Высшая алгебра

Владимир Григорьевич

Бинарные операции: мат. операция, принимающая 2 арг., возвр. 1 рез.

1) $a + b$

- $a + (b + c) = (a + b) + c$ → ассоциативность
- $a + b = b + a$ → коммутативность
- $\exists 0 : a + 0 = 0 + a = a$ → нейтр. элемент

▶ пусть $\exists 0_1, 0_2 \Rightarrow 0_1 + 0_2 = 0_1 = 0_2$

- $\forall a \ \exists (-a) : a + (-a) = 0$ → обр. элемент

След. $\mathbb{R}$ – обр. коммут. (Абелеву) гр. по слож.

2) $a \cdot b$

- $a \cdot (bc) = (a \cdot b) \cdot c$
- $a \cdot b = b \cdot a$
- $\exists 1 : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- $\forall a \neq 0 \ \exists a^{-1} : a a^{-1} = a^{-1} a = 1$

След. $\mathbb{R} \setminus 0$ – обр. коммут. гр. по умн.

- $a(b + c) = ab + ac$

Зам. для $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists$ единств. разл. на пр. мн.

Зам. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – поля

Опр. Поле – мн-во, на кот. введ. бин. опер. слож. и умн., для кот. д-ют аксиомы для $\mathbb{R}$

Опр. Изоморфизм – между эл. двух мн-в уст. взаимнодн. соответствие ($\varphi : F_1 \to F_2$)

Зам. изоморф. всегда задает отн. эквив. на классе таких структур

След. При изоморфизме сохр. операции

обр. суммы $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$

обр. произв. $f(a \cdot b) = f(a) \circledast f(b)$

Зам. $f: R_1 \to R_2$ (R_1, R_2 – кольца)

$0_{R_1} \xrightarrow{f} 0_{R_2}$

$1_{R_1} \xrightarrow{f} 1_{R_2}$ (f – изоморф., гомоморф.)

Опр. Гомоморфизм – отображение сохр. операции

Зам. Изоморфизм – взаимнооднозн. (биект.) гомоморф.

Опр. Ядро – $\ker f = \{a \in R_1 : f(a) = 0_2\}$

– мн-во (вект.) эл. из R_1, отображ. в нул. (вект.) эл. пр-ва R_2

Опр. Образ – $\operatorname{Im} f = \{b \in R_2 : b = f(a)\ \forall a \in R_1\}$

– мн-во образов всех эл. R_1

Опр. Кольцо – мн-во на кот. зад. бин. операц. слож. и умн., если вып.

- K – ком. группа по слож.
- K – ассоц. группа по умн. (не об. $\exists$ обр. эл.)

Зам. Поле – коммут. кольцо с един., в кот. кажд. ненул. эл. им. обр. по умн.

Опр. Идеал I кольца R – $I \subset R$

$I = \{\forall i \in I\ \forall r \in R\ \ ir \in I\}$

– подмн-во эл. кольца R, замкнутое отн. опер. умн. (слож., выч.) на эл. кольца

Зам. Ядро гомоморфизма колец – идеал
$\ker f = \mathcal{Y}$
▶ $a \in R$, $f(a) = 0$ $\quad a \in \ker f$
$b \in R$ $\quad f(b) = 0$ $\quad b \in \ker f$

$$f(a-b) = f(a) - f(b) = 0 - 0 \in \ker f$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) = 0 \cdot 0 \in \ker f$$

Зам. Для ∀ кольца можно постр. смежн. класс по идеалу

$(a + \mathcal{Y})$ – смежн. класс, где $\mathcal{Y}$ – идеал
$a \in R$: $\{a + x,\ x \in \mathcal{Y}\}$

Зам. Смежн. классы либо совп., либо не пересек.

