Микроэкономика

Тема 1. Поведение потребителей: спрос.

1)

Наклон бюджетной линии на плоскости (x_1, x_2) равен $-\frac{p_1}{p_2}$.

Определение. Пусть при ценах $p = (p_1, p_2)$ потребитель приобрел набор $x = (x_1, x_2)$. Тогда набор $x = (x_1, x_2)$ выявленно предпочитается, если $p_1y_1 + p_2y_2 \leq p_1x_1 + p_2x_2$.

WARP: Если набор x выявленно предпочитается набору y и $x \neq y$, то набор y не может выявленно предпочитаться набору x.

Формально: пусть при ценах $p = (p_1, p_2)$ потребитель выбрал набор $x = (x_1, x_2)$, а при ценах $q = (q_1, q_2)$ потребитель выбрал набор $y = (y_1, y_2)$, $x \neq y$. Тогда поведение потребителя согласуется с WARP, если из $p_1x_1 + p_2x_2 \geq p_1y_1 + p_2y_2$, следует $q_1y_1 + q_2y_2 < q_1x_1 + q_2x_2$.

Если, приобретая набор $x = (x_1, x_2)$ при ценах $p = (p_1, p_2)$, потребитель не мог купить набор $y = (y_1, y_2)$, а при выборе набора $y = (y_1, y_2)$ при ценах $q = (q_1, q_2)$, набор $x = (x_1, x_2)$ был не доступен, то будет говорить, что такое поведение не противоречит WARP, и наборы $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ выявленно несравнимы.

2) Свойства предпочтений: полнота, транзитивность, непрерывность.

Предельная норма замещения равна наклону кривой безразличия в пространстве благ (x_1, x_2), взятому с обратным знаком: $MRS_{12}(x) = -\frac{dx_2}{dx_1}$ $(MRS_{12}(x) = \frac{\partial u(x)/\partial x_1}{\partial u(x)/\partial x_2}.)$

Функция полезности Кобба-Дугласа: $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \alpha, \beta > 0$ (или любое положительной преобразование этой функции). $MRS_{12}(x_1, x_2) = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$

$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{\alpha m}{(\alpha+\beta)p_1}, x_2(p_1, p_2, m) = \frac{\beta m}{(\alpha+\beta)p_2}$

Если предпочтения потребителя строго монотонны, функция полезности дифференцируема и $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ - внутреннее решение задачи потребителя, то $MRS_{12}(\tilde{x}) = \frac{p_1}{p_2}$.

Кривая Энгеля $(Y \mid Q)$.

По Слуцкому: $\frac{\Delta x}{\Delta p} = \left.\frac{\Delta x}{\Delta p}\right|_{M=\text{ const}} + \frac{\Delta x}{\Delta M}\frac{\Delta M}{\Delta p} = \left.\frac{\Delta x}{\Delta p}\right|_{M=const} - x\frac{\Delta x}{\Delta M}$ поскольку изменение реального дохода $\Delta M = -x\Delta p$ (трактовка Слуцкого).

$E_P^D = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P}$, $E_I^D = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta I/I}$, $E_{XY}^D = \frac{\Delta Q_X/Q_X}{\Delta P_Y/P_Y}$

Тема 2. Теория производства. Поведение фирмы, максимизирующей прибыль.

Предельная норма технологического замещения характеризует тангенс угла наклона касательной к изокванте (с обратным знаком) $\mathrm{MRTS}_{12}(x_1, x_2) = \frac{MP_1(x_1,x_2)}{MP_2(x_1,x_2)}$

Если производственная функция дифференцируема, то в краткосрочном периоде $pMP_1(\tilde{x}_1, \bar{x}_2) = w_1$.

Если производственная функция дифференцируема, то в долгосрочном периоде $\mathrm{MRTS}_{12}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{w_1}{w_2}$. Если производственная функция вогнута, то условие $\mathrm{MRTS}_{12}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{w_1}{w_2}$

Тема 3. Конкурентные и неконкурентные рынки и особенности их функционирования.

