1. (X,ρ) — метрическое пр-во, X — мн-во, $\rho: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ — метрика
   1) $\forall x,y\in X$ $\quad \rho(x,y)\geq 0 \quad (\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y)$
   2) $\forall x,y\in X$ $\quad \rho(x,y)=\rho(y,x)$
   3) $\forall x,y,z\in X$ $\quad \rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$

2. X — нормированное пр-во, если $\forall x\in X$ став. в соотв. $\|x\|$ — норма эл.
   1) $\forall x\in X$, $\|x\|\geq 0 \quad (\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0)$
   2) $\forall x\in X$, $\alpha\in\mathbb{C}$ $\quad \|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$
   3) $\forall x,y\in X$ $\quad \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

3. $\mathbb{R}^d_2$ $(x=(x_1,\dots,x_d),\ x_k\in\mathbb{R}\ k=\overline{1,d})$

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{k=1}^d x_k^2}\ ;\quad \rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^d (x_k-y_k)^2}$$

4. Пр-во изолир-ых точек

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$$

5. $\mathbb{R}^d_p$, $p\geq 1$ $\quad \|x\|=\left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p\right)^{1/p}$; $\rho(x,y)=\left(\sum_{k=1}^d |x_k-y_k|^p\right)^{1/p}$

6. $C[t_0;t_1]$ $\quad \|x\|_{C[t_0,t_1]}=\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)|$; $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)-y(t)|$

7. $C^1[t_0;t_1]$ $\quad \|x\|_{C^1[t_0;t_1]}=\max\{\|x\|_{C[t_0;t_1]},\|x'\|_{C[t_0;t_1]}\}=\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}\{|x(t)|,|x'(t)|\}$;

$$\rho(x,y)=\max\{\|x-y\|_{C[t_0;t_1]},\|x'-y'\|_{C[t_0,t_1]}\}=\max\{\max_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)-y(t)|,\max_{t\in[t_0;t_1]}|x'(t)-y'(t)|\}$$

$$=\max_{t\in[t_0;t_1]}\{|x(t)-y(t)|,|x'(t)-y'(t)|\}$$

8. $PC[t_0;t_1]$ $\quad \|x\|_{PC[t_0;t_1]}=\sup\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)|$; $\rho(x,y)=\sup\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)-y(t)|$

9. $PC^1[t_0;t_1]$ $\quad \|x\|_{PC^1[t_0;t_1]}=\max\limits_{s=\overline{0,n-1}}\|x(t)\|_{C^1[\xi_s,\xi_{s+1}]}$; $\rho(x,y)=\max\limits_{s=\overline{0,n-1}}\|x(t)-y(t)\|_{C^1[\xi_s,\xi_{s+1}]}$

где $t_0=\xi_0<\dots<\xi_n=t_1$; $x\in C^1[\xi_s;\xi_{s+1}]$ $\forall s=\overline{0,n-1}$

10. $C^r[t_0;t_1]$, $r\in\mathbb{N}$ $\quad \|x\|_{C^r[t_0;t_1]}=\max\{\|x\|_{C[t_0;t_1]},\|x'\|_{C[t_0;t_1]},\dots\|x^{(r)}\|_{C[t_0;t_1]}\}=\max\limits_{t\in}\{|x|,\dots|x^{(r)}|\}$

$$\rho(x,y)=\max\{\|x-y\|_{C[t_0;t_1]},\dots,\|x^{(r)}-y^{(r)}\|_{C[t_0,t_1]}\}=\max_{t\in[t_0;t_1]}\{|x-y|,\dots,|x^{(r)}-y^{(r)}|\}$$

11. Лемма Дюбуа-Реймона: $a_0,a_1\in C[t_0;t_1]$
Если $\forall x\in C^1[t_0;t_1]$: $x(t_0)=x(t_1)=0$ $\quad \int_{t_0}^{t_1}a_1(t)\dot{x}+a_0(t)x(t)\,dt=0$,
то $a_1\in C^1[t_0;t_1]$ и $-\frac{d}{dt}a_1+a_0=0$

