① Основные понятия некооп. теории игр

типы представления

↳ норм. форма

↳ развернутая форма

типы стратегий

↳ чистая (выб. единств. стратегию)

↳ смешанные (с вер. p выбирается вер. ф)

Игра в норм. форме:

1. N игроков, $I = \{1, \dots, N\}$

2. $\forall i \in I$ имеет мн-во стратегий A

Исх. игры наз. профиль стр., выбр. кажд. i

3. $\pi^i(a)$ – ф-я выигрыша

Равновесие в доминирующих стратегиях

- $\tilde{a}^i \in A^i$ – дом. стр., если

$$\pi^i(\tilde{a}^i, a^{-i}) \geq \pi^i(a^i, a^{-i}) \quad \forall a^i \in A^i$$

- $(\tilde{a}^1, \dots, \tilde{a}^N)$ – равновесие в дом. стр.,

если $\tilde{a}^i$ – дом. стр. для $\forall i$

Равновесие по Нэшу

- $\hat{a} = (\hat{a}^1, \dots, \hat{a}^n)$ – NE, если никому не вып. откл.

$$\pi^i(\hat{a}^i, \hat{a}^{-i}) \geq \pi^i(a^i, a^{-i}) \quad \forall a^i \in A^i$$

Использ. BR - функции для поиска NE

- В игре двух игроков BRF игрока i – это такая $R^i(a^j)$, кот. каждой данной стратегии a^j ставит в соотв. $a^i = R^i(a^j)$: $\pi^i(a^i, a^j) \to max$
- В общем смысле $R^i(a^{-i})$, кот. стратегии наход. из a^{-i} ставит в соотв. $a^i = R^i(a^{-i})$: $\pi^i(a^i, a^{-i}) \to max$

Теор. $\hat{a}$ – NE, если и т. е. $a^i = R^i(a^{-i})$, $\forall i$

Сравнение исходов по благосост.

- $\hat{a}$ домин. по Парето над $\bar{a}$, если
  $\forall i \quad \pi^i(\hat{a}) \geq \pi^i(\bar{a})$
  $\exists j \quad \pi^j(\hat{a}) > \pi^j(\bar{a})$
- a^* эф (опт.) по Парето, если $\nexists$ другого исхода, дом. по Парето над a^*
- $\bar{a}$ и $\tilde{a}$ не сравнимы по Парето, если
  $\exists i, j : \quad \pi^i(\bar{a}) > \pi^i(\tilde{a}) \quad \pi^j(\bar{a}) < \pi^j(\tilde{a})$

Игры в разв. форме

Стратегией для i игрока наз. полный список

2-й игрок (NY (B, B)), ... , (C (НВ, НВ))

	B, B	B, НВ	НВ, B	НВ, НВ
NY	(−1, −1)	(2, 0)	(−1, −1)	(2, 0)
C	(−1, −1)	(−1, −1)	(1, 1)	(1, 1)

Подыгра — совокупность, сост. из нек вершины игры вместе со всеми след. верш. и соотв. выигрышами, прин. конечн. верш.

Исход игры соверш. в подыграх равнов. (SPNE), если это NE в каждой из подыгр исх. игры

Повторяющиеся игры

- история H периода τ — список исходов, получ. в пер. $t = 1, \ldots, \tau - 1$
- стратегия в повт. T раз игре — список стратегий в $t = 1, \ldots, T$, где $a_t^i \in A^i$ осн. на знании истории H_t
  - ↳ конечные
  - ↳ бесконечные

Триггерные стратегии (кооп. до нарушения договор.)

Равновесие в триг. страт.

<u>Теор.</u> Если диск. мн-ль $\uparrow\uparrow$, то набор страт., при кот. всеб. триг. стр. — SPNE

(Формально триг. страт. — SPNE, если $\delta > 1/2$)

TOP(I)

Shy ; Tirole ; Belleflamme "I.O"

NE - strategy profile $(\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_4)$

$\forall i \quad \hat{S}_i = \underset{s_i \in S_i}{\arg\max}\ u_i(\hat{S}_1, \dots, S_i, \dots \hat{S}_4)$

1)

		q F	$1-q$ B
p	F	2, 3	0; 0
$1-p$	B	1, 1	3, 2

NE $(F; F)$; (B, B) ; $(\frac{1}{4}F + \frac{3}{4}B; \frac{3}{4}F + \frac{1}{4}B)$

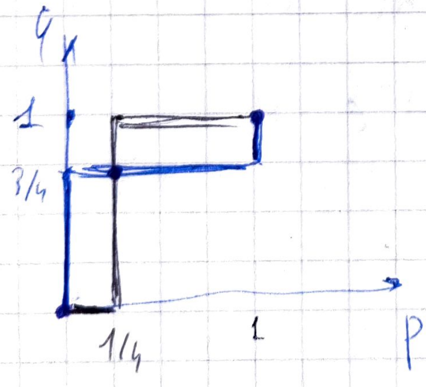
$EU_1(p) = p \cdot q \cdot 2 + p(1-q) \cdot 0 + (1-p) \cdot q \cdot 1 + (1-p)(1-q) \cdot 3$

$= p(4q-3) - 2q + 4$

$\nearrow 4q-3=0 \quad q > 3/4 \quad p^* = 1$

$\rightarrow q = 3/4 \quad p^* \in (0, 1)$

$\searrow q < 3/4 \quad p^* = 0$



$EU_2(q) = \dots = q(4p-1) - 2p + 3$

$\nearrow p < 1/4 \quad q^* = 0$

$\rightarrow p = 1/4 \quad q^* \in (0; 1)$

$p > 1/4 \quad q^* = 1$

Ответ: $(F; F)$

$(B; B)$

$(\frac{1}{4}F + \frac{3}{4}B ; \frac{3}{4}F + \frac{1}{4}B)$

B) $I : 14$ $\quad U(I) = \overset{14-1}{\overset{\shortparallel}{13}}\cdot 0 + 13\cdot(-2) = -26$

$II : 13$ $\quad U(II) = 14\cdot 1 + \underbrace{12}_{13-1}\cdot(-4) = -34$

C) $EU_1(p) = p\cdot q\cdot 1 + \dots = p(4q-2) + 1-2q$

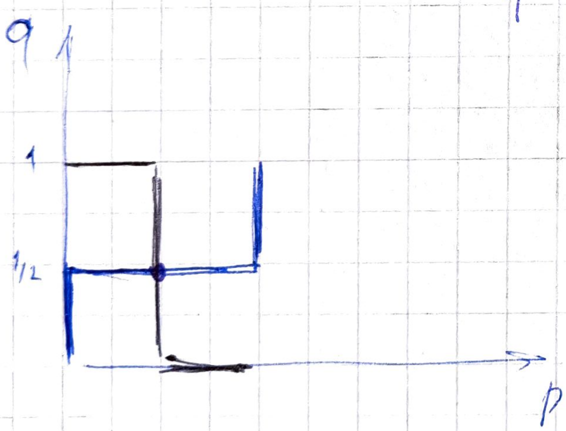
$q < 1/2$ $\quad q = 1/2$ $\quad q > 1/2$

$p^* = 0$ $\quad \forall$ $\quad p^* = 1$

$EU_2(q) = -\|- = q(-4p+2) + 2p-1$

$p < 1/2$ $\quad p = 1/2$ $\quad p > 1/2$

$q^* = 1$ $\quad \forall$ $\quad q^* = 0$



$\left(\frac{1}{2}D + \frac{1}{2}C \; ; \; \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}C\right)$

D)

NE

$1;1$ $\quad 3;0$

$0;3$ $\quad 2;2$

nx

(2) Норм. форма

Players $i = 1, 2$

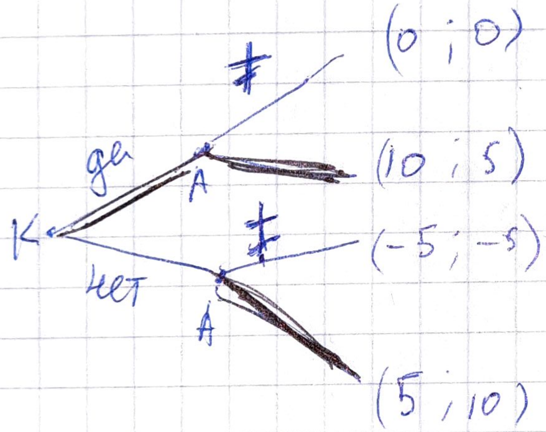
+ Strategies $x_i \in [0; \infty)$

+ Payoffs $U_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \cdot 1{,}5 - x_1$

$U_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \cdot 1{,}5 - x_2$

NE: (0; 0) - неэф.