$n\mathbb{Z}$ – идеал $\vdots n$ чисел
★ Пусть $n = 3$. Тогда $5 + 3\mathbb{Z} \longleftrightarrow 2 + 3\mathbb{Z}$
Смежн. классы $n\mathbb{Z}$: $0 + n\mathbb{Z}$
...
$n - 1 + n\mathbb{Z}$

Опр. Факторкольцо по идеалу $R/\mathcal{Y}$ – мн-во смежн. классов по мод. $\mathcal{Y}$

Опр. Кольцо главных идеалов – кажд. идеал главный, т.е. порожден одним эл. a

Опр. Евклидово кольцо – кольцо, в кот. ∃ аналог алг. Евклида по дел. с ост. (люб. идеал в нём явл. главным)

$a = bq + r$, $\quad 0 \le r < b$

След. $f: A \to \operatorname{Im} f$

$\operatorname{Im} f \cong A / \operatorname{Ker} f$ ($\cong$ конгруэнтость (геом. рав-во))

— факторкольцо по ид. изоморфно образу f

▶ Пусть $A = \mathbb{Z}$

$f(a)$ — ост. от деления a на m фикс.

$\operatorname{Im} f = \{0, 1, \ldots, m-1\}$
$\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{Z} : x \vdots m\} = (m)$

$\Rightarrow A / \operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$

След. R / J — факторкольцо по ид. J

тогда операции на факторкольце опр. след. образом:

слож. $(a+J) + (b+J) = (a+b) + J$

умн. $(a+J) \cdot (b+J) = (a \cdot b) + J$

$a + J = b + J$, $a - b \in J$

Зам. Алгоритм. Евклида нахожд. НОД

75 20

1) $75 = 3 \cdot 20 + 15$
2) $20 = 1 \cdot 15 + 5$ НОД — посл. ненул. ост.
3) $15 = 3 \cdot 5 + 0$

След. В Евклид. кольце A $\mathbb{Z}$ – к.г.и.

▶ Пусть $I \subset \mathbb{Z}$
$d \in I$, наим. полож. число

$\forall a \in I$ $a = d \cdot q + r$ $0 \le r < d$

если $r > 0$, то $\left.\begin{matrix} a \in I \\ d \in I \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} qd \in I \\ a - qd \in I \end{matrix}$

$a - qd \in I \Rightarrow r \in I$ – против.

след. $\Rightarrow$ $r = 0$, $a \vdots d$, $I = (d)$

След. к.г.и – факториально, т.е. с однозначным разлож. на прост. множ.

След $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$: $a x = b(x) \cdot q(x) + r(x)$

$\deg r(x) < \deg b(x)$ или $r(x) = 0$

НОД: $r_n(x)$ – посл. $r_i(x) \neq 0$

Кольцо многочленов – к.г.и.
где $(x + a)$; $(x^2 + px + q)$, $D < 0$ – прост. эл

Опр. Группа – мн-во, на кот. опред. одна бин. оп.
1. $+$ аддитивная
2. $\cdot$ мультипликативная

где

1) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
2) $\exists e$: $a \circ e = e \circ a = a$
3) $\exists a^{-1}$: $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

4) $a \circ b = b \circ a$ – коммут. (Абел.) группа

Зам. Всякое кольцо – аб. гр. по слож
Всякое поле – аб. гр. по слож. и умн. без 0

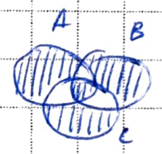
Опр. Операции над мн-вами

$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \triangle B$.

где $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

След.
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap M = M \cap A = A$ M – нейтр
- не им. обр.

След.
- $A \triangle B = B \triangle A$
- $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$
- $\varnothing$ – нейтр. : $A \triangle \varnothing = A$
- A – обр. : $A \triangle A = \varnothing$



Поле - мн-во, на кот. опр. опер. +, -, 0, 1

$\mathbb{Z}$ „+" $a+b$ 0 $-a$

„·" $a \cdot b$ 1 a^{-1} – $\nexists$

$\mathbb{Z}$ – кольцо

$2k$: „+" $a+b$ $2k+2k=2k$ 0 $-2k$

„·" $a \cdot b$ $2k \cdot 2k = 4k^2$ $1 - \nexists$ $a^{-1} - \nexists$

$2k$ – ~~кольцо~~ идеал кольца

nk – кольцо

$nk+1$ $(nk+1)+(nk+1) = 2nk+2$ – $\nexists$

$nk+1$ – фактор-кольцо

~~(a+b√2)~~ $a+b\sqrt{2}$ $a+b$ 0 $-a$

$a \cdot b$ 1 a^{-1}

$(a+b\sqrt{2})$, $a,b \in \mathbb{Z}$ – кольцо

$(a+b\sqrt{2})$, $a,b \in \mathbb{R}$ – поле

$a+bi$, $a,b \in \mathbb{Z}$ – кольцо

"+"

