МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

1 КУРС

1. Формулировка задачи линейного пр-я. Теорема о вып-ти мн-ва её допустимых решений

Найти решение системы ограничений, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i \qquad i = \overline{1,k}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = \overline{k+1,m} \qquad x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,l},\ l < n)$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to opt$$

Станд. зад. ЛП: все $x_j \ge 0$ $(l = n)$, в сист. т. нер-ва

Канон. зад. ЛП: все $x_j \ge 0$ $(j = \overline{1,n})$, в сист. т. ур-я

Переход от станд. к канон. зад. ЛП:

1) ввод. доп. $x_{n+1}, \dots, x_{n+m} \ge 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i + x_{n+i} = b_i \qquad i = \overline{1,m}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \qquad r \le m,\ r < n$$

2) в случае, если $r = n$, ост. $m-n$ ур-й — это лин. комб. n ур-й

Решение квадр. м-цы $n \times n$ — $x = (x_1, \dots, x_n)$

Если $x_1, \dots, x_n \ge 0$, то x - opt реш.

3) $r = m < n$, то $x = x(c)$

$y = y(c)$

$\cancel{z} = c$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots a_{1m}x_m = b_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n} \cdot x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m - a_{mm+1}x_{m+1} - \ldots - a_{mn} \cdot x_n \end{cases}$$

$x_{m+1} = C_{m+1}, \ldots, x_n = C_n$ – своб. перем.

$X_1 = x_1(C_{m+1}, \ldots, C_n), \ldots, X_m = x_m(C_{m+1}, \ldots, C_n)$ – баз. пер

$X = (x_1^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0)$

Баз. решения – все своб. пер равны 0 $(\leq C_n^m)$

Допуст. баз. реш. – БР, все баз. пер. в кот. ≥ 0

Вырожд. ДБР – ДБР, в кот. $\exists$ хотя бы одна баз. пер. равная "0"

Теор. Мн-во всех доп. реш. ЗЛП – вып. комбинация:

$X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n \ : \ \alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$

▶ $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = \alpha_1 X_1 + (1-\alpha_1) X_2$

X_1, X_2 – решения: $\begin{matrix} AX_1 = B & X_1 \geq 0 \\ AX_2 = B & X_2 \geq 0 \end{matrix}$

1) $A \cdot X = A \cdot (\alpha X_1 + (1-\alpha_1) X_2) = \alpha_1 \underbrace{AX_1}_{B} + (1-\alpha_1) \underbrace{AX_2}_{B} = B$

2) $\left.\begin{matrix} X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \\ \alpha_1 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow X \geq 0$

$\Rightarrow$ Мн-во всех доп. реш. ЗЛП – вып. многогранник решений

Пример

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$n = 4 \quad m = 2 \qquad C_4^2 = 6$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow x_1, x_2$ – базисные

$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow x_1, x_3$ – базисные

$M_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow x_1, x_4$ – базисные

$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2, x_3$ – не б. п.

$M_{24} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2, x_4$ – не б. п.

$M_{34} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_3, x_4$ – не б. п

1) $X_1 = (x_1, x_2, 0, 0)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$X_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ – ДБР

2) $X_2 = (x_1, 0, x_3, 0)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$X_2 = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0)$ – ДБР

3) $X_3 = (x_1, 0, 0, x_4)$

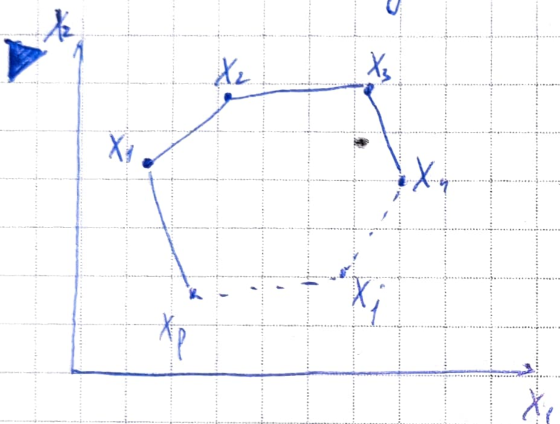
$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_4 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$X_3 = (\frac{2}{3}, 0, 0, -\frac{2}{3})$ – не ДБР

2. Теорема об опт. решении ЗЛП

1) Если ЗЛП имеет opt решение, то цел. ф-я $F(x)$ принимает его в одной из угловых точек многогранника решений

2) Если $F(x)$ принимает opt знач. более, чем в одной угл. точке, то она принимает его в любой точке, явл. выпуклой лин. комбин. этих угл. точек



$F(x_1, \ldots, x_n) \to max$

1) $F(x^*) = F\,max \quad (\forall x : F(x^*) \geq F(x))$

$x^* = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p \quad \left(\alpha_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1\right)$

$$F(x^*) = F\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \cdot F(x_j) \leq \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \cdot M = M \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \alpha_j}_{=1} = M$$

$$F(x_k) = \max_{j=\overline{1,p}} F(x_j) = M$$

тогда $\left.\begin{array}{l} F(x^*) \leq M \\ F(x^*) \geq F(x_k) = M \end{array}\right\} \Rightarrow F(x^*) = \underbrace{F(x_k)}_{(\text{угл. т.})} = M$

$F(x_k) = F\,max$

2) Пусть $F(x_1) \ldots = F(x_q) = M$

$x = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j x_j$ — лин. комб. угл. т. $\left(\alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^{q} \alpha_j = 1\right)$

$$F(x) = F\left(\sum_{j=1}^{q} \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j F(x_j) = \underbrace{\sum_{j=1}^{q} \alpha_j}_{=1} \cdot M = M$$

$F(x) = F_{max}$

Вывод: для нахожд. opt решения ЗЛП дост. перебрать кон. число угл. точек мн-ка реш.

3. Симплекс - метод решения ЗЛП

— перебор ДБР так, чтобы кажд. след. решение было не хуже по знач. цел. ф-и

1) определение первонач. ДБР

2) переход к лучшему ДБР

3) критерий оптимальности

Система имеет вид ур-й (канон. форма)

Нахождение max цел. ф-и

Сист. лин. нез. ур-й : n перем. ; m - баз. пер. $(m < n)$
$k = n - m$ - св. пер.

1) Выбираем баз. переменные

- по баз. минору в м-це сист. огр.
- m баз. пер: кажд. входит только в 1 ур-е и нет таких, что в ур-ие не вход. ни одна из них

2) m баз. пер. выраж. через k своб. пер.

$$\begin{cases} x_{k+1} = a_{k+1\,1} x_1 + \ldots + a_{k+1\,k} x_k + b_{k+1} \\ \ldots \\ x_n = a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nk} x_k + b_n \end{cases}$$

$x_1 = \ldots = x_k = 0$

$x_{k+1} = b_{k+1}, \ldots, x_n = b_n$

$F(x)$ выр. через k св. пер. : $F = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_k x_k$
$F_0 = c_0$

3) Критерий опт. для max:

- Если в F, выр. через св. пер. отсутств. полож. коэф., то ДБР – opt
  $F_0 = C_0 = F_{max}$

- Иначе max не дост. Можно получить $F > C_0$ увелич. своб. переменных, переводя их в баз. (при пол. $C_i > 0$ лы. наиб.)