(3)



	YY	YH	HY	HH
On	(0; 0)	(0; 0)	(10; 5)	(10; 5)
Bob	(−5; −5)	(5; 10)	(−5; −5)	(5; 10)

non-credible threat

SPNE

NE (On, HY); (On; HH); (Bob; YH)

мет. обр. инд → вонда → SPNE (On; HH)

Y — non-credible threat

(4) Рынки дифференцированных товаров

Модели диф. товаров

- неадр. подход
  - фикс. разнообр.
    - Статика (Кур., Берт.)
    - последовательн. (Кур., Берт.)
  - эндоген. разнообр.
- адресный (лок.) подход
  - Круг. город
  - Лин. город
    - Статика
    - Посл. ввод

Простые модели с двумя диф. товарами

$$p_1 = \alpha - \beta q_1 - \gamma q_2$$

$$p_2 = \alpha - \gamma q_1 - \beta q_2$$

$\beta > 0 \quad \beta^2 > \gamma^2 \Rightarrow$ влияние q_1 выше для p_1

эф. собств. цены доминир. над эф. цены конк.

$$q_1 = a - b p_1 + c p_2$$

$$q_2 = a + c p_1 - b p_2$$

где $a = \dfrac{\alpha(\beta - \gamma)}{\beta^2 - \gamma^2}$, $b = \dfrac{\beta}{\beta^2 - \gamma^2} > 0$, $c = \dfrac{\gamma}{\beta^2 - \gamma^2}$

Мера дифференциации брендов: $\delta^2 = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$

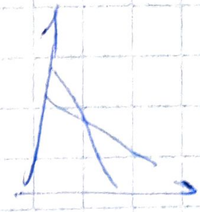
1. т. высокодиф. $\Rightarrow$ изм. цены на j имеет незнач. эф. на i $\Rightarrow \delta \to 0$, $c \to 0$, $(\gamma^2 \to 0)$
2. почти однородны $\to \delta \to 1$, $c \to b$, $(\gamma^2 \to \beta^2)$

Колич. игра

$$\max_{q_i} \pi_i(q_1, q_2) = (\alpha - \beta q_i - \gamma q_j)\, q_i$$

$$0 = \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = \alpha - 2\beta q_i - \gamma q_j$$

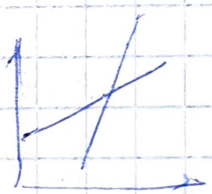
$$q_i = R_i(q_j) = \frac{\alpha - \gamma q_j}{2\beta}$$



Теор. В игре Курно с диф. тов. прибыли фирм растут с увел. диф-и товаров.

Ценовая игра

$$\max_{p_i} \pi_i(p_1, p_2) = (a - b p_i + c p_j)\, p_i$$



$$0 = \frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = a - 2b p_i + c p_j$$

$$p_i = R_i(p_j) = \frac{a + c p_j}{2b}$$

Стратегии игроков явл. страт. субст., если соотв. граф. ф-й реакций имеют отр. наклон

-//- комплементами, -//- пол. наклон

- при пол. накл., если одна фирма $p_i \uparrow$, то $p_j \uparrow$

→ Так при кол. игре кол-ва q_i, q_j – стр. субст.

p_i, p_j – стр. комп.

Теор. В игре Бертрана с д. п. прибыли фирм растут с увел. диф.-и товаров

(тов. диф. увел. монопол. силу брендир., ослабляя цен. конкур.)

Теор. 1. $p_i^c > p_i^b$

2. $\dfrac{\partial (p_i^c - p_i^b)}{\partial \gamma} > 0$

чем более дифф тов., тем меньше разн.

3. $\lim_{\gamma \to 0} (p_i^c - p_i^b) = 0$

$p_i^c = p_i^b$, если тов. независимы

Теор. В игре со стр. — компл. ходами

1. Обе ф. получают более выс. π. в игре с посл. ходами, чем в одновр. игре Бертрана ($\pi_i^s > \pi_i^b$, $i = 1, 2$)

2. Фирма-лидер получает более низкую прибыль

3. $\pi_1^s - \pi_1^b < \pi_2^s - \pi_2^b$

Мон. конкуренция

$u(q_1, \ldots, q_N) = \sum \sqrt{q_i}$ (CES - ф-я полезности)

↳ любовь к разнообразию

т.к. $\lim\limits_{q_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial q_i} = \lim\limits_{q_i \to 0} \dfrac{1}{2\sqrt{q_i}} = +\infty$

$\sum_1^N p_i q_i \leq I$ — б. о.

ф-я от всех цен

$L(q_i, p_i, \lambda) = \sum \sqrt{q_i} + \lambda [I - \sum p_i q_i]$

$0 = \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = \dfrac{1}{2\sqrt{q_i}} - \lambda p_i \Rightarrow q_i(p_i) = \dfrac{1}{4\lambda^2 p_i^2}$

$\eta = \dfrac{\partial q_i}{\partial p_i} \cdot \dfrac{p_i}{q_i} = -2$

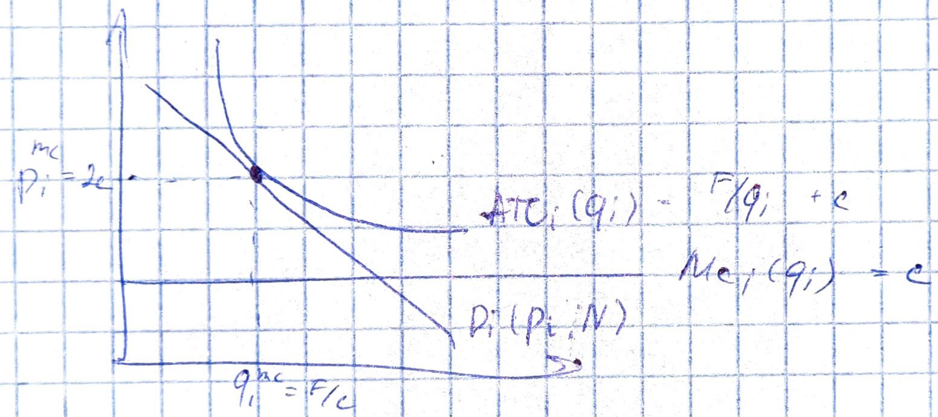
$$TC_i(q_i) = \begin{cases} F + cq_i, & q_i > 0 \\ 0, & q_i = 0 \end{cases}$$

$\{N^{mc}, p_i^{mc}, q_i^{mc}, i = 1, \dots, N^{mc}\}$ —

мон.-конк. равновесие Чемберлина, если

1. $\forall i$ выбирает q_i^{mc}: $\max\limits_{q_i} \pi_i = p_i(q_i)\cdot q_i - (F + cq_i)$
2. Потр. $\max u$ при $\sum p_i q_i \le I$
3. Свободный вход $\Rightarrow \pi_i(q_i^{mc}) = 0$, $\forall i$
4. Ресурсное ограничение: $\sum (F + cq_i) = L$

спрос на L равен общ. предл. L



Поиск:

1) $MR_i(q_i) = p_i\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) = \frac{p_i}{2} = c = MC(q_i)$

$$p_i^{mc} = 2c$$

2) $\pi_i(q_i^{mc}) = 0 \Rightarrow q_i^{mc} = F/c$

3) $\sum(F + cq_i) = L \Rightarrow N\cdot[F + c(F/c)] = L \Rightarrow$

$$N^{mc} = L/2F$$

Тогд. если $F\uparrow$, то $N\downarrow$, но $q_i\uparrow$

если $F\downarrow$, то $N\uparrow$, а $q_i\downarrow$

Адресные модели

Гориз. диф. товары продаются по од. цене, выясн. через выбор идеальных брендов

Верт. диф. товары ценятся одинаково (тов. диф-е по кач-ву)

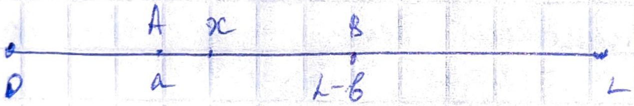
Линейный город (Хотеллинг)

L – длина улицы

$x \in [0; L]$ – индекс потребителя

$t(x-a)$ – изд. покупки у A

$t|x-(L-b)|$ – изд. покупки у B



$$U_x = \begin{cases} -p_A - t(x-a) \\ -p_B - t(x-(L-b)) \end{cases}$$

если покупатель безразличен ($u_A = u_B$)

то $\hat{x} = \dfrac{p_B - p_A}{2t} + \dfrac{L - b + a}{2}$ – спрос на A

$L - \hat{x} = \dfrac{p_A - p_B}{2t} + \dfrac{L + b - a}{2}$ – спрос на B

Найдем NE^B

$\max\limits_{p_A} \pi_A = \dfrac{p_B p_A - p_A^2}{2t} + \ldots$ $\qquad \overline{p_B}, p_A?$

$\dfrac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = 0 \Rightarrow \ldots$

$$\max_{p_B} \Pi_B = \ldots$$

$$\frac{\partial \Pi_b}{\partial p_b} = 0 \Rightarrow \ldots$$

откуда $p_A^h = \frac{t(3L - b + a)}{3}$

$p_B^h = \ldots$

$\hat{x}_A^L = \frac{3L - b + a}{6}$ – рын. доля A

при этом рын. поделен поровну

$\Pi_A^h = \hat{x}_A^L \cdot p_A^h = \ldots$

$\Pi \uparrow$, если $x \uparrow$ и $t \uparrow$

Теор. 1. если $a + b = L$ тов. однородны,

то $p_A = p_b = 0$ – ед. равновесие

2. $\exists$ ед. равновесие, если и т.е. обе фирмы

(расп. не слишком близко

(иначе фирмы начинают сбивать цены,

что не прив. к равн. сост.)

Теор. в мод. Хотеллинга ~~А~~ равновесие

в игре, в кот. стратегиями будет выбор

и цен, и расположения

Принцип макс. дифф-и – фирмы стр. попасть в середину лин.

Квадр. ф-я трансп. изд.

$$U_x = \begin{cases} -p_a - t(x-a)^2 \\ -p_b - t[x-(L-b)]^2 \end{cases}$$

1 период – реш., где разм.