"·" $(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(cb+ad)i$

$$x = \frac{1}{(a+bi)} = \frac{(a-bi)}{a^2 + \cancel{\ldots} + b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

$a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$ – поле

все м-цы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$

$a, b \in Q$ — кольцо

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2(b+d) & a+c \end{pmatrix}$$

$$\exists \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ -2b & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 2bd & ad + bd \\ 2bc + 2ad & 2bd + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & l \\ 2l & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}^{-1} \qquad a^2 - 2b^2 \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 2b & a & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & a - \frac{2b^2}{a} & -\frac{2b}{a} & 1 \end{array}\right) = \dots =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{2b}{a(a^2-2b)} & -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{a^2-2b} \\ 0 & 1 & -\frac{2b}{a^2-2b} & \frac{a}{a^2-2b} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \cancel{A^t} \begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix}$$

$$\frac{A}{a^2 - 2b^2}$$

$ax = b \iff a | b \iff b \vdots a$

Идеал - подмн-во кольца, замкнутое (отд. яз. "-"; "·" мод. эл. идеала на мод. эл. кольца) отн. операций вычитания, отн. оп. умн

$2k$ ид. $n \cdot k$ ид. $nk+1$ не ид. , кольцо $\in R$

$\mathbb{Z}_n$ - кольцо

n - прост. $\mathbb{Z}_n$ - поле

Фактор-кольцо $\mathbb{Z}_n = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}_n}$ (ост. от. дел на идеал)

$R[x] = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ — кольцо

1) "+" 0 -

2) · $R[x]$, "·" $P[x]$

$R^{\frac{1}{x}} = 1$ — $\nexists$

$a(x) \cdot \underset{\text{фикс.}}{p(x)}$, $p(x) \neq 0$ - идеал

1) "-" "·" $(b(x) \cdot p(x) - a(x) \cdot p(x)) = (b(x) - a(x)) p(x)$

$\mathbb{N}$ в $\mathbb{Z}$ - кольце

$\mathbb{N}$ - не идеал (т.к. $3 - 5 \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}$ – кольцо

Высш. алгебра (п) - 2

Группа - непуст. мн-во с опр 1 бин. опер.

1) $a * (b * c) = (a * b) * c$
2) $\exists e \quad a * e = e * a = a$
3) $\exists a^{-1} \quad a * a^{-1} = e$
4) $a * b = b * a$

1) $\mathbb{Z}$ - группа по сложению

2) $2n, n \in \mathbb{Z}$ - группа по слож. (коммутативная)

3) $n \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ - ком. гр. по слож.

4) $a^n, a \neq 0, \pm 1, n \in \mathbb{Z}$ - ком. гр. по умн.

$a^k \cdot a^l = a^{k+l}$
$a^0 = 1$
a^{-n}

5) $a \geq 0, a \in \mathbb{Z}$ - не гр. по сл.

6) $2n+1, n \in \mathbb{Z}$ - не гр. по сл.

7) $n \in \mathbb{Z}$
- оп. не вых. за рамки
- $a - (b - c) \neq (a - b) - c$, если $c \neq 0$

не гр.

8) $n, n \in \mathbb{Q}$ Аб. группа по сл.

9) $n \quad n \in \mathbb{Q}$ - не гр.
т.к. 3 не вып. для "0"

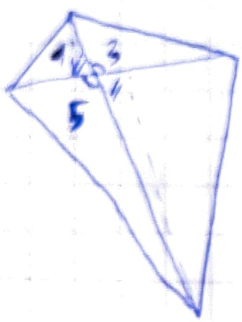
10) $n, n \in \mathbb{Q}$ - гр. по умн.