Нахождение min цел. ф-и

1) Поиск F_{max}: $Z_{min} = -F_{max}$

2) Уменьшение знач. ц. ф. симплекс-методом за счёт переменных с отр. коэф.

Критерий опт. для min:

в F, выр. через св. пер. отсутств отр. коэф.

Пример $F \to 2x_1 + 3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 15 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0 \quad n = 6, \ m = 4, \ k = 2$

1) баз. $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$, своб. $\{x_1, x_2\}$

$$\begin{cases} x_3 = 18 - x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 = 5 - x_2 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \end{cases} \quad \begin{array}{c} x_2 \\ 6 \\ 16 \\ 5 \\ \infty \end{array}$$

$X_1 = (0, 0, 18, 16, 5, 21)$

$F(X_1) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \qquad \Delta F = 5 \cdot 3 = 15$

2) баз. $\{x_2, x_3, x_4, x_6\}$ св. $\{x_1, x_5\}$

$$\begin{cases} x_2 = 5 - x_5 \\ x_3 = 18 - 2x - 15 + 3x_5 = 3 - x_1 + 3x_5 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - 5 + x_5 = 11 - 2x_1 + x_5 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \end{cases} \quad \begin{array}{c} x_1 \\ \infty \\ 3 \\ 5.5 \\ 7 \end{array}$$

$X_2 = (0, 5, 3, 11, 21)$

$F(X_2) = 3 \cdot 5 \cdot 15$

$F(X) = 2x_1 + 3(5 - x_5) = 15 + 2x_1 - 3x_5$

$\Delta F = 3 \cdot 2 = 6$

3) баз. $\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$ св $\{x_3, x_5\}$

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 = 3 - x_3 + 3x_5 & \quad & \infty \\ x_2 = 5 - x_5 & & 5 \\ x_4 = 5 + 2x_3 - 5x_5 & & 1 \\ x_6 = 12 + 3x_3 - 9x_5 & & 12/9 \end{array}\right.$$

(x_5)

$X_3 = (3, 5, 0, 5, 0, 12)$

$F(X_3) = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21$

$F(X) = 15 + 2(3 - x_3 + 3x_5) = 21 - 2x_3 + 3x_5$

$\Delta F = 3 \cdot 1 = 3$

4) баз. $\{x_1, x_2, x_5, x_6\}$ св. $\{x_3; x_4\}$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 3 - x_3 + 3\left(1 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4\right) = 6 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ x_2 = 4 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_5 = 1 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ x_6 = 3 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{9}{5}x_4 \end{array}\right.$$

$X_4 = (6, 4, 0, 0, 1, 3)$

$F(X_4) = 24 = F_{max}$

$F(x) = 21 - 2x_3 + 3\left(1 + \frac{2}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4\right) = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$

Макс. приб. 24 р. при $x_1 = 6$, $x_2 = 4$

S_3, S_4 исп. без ост.

$S_5 = 1$, $S_6 = 3$ – запасы ресурсов.

4. Критерий оптимальности баз. распр. пост.

Правила нахожд. оценок своб. клеток

Теор. о потенциалах

Критерий оптимальности:

$F = F_0 + \sum \beta_{ij} \cdot x_{ij}$, где β_{ij} – оц. своб. клетки

БР opt $\Leftrightarrow \forall \beta_{ij} \geqslant 0$

Оценка своб. клетки – приращ. сум. затрат при переводе в своб. клетку одной ед. пост.

Правила нахождения оцен. св. клет.:

I. β_{ij} – алгебр. сумма коэф. затрат клеток её цикла пересчета, взятых с соотв. знаками

<u>Теор.</u> (о потенциалах)

Если к коэф. затрат кан. строки/столбца добавить потенциал, то оценка своб. клетки не изменится

II. К коэф. затрат в кажд. строке / столбце надо прибавить потенциалы, чтобы коэф. затрат в заполн. клетках стали равны 0.

Тогда β_{ij} равны получ. при этом коэф. затрат

Пример

		$v_1 = -2$	$v_2 = -2$	$v_3 = -6$	$v_4 = -3$
		20	110	40	110
$u_1 = 0$	60	1	2	5	3
$u_2 = 1$	120	1	6	5	2
$u_3 = -1$	100	6	3	7 +	4

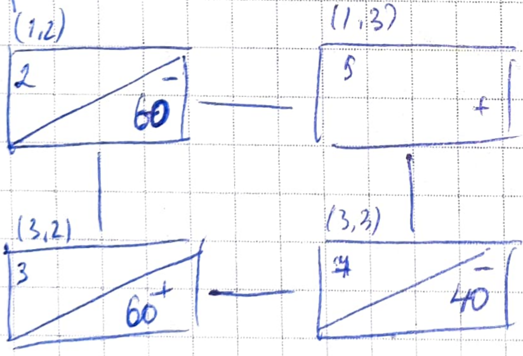
$$\begin{cases} u_1 + v_2 = -2 \\ u_2 + v_1 = -1 \\ u_2 + v_4 = -2 \\ u_3 + v_2 = -3 \\ u_3 + v_3 = -7 \\ u_3 + v_4 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{-1} & 0 & \underline{-1} & \underline{0} \\ 0 & \underline{5} & \underline{0} & 0 \\ \underline{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

м-ца оценок = м-ца изм. коэф. зат

1) $\exists$ по кр. мере один набор потенциалов удовл. правилу 2

2) для разл. наборов пот. м-це оц. одинак



$\beta_{13} = +5 - 2 + 3 - 7 = -1 < 0 \Rightarrow$ не opt

$\beta_{ij} = \Delta F = F_{нач} - F_{перерасп} = \beta_{13} \cdot x_{13} = -40$

5. Распр. метод решения трансп. зад.

1) Для полученного БР подбир. потенц. строк и столбцов так, чтобы обнулить коэф. затрат зап. клеток

2) Сост. матрицы оценок

- если $\forall \beta_{ij} \geq 0 \rightarrow$ opt решение
- если $\exists \beta_{ij} < 0$, выбирается одна из своб. клеток для передачи в неё поставки с мин. β_{ij}

3) Для выбранн. своб. клетки строится цикл пересчета.
Передаваемая поставка Z — миним. среди поставок в клетках с "–"
При этом в клетках с "+" на Z увел. поставка; со зн. "–" на Z уменьш.

"0" – счит. своб. клеткой

4) После получения нового БРП, не соотв. крит. opt переходим к 2 п.