2 период – уст. цены

② при $\bar{a}, \bar{b}$ найти $NE^B \Rightarrow p_a, p_b$

$\Rightarrow \pi_a(a,b),\ \pi_b(a,b)$

① $\pi_a(a,b) \to \max\limits_a$

$\pi_b(a,b) \to \max\limits_b$

для $\bar{b}$: $\partial\pi_A/\partial a < 0$ (A выберет $a=0$)

для $\bar{a}$: $\partial\pi_B/\partial b < 0$ (B выб. L)

$\Rightarrow$ фирмы выб. макс. дифф-ю брендов

Круговой город

(S) $$\pi_i(q_i) = \begin{cases} (p_i - c)q_i - F & q_i > 0 \\ 0 & q_i = 0 \end{cases}$$

(C) $$\hat{x} = \frac{p - p_i}{2t} + \frac{1}{2N}$$

$$q_i(p_i, p) = 2\hat{x} = \frac{p - p_i}{t} + \frac{1}{N}$$

$\{N, p^\circ, q^\circ\}$ – равновесие при мон. конк.

1. Фирмы-моноп. $\max\limits_{p_i} \pi(p_i, p^\circ) = p_i q_i(p_i) - (F + c q_i)$
2. Своб. вход $\Rightarrow \pi_i = 0 \ \forall i$

Благосост.

1) $T(N) = 2Nt\left(\int_0^{1/2N} x\,dx\right) = \frac{t}{4N}$

2) $\min\limits_{N} L(F, t, N) = NF + T(N) = NF + \frac{t}{4N}$

$$N^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{F}} < N^0$$

при $N\downarrow$ $ATC\downarrow$ $T\uparrow$

$N\uparrow$ $ATC\uparrow$ $T\downarrow$

выше ат.тр. изд-
мает.

пр-ва

Дифференцированные товары

Задача 1:

$P = 100 - Q = 100 - q_1 - q_2$

$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} < 0 \Rightarrow$ стр. субст.

$\frac{\partial p_i}{\partial p_j} > 0 \Rightarrow$ стр. компл.

Задача 2:

Cola: $q_1 = 64 - 4p_1 + 2p_2$ $\quad MC_1 = 5$

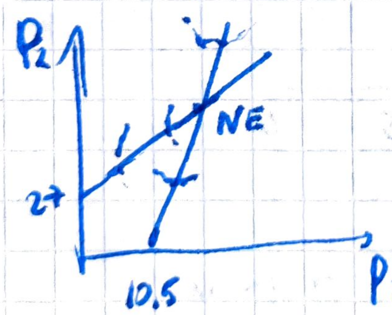
Pepsi: $q_2 = 50 - p_2 + p_1$ $\quad MC_2 = 4$

а) $\pi_1 = (64 - 4p_1 + 2p_2)p_1 - 5(64 - 4p_1 + 2p_2) \to \max\limits_{p_1}$

$\pi_2 = $ -"- $\to \max\limits_{p_2}$

$p_1 = \left(\frac{64 + 2p_2}{4} - 5\right) \cdot \frac{1}{2} = 10{,}5 + \frac{p_2}{4}$

$p_2 = \left(\frac{50 + p_1}{1} - 4\right) \cdot \frac{1}{2} = 27 + \frac{p_1}{2}$



$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = 19{,}7 \\ p_2 = 36{,}8 \end{cases}$

б) $\pi_1 = \left(64 - 4p_1 + 2\left(\frac{54 + p_1}{2}\right)\right)(p_1 - 5) \to \max\limits_{p_1}$

$\Rightarrow p_1 = 113/6 \Rightarrow p_2 = 38$

где Cola – лидер

в) $\pi = (64-4p_1+2p_2)(p_1-5)+(50-p_2+p_1)(p_2-4) \to \max\limits_{p_1, p_2}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial p_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial p_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad p_1 = 10 + \frac{3}{8}p_2 \qquad p_2 = 22 + \frac{3}{2}p_1$$

SOC: $\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$

$p_1 \approx 41{,}7$

$p_2 \approx 48$

Задача 3:

$p_1 = 100 - 2q_1 + q_2$

$p_2 = 100 - 2q_2 + q_1$

$MC = 10$

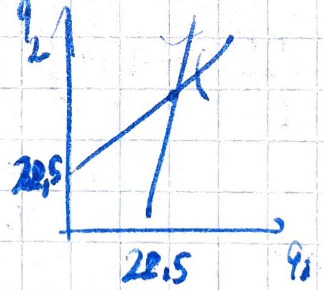
а) $\partial p_i / \partial q_j > 0 \Rightarrow$ комплементы, полн. по кол-ву

б) $\pi_1 = (90 - 2q_1 + q_2)q_1 \to \max\limits_{q_1}$

$\pi_2 = (90 - 2q_2 + q_1)q_2 \to \max\limits_{q_2}$

$q_1 = \dfrac{90 + q_2}{4}$

$q_2 = \dfrac{90 + q_1}{4}$



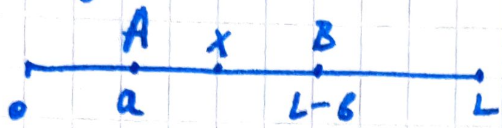
$\Rightarrow \quad q_1 = q_2 = 30$

в) $\pi_1 = \left(90 - 2q_1 + \dfrac{90+q_1}{4}\right)q_1 \to \max\limits_{q_1}$

$\Rightarrow q_1 = 225/7 \Rightarrow q_2 = 855/28$

Модели с размещением

Задача 1:



а) $$U(x) = \begin{cases} -p_a - |x-a|t \\ -p_b - |x-(L-b)|t \\ \quad = -p_b - |L-b-x|t \end{cases}$$

$$p_a + |x-a|t = p_b + |L-b-x|t$$

$$\Downarrow$$

$$(x-a)t + p_a = p_b + (L-b-x)t$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{(a-b+L)}{2} + \dfrac{p_b - p_a}{2t} & [= D^A] \\ L - x = \dfrac{L+b-a}{2} + \dfrac{p_a - p_b}{2t} & [= D^B] \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \pi_A &= x \cdot p_A \to \max_{p_A} \\ \pi_B &= (L-x)\cdot p_B \to \max_{p_B} \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_A(p_B) = p_B(p_A)$$

$$p_A = \frac{(3L + a - b)t}{3}$$

$$p_B = \frac{(3L - a + b)t}{3}$$

б) $\pi_A = \cancel{\dots}$ $\Rightarrow x_A = \dfrac{3L - b + a}{6}$

$$\cancel{\frac{\partial \pi_A}{\partial a} > 0} \qquad \pi_A = t\left(\frac{3L - b + a}{18}\right)^2 \to \max_a$$

$$\cancel{\pi_B = \frac{a-b}{3}p_B + \left(\frac{L+b-a}{3}\right)^2 t} \qquad \pi_B \to \max_b$$

$$\cancel{\pi = \frac{3L + a - b}{6} \cdot \frac{t}{3}(L + a - b)} \qquad \frac{\partial \pi_a}{\partial a} > 0 \quad \frac{\partial \pi_B}{\partial b} > 0$$

Монополистическая конкуренция

Задача 1:

$TC_i = 20 + 0{,}75\, q_i^2$

$P = 10 - b \cdot q_i$

$\pi_i = (10 - bq_i) \cdot q_i - 20 - 0{,}7 q_i^2 \to \max\limits_{q_i}$

$\Rightarrow \quad Q = \frac{10}{2b + 1{,}5} \quad p = 10 - bQ$

$P(Q) = ATC = F/q_i + c$

$10 - b \cdot q_i = 20/q_i + 0{,}75\, q_i$

$\Rightarrow b = \frac{10}{q_i} - \frac{20}{q_i^2} - 0{,}75$

$p^{MC} = 2c = 4q_i$

$q_0^{MC} = F/c = 20/0{,}75 q_i$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$10 - b \cdot Q = \frac{20}{Q^{MC}} + 0{,}75\, Q^{MC} + \left(-\frac{20}{(Q^{MC})^2} + 0{,}75\right)(Q - Q^{MC})$

$\Rightarrow \begin{cases} b = -0{,}75 + 20/(Q^{MC})^2 \\ 10 = \frac{20}{Q^{MC}} + 0{,}75\, Q^{MC} + \frac{20}{Q^{MC}} - 0{,}75\, Q^{MC} \end{cases}$

$\Rightarrow$

$Q^{MC} = 4 \Rightarrow b = 1/2 \Rightarrow p^{MC} = 8$

$\Rightarrow \pi = p \cdot q - TC$

$\pi = 0 \Leftrightarrow p = AC$

Задача 2:

$U = \sqrt{N} - p$

$p = 1/N$

$TC = F$

а) $U = \sqrt{N} - \frac{1}{N} \to \max_N$

$N \to \infty$

б) $AC = F/Q_i \Rightarrow N = Q_i/F$

$p = 1/N$

Задача 3:

$U = \left(\sum \sqrt{x_j}\right)^2$

$x_i = 1/(p_i^2 z)$, где $z = \sum p_j^{-1}$

$c(x_i) = c x_i + F$

а) $\pi_i = \frac{I}{p_i^2 \cdot \underbrace{\sum p_j^{-1}}_{const}} \cdot p_i - c \cdot \frac{I}{p_i^2 \cdot \underbrace{\sum p_j^{-1}}_{const}} - F \to \max_{p_i}$

$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = \ldots = 0 \Rightarrow p_i = 2c$

б) $\frac{I}{2c \cdot N \frac{1}{2c}} - c \frac{I}{4c^2 \cdot N \frac{1}{2c}} - F = 0$