11) $n, n \in \mathbb{Q}^+$ - ком. гр. по умн.

12) $a \in \mathbb{Q}^*$ – не асс. у по дел.

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b} \neq \frac{ab}{c}$$

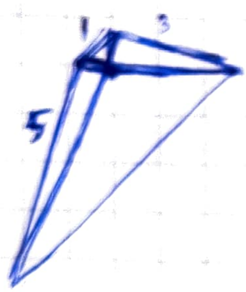
13)

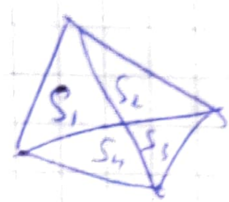


$\frac{1}{2} h_1 \cdot l_1$ $\quad$ $\frac{1}{2} h_1 \cdot l_2$

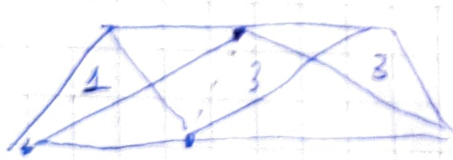
$*$ $\quad$ $*$

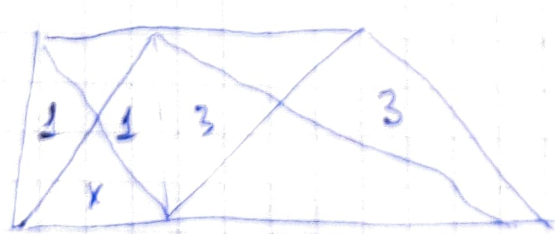
$\frac{1}{2} h_2 \cdot l_2$ $\quad$ $\frac{1}{2} h_2 \cdot l_1$





$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$





$1 + x = 1 * x$

14) $\frac{m}{2^k}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $m \in \mathbb{Z}$ — группа по сл.

$\frac{m}{2^k} + \frac{k}{2^l} = \frac{m \cdot 2^{k-l} + k}{2^k}$, $k > l$

15) $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$A \cdot B$ не выв.

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|A|^{-1}$, если $|A| \neq 0$

16) $|A|$, $|A| \neq 0$ — невыр. матрица

$|A|^{-1}$ м.б. не цел. коэф. => не гр.

17) A — $n \times n$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $|A| = 1$ — группа

$A \cdot B = B \cdot A$

$|A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$

$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$\exists$ обр. м-ца

18) A, $n\times n$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ $\quad |A| = \pm 1$

– группа по умн.

19) $a b = a^b$. $\quad n \in \mathbb{Z}^+$ – не гр.

$(a\cdot b)\cdot c = (a^b)\cdot c = (a^{bc})$

$a\cdot(b\cdot c) = a\cdot b^c = a^{(b^c)}$

20) $n \in \mathbb{Z}^+$ $\quad a * b = a^2 b^2$ – не гр.

$(a*b)*c = a^2b^2 * c = a^4b^4c^2$

$a*(b*c) = a * b^2c^2 = a^2b^4c^4$

21) $a_0 + a_1x + \dots a_nx^n$ – не гр.

22) $a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ – $m \le n$ – гр.

H – нормальный делитель для комм. гр.

$g \in G \quad g^{-1}Hg = H$

$Hg = gH$

$b \in g_1H \quad b \in g_2H$

$b - g_1h_1 = g_2h_2$

$g_1\underbrace{h_1h_2^{-1}}_{h} - g_2$

$|G|$ – порядок гр. (число эл.)

$|G'|$ $\quad |G'|$ .. подгр. $\quad |G| : |G'|$

1) Поле – непуст. мн-во, в кот 2 бин. оп. обл. св-вами R, ∃ нейтр. и обр. эл. $0 \neq 1$

2) Примеры $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, действ., компл.

3) Док-во, что мн-во – поле

$a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$

⊕ $a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2} = (a+c) + (b+d)\sqrt{2}$

$a, b, c, d \in \mathbb{Q}$

– не выводит за границы

$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (c + d\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2})$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$0 + 0 \cdot \sqrt{2}$ – нейтр

$-a - b\sqrt{2}$ – обр.

