to (R,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_R & y'_R & z'_R \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -R\sin\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ -R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \cdot R^2\cos\theta$$

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \sin\varphi\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} + \cos\varphi\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\theta \\ -\cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \sin^2\varphi\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} + \cos^2\varphi\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

Обобщ. сфер. сист. коорд. $\begin{cases} x = aR\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\theta & a, b, c, \alpha, \beta > 0 \\ y = bR\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\theta \\ z = cR\sin^\beta\theta \end{cases}$

$$J = abc\alpha\beta R^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\theta\sin^{2\beta-1}\theta$$

$$\begin{cases} x = aR^{1/p}\cos^{\alpha/p}\varphi\cos^{\beta/p}\theta & a, b, c, \alpha, \beta, p, q, s > 0 \\ y = bR^{1/q}\sin^{\alpha/q}\varphi\cos^{\beta/q}\theta \\ z = cR^{1/s}\sin^{\beta/s}\theta \end{cases}$$

$$J = \frac{abc\alpha\beta}{pqs} R^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} - 1}\cos^{\frac{\alpha}{p} - 1}\varphi\cos^{\frac{\alpha}{q} - 1}\varphi\cos^{\frac{\beta}{p} + \frac{\beta}{q} - 1}\theta\sin^{\frac{\beta}{s} - 1}\theta$$

⑨ Несобственный кратный интеграл. Пример ф-и в $\mathbb{R}^1$, для которой понятие сходимости в смысле одномерного и многомерного интеграла - различны

$f(x)$ интегрир. в несобств. смысле на D, $\{D_n\}_n^{+\infty}$ - допуст. исчерп.

конеч. и $\exists \int_D f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{D_n} f\,dx$

Зам. Если $\exists\ D_n, \tilde{D}_n$: $\lim \int_{D_n} f\,dx = \alpha$
$\lim \int_{\tilde{D}_n} f\,dx = \beta$ $\quad \alpha \neq \beta$

то $\exists\ D_n^*$: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{D_n^*} f\,dx$ - не сущ-ет

Пример. $f(x) = \begin{cases} 1/n & x \in [n-1, n-1/2) \\ -1/n & x \in [n-1/2, n) \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

то $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\int_0^{[b]} f(x)\,dx + \int_{[b]}^b f(x)\,dx \right) =$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \int_{[b]}^b f(x)\,dx = 0$

т.к. $|f(x)| = \frac{1}{[b]+1}$ $\quad x \in [[b], [b]+1]$, то $f(x)$ - инт. в несобств. смысле одномр. интеграла, $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

След. исчерпание оси $D_n = [1, 2^{2n}] \bigcup\limits_{k=0}^{2^{2n+1}-2^{2n}-1} [2^{2^n}+k, 2^{2^n}+k+1/2]$

$D_n \subset D_{n+1}$

$\int_{D_n} f(x)\,dx = \int_1^{2^{2n}} + \sum\limits_{k=0}^{2^{2n+1}-2^{2^n}-1} \int_{2^{2n}+k}^{2^{2n}+k+1/2} \frac{1}{2^{2n}+k+1}\,dx = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{2^{2n+1}-2^{2n}-1} \frac{1}{2^{2n}+k+1} \geqslant$

$\geqslant \frac{1}{2} \int_{2^{2n}+1}^{2^{2n+1}} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2^{2n+1}}{2^{2n}+1} \right) \geqslant \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2^{2n+1}}{2^{2n}\cdot 2} \right) =$

$= \frac{1}{2} \ln\left(2^{2n+1} - 2^n - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot (2^{n+1} - 2^n - 1) \ln 2 = \frac{1}{2} \cdot (2^n - 1) \ln 2 \to +\infty$

$\int_n^{n+1} dx/x \leqslant 1/n$

(10) Теоремы для несобственного интеграла. Интеграл вероятностей

<u>Теор.</u> D – квадрируемое мн-во $\Rightarrow$ $f \in R(D) \Leftrightarrow f$ - абсол. инт. на D
в несобств. см.

