Дифференциальные ур-я

I. Основные понятия:

ДУ – ур. уст. з-ть между арг. x, искомой ф-й $f(x)=y$ и её произв. $y^{(n)}$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})=0$$

Порядок ДУ – порядок старшей произв.

Решение (инт.) ДУ – ф-я $y=f(x)$, кот. при подстановке в ур-е обращ. его в верное т-во

ДУ $1^{ого}$ порядка: $F(x,y,y')=0 \iff y'=f(x,y)$ – норм. ф.

Задача Коши: найти решение $y'=f(x,y)$ при н.у. $y(x_0)=y_0$

<u>Теор.</u> (единств. решения): если $f(x,y)$, $f'_y(x,y)$ – непрерывны в $D \in (x_0,y_0)$, то зад. Коши имеет ед. решение, т.е. $\exists\, y=\varphi(x)$ – решение $y'=f(x,y)$, удов. н.у.

Общее решение ДУ $1^{ого}$ порядка – $y=\varphi(x,c)$:
1) $\forall\, c_0$ $y=\varphi(x,c_0)$ – реш. ДУ
2) $\forall\, y(x_0)=y_0$ $\exists\, c_0$ $y=\varphi(x,c_0)$

Общ. интеграл – общ. решение в неяви. виде $\Phi(x,y,c)=0$

Частное реш. ДУ $1^{ого}$ пор. – $y=\varphi(x,c_0)$, подст. c_0 в общ.р.

ex: $y'=-y/x \Rightarrow y=c/x$

$y(1)=2 \quad 2=c/1 \Rightarrow c_0=2 \Rightarrow y=2/x$ – ч. реш.

Инт. кривая – граф. ф-и – решение ДУ

Изоклина – ГМТ, в кот. соот. $y' = k$ – const

II. Решение ДУ

1) <u>ДУ с разделяющ. пер</u>

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) \cdot dx \quad , f_2(y) \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\, dx + c \Rightarrow \Phi(x, y, c) = 0$$

ex: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + \ln|c|$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c| \Rightarrow y = c/x$$

2) <u>Однородные ДУ 1ого пор.</u>

Одн. ф-я n-измерения – $f(x, y)$: $\forall \lambda \; f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

Одн. ДУ 1ого пор. – $y' = f(x, y)$: $f(x, y)$ – одн. ф. 0-изм.

$\lambda = 1/x \Rightarrow f(1, \frac{1}{x} \cdot y) = f(x, y) \;, x \neq 0$

<u>Замена</u> $\quad y/x = u(x) \quad y' = u'x + u$

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = f(1, u)$$

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + c \Rightarrow \Phi(x, u, c) = 0 \Rightarrow \Phi(x, y, c) = 0$$

ex: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x}$ $\qquad \frac{y}{x} = u$

$y' = u' \cdot x + u$

$\frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{1}{u^2} + u$

$\int u^2 du = \int \frac{dx}{x} + \ln|c|$

$u = \sqrt[3]{3 \ln|cx|} \Rightarrow y = \sqrt[3]{3 \ln|cx|} \cdot x$

3) Линейные ДУ 1ого пор. $\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = Q(x)$

$Q(x) = 0$ – лин. одн.
$Q(x) \neq 0$ – лин. неодн.

а) метод подстановки

$y(x) = u(x) \cdot v(x)$

$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + P(x) \cdot u(x) \cdot v(x) = Q(x)$

$u'v + u(v' + P(x) \cdot v) = Q(x)$

$v: v' + P(x) \cdot v = 0$

$\frac{dv}{dx} = -P \cdot v \rightarrow \frac{dv}{v} = -P dx$

$\ln|v| = -\int P(x) dx + \ln|c|$

$v = c \cdot e^{-\int P(x) dx}$

$v = e^{-\int P(x) \cdot dx}, c = 1$

$u'(x) = \frac{Q(x)}{v}$

$u'(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx}$

$$u(x) = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx} dx + C$$

$$\underset{\text{общ. неодн.}}{y(x)} = \underbrace{\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx} dx + C\right)}_{\varphi(x)} \cdot \underbrace{e^{-\int P(x)dx}}_{v(x)}$$

$$= \underbrace{\varphi(x)\cdot v(x)}_{\text{частн. неодн.}} + \underbrace{v(x)\cdot c}_{\text{общ. однор.}}$$

ex: $y' - \frac{2}{x+1}\, y = (x+1)^3$

$y = uv$

$u'v + v'u - \frac{2}{x+1}\, uv = (x+1)^3$

$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x+1}\cdot v\right) = (x+1)^3$

$v' - \frac{2}{x+1}\cdot v = 0$

$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1} \Rightarrow v = c\cdot(x+1)^2$ — о.о.

$v = (x+1)^2,\ c = 1$

$u'\cdot(x+1)^2 = (x+1)^3$

$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$

$$y_{о.н.} = uv = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + c\right)\cdot(x+1)^2 = \underbrace{\frac{(x+1)^4}{2}}_{ч.н.} + \underbrace{C\cdot(x+1)^2}_{о.о.}$$

$y(0) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} + c\cdot 1 \Rightarrow c = 5/2$

в) метод вариации произв. пост.