Пример

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = -1 \\ u_1 + v_3 = -2 \\ u_2 + v_1 = -3 \\ u_2 + v_3 = -3 \\ u_3 + v_1 = -4 \\ u_3 + v_4 = -2 \\ u_4 + v_4 = 0 \end{cases}$$

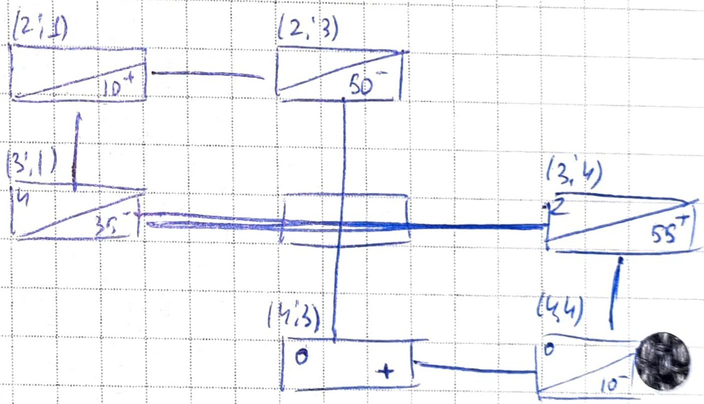
		$v_1 = -2$	$v_2 = -1$	$v_3 = -2$	$v_4 = 0$
		45	35	55	65
$u_1 = 0$	40	4	1 / 35	2 / 5	5
$u_2 = -1$	60	3 / 10	2	3 / 50	7
$u_3 = -2$	90	4 / 35	4	5	2 / 55
$u_4 = 0$	10	0	0	0	0 / 10

$r = m + n - 1 = 7$

$40 + 60 + 90 < 45 + 35 + 55 + 65$ зад. откр. тип

$40 + 60 + 90 + 10 = 45 + 35 + 55 + 65$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$



$F = 35 + 2\cdot 5 + 3\cdot 10 + 3\cdot 50 + 4\cdot 35 + 2\cdot 55 + 0\cdot 10 = 475$

$\Delta F = -2\cdot 10 = -20$

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = -1 \\ u_1 + v_3 = -2 \\ u_2 + v_1 = -3 \\ u_2 + v_3 = -3 \\ u_3 + v_1 = -4 \\ u_3 + v_4 = -2 \\ u_4 + v_3 = 0 \end{cases}$$

		$v_1 = -2$	$v_2 = -1$	$v_3 = -2$	$v_4 = 0$
		45	35	55	65
$u_1 = 0$	40	4	1 / 35	2 / 5	5
$u_2 = 1$	60	3 / 20	2	3 / 40	7
$u_3 = -2$	90	4 / 25	4	5	2 / 65
$u_4 = 2$	10	0	0	0 / 10	0

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

опт. распределение

$$F = 1\cdot 35 + 2\cdot 5 + 3\cdot 20 + 3\cdot 40 + 4\cdot 25 + 2\cdot 65 + 0\cdot 10 = 455$$

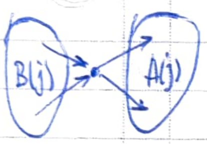
6. Задача о макс. потоке

Продукт пост. по сети трубопроводов. Найти поток распр., при кот. велич. потока от ист. к потреб. → max

Ограничения

1) Поток $R(i,j)$ по кажд. трубопр. не может превосх. его проп. способность

2) Усл. сохранения потоков вершин



$A(j)$ – мн-во вершин, в кот. вед. дуги из j
$B(j)$ – мн-во вершин, для кот. им. дуги, вход в j

$x(i,j)$ – поток по дуге (i,j)

$r(i,j) = R(i,j) - x(i,j)$ – резерв. проп. сп-ть для (i,j)

$F = \sum\limits_{j \in B(n)} x(j,n)$, n – ном. потр.

Ограничения: 1) $0 \le x(i,j) \le R(i,j)$
$= R(i,j)$ (насыщ. дуга)

2) $\sum\limits_{h \in B(j)} x(h,j) = \sum\limits_{k \in A(j)} x(j,k)$

Алгоритм:

1) На нач. шаге зад. потокораспр.

2) Поиск пути из нач. верш. в конечную, с помощью кот. можно увелич. сумм. поток потребителя

Путь типа №1: путь из нач. верш. в конечную, в кот. для кажд. дуги имеется полож. рез. проп. спос.

$r(i,j) = R(i,j) - x(i,j) > 0 \quad \forall (i,j)$

$x(i,j) = x(i,j) + \Delta$; $\Delta = \min r(i,j)$

Путь типа №2 : путь из нач. верш.

в конечную, в кот. :

1) для $\forall (i,j)$ в прям. напр. $\exists$ полож. резерв

2) для $\forall (i,j)$ в обр. напр. $x(i,j) > 0$

~~sex~~ $\Delta_1 = \min r(i,j)$
$\Delta_2 = \min x(i,j)$

$x^*(i,j) = x(i,j) + \Delta$ $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$

1) $x^*(i,j) = x(i,j) + \Delta$ для прям.

2) $x^*(i,j) = x(i,j) - \Delta$ для обратных

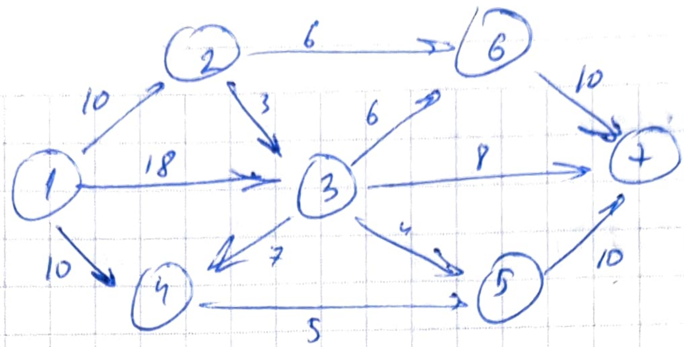
3) Алгоритм заканчивает работу,

когда не удается найти ни одного

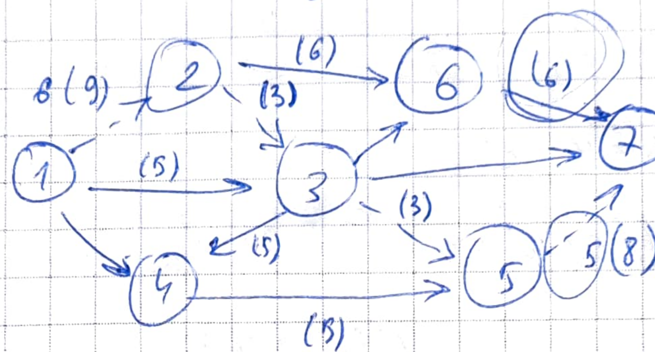
пути из нач. верш. в кон. типа 1 или 2

Пример:

1 → 7



Нач. шаг:



$f_1 = 5 + 6 = 11$

	(1;2)	(2;3)	(3;5)	(5;7)
$R(i,j)$	10	3	4	10
$x(i,j)$	6	0	0	5
$r(i,j)$	4	$\Delta = \boxed{3}$	4	5
$x^*(i,j)$	$6+3=9$	$0+3=3$	$0+3=3$	$5+3=8$