<u>Теор.</u> D – квадрируемое мн-во

если $f \in R(D_n)$, $f \geq 0$, $\exists$ хотя бы одно исчерпание D_n, что $\lim \int_{D_n} f(x)dx$ сходится и конечен, то интеграл сходится в несобств. смысле

<u>Вычисление инт. Эйлера-Пуассона</u> $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

Исчерпание мн-ва $\mathbb{R}^2 = (-\infty; +\infty) \times (-\infty; +\infty)$

$$D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\} = \{(\varphi, r) : \varphi \in [-\pi; \pi], r \in [0; R]\}$$

Поскольку $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \lim_{R \to +\infty} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy =$

$$= \lim_{R \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^R r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 2\pi \lim_{R \to +\infty} \int_0^R r e^{-r^2/2} dr$$

$\Rightarrow \int_0^R r e^{-r^2/2} dr$ – соб. интеграл

$$\int_0^R e^{-r^2/2} r dr = \int_0^R e^{-r^2/2} d\left(\frac{r^2}{2}\right) = -\int_0^R e^{-r^2/2} d\left(-\frac{r^2}{2}\right) = -e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^R = -e^{-\frac{R^2}{2}}$$

Значит $I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = 2\pi \lim_{R \to +\infty} \int_0^R r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = 2\pi \lim_{R \to +\infty} (1 - e^{-\frac{R^2}{2}}) = 2\pi$

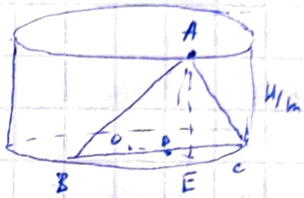
$\Rightarrow I = \sqrt{2\pi}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(11) Площадь поверхности. Пример Шварца

Площадь многогранней n-ти (сапога Шварца):

$S_{nm} = 2nm\, S_{ABC}$



$DE = OE - OD = R - R\cos\frac{\pi}{2n} = 2R\sin^2\frac{\pi}{4n}$

$AD^2 = AE^2 + DE^2 = \left(\frac{H}{m}\right)^2 + 4R^2\sin^2\frac{\pi}{4n}$

$$S_{nm} = 2nmR\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{m^2} + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{4n}} = 2R\underbrace{\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)}_{\to\pi}\sqrt{H^2 + 4R^2m^2\sin^4\frac{\pi}{4n}}$$

$$\longrightarrow 2R\pi\sqrt{H^2+4R^2m^2\sin^4\frac{\pi}{4n}}, \quad n\to+\infty$$

Площадь поверхности гладкого мн-ва: $\exists \lim\limits_{h\to0}\sum\limits_{k:\Delta_k\subset D}\sigma_k = \iint\limits_S dS$

Пусть $x(u,v), y(u,v), z(u,v)\in C^1(D)$ — отобр. квадр. мн-ва на S

Тогда
$$r(u,v_k) = \bar r(u_k,v_k) + \bar r_u(u_k,v_k)h + o(h)$$
$$r(u_k,v) = \bar r(u_k,v_k) + \bar r_v(u_k,v_k)h + o(h)$$

$$\sigma_k \approx |\bar r_u\times\bar r_v|_{u_k,v_k}h^2 = |\bar r_u\times\bar r_v|\mu(\Delta_k)$$

$$\lim_{h\to0}\sum_{k:\Delta_k\subset D} \quad \iint\limits_D|\bar r_u\times\bar r_v|\,du\,dv = \iint\limits_S dS$$

Пусть $\bar r_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$ $\bar r_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$

Тогда $|\bar r_u\times\bar r_v| = |\bar r_u||\bar r_v|\sin\alpha = |\bar r_u||\bar r_v|\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha} =$

$= \sqrt{(\bar r_u,\bar r_u)(\bar r_v,\bar r_v)-(\bar r_u,\bar r_v)^2} = \sqrt{E\cdot F - G^2}$

$$\bar r_u\times\bar r_v = \begin{vmatrix}\bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix} = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}; \frac{D(z,x)}{D(u,v)}; \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) = (A,B,C)$$

$A(u,v)$, $B(u,v)$, $C(u,v)$: $dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$

$\Rightarrow$ Тождество Лагранжа $A^2+B^2+C^2 = EF - G^2$

(17) Ориентируемые поверхности. Поверхностный интеграл $1^{ого}$ и $2^{ого}$ рода

Ориентация п-ти S в $\mathbb{R}^3$ $\exists \bar{v} : S \to \mathbb{R}^3 : |\bar{v}| = 1$

Ориент. п-ть S : в $\mathbb{R}^3$ имеющ. ориент. $\bar{v}$

<u>Поверхн. интеграл 1-ого рода</u>

$$\iint_S \tilde{F}(x,y,z)\,dS = \iint_D \tilde{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EF - G^2}\,du\,dv$$