$y' + P(x)\cdot y = 0$

$y = 0 \qquad y_{о.о.} = C\cdot e^{-\int P(x)\cdot dx}$

$y_{о.н.} = C(x)\cdot e^{-\int P(x)\cdot dx}$

$$\left(C(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}\right)' + P(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$C'(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} + C(x)\cdot e^{-\int P(x)\cdot dx}\cdot(-P(x)) + P(x)C(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$C'(x) = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$C(x) = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + C$$

$$y_{о.н.} = \left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + C\right)\cdot e^{-\int P(x)dx} = y_{ч.н.} + y_{о.о.}$$

ex:

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad y(0) = 0$$

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{1+x^2}\cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx\cdot x}{1+x^2}$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln|c|$$

$$y_{о.о.} = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}} \qquad y_{о.н.} = \frac{c(x)}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

$$\frac{c'(x)\cdot\sqrt{1+x^2} - c(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{c(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$c'(x) = x \Rightarrow c(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y_{о.н.} = \frac{x^2/2 + c}{\sqrt{1+x^2}} = \underbrace{\frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}}_{y_{ч.н.}} + \underbrace{\frac{c}{\sqrt{1+x^2}}}_{y_{о.о.}}$$

$$0 = c/1 \Rightarrow c = 0$$

Уравнение Бернулли

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^n$$

$$y^{-n}\cdot y' + P(x)\cdot y^{-n+1} = Q(x)$$

$z = y^{-n+1}, \quad z' = (-n+1)\cdot y^{-n}\cdot y'$

$(-n+1)\cdot y^{-n}\cdot y' + (-n+1)\cdot P(x)\, y^{-n+1} = Q(x)\cdot(-n+1)$

$z' + (-n+1)\cdot P(x)\cdot z = Q(x)\cdot(-n+1)$

III. ДУ 2ого порядка

ДУ 2ого порядка $- F(x, y, y', y'') = 0$, $y'' = f(x, y, y')$

$y = \varphi(x)$ - решение уд. зад. усл. $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$

Теор. $\exists$ ед. реш. зад. Коши, если $f(x, y, y')$, $f'_y(x, y, y')$, $f'_{y'}(x, y, y') \in C$ в т. $(x, y_0, y_0') \in D$

Геом. смысл: в т. (x_0, y_0) с зад. tg наклона нас. прох. ед. инт. кривая

Общее реш. ДУ 2ого пор. $y = \varphi(x, C_1, C_2)$:
1) $\forall C_1, C_2$ – решение
2) $\forall$ н.у. $\exists\, C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$: $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ уд. н.у

1) ДУ допускающие понижение порядка

I тип: $y'' = f(x, y')$, т.е. в явн. вид отс. y

$y' = \frac{dy}{dx} = p(x) \qquad y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = p'$

$p' = f(x, p) \to p = P(x, C_1) = y'$

$y = \int p(x, C_1)\, dx + C_2 = \underbrace{\varphi(x, C_1, C_2)}_{\text{общ. реш}}$

ex: $y'' = y'/x + x \cdot e^x$

$y' = p(x) \qquad y'' = p'(x)$

$p'(x) = p(x)/x + x \cdot e^x$

$$p' - \frac{1}{x} \cdot p = 0$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$p_{o.o.} = c \cdot x \qquad p_{o.н.} = c(x) \cdot x$$

$$c'(x) \cdot x + c(x) - \frac{1}{x} \cdot c(x) \cdot x = x \cdot e^x$$

$$c'(x) = e^x$$

$$c(x) = e^x + c_1 \qquad p_{o.н.} = e^x \cdot x + c_1 x = y'$$

$$y = \int e^x x\,dx + c_1 \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 = e^x x - e^x + c_1 x^2 + c_2$$

II тип: $y'' = f(y, y')$

$$y' = \frac{dy}{dx} = p(y)$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx} \cdot p(y(x)) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p$$

$$\frac{dp}{dy} \cdot p = f(y, p) \Rightarrow p = p(y, c_1) = y'$$

$$\frac{dy}{dx} = p(y, c_1),$$

$$\int \frac{dy}{p(y, c_1)} = \int dx + c_2 \Rightarrow \Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$$

ex: $y'' = \frac{1}{y}(y')^2 - \frac{1}{y}(y')^3$

$y' = p(y)$, $y'' = p \cdot p'$; $y = c$ ($p \neq 0$, т.к. усл. ?)

$$p \cdot p' = \frac{p^2(1-p)}{y}$$

$$\frac{dp}{p^2 - p} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow p = \frac{y}{y - c_1} = p(y, c_1) = y'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y - c_1} \Rightarrow y - c_1 \cdot \ln y = x + c_2$$

2) линейные ДУ $2^{ого}$ порядка

$y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = f(x)$

$y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = 0$ – лин. одн. ур.

<u>Теор.</u> $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ – реш. ДУ

$\Rightarrow$ их лин. комб. $y(x) = c_1(y_1(x)) + c_2(y_2(x))$ – реш. ДУ

$y_1(x)$, $y_2(x)$ – лин. нез. на $[a;b]$, если на $x \in [a;b]$

$y_2(x)/y_1(x) = \lambda$ – const

$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ – вронскиан

<u>Теор.</u> если $y_1(x), y_2(x)$ лин. зав. на $[a;b]$, то $W(x) = 0$ на $[a;b]$

<u>Теор.</u> если $y_1(x), y_2(x)$ лин. нез. реш. ДУ, то $y_{o.o}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

a) Лин. однородные ДУ с пост. коэф.

$y'' + p\cdot y' + qy = 0$

$y = e^{kx}$ $\quad y' = k\cdot e^{kx}$ $\quad y'' = k^2\cdot e^{kx}$

$k^2 e^{kx} + p\cdot k\cdot e^{kx} + q e^{kx} = 0$

$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$

$k^2 + pk + q$ – характ. ур. ДУ

1) $D > 0 \Rightarrow k_1 \neq k_2$ $\quad y_1 = e^{k_1 x}$ $\quad y_2 = e^{k_2 x}$ $\quad y_{o.o.} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$

2) $D < 0 \Rightarrow k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\quad y_{1,2}(x) = e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x)$

$u(x) + i\,v(x) \Rightarrow u(x), v(x)$ – реш.