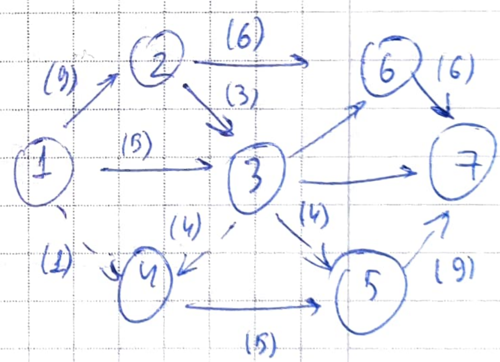
1, 2, 3, 5, 7

$\Delta = 3$

Сформир. маршрут

$f_2 = 3 + 3 + 8 = 14$

Маршрут: 1, 4, 3, 5, 7



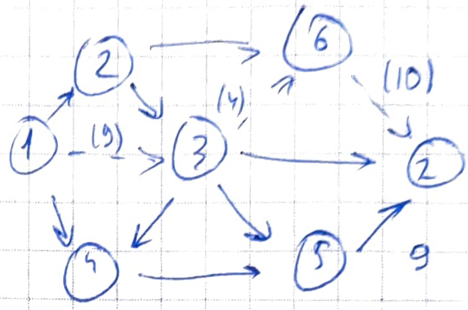
	(1,4)	(4;3)	(3,5)	(5,7)
$R(i,j)$	10	7	4	10
$x(i,j)$	0	$\Delta_2 = 5$	3	8
$r(i,j)$	10	–	$\Delta_1 = 1$	2
$x^*(i,j)$	$0+1=1$	$5-1=4$	$3+1=4$	$8+1=9$

$\Delta = \min\{1, 5\} = 1$

$f_3 = 6 + 9 = 15$

Маршрут: 1, 3, 6, 7

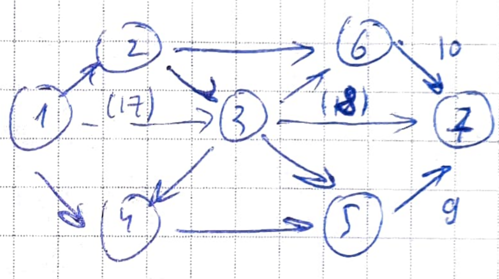
	(1;3)	(3;6)	(6,7)
$r(i,j)$	18	6	10
$x(i,j)$	5	0	6
$r(i,j)$	13	6	$\Delta = 4$
$x^*(i,j)$	9	4	10



$\Delta = 4$; $f_4 = 10 + 9 = 19$

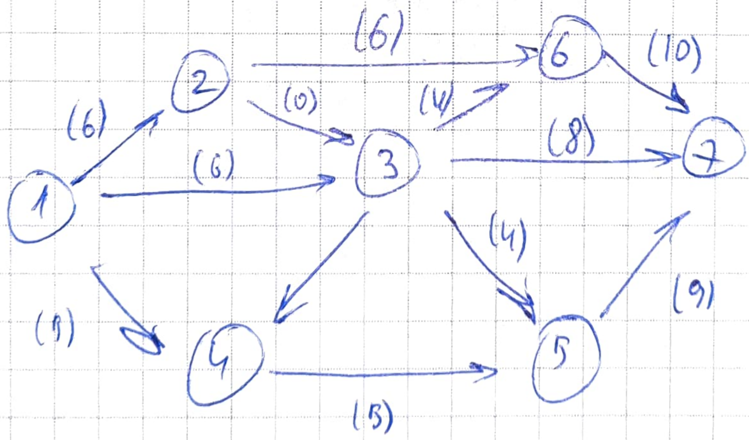
Маршрут: 1, 3, 7

	(1;3)	(3,7)
$r(i,j)$	18	8
$x(i,j)$	9	0
$r(i,j)$	9	$\Delta = 8$
$x^*(i,j)$	17	8



$\Delta = 8$

$f_5 = 8 + 10 + 9 = 27 = f_{max}$



7. Задачи дискретного прогр-я

Постановка зад. целочисл. лин. пр-я

Осн. зад. для дискр. пр-ва:

- Задача о "ранце":

Груз сост. из n предметов i - типа
a_i, $i = \overline{1,n}$ - веса предметов
c_i, $i = \overline{1,n}$ - полезность
b - вес ранца
x_i, $i = \overline{1,n}$ Сколько предм. выбрать,
чтобы $\sum c_i \to max$, $\sum a_i \leq b$

- Задача о городах:

n - города
c_{ij} - расст. от i до j
Искать план посещ. городов по 1 разу с путем $\to min$

- Задача о назначении:

m - вакансии
n - кандидаты
c_{ij} - пригодность i-ого канд. на j-ю вакансию

Кажд. канд. можно назн. на ≤ 1 вакансию,
на кажд. вакансию - ≤ 1 кандидата

Найти $\{x_{i,j}\}$ - набор

Общая постановка зад. целоч. ЛП:

Найти такое реш., при кот. мин. цел. ф-я принм. extr знач. при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ x_i \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}) \end{cases} \qquad \frac{x_j \in \mathbb{Z}, \ j=\overline{1,n}}{Z = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j x_j \to extr}$$

- при наличии огр. нер-в ввод. доп. переменные для перехода к огр. рав-вам
- задача част. целоч. мин. пр-е — требования целоч-ти вводится на часть переменных
- при $n=2$ задача цел. ЛП решается графически

8. Метод отсечения Гомори

Решение задачи ЛП. Если получ. opt решение имеет нецелоч. коорд., то в сист. ограничений ввод-ся новое огр.:

1) линейное
2) отсекает нецелоч. opt решение
3) не отсекает ни одного целочисл. ДВР

Решение с новыми ограничениями:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - a_{1\,m+1} x_{m+1} - \ldots - a_{1n} x_n \\ \ldots \\ x_m = \beta_m - a_{m\,m+1} x_{m+1} - \ldots - a_{mn} x_n \end{cases}$$

$$X^* = (\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, \ldots 0) \qquad \exists\, \beta_i \notin \mathbb{Z}$$

Вводится нер-во:

$$\{\beta_i\} - \{a_{i\,m+1}\} x_{m+1} - \ldots - \{a_{in}\} x_n \leq 0,$$

где $\{k\}$ – дробная часть

Алгоритм Гомори:

1) Решить симпл.-методом зад. ЛП без учета целоч-ти
2) Выбрать компоненту с наиб. целой частью и по соотв. уравнению с нов. огр. сформировать отсечение
3) Новое нер-во преобр. в равносильн. ур-е и добавить в систему
4) Расшир. задачу решить симпл.-методом
   - если получ. opt решение целочисл., то задача решена
   - иначе перех. к п.2

Пример:

$Z = 3x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ -3x_1 + x_2 \le 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 \in Z$

$n = 5 \quad m = 3 \quad k = 2$

1) б. $\{x_3, x_4, x_5\}$ св. $\{x_1 x_2\}$

$$\begin{cases} x_3 = 13 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 6 - x_1 + x_2 \\ x_5 = 9 + 3x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} x_1 \\ 13 \\ 6 \\ \infty \end{array}$$

$X_1 = (0, 0, 13, 6, 9)$; $F(x_1) = 0$

2) б. $\{x_1, x_3, x_5\}$ св. $\{x_2, x_4\}$

$$\begin{cases} x_1 = 6 + x_2 - x_4 \\ x_3 = 13 - 6 - x_2 + x_4 - x_2 = 7 - 2x_2 + x_4 \\ x_5 = 9 + 18 + 3x_2 - 3x_4 - x_2 = 27 + 2x_2 - 3x_4 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} x_2 \\ \infty \\ 7/2 \\ \infty \end{array}$$

$X_2 = (6, 0, 13, 0, 9)$ $\quad F(x) = 18 + 5x_2 - 3x_4$

$F(x_2) = 18$

3) б. $\{x_1, x_2, x_5\}$ св. $\{x_3 x_4\}$

$$\begin{cases} x_1 = 19/2 - 1/2\, x_3 - 1/2\, x_4 \\ x_2 = 7/2 - 1/2\, x_3 + 1/2\, x_4 \\ x_5 = 27 + 7 - x_3 + x_4 - 3x_4 = 34 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$X_3 = \left(\frac{19}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, 27\right)$ $\quad F(x) = 18 + \frac{35}{2} - \frac{5}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4 - 3x_4$

$= \frac{71}{2} - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$

комп. с наиб. ч.г.