Индекс Лернера: $I_L = \frac{P_m - MC}{P_m} = \frac{1}{E}$

Тема 4. Рынки факторов производства и особенности их функционирования.

Поведение индивида на рынке труда. Условие оптимального выбора между потреблением и отдыхом: равенство предельной нормы замещения потребления трудом и предельного продукта труда.

Поведение фирмы на рынке труда. Предельная доходность труда (предельная отдача от труда в денежном выражении). Предельные затраты на найм работников. Условие максимизации прибыли фирмы на рынке труда.

Максимизация прибыли фирмой на рынке капитала. Равенство предельной доходности капитала и издержек привлечения единицы капитала.

Связь между инвестициями и доходностью финансовых активов. Ставка процента как альтернативные затраты инвестиций в реальный сектор. Рыночная стоимость фирмы. Коэффициент qДж.Тобина. Теория акселератора инвестиций.

Макроэкономика

Тема 1. Введение в макроэкономику. Основные макроэкономические показатели производства, доходов и цен.

Изъятия и инъекции. Основное макроэкономическое тождество: Y = C + I + G + NX (равенство доходов и расходов).

Уравнение Фишера: $r = \frac{i-\pi^e}{1+\pi^e}$, $i = r + \pi^e$

Уровень безработицы: $u = \frac{U}{L} \times 100\%$ или $u = \frac{U}{E+U} \times 100\%$

Номинального и реального валютного курса: $E_R = E_N \times \frac{P_d}{P_f}$

Закон единой цены $P_i^f = P_i^d E^{f/d}$

Абсолютный PPP $E^{f/d} = \frac{P^f}{P^d}$

Относительный PPP в темповой записи $e^{f/d} = g_E = \pi^f - \pi^d$

Тема 2. Равновесие на товарном рынке. Фискальная политика и ее воздействие на экономику.

Модель "Кейнсианского креста" ($AE \mid Y$).

Фискальная политика: цели, инструменты: G, T, Tr.

Автоматические стабилизаторы - это инструменты доходов и расходов государственного бюджета, которые автоматически меняются в зависимости от состояния экономики таким образом, что ВВП стабилизируется (трансферты; личные подоходные налоги; налоги на прибыль корпораций; НДС и т.п.)

Налоговый мультипликатор: $\Delta Y = \frac{1}{1-mpc}(-mpc{\cdot}\Delta\bar{T})\Delta Y = -\frac{mpc}{1-mpc}\Delta\bar{T}$ (трансфертов: $\Delta Y = \frac{mpc}{1-mpc}\Delta\underline{Tr}$.)

Мультипликатор государственных закупок: $\Delta Y_G = \frac{1}{1-mpc}\Delta\underline{G}$

Бюджетный мультипликатор: $\Delta Y = \frac{1}{1-mpc}\Delta\underline{G} + \frac{-mpc}{1-mpc}\Delta\underline{T} = 1$, поскольку бюджет сбалансированный

Модель IS ($r \mid Y$)

Тема 3. Равновесие на денежном рынке. Монетарная политика.

Количественная теория денег: $MV = PQ$

Теория предпочтения ликвидности: $M^D = M_S^D + M_T^D + M_P^D = f(i, Y)$

M() $= C() + D()$

H() $= +R(.)$

rr = R/D   R = rr*D

cr = C/D   C = cr*D

M = C + D = cr*D + D = (cr + 1)D

$H = C + R = cr^{\star}D + rr^{*}D = (cr + rr)D$

$m = \frac{M}{H} = \frac{cr+1}{cr+rr}$

Денежный рынок (r|(M/P))

Инструменты монетарной политики: (покупка/продажа ценных бумаг; нормы обязательных резервов; учетная ставка)

Кривая LM ($r \mid Y$).

Тема 4. Анализ экономики с жесткими и гибкими ценами. Модель AD-AS.