$\tilde{y}_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $\quad \tilde{y}_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$

$y_{o.o.} = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$

3) $D = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k \qquad y_1(x) = e^{kx}$

$y_2(x) = u(x) \cdot e^{kx}$

$$y_2' = u' e^{kx} + k u e^{kx}$$

$$y_2'' = u'' e^{kx} + 2k u' e^{kx} + k^2 u e^{kx}$$

$$e^{kx} (u'' + \underbrace{(2k + p)}_{=0} u' + \underbrace{(k^2 + pk + q)}_{=0} u) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} u'' &= 0 \\ u' &= A \\ u &= Ax + B \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 0,\ B = 0 \Rightarrow u(x) = x$$

$$y_2(x) = x \cdot e^{kx}$$

$$y_{o.o.} = e^{kx}(C_1 + C_2 \cdot x)$$

в) Неоднородные лин. ДУ ~~II~~ порядка

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x)$$

<u>Теор.</u> $y_{o.н.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.} = \bar{y} + y^*$

<u>метод вариации произв. пост.</u>

$$y_{o.o.} = C_1 y_2 + C_2 y_2$$

$$y_{o.н.} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$$

$$y' = C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \Rightarrow W(x) \neq 0$$

$$y'' = C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2''$$

$$y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \ y = f(x)$$

<...>

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 (\underbrace{y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y}_{=0}) + C_2 (\underbrace{y_2'' + a_2 y_2' + a_2 y_2}_{=0}) = f(x)$$

$C_1'(x) = \varphi_1(x) \qquad C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + C_1 \qquad y_{o.н.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 +$

$C_2'(x) = \varphi_2(x) \qquad C_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx + C_2 \qquad \int \varphi_1(x)\,dx + C_1 + \int \varphi(x)\,dx\, y_2$

с) Неодн. лин. ДУ 2ого порядка с пост. коэф. и спец. правой частью

(I) $y'' + py' + qy = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$

1 случай α – не явл. корнем $k^2 + pk + q = 0$

$$y_{ч.н} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} = (A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n) e^{\alpha x}$$

$$y' = Q_n'(x) \cdot e^{\alpha x} + Q_n(x) \cdot \alpha e^{\alpha x}$$

$$y'' = Q_n''(x) \cdot e^{\alpha x} + Q_n'(x) \cdot \alpha e^{\alpha x} + \alpha \cdot Q_n'(x) \cdot e^{\alpha x} + \alpha^2 Q_n(x) e^{\alpha x}$$

$$y'' + py' + qy = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$

<...>

$$Q_n'' + (2\alpha + p) Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q) Q_n(x) = P_n(x)$$

$A_0, \ldots, A_n$ – эта сист. всегда нах.

2 случай α – однокр. корень

$$y_{ч.н.} = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$ (мн. н. $(n+1)$ ст. без A_0)

3 случай α – двукр. корень

$$y_{ч.н.} = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$$ (мн.н. $(n+2)$ ст. без A_0+A_1)

(II) $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_l(x) \cdot \sin\beta x)$

1) $\alpha + i\beta$ – не корень

$$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} (u_k(x) \cdot \cos\beta x + v_k(x) \sin\beta x) \quad k = \max\{n, l\}$$

2) $\alpha + i\beta$ – корень

$$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} \cdot x (u_k(x) \cdot \cos\beta x + v_k(x) \cdot \sin\beta x), \quad k = \max\{n, l\}$$

(III) $f(x) = M\cos\beta x + N \sin\beta x$

1) $i\beta$ - не корень $\quad y_{гл.} = A\cos\beta x + B\sin\beta x$

2) $i\beta$ - корень $\quad y_{гл.} = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

IV. Системы лин. однородных ДУ с пост. коэф.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (1)$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A \cdot \bar{x}(t)$$

$$\bar{x}(t) = C_1\bar{x}^{(1)}(t) + C_2\bar{x}^{(2)}(t)$$

Фундаментальная (м-ца) сист. решений, где $(\bar{x}^{(1)}(t), \dots, \bar{x}^{(n)}(t))$ - л. нез. реш. сист

Решение системы: $\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \bar{x}^{(i)}(t)$

Част. решение: $\bar{x} = \bar{\alpha} \cdot e^{kt}$

$(A - kE)\cdot\bar{\alpha} = 0$, E - единич. м-ца

$|A - kE| = 0$, харкт. ур-е

1 случай корни хар. ур действ. и различны $k_1, \dots, k_n$

$\Rightarrow$ n частных решений: $\bar{x}^{(i)}(t) = \bar{\alpha}^{(i)}e^{k_i t} \to \bar{x}_{oo}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \bar{\alpha}^{(i)} e^{k_i t}$

ex: $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2 \end{cases}$ $\quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\bar{x}(t)$

$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \bar{x}^{(1)}(t) = \bar{\alpha}^{(1)}e^{t} \\ \bar{x}^{(2)}(t) = \bar{\alpha}^{(2)}e^{4t} \end{matrix}$

1) $k_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 1 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1/2 \end{cases}$$

$$\bar{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \cdot e^{t}$$

2) $k_2 = 4$

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 2 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ -2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

$$\bar{x}_{o.o.}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

<u>2 случай</u> корни не явл. действ., различные

ex: $\begin{cases} dx_1/dt = -7x_1 + x_2 \\ dx_2/dt = -2x_1 - 5x_2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -6+i \\ k_2 = -6-i \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \bar{x}^{(1)}(t) = \bar{\alpha}^{(1)} e^{(-6+i)t} \\ \bar{x}^{(2)}(t) = \bar{\alpha}^{(2)} e^{(-6-i)t} \end{matrix}$$

1) $k_1 = -6+i \quad <\ldots> \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1+i \Rightarrow \bar{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(-6+i)t}$

2) $k_2 = -6-i \quad <\ldots> \quad \bar{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{(-6-i)t}$

$$\bar{x}^{(1)}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{-6t} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-6t} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-6t}$$

$$\bar{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-6t} - i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-6t}$$

$$\bar{x}_{o.o.}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{-6t} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-6t}$$

<u>3 случай</u>: среди корней есть корень к-ти r

$$\bar{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \ldots + \alpha_1^{(2)} t^{r-1} \\ \alpha_n^{(1)} + \ldots \alpha_n^{(2)} t^{r-1} \end{pmatrix} e^{kt}$$

ex: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 6x_2 \end{cases} \qquad \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \bar{x}(t)$