$F(X_3) = \frac{71}{2} = F max$

4) по мет. Гомори: для x_1:

$$\left\{\frac{19}{2}\right\} - \left\{\frac{1}{2}\right\} x_3 - \left\{\frac{1}{2}\right\} x_4 \le 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_4 + x_6 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 19/2 - 1/2\, x_3 - 1/2\, x_4 \\ x_2 = 7/2 - 1/2\, x_3 + 1/2\, x_4 \\ x_5 = 34 - x_3 - 2x_4 \\ x_6 = -1/2 + 1/2\, x_3 + 1/2\, x_4 \end{cases}$$

x_4	x_3
19	19
∞	7
17	34
1	1

$$X_4 = \left(\frac{19}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, 34, -\frac{1}{2}\right)$$

5) $$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{2} - 1/2\, x_3 - 1/2 + 1/2\, x_3 - x_6 = 9 - x_6 \\ x_2 = 7/2 - 1/2\, x_3 + 1/2 - 1/2\, x_3 + x_6 = 4 - x_3 + x_6 \\ x_4 = 1 - x_3 + 2x_6 \\ x_5 = 34 - x_3 - 2 + 2x_3 - 4x_6 = 32 + x_3 - 4x_6 \end{cases}$$

$$X_5 = (9, 4, 0, 1, 32, 0)$$

$$F(x) = \frac{71}{2} - 3/2\, x_3 - 1/2 + 1/2\, x_3 - 1/2 \cdot 2x_6 =$$

$$= 35 - 2x_3 - x_6$$

$$F(X_5) = 35 = F_{max}$$

9. Метод ветвей и границ

1) На первом этапе решается задача ЛП (родит.) без учета целочисленности

$Z \to max$

$x^* \in Z$ – реш. найдено, $x^* \notin Z$, $\exists x_j^* \notin Z$

2) Если их несколько, выбирается та, у кот.

1) дробная часть ближе к $\frac{1}{2}$
2) наибольший коэф. целевой ф-и

3) Вводится нижняя граница цел. ф-и $Z_0 = -\infty$

4) Родительская зад разбивается на 2 дочерние:

зад. №2	зад. №3
$x_j \leq [x_j^*]$	$x_j \geq [x_j^*]+1$

Св-ва: 1) Объед. доп. мн-во дочерних зад < доп. мн-ва родит. задач

2) Объед. доп. мн-в доч. зад. с уч. целоч-ти = доп. мн-ву род. зад. с уч. целоч-ти

5) После получения дочерних задач:

- получена зад. не им. решения
- если нах. новое целоч. реш., оно сравн. с рекордом Z_0 и если он превзойдён, то новый рекорд записывается в кач-ве Z_0
- если нах. нецелочисл. ~~...~~ opt решение, то оно сравн. с рекордом Z_0. Если оно меньше, то прекращ. ввод доп. ограничений.

Пример:

$F = 3x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ -3x_1 + x_2 \le 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

$x_1, x_2 \in Z$

$n = 5 \quad m = 3 \quad k = 2$

1) б. $\{x_3, x_4, x_5\}$ св $\{x_1, x_2\}$

$$\begin{cases} x_3 = 13 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 6 - x_1 + x_2 \\ x_5 = 9 + 3x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} x_1 \\ 13 \\ 6 \\ \infty \end{array}$$

$X_1 (0, 0, 13, 6, 9) \qquad F(X_1) = 0$

2) б. $\{x_1, x_3, x_5\}$ св $\{x_2, x_4\}$

$$\begin{cases} x_1 = 6 + x_2 - x_4 \\ x_3 = 7 - 2x_2 + x_4 \\ x_5 = 27 + 2x_2 - 3x_4 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} x_2 \\ \infty \\ 7/2 \\ \infty \end{array}$$

$X_2 (6, 0, 13, 0, 9) \qquad F(X) = 18 + 5x_2 - 3x_4$

$F(X_2) = 18$

3) б. $\{x_1, x_2, x_5\}$ св $\{x_3, x_4\}$

$$\begin{cases} x_1 = 19/2 - 1/2\, x_3 - 1/2\, x_4 \\ x_2 = 7/2 - 1/2\, x_3 + 1/2\, x_4 \\ x_5 = 34 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$X_3 \left(\frac{19}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, 27\right) \qquad F(X) = \frac{71}{2} - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$

$F(X_3) = \frac{71}{2} = F_{max}$

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ -3x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \le 9 \end{cases}$$

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ -3x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 10 \end{cases} \Rightarrow x_1 \le \frac{19}{2}$$

Нет решений

4) $$\begin{cases} x_1 = 19/2 - 1/2x_3 - 1/2x_4 \\ x_2 = 7/2 - 1/2x_3 + 1/2x_4 \\ x_5 = 34 - x_3 - 2x_4 \\ x_6 = 9 - x_1 = 9 - 1/2 + 1/2x_3 + 1/2x_4 \end{cases}$$

x_4	x_3
19/2	19
∞	7
17	34
1	1

$X_4\left(\frac{19}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, 34, -\frac{1}{2}\right)$

5) $$\begin{cases} x_1 = 9 - x_6 \\ x_2 = 4 - x_3 + x_6 \\ x_4 = 1 - x_3 + 2x_6 \\ x_5 = 32 + x_3 - 4x_6 \end{cases}$$

$X_5(9, 4, 0, 1, 32, 0)$

$F(x) = 35 - 2x_3 - x_6$

$F(X_5) = 35 = F_{max}$

10. Теор. о необх. и дост. условиях безусловного экстремума

Теор. Необх. усл. $\exists$ extr 1ого порядка

если $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ – loc. extr

$$\Rightarrow f'_{x_1}(x^*) = \ldots = f'_{x_n}(x^*) = 0$$

▼ $f(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) = \varphi(x_i)$

т. x_i^* – loc. extr для $\varphi(x_i)$

по теор. Ферма $\varphi'(x_i^*) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial f(x_i^*)}{\partial x_i} = 0$

$$A = f''(x^*) = \left(\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$$

Неотр. опр. м-ца $A \geq 0$:

$\forall h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \quad (A \cdot h, h) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \geq 0$

Полож. опр. м-ца $A > 0$:

$\forall h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \quad (A \cdot h; h) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j > 0$

Теор. Необх. и дост. усл. extr 2ого порядка:

$f(x) \in D^2$ в x^*

1) Необх.: Если x^* – т. loc min (max) $f(x)$,

то $f'(x^*) = 0$

$(f''(x^*) \cdot h, h) \geq (\leq)\, 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$

2) Дост.: Если $f'(x^*) = 0$,

$(f''(x^*) \cdot h, h) > (<)\, 0) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$

то x^* – loc min (max)