Тема 5. Экономические колебания. Экономический рост.

Закон Оукена

$\frac{Y-Y*}{Y*} = -Bu_c$

где Y — фактический ВВП, Y* — потенциальный ВВП, u_c — уровень циклической безработицы, B — эмпирический коэффициент чувствительности (обычно принимается 2).

Следствие из закона Оукена:

$$\frac{Y_1 - Y_0}{Y_0} = -\frac{B\,(u_1 - u_0)}{1 - Bu_0}$$

Y_1, u_1- ВНП и уровень безработицы в текущем периоде Y_0, u_0- ВНП и уровень безработицы в базовом периоде

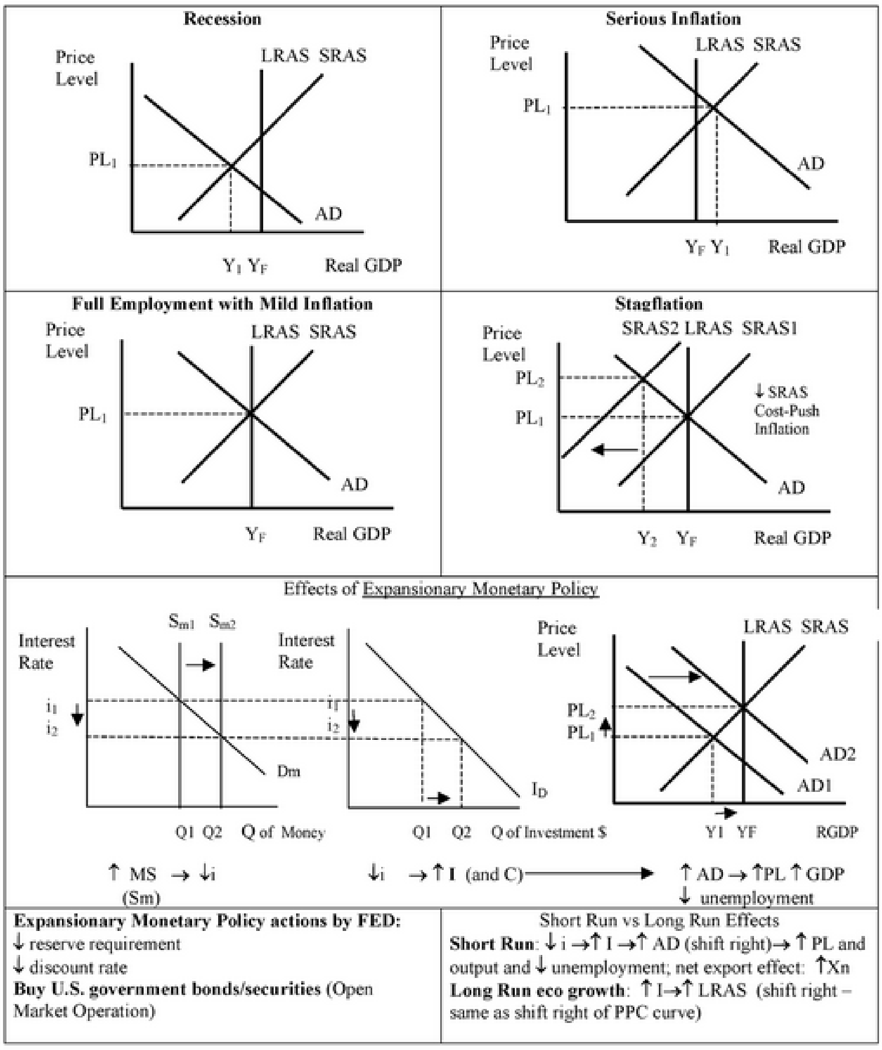
Формально современная кривая Филлипса записывается следующим образом: $\pi = \pi_e - b\,(u - u_e) + v$, где $-\pi-$ уровень инфляции, - π_e - ожидаемый уровень инфляции, $-(u - u_e)-$ отклонение безработицы от естественного уровня - циклическая безработица, - $b > 0$ - коэффициент, чувствительности инфляции к отклонению безработицы, - v - шок предложения.