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 4 & 6-k \end{vmatrix} = 0 \quad k_1 = k_2 = 4 \quad r = 2 \qquad \bar{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t \\ \alpha_2 + \beta_2 t \end{pmatrix} e^{4t}$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} e^{4t} + 4 \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t \\ \alpha_2 + \beta_2 t \end{pmatrix} e^{4t}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 + 4\alpha_1 \\ \beta_2 + 4\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\beta_1 \\ 4\beta_2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + 2\beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t \\ 4\alpha_1 + 4\beta_1 t + 6\alpha_2 + 6\beta_2 t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 = 0 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ \beta_2 = -2\beta_1 \\ 2\beta_2 = -4\beta_1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= c_1 \\ \alpha_2 &= -2c_1 \\ \beta_1 &= c_2 \\ \beta_2 &= -2c_1 - c_2 \end{aligned} \qquad \bar{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ -2c_1 - (2c_1 + c_2)t \end{pmatrix} e^{4t}$$

V. Система лин. неодн. ур-й с пост. коэф.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A \cdot \bar{x}(t) + f(t)$$

$$\bar{x}_0(t) + \bar{y}(t) = \bar{x}(t)$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d\bar{x}_0}{dt} = A\bar{x}(t) + A\bar{x}(t) + f(t) \Rightarrow$$

$$\bar{x}_{о.н.}(t) = \bar{y}_{о.о.}(t) + \underset{ч.н}{\bar{x}_0(t)} = \underset{лин. комб.}{\sum c_i \bar{y}_i(t)} + x_0(t)$$

принцип суперпозиции для лин. неодн. сист.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}(t) + f_1(t) + f_2(t)$$

$$\bar{x}_1(t) = A\bar{x}(t) + f_1(t)$$

$$\bar{x}_2(t) = A\bar{x}(t) + f_2(t)$$

$\bar{x}(t) = \bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t)$ — реш. исх. сист.

Метод вариаций произв. пост.

$$\bar{x}_{о.о}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \bar{x}_k(t) \qquad \bar{x}_{о.н}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\, \bar{x}_k(t)$$

$$\frac{d\bar{x}_k}{dt} = A \cdot x_k(t)$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(t) \cdot x_k(t) = f(t) \Rightarrow c_k'(t) = \varphi_k(t)$$

VI. Количеств. и качеств. анализ автон. сист. ур. в норм. форме

Норм (автон.) сист. ДУ порядка n:

$\dot{x}(t) = f(x)$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \in D \subset \mathbb{R}^n$

$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in D \subset \mathbb{R}^n$

Фазовые переменные: $x_1, \dots, x_n$; фаз. пр-во авт. сист. – D

Фаз. траектория $x = \varphi(t)$ – опр. реш. системы

из т. $\exists$ ед. реш. зад. Коши $\Rightarrow \forall x_0 \in D$ (через $\forall x_0$ прох. ед. траектория)

Положение равновесия (т. покоя) системы

– решение системы $x = \varphi(t) \equiv x_0 \in D$ $(\forall t)$

$f(x_0)$ – фаз. скорость, если в t_0 $x_0 = \varphi(t_0)$

Теор. x_0 – равновесие, тогда соотв. фаз. скорость $= 0$

Фаз. портрет системы – качеств. карт. поведения фаз. траект. сист., геометр. изобрат. в обл. D

Пусть a – полож. равновесия

$a = 0$ $\Rightarrow$ замена $x - a = y$

Пусть $\exists\ r > 0$: $\forall x_0$ $|x_0| < r$ $\quad \dot{x}(t) = f(x)$, $x(0) = x_0$ $\Rightarrow x(t, x_0)$ – реш. сист.

Положение равновесия устойчиво по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall |x_0| < \delta \Rightarrow |x(t, x_0)| < \varepsilon$

Уст. по Ляп. равновесие x_0 асимпт. устойчиво, если $\exists\, r_1 \ (0 < r_1 \le r) : \forall |x_0| < r_1 \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} x(t, x_0) = 0$

(траектория уйдет в 0)

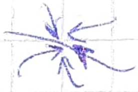
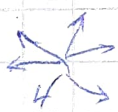
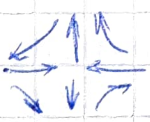
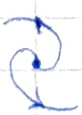
Анализ устойчивости сист. $2^х$ лин. одн. ДУ с пост. коэф.

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11} x + a_{12} y \\ \dot{y} = a_{21} x + a_{22} y \end{cases} \qquad т.\ (x, y) = (0, 0)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \ \text{- един. реш.}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - (a_{12} - a_{22})\lambda + \Delta = 0$$

тип устойчивости опр-ся корнями

корни	λ_1, λ_2	х-тер точки покоя		х-тер устойч.
действ. $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$		Устойчивый узел	Асимп. устойчив.
	$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$		Неуст. узел	Неустойчивость
	$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$		Седло	Неустойчивость
компл. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha < 0$, $\beta \neq 0$		Уст. фокус	Асимп. уст.
	$\alpha > 0$, $\beta \neq 0$		Неуст. фокус	Неуст.
	$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$		Центр	Уст.
Действ. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\lambda < 0$		Уст. узел	Асимп. уст.
	$\lambda > 0$		Неуст. узел	Неуст.

Зам.: рассмотрим лин. одн. ДУ 2 пор

$\ddot{x} + a\dot{x} + b = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -bx - ay \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$(x, y) = (x, \dot{x}) = (0, 0)$$

Устойчивость нелин. одн. сист.

Пусть есть нелин. авт. сист. пор. n

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

0 - полож. равновесия

$f_i(0, \ldots, 0) = 0$

$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{ij} \cdot x_j + F_i(x_1, \ldots, x_n)$

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{x=0}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum a_{1j} x_j + F_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ \dot{x}_n = \sum a_{nj} x_j + F_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

Линеаризация системы в окр. $x=0$ – лин. одн. сист. (1), позер. сост. произв.