$\Rightarrow N = I/2F$

в) $\pi_i = \frac{I}{p_i \cdot z} - c \cdot \frac{I}{p_i^2 \cdot z} - F \to \max_{p_i}$, s.t.: $z = \sum p_j^{-1}$

$p = c \cdot \frac{2N-1}{N-1} \Rightarrow N = \frac{I}{2F} + \frac{1}{2}$

(I) **Курно**

1) $\max\limits_{q_1} \pi_1 (q_1, q_2^c) \Rightarrow q_1(q_2)$

2) $\max\limits_{q_2} \pi_2 (q_1^c, q_2) \Rightarrow q_2(q_1)$

3) $R_1(q_2) = R_2(q_1) \Rightarrow Q^c \Rightarrow p^c$

Курно(N)

1) $\max\limits_{q_i} \pi_i = P(Q) \cdot q_i - cq_i = [a - b \sum_i^N q_i] q_i - cq_i$

2) $\Rightarrow q_i$ + идентичность $\Rightarrow q_i = q = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}(N-1)q$

$\Rightarrow q^c \Rightarrow Q^c = Nq^c$

$\Rightarrow p^c$

Курно $(N \to \infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} q^c = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} Q^c = \frac{a-c}{b}$

$\lim\limits_{n\to\infty} p^c = c$

Штакельберг (лидер + ведомый)

SE: (x^*, y^*), где $y^* = R(x^*)$,

где x^*: $H(x^*, y^*) = \max\limits_x H(x, R(x))$

1) $R_2(q_1) \Rightarrow q_1^s$

2) $\max\limits_{q_1} \pi_1^s = p(q_1 + R_2(q_1)) q_1 - cq_1$

Бертран

1) $\max\limits_{p_1} \pi_1 (p_1, p_2^b)$

2) $\max\limits_{p_2} \pi_2 (p_1^b, p_2)$

3) q_1, q_2 опр. по

$$q_i = \begin{cases} 0, & p_i > a \\ 0, & p_i > p_j \\ \frac{a-p_i}{b}, & p_i < \min(a, p_j) \\ \frac{a-p}{2b}, & p_i = p_j < a \end{cases}$$

Курно (N):

1) $\pi_i(q_i, q_{-i}) \to \max\limits_{q_i}$

$\Rightarrow q_i \Rightarrow q \Rightarrow Q \Rightarrow P$

2) $\pi_i = 0 \Rightarrow N$

Симм. олигополия $\Rightarrow$ равные цели

Дифф. товары

$p_1 = \alpha - \beta q_1 - \gamma q_2$

$\beta > 0,\ \beta^2 > \gamma^2$

$p_2 = \alpha - \gamma q_1 - \beta q_2$

$\hookrightarrow \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - p_1 \\ \alpha - p_2 \end{bmatrix}$

$\Delta = \det \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} = \beta^2 - \gamma^2$

$q_1 = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} \alpha - p_1 & \gamma \\ \alpha - p_2 & \beta \end{bmatrix} = \frac{\alpha(\beta - \gamma) - \beta p_1 + \gamma p_2}{\beta^2 - \gamma^2}$

$q_2 = \frac{1}{\Delta} \det \begin{bmatrix} \beta & \alpha - p_1 \\ \gamma & \alpha - p_2 \end{bmatrix} = \frac{\alpha(\beta - \gamma) - \beta p_2 + \gamma p_1}{\beta^2 - \gamma^2}$

$q_1 = a - b p_1 + c p_2$

$q_2 = a + c p_1 - b p_2$

где $a = \frac{\alpha(\beta - \gamma)}{\beta^2 - \gamma^2}$, $b = \frac{\beta}{\Delta}$, $c = \frac{\gamma}{\Delta}$

$\delta^2 = \gamma^2 / \beta^2$ – мера дифференциации

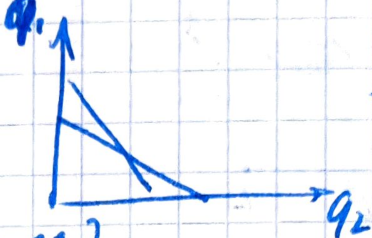
$\delta^2 \to 1$ – почти одн.

$\delta^2 \to 0$ – высоко дифф.

Диф. товары (Q)

$$\max_{q_i} \pi_i(q_1, q_2) = (\alpha - \beta q_i - \gamma q_j)\, q_i$$

$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} \Rightarrow q_i = R_i(\underline{q_j}) \Rightarrow$



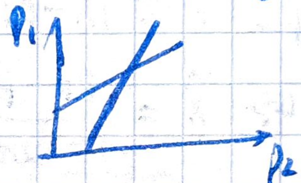
$\Rightarrow$ страт. субституты

[THM]: $\pi(\underline{\delta})$ $[\delta \to 0 \quad \pi \uparrow\uparrow]$

Диф. товары (P)

$$\max_{p_i} \pi_i(p_1, p_2) = (a - b p_i + c p_j)\, p_i$$

$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} \Rightarrow p_i = R_i(\underset{+}{p_j}) \Rightarrow$



$\Rightarrow$ страт. комплементы

[THM]: $\pi(\underline{\delta})$ [-//-]

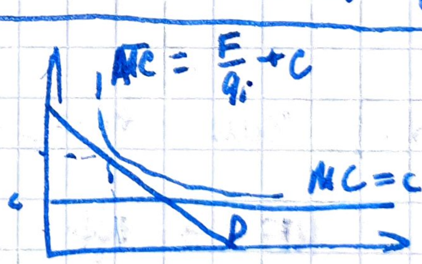
Мон. конкуренция

$$U(q_1, \dots, q_N) = \sum \sqrt{q_i} \qquad s.t.: \sum p_i q_i \le I$$

$$L(q_i, p_i, \lambda) = \sum \sqrt{q_i} - \lambda \left[I - \sum p_i q_i \right] \to \max$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2\sqrt{q_i}} - \lambda p_i \Rightarrow q_i(p_i),\ p_i(q_i),\ \eta = \frac{\partial q_i}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{q_i}$$

$$TC_i(q_i) = \begin{cases} F + c q_i & q_i > 0 \\ 0 & q_i = 0 \end{cases}$$



MCE : $\{ N^{mc}, p_i^{mc}, q_i^{mc} \}$

$$p_i^{mc} = 2c$$

$$q_i^{mc} = F/c$$

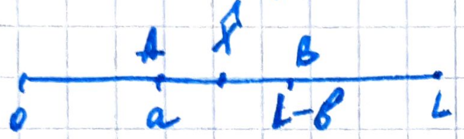
$N^{mc} = L/2F$, где $\sum (F + c q_i) = L$

рес. ограничение

Линейный город

$X \in [0; L]$

1) С фикс. адресом $\hat{X}$



$$U_x = \begin{cases} -p_A - t|X-a| \\ -p_B - t|X-(L-b)| \end{cases}$$

$$U_x^A = U_x^B \Rightarrow p_A + t|\hat{X}-a| = p_B + t|\hat{X}-(L-b)|$$

$$\hookrightarrow \hat{X} = \frac{p_B - p_A}{2t} + \frac{L-b+a}{2} \quad (\text{для } A)$$

$$L-\hat{X} = \frac{p_A - p_B}{2t} + \frac{L+b-a}{2} \quad (\text{для } B)$$

$$\left.\begin{aligned} \max_{p_A} \pi_A &= \frac{p_B p_A - (p_A)^2}{2t} + \frac{(L-b+a)\,p_A}{2} \\ \max_{p_B} \pi_B &= \frac{p_A p_B - (p_B)^2}{2t} + \frac{(L+b-a)\,p_B}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} p_A &= \frac{t(3L-b+a)}{3} \\ p_B &= \frac{t(3L-a+b)}{3} \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{X}_A = \frac{3L-b+a}{6}$$

[THM] если $a+b=L \Rightarrow p_A = p_B = 0$

НЕ $\exists$ iff $\begin{cases} \left(L + \frac{a-b}{3}\right)^2 \geq \frac{4L(a+2b)}{3} \; (+) \\ \left(L + \frac{b-a}{3}\right)^2 \geq \frac{4L(b+2a)}{3} \end{cases}$

2) квадр. ф-я

$$U_x = \begin{cases} -p_A - t(x-a)^2 \\ -p_B - t(x-(L-b))^2 \end{cases}$$

$\hookrightarrow a=0,\ \partial\pi_A/\partial a < 0;\ b=0\ \ \partial\pi/\partial b < 0$

для 2 пер:

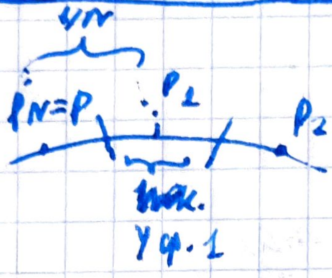
1) $p_a(a,b)$, $p_b(a,b)$
2) $\pi_a(p_a; x_a)$, $\pi_b(p_b; x_b)$

для 1 пер:

1) $\pi_a \to \max_a$ $\pi_b \to \max_b$

Круговой город

$$\pi_i(q_i) = \begin{cases} (p_i - c)\, q_i - F & q_i > 0 \\ 0 & q_i = 0 \end{cases}$$



$$p_1 + t\hat{x} = p + t\left(1/N - \hat{x}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{p - p_1}{2t} + \frac{1}{2N}$$

$$q_1(p_1, p) = 2\hat{x} = \frac{p - p_1}{t} + \frac{1}{N}$$

[DEF] $\{N^\circ, p^\circ, q^\circ\}$ — NCE

1. $\max\limits_{p_i} \pi_i(p_i, p^\circ) = p_i \cdot q_i(p_i) - (F + cq_i) = (p_i - c)\left(\frac{p^\circ - p_i}{t} + \frac{1}{N}\right) - F$