▶ по Тейлору:

$$f(x^*+h) = f(x^*) + (f'(x^*), h) + \frac{1}{2}(f''(x^*)\cdot h, h) + r(h)$$

где $r(h) = o(|h|^2)$

1) Пусть x^* – loc min

$f'(x^*) = 0$ $\quad f(x^* + \lambda h) \geqslant f(x^*)$

$$f(x^*+\lambda h) - f(x^*) = \frac{\lambda^2}{2}(f''(x^*)h, h) + r(\lambda h) \geqslant 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(f''(x^*)h, h)}_{\geqslant 0} + \underbrace{\frac{r(\lambda h)}{\lambda^2}}_{\to 0} \geqslant 0$$

2) $(Ah, h) > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0 \iff \exists \alpha > 0:$

$(Ah, h) \geqslant \alpha |h^2|$

Тогда $\quad (f''(x^*)h, h) \geqslant \alpha |h|^2$

$$f(x^* + h) - f(x^*) = \frac{1}{2}(f''(x^*)\cdot h, h) + r(h)$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{2}|h|^2 + r(h) \geqslant 0$$

$\Rightarrow \quad f(x^*+h) - f(x^*) \geqslant 0$

$f(x^*+h) \geqslant f(x^*)$

$f(x^*)$ – loc min

11. Критерий Сильвестра

Поиск безусловного экстремума

Критерий Сильвестра:

A – симметр. м-ца:

1) $A > 0 \iff A_{\overline{1,k}} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$, $k = \overline{1,n}$

2) $A < 0 \iff (-1)^k A_{\overline{1,k}} > 0$, $k = \overline{1,n}$

3) $A \geqslant 0 \iff A_{\overline{1,k}} = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \cdots & & \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geqslant 0$, $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n$

4) $A \leqslant \iff (-1)^k A_{\overline{1k}} \geqslant 0$

Решение задачи безусл. оптимизации

1) Найти стац. точки, удовл. необх. усл. $\exists$ extr:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \Rightarrow X^0 \text{ – стац. т.}$$

2) Во всех стац. т. проверить дост. усл.
(знаки всех послед. главных миноров гессиана)

1) $A_{\overline{1,k}} > 0$ $k = \overline{1,n}$ $\Rightarrow X^0 \in \text{loc min } f$

2) $(-1)^k A_{\overline{1,k}} > 0$ $k = \overline{1,n}$ $\Rightarrow X^0 \in \text{loc max } f$

3) Если дост. усл. не выполняется,
то в X^0 проверяется необх. усл extr $2^{\text{ого}}$ пор.
(знаки всех мин. гессиана)

1) Если гессиан не явл. неотр. опр. м-цей, $X^0 \notin \text{loc min } f$

2) Если гессиан не явл. неполож. опр. м-цей, $X^0 \notin \text{loc max } f$

12. Теорема о необх. и дост. усл. условного экстремума

<u>Теор.</u> необх. усл. усл. extr $1^{го}$ порядка

$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ – т. loc extr f_0,
то $\exists$ $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$, что для ф-и Лагранжа

$$L(x, \lambda) = L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) =$$

$$= f_0(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x_1, \dots, x_n)$$

вып-ся усл. стационарности m+n производных

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_0(x^*)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = f_i(x^*) = 0, \quad i = \overline{1,m} \end{cases}$$

<u>Теор.</u> необх. усл. усл. extr $2^{го}$ порядка

Если x^* – т. loc min f, векторы произв. в ур-и связи лин. независимы, то
$\exists$ λ^*: для ф-и Лагранжа вып. усл.

$L(x, \lambda)$ 1) стационарность
2) неотр. опр. м-цы вторых пр-ных

$$(L''(x^*, \lambda^*) h, h) \geq 0$$

<u>Теор.</u> Дост. усл. усл. extr $2^{го}$ порядка

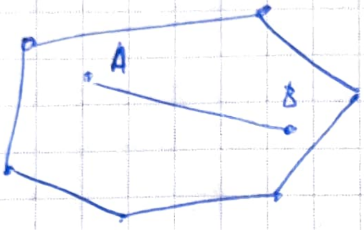
Если в x^* $f_1'(x^*), \dots f_m'(x^*)$ – вект. лин. незав., $\exists \lambda^*$
что для ф-и Лагранжа вып. усл.
стац-ти и ~~неотр.~~ полож-ти опр. м-цы втор пр-х

$$(L''(x^*, \lambda^*) h, h) \geq 0$$

то $x^* \in$ loc min

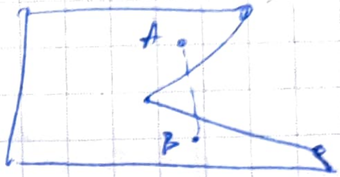
13. Выпуклое мн-во

Вып. мн-во точек – мн-во точек, в кот. $\forall A, B$ $AB \subset$ мн-ву – отрезок содержится в мн-ве целиком



$\forall A, B$

$AB \subset M$



$\exists A, B$

$AB \not\subset M$

выпуклое мн-во M невыпуклое мн-во M

Выпуклое мн-во в R^n – мн-во, кот. сод. в себе выпукл. комб. двух любых точек:

рассмотрим k векторов (точек)

$$x_1 = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) \ldots x_k = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$$

X – лин. комб. $x_1, \ldots, x_k$, если $X = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$

α_j – const, $j = \overline{1,k}$

X – выпукл. лин. комб. $x_1, \ldots, x_k$, если

1) $X = \alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_k x_k$, $j = \overline{1,k}$

2) $\alpha_j \geq 0$, $j = \overline{1,k}$

3) $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$, $j = \overline{1,k}$

Пример: 1) в част. случае при $n = 2$

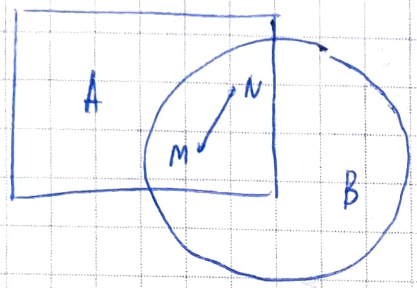
вып. лин. комб. двух точек –

соед. их отрезок

2) любая точка треугольника –

вып. лин. комбинация его вершин

Теор – пересечение любого числа вып. мн-в – вып. мн-во



$MN \subset (A \cap B)$

где A, B – вып мн-ва

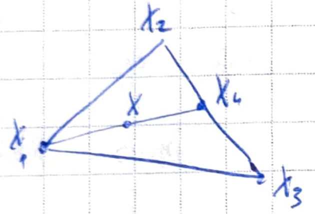
14. Теор. о вып. многограннике

Теор. отделимости

Вып. многогранник — вып. замкн. мн-во точек пр-ва, имеющ. конечное число угл. т., если оно огранич. выпукл. многогр. обл.