Теор. 1) если все корни хар. ур. ($\operatorname{Re} \lambda_i < 0$) им. отр. часть, то т. покоя лин. (нелин.) сист. явл. ассимпт. уст.

2) если 1 кор. хар. ур. им. пол. действ. часть, то т. покоя лин. (нелин.) сист. - неуст.

Зам: если все корни неполож. $\forall Re\,\lambda_i < 0$ и $\exists Re\,\lambda_i = 0$, то иссл. сист. по её приближению нельзя, т.к. большое влияние от $F_i(x_1, \dots, x_n)$

I. Рекуррентные (разностные) ур-я

Разн. (рекурр.) ур-е – ур-ие отн. неизв. ф-и, зависящ. от целочисл. переменных

$y_{k+1} = y_k + a$ – РУ $1^{ого}$ пор. (арифм. прогр.)

$y_{k+1} = q \cdot y_k$

$y_k = \sum_{n=1}^{k} f_n$

$y_{k+1} = y_k + f_{k+1}$

Моделирование отн. числ: $y_{k+1} = \lambda y_k \cdot (1 - y_k)$

Линейные РУ $1^{ого}$ пор. Метод вариации

РУ $1^{ого}$ пор. – ур-е вида $y_{k+1} + a_k y_k = f_k$

a_k, f_k $k \in \mathbb{N}_0$ ($a_k \neq 0$ $\forall k$), k – дискр. время

$f_k = 0$ $\forall k$, если РУ однородное

Решение – последовательность $\{y_k\}$ ($k \in \mathbb{N}_0$), которая при подст. в РУ обр. его в верн. р-во

Найдем одн. решение:

$y_{k+1} + a_k \cdot y_k = 0$

$k = 0$ $y_1 = -a_0 y_0$

$k = 1$ $y_2 = -a_1 y_1 = -a_1(-a_0 y_0)$

...

$y_k = (-1)^k a_0 \dots a_{k-1} y_0 = y_0 (-1)^k \prod_{j=1}^{k-1} a_j$

$A_k = (-1)^k \cdot \prod^{k-1} a_j$, $y_0 = C$

$y_{o.o.} = c \cdot A_n$
$y_n = c_n \cdot A_n$

$c_{n+1} A_{n+1} + a_n \cdot c_n \cdot A_n = f_n$

$a_n A_n = a_n (-1)^k \cdot \prod_{j=0}^{n-1} a_j = (-1)^n \cdot \prod_{j=0}^{n} a_j = -A_{n+1}$

$c_{n+1} \cdot A_{n+1} - c_n \cdot A_{n+1} = f_n$

$c_{n+1} = c_n + \frac{f_n}{A_{n+1}}$

$c_1 = c_0 + \frac{f_0}{A_1}$
$c_2 = c_1 + \frac{f_1}{A_2} = c_0 + \left(\frac{f_0}{A_1} + \frac{f_2}{A_2} \right)$
...
$c_n = c_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f_j}{A_{j+1}}$

$y_{o.n.} = \left(c + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f_j}{A_{j+1}}\right) \cdot A_n \qquad y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{r.n.}$

$y_0 = u$

Разностная зад. Коши

Найти решение РУ, удовл. н.у. $y_0 = u$

$\forall n$ имеется 1 реш.

$y_n = \left(u + \sum \frac{f_j}{A_{j+1}}\right) \cdot A_n$

$y_1 = -a_0 \cdot y_0 + f_0 = -a_0 \cdot u + f_0$

$y_1 = \left(c + \frac{f_0}{A_1}\right) \cdot A_1 = c A_1 + f_0 = -a_0 \cdot c + f_0$

ex: $y_{n+1} - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 y_n = \frac{2n+4}{n+3} = f_n$

$A_n = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} a_j = (-1)^n \cdot (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(j+2)^2}{(j+1)^2} = \frac{\cancel{2}^2}{1^2} \cdot \frac{3^2}{\cancel{2}^2} \cdots \frac{(k+1)^2}{\cancel{k}^2}$
$= (k+1)^2$

$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_j}{A_{j+1}} = 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(j+2)}{(j+3)(j+2)^2} = 2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{j+3}\right) =$

$= 2\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{k}{k+2}$

$y_{o.н} = (c + \frac{k}{k+2}) \cdot (k+1)^2$

Линейные РУ $n^{го}$ порядка

РУ $n^{го}$ порядка - ур-е вида $y_{k+n} + a_{1k} y_{k+n-1} + \dots + a_{nk} y_k = f_k$

$(a_{nk} \neq 0)$ $k \in \mathbb{N}_0$

$\underbrace{y_{k+2}}_{k+1} - \underbrace{y_{k+1}}_{m} = 0$

Линейное однородное, когда $f_k = 0 \ \forall k$

Н.у. задаются в первых n точках

$y_0 = u_1, \ y_1 = u_2, \dots, y_{n-1} = u_n$

Разностная задача Коши:

Найти решение РУ, удовл. н.у.

$\forall u_i \ (i = \overline{1,n})$ (при $\forall u_i$) имеет ед. реш.

если н.у зад. не в первых n точках, то реш. может не $\exists$ или не быть единств.

в РУ $n^{го}$ порядка:

$y_{k+n} + a_{1k} y_{k+n-1} + \dots + a_{nk} \cdot y_k = 0$

Теор. принцип супер-позиции лин. одн. ур.

если $y_{1k}, \dots y_{mk}$ - решение РУ, то $y_k = c_1 y_{1k} + \dots + c_m y_{mk}$ реш.