⊗ $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + da)\sqrt{2}$

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$1 + 0\sqrt{2}$

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$$

$a^2 - 2b^2 = 0$

$a = \pm\sqrt{2}\, b \notin \mathbb{Q}$

$a + bi \quad , a, b \in \mathbb{R}$

$\oplus \quad a + bi + c + di =$

$= (a + c) + (b + d)i$

$a + b = b + a$
$a + (b + c) = (a + b) + c$

$0 + 0i$

$-a - bi$

$\otimes \quad (a + bi)(c + di) =$

$= (ac - bd) + (bc + da)i$

$a \cdot b = b \cdot a$
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$1 + 0i$

обр. для отл. от "0"

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{\underbrace{a^2+b^2}_{\neq 0}} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

4) кольца

5) изоморфизм

$a \in \mathbb{Z}$ $\quad a = 3q + r \quad 0 \leq r < 3$

$f(a) = r$

1) $f(3q_1 + r_1 + 3q_2 + r_2) = f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$

$f(4) = f(1)$
$\Updownarrow$
$f(4) = f(2) + f(2)$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

=> гомоморф. по слож.

2) $f((3q_1 + r_1) \cdot (3q_2 + r_2)) = f(9q_1q_2 +$
$3q_2r_1 + 3q_1r_2 + r_1r_2) = f(r_1r_2) = f(r_1) \cdot f(r_2)$

x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

идеал – $0 + (3)$
I смеж.кл. – $1 + (3)$
II смеж.кл. – $2 + (3)$

фактор-кольцо

$a + (3) + b + (3) = (a + b) + (3)$

$(a + (3))(b + (3)) = (ab) + (3)$

3) $\ker f = 3 \cdot \mathbb{Z} = \{a \mid a \vdots 3\}$

$\operatorname{Im} f = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

главный идеал – сост. из чисел : одн. числу

$J \subset \mathbb{Z}$

d – наим. $\mathbb{N}$ эл. $\in J$

В кольце $\exists$ алг. Евк.: дел. с ост.

$a = qd + r$ $\quad \forall a \ \exists q, r \quad 0 \le r < d$

$\forall a \in J \quad r = 0$

$\left.\begin{matrix} r \in J \\ r < d \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0$ т.к. $r = a - qd$

иначе d не наим. $\Rightarrow a \vdots d$

$\mathbb{R}[x]$ – обл. кольцо гл. идеалов

$g(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$ $\quad \deg r(x) < \deg b(x)$
или $\deg r(x) = 0$

J – идеал

$b(x)$ – мн-н наим. ст. $\in J$

$g(x)$ – произв

$r(x) \in J$ т.к. $g(x) - q(x) \cdot r(x) \in J$

если $r(x) > 0$,

то $b(x)$ – не наим

Высшая алгебра (II)

Опр. $x \in A$ – внутр. $\exists \delta(x)$ $U(x) \subset A$

Опр. Мн-во открытое – все т. внутр.

Теор. G_α – откр. $\forall \alpha$, то $\bigcup_\alpha G_\alpha$ – откр.

▶ $\gamma \in \bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha : \gamma \in G_\alpha$ – откр.

$\exists U(\gamma) \in G_\alpha \Rightarrow U(\gamma) \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$

Теор. $G_{1,\dots,n}$ – откр., $\bigcap_{i=1}^n G_i$ – откр.

▶ $\gamma \in \bigcap G_i \Rightarrow \gamma \in G_{i=\overline{1,n}}$

$\exists \delta_i > 0 : U_{\delta_i}(\gamma) \subset G_i$

$\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} > 0$, $\delta \le \delta_i$

$U_\delta(\gamma) \subset U_{\delta_i}(\gamma) \subset \bigcap G_i$

Опр. a – пред. точка : $\forall \overset{\circ}{U}(a) : \overset{\circ}{U}(a) \cap A \neq \emptyset$

Опр. Мн-во замкнутое – все т. предельные

Зам. $C(G_\alpha)$ – замк., $C(F_\alpha)$ – откр.