$\dot{K} = sY_t - \delta K_t$, $k = \frac{K}{LE}$, $\frac{\dot{L}}{L_t} = n$, $\frac{\dot{E}}{E_t} = g$

$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L_t E_t} - \frac{K_t(\dot{L}E_t + L_t\dot{E})}{(L_t E_t)^2} = \frac{sY_t - \delta K_t}{L_t E_t} - \frac{K}{LE}\left(\frac{\dot{L}}{L_t} + \frac{\dot{E}}{E_t}\right) = sf(k_t) - (n + g + \delta)k_t$

В стационарном состоянии темп прироста показателей на единицу эффективного труда равен нулю

$$\frac{\dot{y}}{y} = g_y = \frac{\dot{c}}{c} = g_c = \frac{\dot{k}}{k} = g_k = 0.$$



Показатели на единицу труда растут с темпом технологического прогресса g

$$\frac{\left(\frac{\dot{Y}}{L}\right)}{\frac{Y}{L}} = g_{Y/L} = \frac{\left(\frac{\dot{C}}{L}\right)}{\frac{C}{L}} = g_{C/L} = \frac{\left(\frac{\dot{K}}{L}\right)}{\frac{K}{L}} = g_{K/L} = g$$

Валовые показатели растут с темпом равным сумме темпов прироста технологического прогресса g и населения n

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = g_Y = \frac{\dot{C}}{C} = g_C = \frac{\dot{K}}{K} = g_K = g + n$$

"Золотое правило"

$\max_s c[k(s)]$ при условии: $\dot{k} = 0$

$c[k(s)] = (1-s)y = f[k(s)] - (n+g+\delta)k(s)$

$\frac{\partial c}{\partial s} = 0$ Значит, в точке максимума должно выполняться равенство $\frac{\partial f(k^{**})}{\partial k} = n+g+\delta$ где $k^{**}-$ устойчивый уровень капиталовооружённости на единицу эффективного труда, соответствующий максимальному потреблению.

Таким образом, норма сбережений s^*, максимизирующая потребление c, находится из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} s^* f\left(k^{**}\right) = (n+g+\delta)k^{**} \\ \frac{\partial f(k^{**})}{\partial k} = n+g+\delta \end{cases}$$

В результате решения этой системы оптимальная норма сбережения, соответствующие «Золотому правилу», равна эластичности выпуска по капиталу: $s^* = \frac{k^{**}}{f(k^{**})} \times \frac{\partial f(k^{**})}{\partial k}$.

Эконометрика

Тема 1. Теория вероятностей:

The joint CDF of X and Y is $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$ or $p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$
In the continuous case, they have a joint PDF $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$