Ф-и $y_{1k}, \dots, y_{mk}$ - лин зав. на $\mathbb{N}_0$, если $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$:
$\alpha_1 y_{1k} + \dots \alpha_m y_{mk} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Если р-во вып. для $\alpha_1 = \dots = 0$, то ф-и лин. нез. на $\mathbb{N}_0$

Теор Решение одн. РУ явл. лин. нз. на N_0

$$\Leftrightarrow \det[y_{1k},\dots,y_{nk}] = \begin{vmatrix} y_{1k} & \dots & y_{nk} \\ \dots & & \\ y_{1k+n-1} & & y_{n,k+n-1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\forall k \in N_0)$$

Фундамент. сист. реш. – сист л.н. на N_0 его реш. $\varphi_{1k}, \dots \varphi_{nk}$

Теор. если $\varphi_{1k},\dots\varphi_{nk}$ – фунд. сист. реш (3), то

$$y_{o.o.} = y_k = c_1 \cdot \varphi_{1k} + \dots + c_n \cdot \varphi_{nk}$$

Рассмотрим лин. н. РУ n-го порядка

$$\underbrace{y_{n+k} + a_{1k}\, y_{k+n-1} + \dots + a_{nk}\, y_k}_{L y_k \text{ – лин. опер}} = f_k$$

$$y_k = y_k^{(0)} + z_k$$

$$L(y_k^{(0)} + z_k) = f_k$$

$$\cancel{L y_k^{(0)}} + L z_k = \cancel{f_k}$$

$$L z_k = 0$$

z_k – реш. одн. ур. ; если изв. фунд. сист. реш $\varphi_{1k},\dots\varphi_{nk}$, то общ. решение

$$z_k = c_1\varphi_{1k} + \dots + c_n\varphi_{nk}$$

$$y_{o.н.} = y_k = c_1\varphi_{1k} + \dots + c_n\varphi_{nk} + y_k^{(0)}$$

ex: $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 2$ $\quad n=2$

$\varphi_{1k} = 2^k \quad \varphi_{2k} = 3^k$ – фунд. сист. реш. одн. ур.

$$\lambda^{k+2} - 5\lambda^{k+1} + 6\lambda^k = 0 \quad \Big| : \lambda^k$$

$2^{k+2} - 5 \cdot 2^{k+1} + 6 \cdot 2^k = 0 \quad \Big| : 2^k$

$3^{k+2} - 5 \cdot 3^{k+1} + 6 \cdot 3^k = 0 \quad \Big| : 3^k$

$y_{о.о.} = y_k = C_1 \cdot 2^k + C_2 \cdot 3^k \; ; \quad y_k^{(0)} = 1$

$y_{о.н.} = C_1 \cdot 2^k + C_2 \cdot 3^k + 1$

Теор. Принцип суперпозиции для неодн. ур.

Пусть $f_k = f_k^{(1)} + f_k^{(2)}$ $\quad y_k^{(1)}$ – реш. РУ для $f_k^{(1)}$

$y_k^{(2)}$ – –"– для $f_k^{(2)}$

$y_k = y_k^{(1)} + y_k^{(2)}$ – реш. РУ

если изв. только фунд. сист. реш. одн. ур.

$\varphi_{1k}, \dots, \varphi_{nk}$ и неизв. реш. частн. неод $y_k^{(0)}$

=> $y_{он}$ нах. мет. вариации произв. пост.

при этом приходится вычислять сумму к слагаемых, кот. может не выр. в виде элементарных ф-й

· Применение мет. вариаций затруднительно

Линейные РУ стационарные

Опр. Лин. стационарное РУ – ур-е вида

$y_{k+n} + a_2 y_{k+n-1} + \ldots + a_n y_k = f_k \quad a_i$ – числа

Однор. стац. ур-е: $y_{k+n} + \ldots a_n y_k = 0$, $y_k \equiv 0$ – тривиал.

Будем искать нетривиальное решение

вида $y_k = \lambda^k$

$\lambda^{k+n} + a_1 \lambda^{k+n-1} + \dots + a_n \lambda^k = 0 \quad | : \lambda^k$

$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$

Хар. ур-е : $\lambda_i \neq 0$

Ф-я $y_k = \lambda^k$ - явл. реш. <=> λ явл. корнем хар. ур

<u>1 случай</u> $\lambda_1 \dots, \lambda_n$ - действ. разл. корни

$\varphi_{1k} = \lambda_1^k, \dots, \varphi_{nk} = \lambda_n^k$

$Det_k = Det(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = \begin{vmatrix} \lambda_1^k & \dots & \lambda_n^k \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{k+n-1} & & \lambda_n^{k+n-1} \end{vmatrix} = \lambda_1^k \dots \lambda_n^k \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{W(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \neq 0$

опр вандермонд

$\varphi_{k}, \dots$ — обр. фунд сист. реш.

$\Downarrow$

$y_{o.o.} = C_1 \lambda_1^k + \dots + C_n \lambda_n^k$

<u>2 случай</u> хар. ур-е имеет кратн. корни

$L(\lambda) = 0$

λ_0 - кратн. m => $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m \cdot L_1(\lambda)$

$\lambda_0^k; k\lambda_0^k; \dots k^{m-1} \lambda_0^k$ — явл. решением $\quad {}_{(n-m)}$ $\quad L_1(\lambda_0) \neq 0$

S - различных корней

$\lambda_1 \dots \lambda_s$

$m_1 \dots m_s \qquad \sum_{i=1}^{s} m_i = n$

$y_{o.o.} = \sum_{j=1}^{s} (C_{0j} + C_{1j} \cdot k + \dots + C_{m_j - 1\, j}\, k^m) \cdot \lambda_j^k$

$n = 2 \qquad m = 2$ (кратность)

$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0 \qquad \lambda_0$ - кр. корень

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$

1) Док-ть, что λ_0^k, $k\cdot\lambda_1^k$ – фунд. сист. реш.