Теор.: Вып. многогранник — выпуклая лин. комб. своих угл. точек

▶ $n=2$



x_1, x_4 — вып. комб. x:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_4 x_4 \quad (\alpha_1, \alpha_4 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_4 = 1)$$

$$x_4 = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \quad (\alpha_2, \alpha_3 \geq 0,\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1)$$

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_4 (\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) =$$

$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_4 \alpha_2 x_2 + \alpha_4 \alpha_3 x_3 =$$

$$= t_1 x_1 + t_2 \cdot x_2 + t_3 \cdot x_3$$

$$\begin{cases} t_1, t_2, t_3 \geq 0 \\ t_1 + t_2 + t_3 = \alpha_1 + \alpha_4 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4 = \end{cases}$$

$$= \alpha_1 + \alpha_4 \underbrace{(\alpha_2 + \alpha_3)}_{=1} = \alpha_1 + \alpha_4 = 1$$

~~$\forall x \in \{x_1, x_2, x_3\}$~~ $\forall x \in \Delta_{x_1, x_2, x_3}$ — вып. лин. комб. его вершин

1) Вып. многогр. порожд. вершинами

2) Для вып. многогр. области это неверно

Отделимые вып. мн-ва — мн-ва: ∃ разделяющ. гиперпл-ть H

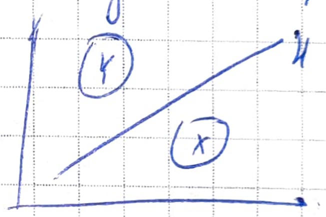
$\exists H \subset \mathbb{R}^n \quad \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta \quad \alpha \cdot x = \beta$

Отн. которой располож. в разных замк. (откр.) полупр-вах H^- и H^+

<u>Теор.</u> Непересек. замк. выпуклые мн-ва X, Y всегда отделимы и строго отделимы, если хотя бы одно из них огранич.

$M_+ : \forall x \in X \Rightarrow \alpha x \geq \beta$

$M_- : \forall x \in X \Rightarrow \alpha x \leq \beta$



15. Св-ва выпуклой (вогн.) ф-и.

Теорема о лок. экстремуме

Выпуклая ф-я $f(x) \in \mathbb{R}^n$ на мн-ве M:

1) M - выпукло
2) $\forall x_1, x_2 \in M \quad \forall t \in [0;1]$:

$$f((1-t)x_1 + t x_2) \le (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$$

$f(x)$ - вогнута $\Leftrightarrow$ $-f(x)$ выпукла

Св-ва выпуклых (вогнутых) ф-й

1) $f(x) = const \qquad f(x) = ax+b$ - всегда вып. (вогнута)

2) $f_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, имеется m вып. (вогн.) ф-й, зад. на вып. мн-ве $M \subset \mathbb{R}^n$

Тогда их лин. комб. — вып. ф-я

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) \qquad \forall \alpha_i \ge 0$$

3) Если $f(x)$ - выпукла на $M \subset \mathbb{R}^n$, то

$\forall \alpha$: $f(x) \le \alpha \qquad M_\alpha = \{x \in M \mid f(x) \le \alpha\}$ - вып. мн-во

3.1) Если $f_1(x), \dots, f_m(x)$ - выпуклы на $M \subset \mathbb{R}^n$, то вып. множ-во решений $f_i(x) \le \alpha_i$

$i = \overline{1,m} \quad \forall \alpha_i$

Теор. Пусть $f(x)$ – ф-ия на $M \subset \mathbb{R}^n$

Тогда наим. loc min $f(x)$

явл. её глоб. min на мн-ве M

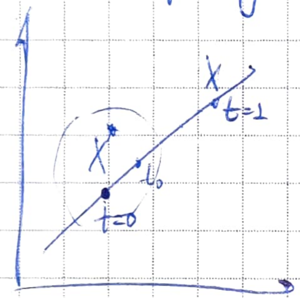
▶ т. $x^* \in M$ – loc min $\forall x \in M$ $f(x^*) < f(x)$

Отрезок соед. 2 точки:

$[x^*, x] = (1-t)x^* + t \cdot x$, $t \in [0; 1]$, $t_0 \in (0; 1)$

$f(x^*) \leq f((1-t_0)x^* + t_0 \cdot x) \leq (1-t_0) f x^* + t_0 f(x)$

по нер-ву Йенсена



$f(x^*) \leq (1-t_0) \cdot f(x^*) + t_0 f(x)$

$f(x^*) \leq f(x^*) - t_0 f(x^*) + t_0 f(x)$

$t_0 f(x^*) \leq t_0 f(x) \quad | : t_0 > 0$

$f(x^*) \leq f(x)$

Аналогично для вогн. ф-и и loc max

16. Производная по направлению

Теор. об экстр. диф. вып. ф-и и диф. призн.

Произв по напр. – $f(x) \in D(x)$, то

в x произв по люб. напр. выраж. через част. пр.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} l_i$$

– скорость измен. $f(x)$ по напр. l

знак произв. опр-ет возр (убывание)

Теор. Пусть $f(x)$ – диф. и выпукла на M

тогда 1) $\forall x, y \in M: \nabla f(x) \cdot (y - x) \leq f(y) - f(x)$,

где $\nabla f(x)$ – вектор градиента

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$$

2) т. x^* – abs min $\Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0$

Теор. $f(x) \in D^2(x)$ – вып $\Leftrightarrow \forall x = (x_1, \dots x_n) \in M$

$\forall l = (l_1 \dots l_n) \in R^n$

1) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot l_i l_j \geq 0$$

2) гессиан $f(x)$ всюду неотр. опр.

$$A = f''(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i x_j} \geq 0, \forall x \in M$$

4. Теорема Куна – Таккера

Необходимость усл.

Теор. $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ – glob min $\Leftrightarrow$

1) стационарность ф-и Лагранжа

$$L(x_1, \dots x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0$$

2) усл. дополняющей нежесткости

$$\lambda_i \cdot g_i(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$$

3) усл. неотр. $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$

Необходимость

$\Rightarrow$ $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ – glob min

- пусть $\min f(x_1, \dots, x_n)$ дост внутри или на границе M

то имеет место зад. безусл. opt

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \Rightarrow \text{вып. усл. стационарности}$$

- пусть X^0 – усл. min, тогда

необх. усл. стационарности достигается

либо на стороне, либо в вершине

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad j = \overline{1, m}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad i = \overline{1, m} = g_i$$

$n = 2$, $g(x_1, x_2)$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ g_m(x_1, x_2) \leq 0 \end{cases} \in \mathbb{R}^2$$

18. Теорема Куна-Таккера

Достаточность усл.

Теор. $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ - glob min $\Leftrightarrow$

1) стационарность ф-и Лагранжа

$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \ldots x_n)$

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0$

2) усл. доп. нежесткости $\lambda_i g_i(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0$

3) усл. неотриц. $\lambda_i \geq 0 \quad i = \overline{1,m}$

Теор. (в седл. вар.) $x^0 = (x_1^0, \ldots x_n^0)$ glob min $\Leftrightarrow$

$\exists \lambda^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0) \quad \lambda_i^0 \geq 0$:

1) для $L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} x_i g_i(\bar{x}) = L(x\ldots$

т (x^0, λ^0) - яв. седловой т. (стац. т., нонеск

2) $L(x^0, \lambda) \leq L(x^0, \lambda^0) \leq L(x, \lambda^0) \quad \forall x, \lambda \geq 0$

~~Необходимость~~ Достаточность $\Leftarrow$ пусть в x^0 вып-ся усл. 1-3

f - вып. на всей области, тогда

$L = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ - выпукла

$\nabla L(x^0) = 0 \Leftrightarrow$ ~~...~~ $\min L = L(x^0) = L^0 \quad L^0 \leq L$