Теор. $\bigcap_\alpha F_\alpha$ – замк. $\bigcup_{\alpha=1}^n F_\alpha$ – замк.

Теор. G – откр. $\Rightarrow$ G – объед. сост. инт.

▶ сост. интервал $(a, b) \supset G_i$

$\gamma \in G$ $\exists U(\gamma) \subset G_i$ $\exists c \in (a; b)$ $c \notin G$

Рассмотр. $\gamma < c$, $c \notin G$

$\exists$ точн. нижняя грань $m = \inf\{c\}$

$[\gamma, m) \subset G$

G – открытое, если $(a; b) \subset G$
$b \notin G$, $a \notin G$, то $(a; b)$ – сост. инт.

Теор. G – конеч. и счет. объед. инт.

Опр. Сост. интервал – инт. вход. в мн-во, а концы не входят

Теор. Мн-во пред. т. конеч. мн-ва – пустое

Теор. $\cap_\alpha F_\alpha$ – замк. $\cup_{\alpha=1}^{n} F_\alpha$ – замк.

▶ Пусть $a \in \bar{G} \Rightarrow a \notin G \Rightarrow$

$\forall U(a): U(a) \cap \bar{G} = \varnothing$

перес. с опр. сод. т. из доп.

След. $\forall G$ – откр., $\bar{G}$ – замк.

$\cup_\alpha G_\alpha = \overline{\cap_\alpha \bar{G}_\alpha}$

Структура замк. мн-ва

$b - a - \underbrace{m\bar{F}}_{\text{мера дополн.}} = mF$

$mA = 0$, если его внеш. мера $= 0$

$m^* A = \inf\limits_{A \subset G} mG$

▶ $\sum\limits^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^r} = \varepsilon$

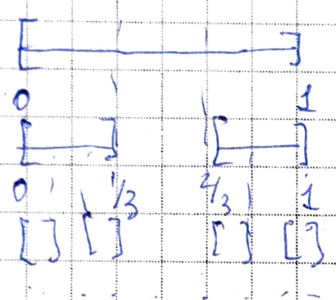
Сумм. длина $< \varepsilon \Rightarrow \underbrace{m^* Q}_{\text{внеш. мера}} = 0$

Внутр. мера : $m_* A = \sup\limits_{F\subset A} m F$

Квадр. мн. $\forall G$: $m G = m_* G = m^* G$

$m F = m_* F = m^* F$

Мн-во Кантора



$\sum$ длин выб. интервалов

$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \ldots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \ldots\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$

$m M = 1$

$\forall$ эл. M:

в троичн. сист. $0,2002200$ (не будет 1)

в двоичн. сист. $0,1001100$

взаимно одн. соотв. с 2ой сист.

Вывод: мн. Кантора : $m M = 0$ и несчетно, причем все т. граничные

Св-ва A_1, A_2 — изм. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow m(A_1) < m(A_2)$

Теор $m G$ — т. верх. грань мер F; $F \subset G$

Теор $m F$ — т. нижн. грань мн. G

A_i — изм. $m(A_i \cap A_j) = 0$

$m\left(\bigcup^{\infty} A_i\right) = \sum^{\infty} m(A_i)$

Св-во A_1, A_2 — изм. $A_1 \subset A_2$ $m(A_2 \setminus A_1) = m(A_2) - m(A_1)$

Теор. E_1, E_2 – изм.

$\Rightarrow$ изм. операции $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 \setminus E_2$

Теор. $E_1 \cap E_2 = \phi$,

$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$

(общ.) $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2)$

Теор. $m(E_1 \setminus E_2) = m(E_1) - m(E_2)$ $(E_2 \subset E_1)$

Теор. $E_1, \dots E_n$ – изм., то $\cup E_n$ – изм.

Теор. Если $E_i \cap E_j = \phi$, $i \neq j$

$m\left(\bigcup^{\infty} E_n\right) = \sum^{\infty} m(E_n)$

След. Если $E_1, \dots E_n$ – изм., то $\bigcap^{\infty} E_n$ – изм.