$y_k = k\cdot\lambda_0^k \Rightarrow (k+2)\lambda_0^{k+2} + a_1(k+1)\lambda_0^{k+1} + a_2 k\lambda_0^k = 0$

$(k+2)\lambda_0^2 + a_1(k+1)\lambda_0 + a_2 k = 0$

$k(\underbrace{\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2}_{0}) + (\underbrace{2\lambda_0 + a_1}_{0})\lambda_0 = 0$

$\lambda_0 = -\frac{a_1}{2} \Rightarrow 2\lambda_0 + a_1 = 0$

2) λ_0^k; $k\cdot\lambda_0^k$ лин. независимы

$D_k = \begin{vmatrix} \lambda_0^k & k\cdot\lambda_0^k \\ \lambda_0^{k+1} & (k+1)\cdot\lambda_0^{k+1} \end{vmatrix} = (k+1)\lambda_0^{2k+1} - k\lambda_0^{2k+1} = \lambda_0^{2k+1} \neq 0$

$y_{o.o.} = y_k = (C_1 + C_2 k)\cdot\lambda_0^k$

3 случай хар. ур-е имеет компл. корни

λ; $\bar\lambda$ – компл.сопрят. кратн. m

$\left.\begin{matrix} \lambda^k; \ k\cdot\lambda^k; \ \dots \ k^{m-1}\lambda^k \\ \bar\lambda^k; \ k\bar\lambda^k; \ \dots \ k^{m-1}\bar\lambda^k \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} |\lambda|^k\cos k\varphi; \ k|\lambda^k|\cos k\varphi \dots k^{m-1}|\lambda|^k\cos k\varphi \\ |\lambda|^k\sin k\varphi; \ \dots \ k^{m-1}|\lambda|^k\sin k\varphi \end{matrix}$

$\lambda = |\lambda|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\lambda^k = |\lambda^k|(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$ ф-ла Муавра

$2m$ компл. зам. на $2m$ действ. реш.

ex: $y_{k+2} + y_k = 0$; $\lambda_{1,2} = \pm i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$y_{o.o.} = c_1 1^k\cos\frac{k\pi}{2} + c_2\cdot 1^k\cdot\sin\frac{k\pi}{2}$

$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_n y_k = f_k$

$y_{ч.н.} = y_k^{(0)} \Rightarrow y_{o.н.} = y_{o.o.} + y_k^{(0)}$

I. Теор. $f_k = P_s(k) \cdot \mu^k$

1) Если μ – не кор. х.у. $\Rightarrow y_{г.н.} = y_k^{(0)} = Q_s(k)\,\mu^k$

2) Если μ – кор. к-ти "m" $\Rightarrow y_{г.н.} = k^m \cdot Q_s(k)\,\mu^k$

II. Теор. $f_k = |\lambda^k| \left(P_s(k) \cos k\alpha + Q_s(k) \sin k\alpha \right)$. $|\lambda| > 0$, α

1) Если $\lambda = |\lambda|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ – не кор. $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{г.н.} = |\lambda^k| \cdot (T_s(k) \cdot \cos k\alpha + U_s(k) \cdot \sin k\alpha)$

2) Если λ – корень к-ти "m" $\Rightarrow y_{г.н.} = k^m |\lambda^k| \cdot (\text{–}\,\text{"}\,\text{–})$

II. Системы лин. рекур. ур-й

Норм. лин. с-ма разностных ур-й порядка n –

$$x_{i\,k+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\, x_{jk} + f_{ik} \qquad i = \overline{1,n}$$

(1) $x_{k+1} = A_k \cdot x_k + f_k$

$x_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$; $\underset{(n \times n)}{A_k} = (a_{ijk})$, $i,j = \overline{1,n}$ $\quad f_k = \begin{pmatrix} f_{1k} \\ \vdots \\ f_{nk} \end{pmatrix}$

Однородная, если $f_k \equiv 0 \quad \forall k$

неоднородная, если $\exists k \quad f_k \neq 0$

решение системы – вект. ф-я, удовл. (1)

н.у: $x_0 = u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

Теор. (Разн. зад. Коши)

Найти реш. с-мы (1), удовл. н.у

Решение всегда $\exists$ и ед.

$x_1 = A_0 x_0 + f_0 \Rightarrow A_0 c + f_0$

$x_2 = A_1 x_1 + f_1 = A_1 A_0 c + A_1 f_0 + f_1$

...

$$x_k = \prod_{j=0}^{k-1} A_j c + \prod_{j=1}^{k-1} A_j f_0 + \prod_{j=2}^{k-1} A_j f_1 + \ldots + A_{k-1} f_{k-2} + f_{k-1}$$

Общ. реш. норм. сист.

$$x_k = \prod_{j=0}^{k-1} A_j \cdot c + \prod_{j=1}^{k-1} A_j f_0 + \prod_{j=2}^{k-2} A_j f_1 + \ldots + A_{k-1} f_{k-2} + f_{k-1}$$

- Рассмотрим одн. сист.:

$$x_{k+1} = A_k \cdot x_k$$

Теор. Принцип супер-позиции

Если $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}$ — реш., то их лин. комб. $x_k = c_1 x_1^{(k)} + c_2 x_2^{(k)}$ — решение

Общ. реш. одн. сист.:

$$x_{o.o.} = x_k = \prod_{j=0}^{k-1} A_j \cdot c \qquad (f = 0)$$

- Вектор ф-и $y_{1k}, \ldots, y_{mk}$ — лин. зав. на N_0
- если $\exists \alpha_1, \ldots \alpha_m$ $(\exists \alpha_i \neq 0)$

$\alpha_1 y_{1k} + \ldots + \alpha_m y_{mk} = 0 \quad \forall k \in N_0$

Теор. Реш. сист. явл. лин. нез. $\Leftrightarrow$

$$D_k = \begin{vmatrix} y_{11k} & \ldots & y_{1mk} \\ y_{n1k} & \ldots & y_{nmk} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall k \in N_0$$

- Фунд. сист. реш. одн. сист. — любая сист. её n лин. нез. реш. $\varphi_{1k}, \ldots, \varphi_{nk}$