12. (ПЗВИ) x — допустимая ф-я, если $x\in C^1[t_0,t_1]$, $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$
$\hat{x}\in wlocmin$, если $\hat{x}\in X_0$ — пр-во доп. ф-й; $\exists\, O(\hat{x})$: $\forall x\in O(\hat{x})$ допуст-го $J(x)\geq J(\hat{x})$

где $J(x)=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt\longrightarrow extr$, $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$

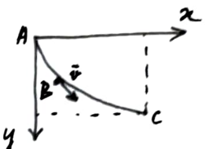
(13) (Необх) $L, L_x, L_{\dot x} \in C(O(\Gamma_{\hat x}))$, $\hat x \in wlocmin$ в ПЗВИ

то $\hat L_{\dot x} \in C^1[t_0;t_1]$ и вып-ся на $\hat x$: $-\frac{d}{dt}\hat L_{\dot x} + \hat L_x = 0$ — ур-е Эйлера

где $\hat L_x = L_x(t, \hat x(t), \dot{\hat x}(t))$; $\hat L_{\dot x} = L_{\dot x}(t, \hat x(t), \dot{\hat x}(t))$

(14) Уравнение Эйлера $-\frac{d}{dt}L_{\dot x} + L_x = -\ddot x L_{\dot x\dot x} - \dot x L_{\dot x x} - L_{\dot x t} + L_x = 0$

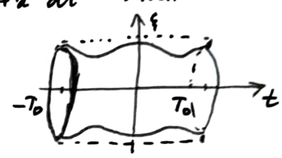
(15) Интегралы Эйлера
1) $L(t, x) \Rightarrow L_x = 0$
2) $L(t, \dot x) \Rightarrow L_{\dot x} = const$
3) $L(x, \dot x) \Rightarrow \dot x L_{\dot x} - L = const$



(16) Задача о брахистохроне: $y = f(x) - ?$:
$\sqrt{2g}\,T = \int_0^a \sqrt{\frac{1+(f'(x))^2}{f(x)}}\,dx \to inf$, $y(0)=0$, $y(a)=b$

(17) Задача о мин. площади вращ.: $x(t) - ?$: $S = 2\pi\int_{-T_0}^{T_0} p\,dl = 2\pi\int_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot x^2}\,dt \to min$

$x(T_0) = x(-T_0) = \xi$



(18) Модель Рамсея $U = \int_0^T u(C(t))e^{-rt}\,dt \to max$, $\frac{\dot c}{c} - ?$

$x(0) = x_0$, $x(T) = x_T$, где $C(t) = f(x) - \dot x$; $u'(t) > 0$, $u''(t) < 0$, $f''(t) < 0$

(19) (Больц) $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot x(t))\,dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to extr$

$x \in X_0$ — доп. ф-я, если $x \in C^1[t_0;t_1]$

$\hat x \in wlocmin$: $\hat x$ — доп. $\exists\, O(\hat x)$: $\forall x \in O(\hat x)$ $J(x) \geq J(\hat x)$

(20) (Больц) $\hat x \in wlocmin$, $L, L_x, L_{\dot x} \in C(O(\Gamma_{\hat x}))$, $l \in C^1(O(\hat x(t_0), \hat x(t_1)))$

то $\hat L_{\dot x} \in C^1[t_0;t_1]$ и вып-ся $-\frac{d}{dt}\hat L_{\dot x} + \hat L_x = 0$ — ур-е Эйлера

$\begin{cases} \hat L_{\dot x}(t_0) = \hat l_{x(t_0)} \\ \hat L_{\dot x}(t_1) = -\hat l_{x(t_1)} \end{cases}$ — усл. транс-ти

(21) Условие трансверсальности $\begin{cases} \hat L_{\dot x}(t_0) = \hat l_{x(t_0)} \\ \hat L_{\dot x}(t_1) = -\hat l_{x(t_1)} \end{cases}$, где $\hat l = l(\hat x(t_0), \hat x(t_1))$, $\hat l_{x(t_0)} = l_{x(t_0)}(\hat x(t_0), \hat x(t_1))$