2. своб. вх. на рынок $\Rightarrow \pi_i(p^\circ, p^\circ) = 0 \ \forall i$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = \frac{p^\circ - 2p_i + c}{t} + \frac{1}{N}$$

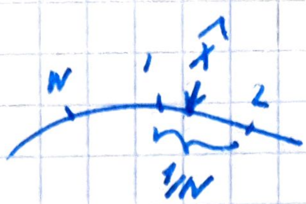
$$\Rightarrow p_i = p^\circ = c + t/N$$

$$(p^\circ - c) \cdot \frac{1}{N} - F = 0 \Rightarrow N = \sqrt{\frac{t}{F}} \Rightarrow p^\circ = c + \sqrt{tF}$$

$$q^\circ = \frac{1}{N^\circ}$$

Задача:

$\tilde{C} = tx^2$



$$P_1 + t\hat{x}^2 = P_2 + t\left(\frac{1}{N} - \hat{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \hat{x} = \frac{(P_2 - P_1)\, N}{2t} + \frac{1}{2N}$$

$$\pi_1 = (2\hat{x})\, P_1 - F - c\hat{x} \to \max_{P_1}$$

$$\pi_1 = P_1 \frac{t/N + P\cdot N - P_1 \cdot N}{t} - F - c \cdot \frac{t/N + PN - P_1 N}{2t} \longrightarrow \max_{P_1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 0 \\ P_1 = P \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} P &= c + t/N^2 \\ \hat{x} &= 1/2N \end{aligned}$$

$$\pi = 2\left(c + \frac{t}{N^2}\right) \cdot \frac{1}{2N} - F - 2c \cdot \frac{1}{2N} = 0$$

$$\Rightarrow N = (t/F)^{1/3}$$

$$P^* = c + t^{1/3} \cdot F^{2/3}$$

Вертикальная дифференциация

"качественная"

$V = \theta s - p$

θ – склонность к качеству

$s_2 > s_1$

[AS] 1. $\bar{\theta} \geq 2\underline{\theta}$

2. $c + \dfrac{\bar{\theta} - 2\underline{\theta}}{3}(s_2 - s_1) \leq \underline{\theta} s_1$

$\Delta s = s_2 - s_1$ – кач. различие

$\bar{\Delta} \equiv \bar{\theta} \cdot \Delta s$; $\underline{\Delta} \equiv \underline{\theta}\, \Delta s$ – ден. оценки Δs

$$D_1 = \frac{p_2 - p_1}{\Delta s} - \underline{\theta}$$

$$D_2 = \bar{\theta} - \frac{p_2 - p_1}{\Delta s}$$

$$\pi_i = (p_i - c) \cdot D_i \to \max_{p_i}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} p_2 &= \frac{p_1 + c + \bar{\Delta}}{2} \\ p_1 &= \frac{p_2 + c - \underline{\Delta}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_1^c = c + \frac{\bar{\Delta} - 2\underline{\Delta}}{3} = c + \frac{\bar{\theta} - 2\underline{\theta}}{3}\Delta s$$

$$p_2^c = c + \frac{2\bar{\theta} - \underline{\theta}}{3}\Delta s > p_1^c$$

$$\Rightarrow \quad D_1^c = \frac{\bar{\theta} - 2\underline{\theta}}{3} \Rightarrow \pi_1 = (\bar{\theta} - 2\underline{\theta})^2 \cdot \frac{\Delta s}{9}$$

$$D_2^c = \frac{2\bar{\theta} - \underline{\theta}}{3} \Rightarrow \pi_2 = (2\bar{\theta} - \underline{\theta})^2 \cdot \frac{\Delta s}{9} > \pi_1$$

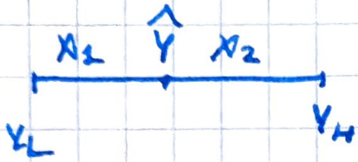
Задача:

$S_2 > S_1$

$U = Y s_i - p_i$, где Y - доход; $Y \sim U[Y_L ; Y_H]$

$Y_H > 2Y_L$

а)



$$\hat{Y} S_1 - P_1 = \hat{Y} S_2 - P_2 \Rightarrow \hat{Y} = \frac{P_1 - P_2}{S_1 - S_2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{P_1 - P_2}{S_1 - S_2} - Y_L \\ x_2 = Y_H - \dfrac{P_1 - P_2}{S_1 - S_2} \end{cases}$$

$$\pi_1 = \left(\frac{P_1 - P_2}{S_1 - S_2} - Y_L\right)(P_1 - c) \to \max_{p_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad P_1 = \frac{Y_1 (S_1 - S_2) + P_2 + c}{2}$$

$$\pi_2 = x_2 \cdot (p_2 - c) \to \max_{p_2} \Rightarrow p_2(p_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad P_1 = c + \frac{(S_2 - S_1)(Y_H - 2Y_L)}{3}$$

$$P_2 = c + \frac{(S_2 - S_1)(2Y_H - Y_L)}{3}$$

б) $S_1 = S_2 \rightarrow \pi = 0$ (Бертран)

$S_1 \neq S_2$

1) $P_1 = c + \dfrac{(S_2 - S_1)(Y_H - 2Y_L)}{3}$; $P_2 = \dots$

2) $x_1 = \dfrac{P_1 - P_2}{S_1 - S_2} - Y_L$, $x_2 = \dots$

3) $\pi_1 = \left(\dfrac{(S_1 - S_2)(Y_H + Y_L)}{3(S_1 - S_2)} - Y_L\right) \cdot \dfrac{(S_2 - S_1)(Y_H - 2Y_L)}{3} \xrightarrow[S_1]{} \max$

$\dfrac{\partial \pi_1}{\partial S_1} < 0 \Rightarrow S_1^* = \underline{S}$

$\pi_2 = \dfrac{(S_2 - S_1)(2Y_H - Y_L)^2}{9} \xrightarrow[S_2]{} \max$

$\dfrac{\partial \pi_2}{\partial S_2} > 0 \Rightarrow S_2^* = \bar{S}$

$$\begin{cases} p_1^* = c + \dfrac{(\bar{S} - \underline{S})(Y_H - 2Y_L)}{3} & \text{бх. 1} \\ p_2^* = c + \dfrac{(\bar{S} - \underline{S})(2Y_H - Y_L)}{3} & \text{бх. 2} \end{cases}$$

в) 1) p_1, p_2

2) лидер $\bar{S}$ → посл. $\underline{S}$

лидер $\underline{S}$ → посл. $\bar{S}$

⇒ сравнить π_1, π_2

г) $Y_H < 2Y_L \Rightarrow p < MC \Rightarrow 1^{ая}$ ф. уйдет ⇒ монополия

Продажа комплектами

	X	Y
1	$V_X^1 = H$	$V_Y^1 = L$
2	$V_X^2 = L$	$V_Y^2 = H$

NT $p_X = p_Y = L \Rightarrow \pi^{NT}(L) = 4L$

$p_X = p_Y = H \Rightarrow \pi^{NT}(H) = 2H$

$\Rightarrow$ $p_X = p_Y = \begin{cases} H; & H > 2L \\ L; & H < 2L \end{cases}$

$\pi = \begin{cases} 2H & H > 2L \\ 4L & H < 2L \end{cases}$

T $p^T = L + H$

$\pi^T = 2(L+H) > \pi^{NT}$

III смеш. связ. (пакеты + по отд.)

IV связ. и вытеснение

$U^1 = \begin{cases} 3 - p_X - p_Z \\ 1 - p_Y - p_Z \\ 0 \end{cases}$ $\quad U^2 = \begin{cases} 1 - p_X - p_Z \\ 3 - p_Y - p_Z \\ 0 \end{cases}$

NBE: $(p_X, p_Y, p_Z) = (2, 2, 1)$ $\quad \pi_z = 2$

$\oplus$

$(1, 1, 2)$

$(0, 0, 3)$

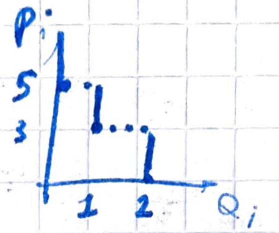
$(3, 3, 0)$.