Distribution	PMF/PDF and Support	Expected Value	Variance	MGF
Bernoulli Bern(p)	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=q=1-p$	p	pq	$q+pe^t$
Binomial Bin(n,p)	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ $k \in \{0,1,2,\dots n\}$	np	npq	$(q+pe^t)^n$
Geometric Geom(p)	$P(X=k)=q^k p$ $k \in \{0,1,2,\dots\}$	q/p	q/p^2	$\frac{p}{1-qe^t}$, $qe^t<1$
Negative Binomial NBin(r,p)	$P(X=n)=\binom{r+n-1}{r-1}p^r q^n$ $n \in \{0,1,2,\dots\}$	rq/p	rq/p^2	$(\frac{p}{1-qe^t})^r$, $qe^t<1$
Hypergeometric HGeom(w,b,n)	$P(X=k)=\binom{w}{k}\binom{b}{n-k}/\binom{w+b}{n}$ $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$	$\mu=\frac{nw}{b+w}$	$\left(\frac{w+b-n}{w+b-1}\right)n\frac{\mu}{n}(1-\frac{\mu}{n})$	messy
Poisson Pois(λ)	$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $k \in \{0,1,2,\dots\}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Uniform Unif(a,b)	$f(x)=\frac{1}{b-a}$ $x \in (a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Normal $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ $x \in (-\infty,\infty)$	μ	σ^2	$e^{t\mu+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Exponential Expo(λ)	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $x \in (0,\infty)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$, $t<\lambda$
Gamma Gamma(a,λ)	$f(x)=\frac{1}{\Gamma(a)}(\lambda x)^a e^{-\lambda x}\frac{1}{x}$ $x \in (0,\infty)$	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{a}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a$, $t<\lambda$
Beta Beta(a,b)	$f(x)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ $x \in (0,1)$	$\mu=\frac{a}{a+b}$	$\frac{\mu(1-\mu)}{(a+b+1)}$	messy
Log-Normal $\mathcal{LN}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(\log x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ $x \in (0,\infty)$	$\theta=e^{\mu+\sigma^2/2}$	$\theta^2(e^{\sigma^2}-1)$	doesn't exist
Chi-Square χ^2_n	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2}$ $x \in (0,\infty)$	n	$2n$	$(1-2t)^{-n/2}$, $t<1/2$
Student-t t_n	$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}(1+x^2/n)^{-(n+1)/2}$ $x \in (-\infty,\infty)$	0 if $n>1$	$\frac{n}{n-2}$ if $n>2$	doesn't exist

Conditional Distributions Conditioning and Bayes' rule for discrete r.v.s

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{P(X = x \mid Y = y)P(Y = y)}{P(X = x)}$$

Conditioning and Bayes' rule for continuous r.v.s

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y)}{f_X(x)}$$

Hybrid Bayes' rule

$$f_X(x \mid A) = \frac{P(A \mid X = x) f_X(x)}{P(A)}$$

Тема 2. Математическая статистика:

CI For	*Sample Statistic*	*Margin of Error*	*Use When*
Population mean (μ)	$\bar{x}$	$\pm z^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	X is normal, or $n \geq 30$; σ known
Population mean (μ)	$\bar{x}$	$\pm t^*_{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$	$n < 30$, and/or σ unknown
Population proportion (p)	$\hat{p}$	$\pm z^* \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	$n\hat{p},\ n(1-\hat{p}) \geq 10$
Difference of two population means ($\mu_1 - \mu_2$)	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$\pm z^* \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	Both normal distributions or $n_1, n_2 \geq 30$; σ_1, σ_2 known
Difference of two population means $\mu_1 - \mu_2$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	$\pm t^*_{n_1+n_2-2} \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$	$n_1, n_2 < 30$; and/or $\sigma_1 = \sigma_2$ unknown
Difference of two proportions ($p_1 - p_2$)	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$\pm z^* \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$	$n\hat{p}, n(1-\hat{p}) \geq 10$ for each group

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Null hypothesis (H_0) is</td></tr>
<tr><td>True</td><td>False</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Decision about null hypothesis (H_0)</td><td>Don’t reject</td><td>True Negative
Confidence:
$P\left(S^{obs} \not\subset D^{crit} \mid H_0\right) = 1 - \alpha$</td><td>False Negative
Type II error:
$P\left(S^{obs} \not\subset D^{crit} \mid H_1\right) = \beta$</td></tr>
<tr><td>Reject</td><td>False Positive
Type I error:
$P\left(S^{obs} \subset D^{crit} \mid H_0\right) = \alpha$</td><td>True Positive
Power:
$P\left(S^{obs} \subset D^{crit} \mid H_1\right) = 1 - \beta$</td></tr>
</table>

Тема 3. Линейная регрессионная модель для случая одной объясняющей переменной

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$
$$\hat{\beta}_1 = \frac{\widehat{\operatorname{Cov}}(y, x)}{\widehat{\operatorname{Var}}(x)}$$