<u>Поверхн. интеграл 2-ого рода</u>

$\bar{v} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\bar{a} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

$$\iint_S \bar{a}\,d\bar{S} = \iint_S \bar{a}\bar{v}\,dS = \iint (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$I = \iint_D (PA + QB + RC)\,du\,dv = \iint_D P(x(u,v))\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,du\,dv + \iint_D Q(x(u,v))\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,du\,dv + \iint_D R(x(u,v))\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,du\,dv$$

(13) Криволинейный интеграл $1^{\text{ого}}$ и $2^{\text{ого}}$ рода

Криволинейный интеграл $1^{\text{ого}}$ рода

l - спрямл. кривая, $\exists$ $\boxed{\int_{AB} \Phi(x,y,z)\,dl} = \int_0^L \Phi(x(l), y(l), z(l))\,dl$

то ф-я интегрируема по l

Св-ва $\Phi(x,y,z)$ интегр. по l:

1) $\int_{AB} \Phi\,dl = \int_{BA} \Phi\,dl$

2) l - гладк. кривая $\int_{AB} \Phi\,dl = \int_0^L \Phi(x(l), y(l), z(l))\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\,dt$

1 ▶ $l = L - \sigma$, $dl = -d\sigma$

$$\int_{AB} \Phi\,dl = \int_0^L \Phi(x(l), y(l), z(l))\,dl = -\int_L^0 \Phi(x(L-\sigma), y(L-\sigma), z(L-\sigma))\,d\sigma$$

$$= \int_0^L \Phi(x(L-\sigma), y(L-\sigma), z(L-\sigma))\,d\sigma = \int_{BA} \Phi\,dl$$

Криволинейный интеграл $2^{\text{ого}}$ рода

l - гладкая кривая, τ - ед. вектор кас. к кривой

$\bar{a}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \bar{a} = (P, Q, R)$ $\quad P, Q, R: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$

$$\int_{AB} \bar{a}\,d\bar{\tau} = \int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl$$

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{x'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}, \frac{y'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}, \frac{z'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}\right)$$

Св-ва $\Phi(x,y,z)$ инт. по l

1) $\int_{AB} \bar{a}\,d\bar{\tau} = -\int_{BA} \bar{a}\,d\bar{\tau}$

2) l - гладк. кривая $\int \bar{a}\,d\bar{\tau} = \int_0^L (Px'_t + Qy'_t + Rz'_t)\,dt$

(14) Формула Грина

$$\int\limits_{\partial\Omega} P dx = -\iint\limits_{\Omega} P'_y \, dx dy \quad \text{– по } Ox$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} Q dy = \iint\limits_{\Omega} Q'_x \, dx dy \quad \text{– по } Oy$$

Формула Грина
1) Ω – прост. область
2) $P, Q \in C^1(\bar{\Omega})$
3) $$\int\limits_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint\limits_{\Omega} (Q'_x - P'_y) \, dx dy$$

▶ $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \ldots \cup \Omega_n$, где Ω_k, $k = \overline{1,n}$, прив. пр. по Ox

$$\int\limits_{\partial\Omega_1} P dx = -\iint\limits_{\Omega_1} P'_y \, dx dy$$
$+$
$$\int\limits_{\partial\Omega_2} P dx = -\iint\limits_{\Omega_2} P'_y \, dx dy$$
$+ \ldots +$
$$\int\limits_{\partial\Omega_n} P dx = -\iint\limits_{\Omega_n} P'_y \, dx dy$$

$$\int\limits_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \ldots \cup \partial\Omega_n} P dx = -\iint\limits_{\Omega} P'_y \, dx dy$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} P dx = -\iint\limits_{\Omega} P'_y \, dx dy$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} Q dx = \iint\limits_{\Omega} Q'_x \, dx dy$$

15. Равносильные условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Теор. $P, Q, P'_y, Q'_x \in C(\overline{D})$

1) $\oint\limits_C Pdx + Qdy = 0$

2) $\int\limits_{A_1 A_2} Pdx + Qdy = \int\limits_{A_1 A_2}^{*} Pdx + Qdy$

3) $\overline{a} = (P, Q)$ — потенциально в D

4) $P'_y = Q'_x$ в D

▶ $1 \Rightarrow 2$ $\int\limits_{L_1 \cup -L_2} Pdx + Qdy = 0$

$\int\limits_{L_1} - \int\limits_{L_2} = 0$

$2 \Rightarrow 3$ $U(x,y) = \int\limits_{x_0, y_0}^{x,y} Pdx + Qdy$

$U(x+h,y) - U(x,y) = \int\limits_{(x,y)}^{(x+h,y)} \omega = \int\limits_{\cancel{x}}^{x+h} P(t,y)\,dt = P(x+\theta_x h, y)h$