XZ $\Rightarrow p_{XZ} = 3 \Rightarrow$ вытесняет Y

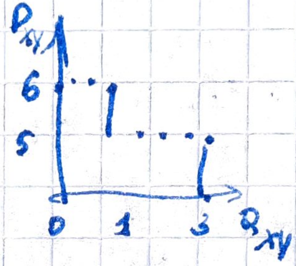
$\pi^{XZ} < \pi^X + \pi^Z$

Задача 1:

	X	Y	X+Y
A	5	0	5
B	0	5	5
C	3	3	6



а) $P_x = P_y = 3$ $TR = 12$



$P_{xy} = 5$ $TR = 15$

б) $\left.\begin{matrix} P_x = P_y = 5 \\ P_{xy} = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow TR = 16$

в) иначе, если

A	7	0	7
B	0	7	7
C	3	3	6

Задача 2

	N	S	B
1	11	a	11+a
2	8	13	21

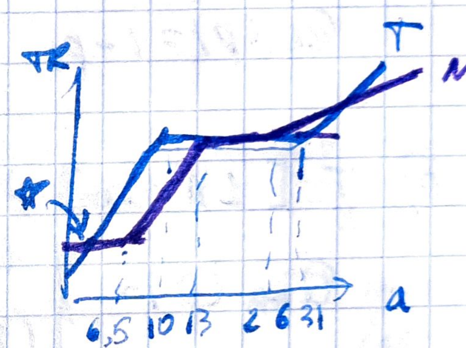
I $P_N = 8$

$P_S = \begin{cases} 13 & , \quad a \in [0; 6{,}5) \cup [13; 26) \\ a \end{cases}$

$TR = \begin{cases} 16 + 13 & a < 6{,}5 \\ 16 + 2a & [6{,}5; 13) \\ 16 + 26 & [13; 26) \\ 16 + a & [26; \infty) \end{cases}$

II $P_B = \begin{cases} 11 + a & a < 10 \\ 21 & a \in [10; 31) \\ 11 + a & a \geq 31 \end{cases}$

$TR = \begin{cases} 22 + 2a & a < 10 \\ 42 & [10; 31) \\ 11 + a & a \geq 31 \end{cases}$



* $22 + 2a = 29 \quad a = 3{,}5$

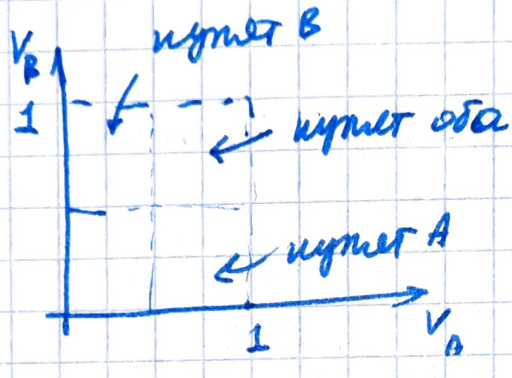
$\Rightarrow$ B > NT на $(3{,}5; 13)$

Задача 3:

$V_{\overline{A,B}} \sim U[0;1]$

$c_A = c_B = 0$

а) NT:



$Q_A(p) = 1 - p_A$

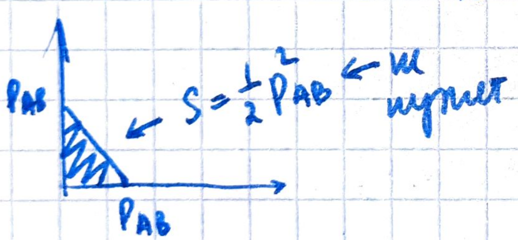
$p_A = p_B = 1/2$

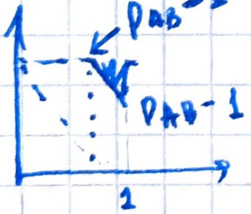
$Q_B(p) = 1 - p_B$

$\pi_A + \pi_B = 1/4 + 1/4 = 1/2$

б) T [1A + 1B]

$$Q_{AB}(p) = \begin{cases} 1 - 1/2\, p_{AB}^2, & p_{AB} < 1 \\ \frac{(2 - p_{AB})^2}{2}, & p_{AB} > 1 \end{cases}$$



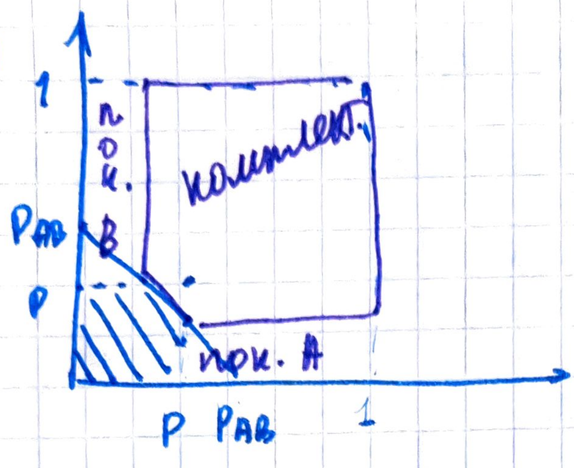


$\Rightarrow S = \frac{(1 - p_{AB} + 1)^2}{2}$ - купит

$\pi_{AB} = p_{AB} \cdot Q_{AB} \to \max\limits_{p_{AB}}$

$$\begin{cases} p_{AB}^* = \sqrt{\frac{2}{3}}, & p_{AB} < 1 \\ p_{AB}^* = 2/3, & p_{AB} > 2 \end{cases}$$

в)



$p \in \left(\frac{p_{AB}}{2};\ p_{AB}\right)$

$$\begin{cases} U_A + U_B - p_{AB} > U_A - p \\ U_A + U_B - p_{AB} > U_B - p \end{cases}$$ для пок. компл.

$$\Rightarrow \begin{cases} U_B > p_{AB} - p \\ U_A > p_{AB} - p \end{cases}$$

$$\pi = (p_{AB} - p)(1-p)\cdot p \cdot 2 + p_{AB}\left[(1 - p_{AB} + p)^2 - \frac{(2p - p_{AB})^2}{2}\right] \to \max_{p_{AB},\, p}$$

$p^* = 2/3$

$p^*_{AB} = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{2})$ $\Rightarrow \pi = 0,55$

Дилерство

Задача 1: $P(Q) = a - bQ$

а) $\pi = (a - bQ)\cdot Q - 4c \cdot Q \to \max\limits_{q}$

$\Rightarrow q^* = \dfrac{a-4c}{2b}$ $\qquad \pi = \dfrac{(a-4c)^2}{4b}$

$p^* = \dfrac{a+4c}{2}$

б) $\pi_D = (a-bQ)\cdot Q - 4W\cdot Q \to \max\limits_{q}$

$q^* = \dfrac{a-4w}{2b}$

$p^* = \dfrac{a+4w}{2}$

$\pi_W = 4w\,\dfrac{a-4w}{2b} - 4c\,\dfrac{a-4w}{2b} \to \max\limits_{w}$

$w^* = \dfrac{a+4c}{8}$

$\Rightarrow$ $Q^* = \dfrac{a-4c}{4b}$ $\qquad p^* = \dfrac{3a+4c}{4}$

$\Rightarrow$ $\pi_W = 4\cdot\left(\dfrac{a+4c}{8} - c\right)\cdot\dfrac{a-4c}{4b} = \dfrac{(a-4c)^2}{8b}$

$\Rightarrow$ $\pi_D = \left(a - b\cdot\dfrac{a-4c}{4b} - 4\cdot\dfrac{a+4c}{8}\right)\cdot\dfrac{a-4c}{4b} = \dfrac{(a-4c)^2}{16b}$

При верт. интеграции прибыль $\uparrow$ в 2 раза

в) w изм. downstream

$\Rightarrow$ $w = c$ $\Rightarrow$ нет двойной надбавки

$\Rightarrow$ ответ из п. а

Задача 2

$P = 2000 - Q$

$MC = P_W + P_1 + 500$

$C_1 = 300$

а) $\pi = (2000 - Q) \cdot Q - (500 + P_W + P_1) \cdot Q \to \max\limits_{Q}$

$\frac{\partial \pi}{\partial Q} \Rightarrow Q = 750 - \frac{P_1 + P_W}{2}$

$\pi_I = \left(750 - \frac{P_1 + P_W}{2}\right) \cdot (P_1 - 300) \to \max\limits_{P_I}$

$\frac{\partial \pi}{\partial P_1} \Rightarrow P_1 = \frac{1800 - P_W}{2}$

$\pi_W = \left(750 - \frac{P_1 + P_W}{2}\right) \cdot P_W \to \max\limits_{P_W}$

$\frac{\partial \pi}{\partial P_W} \Rightarrow P_W = \frac{1500 - P_I}{2}$

$\begin{cases} P_I^* = 700 \\ P_W^* = 400 \end{cases}$ $\Rightarrow$ комплементы/стр. субст.

$Q^* = 200 \quad P^* = 1800$

б) $\pi_{W+I} = \left(750 - \frac{P_I + P_W}{2}\right)(P_1 + P_W - 300) \to \max\limits_{P_{IW}}$

$\frac{\partial \pi_{IW}}{\partial P_{IW}} \Rightarrow P_{IW} = 900 \Rightarrow Q^* = 300 \Rightarrow P^* = 1700$

в) потребитель бы выиграл, если бы все 3 слились

Задача 3

$P(q) = \max\{a-q, 0\}$

а) $\pi = (a-q)\cdot q \to \max\limits_q$

$q^* = a/2 \; ; \; p^* = a/2$

б) $\pi_0 = (a-q-w)\,q \to \max\limits_q$ Дилер

$q^* = \dfrac{a-w}{2}$

$p^* = \dfrac{a+w}{2}$

$\pi_w = \dfrac{a-w}{2}\cdot w \to \max\limits_w$ Пр-ль

$w^* = a/2 \qquad q^* = a/4$

↓ в 2 раза из-за 2ой надбавки

в) $P(q) = a-q+s$

$q^* = \dfrac{a+s}{4}$

$\pi_w = \dfrac{a-w+s}{2}\cdot w \; \cancel{\to \max}$

$w^* = \dfrac{a+s}{2}$

$4a = a+s \Rightarrow \boxed{s = 3a}$

2) $E(\pi) = \begin{cases} 0{,}5(4 - xw) + 0{,}5((8-x)x - xw) & x \geq 2 \\ 0{,}5(x(4-x) - xw) + 0{,}5((8-x)x - xw) & x < 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x = \begin{cases} -w/2 + 3 & x < 2 \quad w > 2 \\ 4 - w & x \geq 2 \quad w \leq 2 \end{cases}$

$\pi_w = \begin{cases} (3 - \frac{w}{2})\,w & w > 2 \\ (4-w)\,w & w \leq 2 \end{cases}$

$w^* = 3$

Товары длительного пользования

Coase conjecture:

Если товары очень длит. польз., то монополии не будет, т.к. фирма конк. сама с собой

Задача 1:

$V_1 > V_2$; $\delta \in (0;1)$; t - т.2

а) $V_1 = 15$; $V_2 = 20$

1) $p_1 = 10 + 10\delta$
$p_2 = 50$
$\Rightarrow \pi = 20 + 20\delta$ все в 1 пер.