$\sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i = 0$ (mean & sum of residuals is zero)
$\sum_{i=1}^{N} x_i \hat{u}_i = 0$ (zero covariance bet. x and resids.)
The OLS line (SRF) always passes through $(\bar{x}, \bar{y})$
Variance and Standard Error of $\hat{\beta}_i$

$$\operatorname{Var}\left(\hat{\beta}_j\right) = \frac{\sigma^2}{SST_j\left(1 - R_j^2\right)}, j = 1,2,\ldots,k$$

where

$$SST_j = (N-1)\operatorname{Var}\left(x_j\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)$$

$R_j^2 = R^2$ from a regression of x_j on all other x 's Standard deviation: $\sqrt{\operatorname{Var}}$ Standard error:

$$\sqrt{\widehat{Var}}$$

$$\operatorname{se}\left(\hat{\beta}_j\right) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{SST_j\left(1 - R_j^2\right)}}, j = 1, \ldots, k$$

Тема 4. Дисперсионный анализ

$TSS = \sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \bar{y}\right)^2$, $ESS = \sum_{i=1}^{N}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2$, $RSS = \sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^2$, $ESS + RSS = TSS$
$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$, $0 \leq R^2 \leq 1$, $R_{UC}^2 = 1 - \frac{RSS}{\sum y_i^2} = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2}$, $R_{adj}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}\frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{s_{\hat{u}}^2}{s_y^2}$
$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSR}{N-K-1} = \frac{1}{N-K-1}\sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^2$

Тема 5. Матричная форма. Теорема Гаусса-Маркова

$\hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1} X'y$
$\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n-k}$
$\hat{\beta} \sim N\left[\beta, \sigma^2\left(X'X\right)^{-1}\right]$

Тема 6. Проверка гипотезы об адекватности регрессии. Проверка гипотезы о линейных ограничениях на коэффициенты регрессии

F-test for regression fit:
$H_0 : \beta_1 = \cdots = \beta_{k-1} = 0$
H_a : at least one $\beta_j \neq 0, j = 1, \ldots, k-1$
$F = \frac{ESS/(k-1)}{RSS/(n-k)} = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} \sim F(k-1, n-k)$
RESET test:
$H_0 : \gamma_1 = \cdots = \gamma_q = 0$
H_a : at least one $\gamma_j \neq 0, j = 1, \ldots, q$
$F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/q}{RSS_{UR}/(n-k-q)} = \frac{\left(R_{UR}^2 - R_R^2\right)/q}{(1-R_{UR}^2)/(n-k-q)} \sim F(q, n-k-q)$

Тема 7. Функциональные преобразования переменных в линейной регрессионной модели.

Model	DV	RHS	Interpretation of β_1
Level-level	y	x	$\Delta y = \beta_1 \Delta x$
Level-log	y	$\log(x)$	$\Delta y = (\beta_1/100)\,[1\%\Delta x]$
Log-level	$\log(y)$	x	$\%\Delta y = (100\beta_1)\,\Delta x$
Log-log	$\log(y)$	$\log(x)$	$\%\Delta y = \beta_1 \%\Delta x$
Quadratic	y	$x + x^2$	$\Delta y = (\beta_1 + 2\beta_2 x)\,\Delta x$

Тема 8. Фиктивные переменные. Тест Чоу

Chow test:
$H_0 : \beta_0^A = \beta_0^B, \ldots, \beta_k^A = \beta_k^B$
H_a : at least one of the restrictions is not hold
$F = \frac{(RSS_P - RSS_A - RSS_B)/k}{(RSS_A + RSS_B)/(n-2k)} = \sim F(k, n-2k)$

Тема 9. Мультиколлинеарность данных и способы борьбы с ней

$x_i \mid X_{-i}$, $\mathrm{VIF}_i = \frac{1}{1-R_i^2}$, If >10 hence MC