где $\omega = Pdx + Qdy$, $\theta_x \in [0;1]$

тогда $U'_x(x,y) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{U(x+h,y) - U(x,y)}{h} = P(x,y)$

Аналогично $U'_y(x,y) = Q(x,y)$

$3 \Rightarrow 4$ P'_y, Q'_x — непр. $\Rightarrow$ U''_{xy}, U''_{yx} — непр. $U''_{xy} = U''_{yx}$

$4 \Rightarrow 1$ $\oint\limits_C \omega = \iint\limits_{D^*} (Q'_x - P'_y)\,dxdy = 0$

$D^* \subset D$, $C = \partial D^*$

(16) Формула Гаусса-Остроградского. Вычисление объема по известной параметризации границы

Теор. 1) $P, Q, R, P'_x, Q'_y, R'_z \in C(D)$

2) D — прост. ориент. в $\mathbb{R}^3$, огр. S

3) $\bar{n}$ — вектор внешн. нормали

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_{D_k} (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dx\,dy\,dz$$

▶ $$\iiint\limits_{D_k} R'_z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Omega_k} dx\,dy \int\limits_{z_1^k}^{z_2} R'_z\,dz = \iint\limits_{\Omega_k} R(x,y,z_2^k) - R(x,y,z_1^k)\,dx\,dy$$

$$\iint\limits_{S_1^k \cup S_2^k \cup S^k_{бок}} R\,dx\,dy = \iint\limits_{S_1^k \cup S_2^k \cup S^k_{бок}} R\cos\gamma\,dS = \iint\limits_{S_1^k} + \iint\limits_{S_2^k} + \iint\limits_{S^k_{бок}}$$

на $S^k_{бок}$ $\bar{n} \perp Oxy \Rightarrow \iint\limits_{S^k_{бок}} = 0$

на S_2^k $\iint\limits_{S_2^k} R\cos\gamma\,dS = \iint\limits_{\Omega_k} R(x,y,z_2(x,y))\,dx\,dy$

на S_1^k $\iint\limits_{S_1^k} R\cos\gamma\,dS = -\iint\limits_{\Omega_k} R(x,y,z_1(x,y))\,dx\,dy$

$D = D_z^1 \cup \ldots \cup D_z^n$

$$\iint\limits_{S_z^1} R\,dx\,dy = \iiint\limits_{D_z^1} R'_z\,dx\,dy\,dz$$

$+$ …

$$\iint\limits_{S_z^n} R\,dx\,dy = \iiint\limits_{D_z^n} R'_z\,dx\,dy\,dz$$

$$\sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{S_z^k} R\,dx\,dy = \iiint\limits_{D} R'_z\,dx\,dy\,dz$$

$$\parallel$$

$$\iint\limits_S R\,dx\,dy$$

След. $P = x,\ Q = R = 0$; $Q = y,\ P = R = 0$; $R = z,\ P = Q = 0$

$$V(D) = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz = \iint\limits_S x\cos\alpha\,dS = \iint\limits_S y\cos\beta\,dS = \iint\limits_S z\cos\gamma\,dS =$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$$

(17) Формула Стокса

Теор. 1) S - гладкая, $S \in C^2(D_{u,v})$
$D_{u,v}$ - прост. мн-во в $\mathbb{R}^2$, ∂S - край п-ти S

2) $P, Q, R, P'_y, P'_z, Q'_x, Q'_z, R'_x, R'_y \in C(\overline{S})$

3) $$\oint_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$
$$= \iint (R'_y - Q'_z)\,dy\,dz + (P'_z - R'_x)\,dz\,dx + (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

▶ $$\oint_{\partial S} P\,dx = \oint_{\partial S} P x'_u\,du + P x'_v\,dv = \iint_{D_{u,v}} (P x'_v)'_u - (P x'_u)'_v \,du\,dv =$$
$$= \iint_{D_{u,v}} P x''_{vu} + x'_v(P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u) - P x''_{uv} - x'_u(P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v)\,du\,dv$$
$$= \iint_{D_{u,v}} P'_y(y'_u x'_v - x'_u y'_v) + P'_z(z'_u x'_v - z'_v x'_u)\,du\,dv =$$
$$= \iint_{D_{u,v}} P'_y\left(-\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) + P'_z\left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right) du\,dv =$$
$$= \iint_S -P'_y\,dx\,dy + P'_z\,dz\,dx$$

Аналогично для Q, R.