2) $p_1 = 15 + 15\delta$
$p_2 = 10$
$\Rightarrow$ даже 1 не купит, т.к. его излишек $= 0$

$(15 - 10)\delta$

$15 + 15\delta - p_1 \geq (15 - \overset{10}{\overset{\shortparallel}{p_2}})\delta$

$p_1 \leq 15 + 10\delta$

$\pi = 15 + 10\delta + 10\delta = 15 + 20\delta$

$p_2 = \begin{cases} 10, & \text{если 1ый купил} \\ 15, & \text{если нет} \end{cases}$

↳ SPNE равновесие с непр. угрозой $\not\exists$

б) $V_1 = 21$; $V_2 = 10$

$p_2 = \begin{cases} 10, & \text{если 1 купит} \\ 21 & \text{иначе} \end{cases}$

правдоподобно $p_1 = 21 + 21\delta$
$p_2 = 10$

$\pi = 21 + 31\delta$
1 не будет ож. снижения

Задача 2

$V_1 = 100$

$V_2 = 50$

а) $p_1 = 150$

$p_2 = 50$

$U_1 = 200 - p_1 \geq 100 - 50$

$p_1 \leq 150$ наличие $t=2$ снижает цену

$\pi = 250 = 150 + 50 \cdot 2$

$50, 50, 100$

$\pi = 150 = 50 \cdot 3$, $p_2 = 50$ } всем не купить

б) $V_1 = 20$

$40 - p_1 \geq 40 - 50$

$p_1 \leq 50$

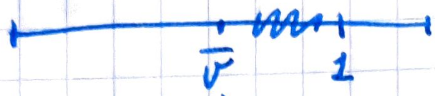
$20, 50, 50$

$\pi = 40 + 100 = 140$

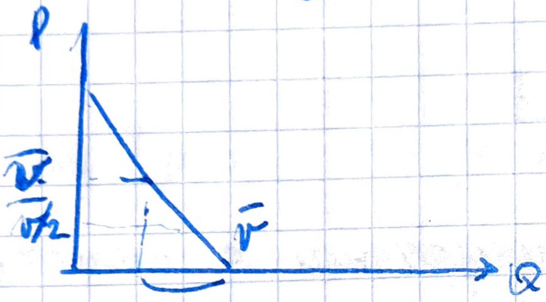
$\Leftrightarrow$ наличие $t=2$ не опасна т.к. потр. 1 не сможет позволить себе товар потом

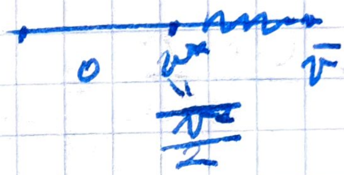
Задача 3

$\delta \in (0;1)$



безразличный пок. (сейчас – потом)





$p_2 = \bar{v} - q_2 \qquad TR = (\bar{v} - p_2)\,p_2$

$p_2^* = \frac{\bar{v}}{2} \qquad TR = \frac{\bar{v}^2}{4}$

Первый выбирает: покупать сейчас или потом (прогноз p_1, p_2 уже в 1 пер.)

$$\underbrace{\bar{v} + \bar{v}\cdot\delta - p_1}_{\text{пок. сейчас}} = \underbrace{\bar{v}\cdot\delta - p_2\delta}_{\text{пок. потом}}$$

$$\bar{v} = p_1 - p_2\delta$$

$$\bar{v} = p_1 - \frac{\bar{v}}{2}\delta$$

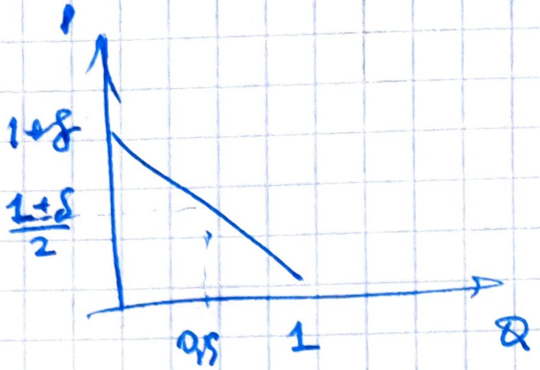
$$\bar{v} = \frac{2p_1}{2+\delta}$$

$$\pi = (1-\bar{v})\cdot p_1 + \frac{\bar{v}^2}{4} =$$

$$= \left(1 - \frac{2p_1}{2+\delta}\right)p_1 + \left(\frac{2p_1}{2+\delta}\right)^2\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow p_1^* = \frac{(2+\delta)^2}{2(4+\delta)}$$

$$\pi = \frac{1}{4}\cdot\frac{(2+\delta)^2}{4+\delta}$$

Если все прод. в первый период



$$\Pi = \frac{1+\delta}{4}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{(2+\delta)^2}{4+\delta} \leq \frac{1+\delta}{4}$$

проигрыш от конкуренции с самим собой?

$$4+2\delta \leq 4+5\delta$$

$$(4+\delta)(1+\delta) = 4+8\delta$$

Сетевые эффекты

Задача 1

$n = 50$

а)
$$\begin{tikzcd} & & 2n \\ \text{ТЦ} \arrow[r, "p"] & A \arrow[ur, "+"] \arrow[dr, "-"'] & \\ & & 0 \end{tikzcd}$$
, n – ар. в NE

① если $p \geq 2n$ ⇒ не арендует
$(\pi \text{ ар.} = 2n - p)$

$2n \geq p$ ⇒ ар. ($\forall$ ар.)

② ТЦ: $\pi = p \cdot N \to \max\limits_{p}$, s.t. $\max N = 50$

$p = 2n = 2(N-1)$, где $N = \frac{p}{2} + 1$

$\max 2(N-1)N$

$\max\limits_{0 \leq p \leq 98} p \cdot (p/2 + 1)$

$p = 98 \quad N = 50$

$p = 98 \quad N = 0$ ← равновесие
в одиночку никому не выгодно

$\forall p \quad N = 0$
↳ равновесие

$p = 2n$ → 20 ар., → 30 нет — не NE.

$p = 0$ → 1 ар., → 49 нет ⇒ если хоть бы 1 на рынке, то и все перейдут

$p \to 0 \nearrow 0$, $\searrow 50$ ↑ не выгодно

б) $\text{тц} \to 10 \to 40$, $p=0$: $\xrightarrow{+} 24$, $\xrightarrow{-} 0$

① $p \geq 24$ не ар.

$p < 24$ не ар.

② $\max\limits_{0 \le p \le 98} p\left(\frac{p}{2} - 9\right)$ $N = \frac{p}{2} + 1 - 10$

$p = 98$

$N \le 50$

$\forall p \geq 20$ $N = 10$

$p = 18$ $N = 10$

$p = 98$

$N = 50$ $\Rightarrow$ 4 удл

Задача 2:

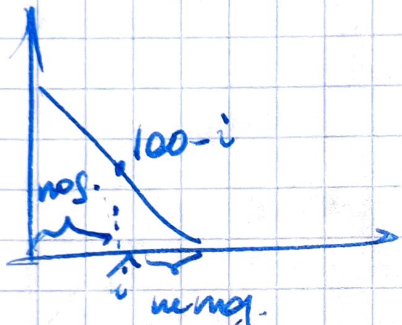
100 жителей

$p_i = (100 - i)\cdot Q$

$TC = 10\,000$ / 10 чел.

а) $\pi = P\cdot Q - TC \longrightarrow \max\limits_{P}$

$\hat{i}$ – безразличный



$\tilde{p} < (100-i)Q \qquad i < \hat{i}$

$\tilde{p} > (100-i)Q \qquad i > \hat{i}$

$\tilde{p} = (100-\hat{i})Q$

$\pi = (100-Q)Q^2 - 10000 \cdot \frac{1}{10} \cdot Q$

$\pi' = 200Q - 3Q^2 - 1000 = 0$

$Q_1 = 61.2 \qquad\qquad \pi(60) = 84$

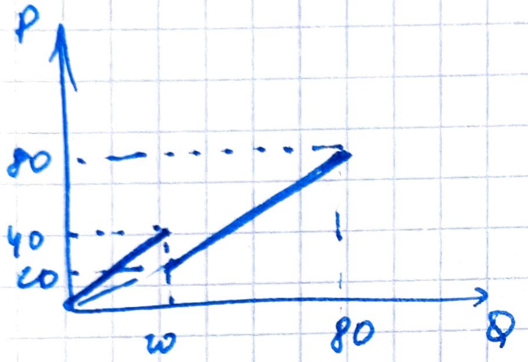
$Q_2 = 5.5 \qquad\qquad \pi(61) = 75$

$p^* = (100-60)60 = 2400$

Задача 3:

$H = 20 \qquad U_H = \begin{cases} 2q - p \\ 0 \end{cases}$

$L = 80 \qquad U_L = \begin{cases} q - p \\ 0 \end{cases}$



$\Pi_H = 40 \cdot 20 = 800$

$\Pi_L = 80 \cdot 80 = 6400$

Реклама

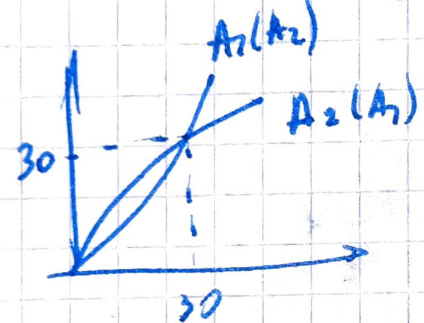
Задача 1

$p = 10$

$n_i = 6 - 3\frac{A_j}{A_i}$

$\pi_i = \left(6 - 3\frac{A_j}{A_i}\right) \cdot 10 - A_i \to \max_{A_i}$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial A_i} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_i = \sqrt{30 A_j} \\ A_j = \sqrt{30 A_i} \end{cases}$$



$A_i \approx 30$

в равновесии слишком много рекламы

в оптимуме нет рекламы

Задача 2

$a\lambda_i^2/2$ – издержки на рекламу

а) $-\beta(\lambda_A + \lambda_B)\hat{x} - p_A - \tau \cdot \hat{x} = (1-\hat{x})(-\beta(\lambda_A + \lambda_B)-\tau) - p_B$

$-p_A - \tau\hat{x} = -\tau\hat{x} - p_B$

$$\hat{x} = \frac{1}{2} + \frac{p_A - p_B}{2(\beta(\lambda_A + \lambda_B) + \tau)}$$

$p_i = \tau + \beta(\lambda_1 + \lambda_2)$

$\lambda_i = \frac{1}{2} \cdot \beta/a \qquad \pi_i = \frac{\tau}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\beta^2}{a}$

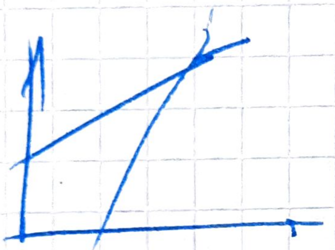
Задача 3

$\pi_1 = 4a_1 + 3a_1 a_2 - a_1^2$

$\pi_2 = 2a_1 + a_1 a_2 - a_2^2$

а) $\frac{\partial \pi_1}{\partial a_1} \Rightarrow a_1 = \frac{4+3a_2}{2} = 2 + \frac{3}{2} a_2$

$\frac{\partial \pi_2}{\partial a_2} \Rightarrow a_2 = 1 + \frac{a_1}{2}$

б) 

$a_1 = 14$
$a_2 = 8$

в) $\pi_1 = 4a_1 + 3a_1 \left(\frac{2+a_1}{2} \right) - a_1^2 \to \max_{a_1}$

$\frac{\partial \pi_1}{\partial a_1} = 7 + a_1$

$a_1 = (0; 20)$

$a_1 = 20 \to a_2 = 11$

г) $\pi_{a_1+a_2} = \pi_1 + \pi_2 \to \max_{a_1, a_2}$

$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial a_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow H \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 < 0$ $\Delta_2 < 0$

$\frac{\partial \pi}{\partial a_1} = 4 + 4a_2 - 2a_1$ $\frac{\partial \pi}{\partial a_2} = 2 + 4a_1 - 2a_2$

1) $a_1 \cancel{=} 0$ $a_2 \leq -1$

2) $a_1 = 20$ $a_2 \geq 9$

$a_2 \cancel{=} 0$
$a_2 = 20$
$a_2 \cancel{\in} [9; 20]$

ТОР(12)

Дилерство

$p = a - Q$; $Q = a - p$

$$c \to \underset{\text{Рынок}}{\boxed{M}} \xrightarrow{d} \underset{\text{Дилер}}{\boxed{D}} \xrightarrow{Q^d} \{\ \}$$

Бимонополия (1 дил., 1 пр-ль)

<u>Д знает $p(Q)$</u>

I) Задача дилера: $\pi^d \to \max_Q$; $(\pi^M \to \max_d)$

при зад. $\bar{Q}^d, c \Rightarrow \underline{\underline{p^d, Q^d}}$

$$\pi^d = p(Q)\cdot Q - Qd \Rightarrow \max_Q$$

$$\frac{\partial \pi^d}{\partial Q} = 0 \Rightarrow a - 2Q^d - d = 0$$

$$Q^d = \frac{a-d}{2}$$

$$\Rightarrow p^d = \frac{a+d}{2}$$

$$\Rightarrow \pi^d = \frac{(a-d)^2}{4}$$

все усл. зав. от d (d воспр. как зад.)

вычисление d:

$$\pi^M = (d-c)Q^d = (d-c)\frac{(a-d)}{2} \to \max_d$$

$$\frac{\partial \pi^M}{\partial d} \Rightarrow d^M = \frac{a+c}{2} \Rightarrow \pi^M, Q^d, p^d, \pi^d$$

$$Q^d = \frac{a-c}{4}$$

$$P^d = \frac{3a+c}{4}$$

$$\pi^d = \frac{(a-c)^2}{16} < \pi^м = \frac{(a-c)^2}{8}$$

* Когда м берет с D α, то $\pi^м > \pi^d$,

если ~~α~~, то (только) в рамках мод.,

он увел. свою прибыль

$$\pi^м + \pi^d < \tilde{\pi}^{м(без\ D)}$$

$$\frac{(a-c)^2}{16} + \frac{(a-c)^2}{8} < \frac{(a-c)^2}{4}$$

II $\tilde{\pi}^м = (a-Q)Q - cQ \to \max_Q$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = a - c - 2Q = 0 \Rightarrow \tilde{Q}^м = \frac{a-c}{2}$$

$$\tilde{P}^м = \frac{a+c}{2}$$

$$\tilde{\pi}^м = \frac{(a-c)}{2} \cdot \frac{(a+c)}{2} - \frac{c(a-c)}{2}$$

$$= \frac{a^2 - c^2 - 2ca + 2c^2}{4} = \frac{(a-c)^2}{4}$$

D на рынке => доп наценка на товар,

помимо нац. монопол. -фирмы

=> система невыгодна,

надо заст. дилера прод. тов. по более низ. цене

III Чот. двойной тариф

(1) D должен продавать по $d = c$

(2) D должен запл. опр. сумму за право работы с M (φ)

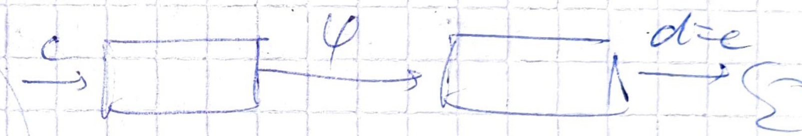
Если D принимает усл., то M получит

$$\overline{\pi}^m = \tilde{\pi}^M$$

При этом D не понесет потерь, но $\overline{\pi}^D = 0$

$$d = c$$

$$\varphi = \frac{(a-c)^2}{4}$$



$$\varphi = \frac{(a-c)^2}{4}$$

$$\overline{\pi}^d = (a-Q)Q - cQ - \frac{(a-c)^2}{4} \to \max_Q$$

$$\frac{\partial \overline{\pi}^d}{\partial Q} = 0 \Rightarrow \overline{\pi}^d = 0$$

$$\overline{\pi}^M = \frac{(a-c)^2}{4}$$

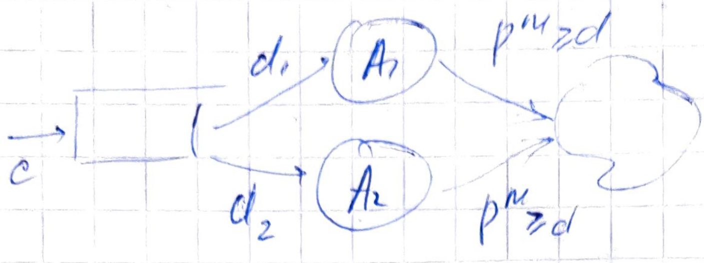
Надо учесть изд. M от самост. продажи, чтобы объясн. I и III сит.

(1) изд. высокие

(2) D знает $P(Q)$

(3) M − один, D − несколько

Реклама



$p = \sqrt{A} - Q$

$A = A_1 + A_2$

M (не зан. рекламой)

$d = d_1 = d_2$

\# $\forall d \quad A_1^* = A_2^* = 0 \Rightarrow Q^d = 0$

конкуренция по Бертрану

$\pi_i^D \to 0$, т.к. $p = d$ при $c_1 = c_2$

если $\pi_i^D = 0 \Rightarrow A_i = 0$

нет рекламы $\Rightarrow Q^d = 0$

$\Rightarrow$ Resale Price Maintainance

контракт MиDi

Пусть M наз. min p^M

при этом D_1 и D_2 присоед. по $d_i = d$

$p^M = \sqrt{A_1 + A_2} - Q \quad (\geq d)$

$\pi_i^d = \frac{Q}{2} \cdot (p^M - d) - A_i \to \max\limits_{A_i}$

$\Rightarrow$ NE без сговора

$$\pi_i = \frac{p^m - \sqrt{A_1 + A_2}}{2}\left(p^m - d\right) - A_i \to \max_{A_i}$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial A_i} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{p^m - d}{4\sqrt{A_1 + A_2}}$$

$$A_1^* + A_2^* = \left(\frac{p^m - d}{4}\right)^2$$

если $p^m > d$, то π от рекламы > 0

$\Rightarrow$ кажд. выигрыв. бы от роста A_i

Помещая A_i в мод. Хотеллинга

можно учесть издержки и. стратег. прод. тов.