Усл. нежесткости $\Rightarrow \quad L^0 = f^0 \quad = f(x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0)$

$f^0 \overset{\forall x}{=} L$

f m x^0 $\lambda_i \geq 0$ $\forall g_i \leq 0$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 \cdot g_i + \dots + \lambda_m g_m < 0$

$\Rightarrow$ $L \leq f$

$L = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m \leq f$

$f^0 \leq L < f \Rightarrow f^0 < f \Rightarrow f^0 = \min f$

19. Метод проекции градиента

1) $x_k \notin M$ (доп. области); $x_k' \in M$

$$\varphi(X) = |X_k' - X_k| = \sum_{j=1}^{n} (x_j'^{(k)} - x_j^{(k)})^2 \to \min$$

2) Пусть огр. з. мин. прогр. линейны

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = \overline{1,m}$$

3) Пусть по мет. наиск. спуска $X_0, \dots X_k \in M$

$x_{k+1} \notin M$

x_{k+1} не уд. i-му нер-ву: $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \lambda l_j$, $j = \overline{1,k}$

4) Для того чтобы ост. в границе M двиг. в том же напр., но уменьш. шаг

x_{k+1}': $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k+1)} = b_i$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j^{(k)} + \lambda l_j) = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot l_j - b_i = 0$$

$$\lambda = - \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot l_j}$$ (для min $\lambda = + \frac{\Sigma \dots}{\Sigma \dots}$)

что дает велич. шага, при кот. напр. вектор пересек. границу M

5) Если коорд. x_{k+1} не уд. неск. огр., то для кажд. из нер-в подсчит. λ и выбирается наименьш.

λ подставл. в ур-е.

Находится коорд. т. x_{k+1}, которая будет исходной для след. шага. итерац. процесса

Пример: $Z = x_1^2 + 9x_2^2 - 12x_1 - 36x_2 \to \min$

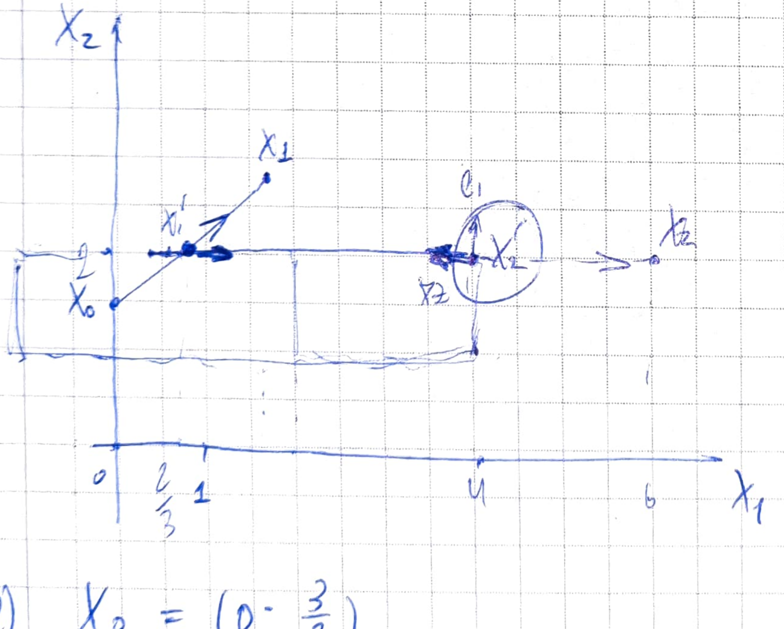
$M: \begin{cases} -1 \le x_1 \le 4 \\ 1 \le x_2 \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \cdot x_1 \le 1 \\ +1 \cdot x_1 \le 4 \\ -1 \cdot x_2 \le 1 \\ +1 \cdot x_2 \le 2 \end{cases}$

1) $\nabla Z'_{x_1} = 2x_1 - 12 = 2(x_1 - 6)$

$\nabla Z'_{x_2} = 18x_2 - 36 = 18(x_2 - 2)$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 18 \end{vmatrix}$ $\Delta 1 > 0$ $\Delta 2 > 0$

Z – выпукла



2) $X_0 = (0; \frac{3}{2})$

$\nabla Z_0 = (-12; 18 \cdot \frac{3}{2} - 36) = (-12; -9) \Rightarrow e_0 = (-4; -3)$

$X_1 = x_0 - \lambda e_0 = (0 + 4\lambda; \frac{3}{2} + 3\lambda) = (4\lambda; \frac{3}{2} + 3\lambda)$

$\nabla Z_1 = (8\lambda - 12; 18(\frac{3}{2} + 3\lambda - 2)) = (8\lambda - 12; -9 + 54\lambda)$

$$\begin{cases} l_0 \cdot \nabla Z_1 = 0 \\ (-4 \cdot 8\lambda + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 9 - 162\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{75}{194} \end{cases}$$

$$X_1 = \left(4 \cdot \frac{75}{194}; \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{75}{194}\right) = \left(\frac{300}{194}; \frac{516}{194}\right) \approx (1,6; 2,7)$$

$$\nabla Z_1 = \left(8 \cdot \frac{75}{194} - 12; -9 + 54 \cdot \frac{75}{194}\right) \approx (-8,9; 11,8)$$

Нарушено $x_2 \le 2$

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \le 2$$

$$\lambda = + \frac{0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{3}{2} - 2}{(0 \cdot (-4)) + 1 \cdot (-3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-3} = \frac{1}{6}$$

$$x_1' = x_0 - \lambda \cdot l_0 = \left(0 - \frac{1}{6} \cdot (-4); \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{2}{3}; 2\right)$$

$$x_2' = 2$$

$$0 \cdot x_1 + 1 x_2 = 2$$

$$l' = (1; -0) \qquad l'' = (-1; 0)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial l} \cdot \nabla Z(x_1') \cdot l' < 0$$

$$\nabla Z(x_1) = \left(2\left(\frac{2}{3} - 6\right); 18(2-2)\right) = \left(-\frac{32}{3}; 0\right)$$

$$l'' = (-1; 0) = l_2$$

$$x_2 = x_1' - \lambda l_1 = \left(\frac{2}{3} + \lambda; 2\right)$$

$$\nabla Z_2 = \left(-\frac{32}{3} + 2\lambda; 0\right)$$

$$l_1 \cdot \nabla Z_2 = 0$$

$\frac{32}{-2\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{16}{3}$

$\Rightarrow X_2 = \left(\frac{2}{3} + \frac{16}{3} ; 2\right) = (6;2)$

Нарушено $x_1 \leq 4$

$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \leq 4$

$\lambda = + \frac{1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot 2 - 4}{1(-2) + 0 \cdot 0} = \frac{\frac{2}{3} - 4}{-1} = \frac{10}{3}$

$x_2' = (4;2)$

$x_1 = 4$

$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 4$

$l_1' = (-0;1) \qquad l_2^4 = (0;-2)$

$\nabla Z(X_2') = (-4;0)$

$\frac{\partial z}{\partial l'} = \nabla Z(X_2') \cdot l' = 0$

$\nabla Z(X_2') \perp l'$

$x_{min} = X_2' = (4;2)$

$Z_{min} = -68$