(18) Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования в $\mathbb{R}^3$

Теор. $\bar{a}$ - непр. дифференц. вект. поле в $D \subset \mathbb{R}^3$

D - односв. мн-во

Усл. эквивалентны

1) $\oint\limits_C \bar{a}\,d\bar{r} = 0$

2) $\int\limits_{L_1} \bar{a}\,d\bar{r} = \int\limits_{L_2} \bar{a}\,d\bar{r}$ (L_1, L_2 - гладк. контуры, идут из A_1 в A_2)

3) $\bar{a}$ - потенциально

4) $\operatorname{rot}\bar{a} = 0$

▶ $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ (x, y, z)

$$U(x,y,z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)} \bar{a}\,d\bar{r}$$

$3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$

По ф-ле Стокса $\begin{cases} U''_{xy} = U''_{yx} \\ U''_{yz} = U''_{zy} \\ U''_{xz} = U''_{zx} \end{cases} \Leftrightarrow Q'_x = P'_y = R'_z$

(19) Векторный анализ

1) $\mathrm{grad}\, u = \nabla u = (u'_x, u'_y, u'_z)$; $u(\nabla,\nabla) = \Delta u = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right) u$

$\mathrm{div}\, \bar{a} = P'_x + Q'_y + R'_z = (\nabla, \bar{a})$

$\mathrm{rot}\, \bar{a} = [\nabla, \bar{a}] = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y)$

2) $\bar{a}$ потенциально в D, если $\exists u = u(x,y,z) : \nabla u = \bar{a}$ в D

$\bar{a}$ соленоидально в D, если $\exists P'_x, Q'_y, R'_z$ и $\mathrm{div}\, \bar{a} = 0$ в D

$\bar{a}$ безвихревое в D (потенц.), если $\mathrm{rot}\, \bar{a} = 0$ в D

3) Ф-ла Гаусса – Остроградского $P, Q, R, P'_x, Q'_y, R'_z \in C(V)$
$D \subset \mathbb{R}^3$ прост. ориент., огр. S
$\bar{n}$ – вектор внешн. нормали

$$\iint_S \bar{a}\, d\bar{S} = \iiint_V \mathrm{div}\, \bar{a}\, dx\, dy\, dz$$

Ф-ла Стокса $\oint_C \bar{a}\, d\bar{l} = \iint_S \mathrm{rot}\, \bar{a}\, d\bar{S}$, $d\bar{S} = \bar{n}\, dS$

$\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\mathrm{rot}\, \bar{a}\bar{n} = (R'_y - Q'_z)\cos\alpha + (P'_z - R'_x)\cos\beta + (Q'_x - P'_y)\cos\gamma$

4) Независимость $\mathrm{div}\, \bar{a}$: 1) $V_\varepsilon \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \le \varepsilon\}$
2) $S_\varepsilon = \partial V_\varepsilon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \varepsilon^2\}$
3) $P'_x, Q'_y, R'_z, P, Q, R \in C(V_\varepsilon)$

по ф-ле Гаусса-Остроградского:
$$\iint_{S_\varepsilon} \bar{a}\, d\bar{S} = \iiint_{V_\varepsilon} \mathrm{div}\, \bar{a}\, dx\,dy\,dz = \mathrm{div}\, \bar{a}\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)} \iiint_{V_\varepsilon} dx\,dy\,dz$$

по непрерывности: $\mathrm{div}\, \bar{a}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)} = \lim\limits_{\varepsilon\to0} \mathrm{div}\, \bar{a}\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)\in V_\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to0} \frac{\iint_{S_\varepsilon} \bar{a}\, d\bar{S}}{\mu(V_\varepsilon)}$

Независимость $\mathrm{rot}\, \bar{a}$: 1) $P, Q, R, P'_y, P'_z, Q'_x, Q'_z, R'_z, R'_y \in C(V(x_0, y_0, z_0))$
2) $C_\varepsilon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \varepsilon^2\}$,
$S^+_\varepsilon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2\}$ $z \ge 0$

$$\oint_{C_\varepsilon} \bar{a}\, d\bar{l} = \iint_{S_\varepsilon} \mathrm{rot}\, \bar{a}\, d\bar{S} = (\mathrm{rot}\, \bar{a}, \bar{n})\Big|_{(\xi,\eta,\zeta)} \mu(S^+_\varepsilon)$$

$$(\mathrm{rot}\, \bar{a}, \bar{n})\Big|_{x_0,y_0,z_0} = \lim \frac{\int_S \bar{a}\, d\bar{l}}{\mu(S^+_\varepsilon)}$$