Фунд. сист. м-цы $\Phi_k = \begin{pmatrix} \varphi_{11k} & \ldots \\ \ldots & \varphi_{nnk} \end{pmatrix}$

м-цы
Св-ва фунд. сист.:

1) $\det \Phi_k \neq 0$
2) сист. имеет бесчисл. мн-во фунд. м-ц
3) общ. реш. $\underset{(n\times1)}{y_k} = \underset{(n\times n)}{\Phi_k} \cdot \underset{(n\times1)}{c}$
$$y_k = c_1 \varphi_{1k} + \ldots + c_n \varphi_{nk}$$
4) $\varphi_{jk+1} = A_k \cdot \varphi_{jk}$ (любой столб. ф. м-цы — реш. уд. выражению
$\Phi_{k+1} = A_k \cdot \Phi_k$
5) $\Phi_k = \prod_{j=0}^{k-1} A_j$

Линейная неодн. с-ма РУ

$$x_{k+1} = A_k x_k + f_k$$

ex: $\begin{cases} x_{k+1} = -5x_k - 2y_k - 2z_k \\ y_{k+1} = 10x_k + 4y_k + 2z_k \\ z_{k+1} = 2x_k + y_k + 3z_k \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -2 & -2 \\ 10 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases} \quad h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_{o.o.} = c_1 (-1)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot 1^k \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 2^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Зам. В R^n $\exists$ базис из собств. вект. в след. случ.:

1) все собств. λ_i попарно разл.
2) Имеются кратные λ_i, но м-ца A симм.
для произв. м-цы A могут не $\exists$

Зам. Если имеются компл. собств. знач. λ_i, то все равно нужно получить действ. реш.

Неоднородная система: $x_{k+1} = Ax_k + f_k$

ex: $\begin{cases} x_{k+1} = -2x_k - y_k + 7k \\ y_{k+1} = -4x_k - 5y_k \end{cases}$

$x_{k+2} = -2x_{k+1} - y_{k+1} + 7(k+1) = -2x_k + 4x_k + 5y_k + 7(k+1)$

$y_k = -x_{k+1} - 2x_k + 7k$

$x_{k+2} + 7x_{k+1} + 6x_k = 42k + 7$

$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -6 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

$x_{o.o.} = C_1(-6)^k + C_2(-1)^k$

$\mu \neq \lambda$

$f_k = 42k + 7 = P_1(k) \cdot 1^k \quad ; \quad S = 1, \mu = 1 \neq \lambda_{1,2}$

$\Rightarrow x_{ч.н.} = Ak + B$

$\begin{cases} A = 3 \\ B = -10/7 \end{cases} \Rightarrow x_{ч.н.} = 3k - \frac{10}{7}$

$x_{o.н.} = C_1(-6)^k + C_2(-1^k) + 3k - 10/7$

$x_{o.н.} = x_k$

$y_k = -x_{k+1} - 2x_k + 7k = \ldots = 4C_1(-6)^k - C_2(-1)^k - 2k + 9/7$

$x_{o.н.} = x_k = \Phi_k \cdot C + x_k^{(0)}$

Теор. $f_k = \mu^k P_s(k)$

если $\mu \neq \lambda_i \quad (i = \overline{1,n}) \Rightarrow x_{ч.н.} = x_k^{(0)} = \mu^k \cdot Q_s(k)$

ex: $\begin{cases} x_{k+1} = x_k - y_k + 3^k \\ y_{k+1} = -2x_k - 3^k \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x_{o.o.} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = C_1(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2(2^k)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$f_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} 3^k = P_0(k) \cdot 3^k \quad ; \quad S = 0 \quad \mu = 3 \neq \lambda_{1,2}$

$\Rightarrow x_{ч.н.} = Q_0(k)\cdot 3^k = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} 3^k$

$$\begin{cases} a\cdot 3^{k+1} = a\cdot 3^k - b\cdot 3^k + 3^k \\ b\cdot 3^{k+1} = -2a\, 3^k - 3^k \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad a = 1$

$\quad\quad\; b = -1$

$$x_{ч.н.} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot 3^k$$

$$x_{о.н.} = x_k^{(0)} = C_1(-1)^k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2(2^k)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot 3^k$$

III. Эл-ты кач. и кол. анализа нелин. разн. ур-й

Устойчивость по Ляпунову. Пол. равн-я авт. сист. РУ

Авт. с-ма РУ: $x_{n+1} = f(x_n)$

Пол. равн-е – любое реш. $x_n = x^*$ $(\forall k \in \mathbb{N}_0)$

Крит. полож. $x_n = x_n$ (-//-)

$x_n = f(x_n)$

$n = 1 \Rightarrow x = f(x)$

Пол. равн x^* уст. по Ляпунову:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \quad x_0 : |x_0 - x^*| < \delta$

$\Rightarrow |x_n - x^*| < \varepsilon$ $(\forall k \in \mathbb{N}_0)$

Уст. по Ляп. р-е – ассимпт. уст., если

$\forall x_n \quad \lim\limits_{k\to\infty} |x_n - x^*|$

Лин. одн стац. сист.:

$x_{n+1} = f(x)$

$x_{n+1} = A \cdot x_n$

$x = A x$

$(A - E) x = 0 \quad |A - 1 \cdot E| \neq 0 \quad \lambda_i \neq 1$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \, (1 \leq m \leq n)$

<u>Теор.</u>: если все |собств. знач.| < 1, то все полож. 0 ассимпт. устойчивы

Если $\exists |\lambda_i| > 1$, то неуст пол. равн.

Нелинейные системы:

$x_{n+1} = f(x_n)$

$x^* = 0$ – пол. равновесие

Линеаризация нелин. сист. в окр. пол. равн. $x^* = 0$ – лин. одн. сист. у кот м-ца A вида $x_{n+1} = A x_n$

$A = \frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j} \quad j = \overline{1, n}$

<u>Теор</u>: если все |собств. зн. м-цы A| < 1, то $x^* = 0$ пол. равн. – ассимп. уст