(22) Выпуклость

Q — вып. мн-во, если $\forall x, y \in Q$, $\alpha \in [0;1]$ $\alpha x + (1-\alpha)y \in Q$ — вып. наиб. точек

$f(x)$ — вып. ф-я (вниз), если $dom\, f$ — вып. мн-во; $\forall x, y \in dom\, f$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0;1]$ $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$

(23) Выпуклая задача: X — лин. пр-во, $A \subset X$ — вып. мн-во, $f_k : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — вып. ф-и, $k = \overline{1,d}$

$f_0(x) \to min$, $f_k(x) \leq 0$, $x \in A$, $k = \overline{1,d}$

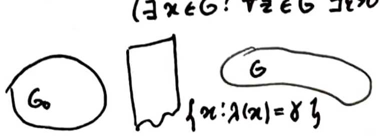
Теор (в.з.) : $\hat x \in locmin \Rightarrow \hat x \in globmin$

(24) (Отделимость) $G, G_0 \subset X$ — лин. норм. пр-во, $G \cap G_0 = \varnothing$, выпуклые, хотя бы 1 — тело

($\exists x \in G$: $\forall z \in G$ $\exists \varepsilon > 0$ $x + tz \in G$, при $|t| < \varepsilon$)

то $\exists\, \lambda \in X$ — лин. функционал, $\gamma \in \mathbb{R}$:

$\lambda(g) < \gamma \leq \lambda(f)$, $f \in G$, $g \in G_0$



(25) (Каруш) 1) $\hat{x} \in locmin \Rightarrow \exists \lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ – нетрив. набор мн. Лагранжа

a) $\lambda_k \geq 0$, $k = \overline{0,d}$

b) $\lambda_k f_k(\hat{x}) = 0$, $k = \overline{1,d}$

c) $L(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k f_k(x) \to \min_{x \in A}$: $\min_{x \in A} L(x,\lambda) = L(\hat{x},\lambda)$

2) $\hat{x}$ – доп. т., A – выпукл, $\lambda_0 > 0$: a, b, c вып-ся $\Rightarrow \hat{x} \in locmin$

3) усл. Слейтера для огр. : $\exists x \in A$: $f_k(x) < 0$, $k = \overline{1,d}$

то $\lambda_0 \neq 0$ для $\forall \lambda$ уд. a, b, c для $\hat{x}$ доп. т.

(26) (ПЗВИ) $\int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x})\,dt \to extr$ $\quad x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$

$\hat{x} \in w\,locmin$ $(\hat{x} \in C^1[t_1; t_0])$, если $\exists O_\delta(\hat{x}) \in C^1[t_0; t_1]$ $\forall x \in O_\delta(\hat{x})$ – доп. : $J(x) \geq J(\hat{x})$

где x – доп., т.е. $x \in C^1[t_0, t_1] \cap \{x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1\}$

$\hat{x} \in str\,locmin$ $(\hat{x} \in PC^1[t_0; t_1])$, если $\exists O_\delta(\hat{x}) \in C[t_0, t_1]$ $\forall x \in O_\delta(\hat{x})$ – доп. : $J(x) \geq J(\hat{x})$

где x – доп., т.е. $x \in PC^1[t_0, t_1] \cap \{x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1\}$

(27) Условие Лежандра вып. на $\hat{x}$-экстремали, если $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0$ $\forall t \in [t_0, t_1]$

$(>)$ – усиленное

(28) Условие Якоби: $h(t)$ – решение ур-я Якоби н.у. в t_0 $\quad -\frac{d}{dt} B_{\dot{h}} + B_h = 0$; $h(t_0) = 0$, $\dot{h}(t_0) = 1$

где $B = B(t, h, \dot{h}) = \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \dot{h}^2(t) + 2\hat{L}_{\dot{x}x} h(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_{xx} h^2(t)$

Условие Якоби вып. на $(t_0; t_1)$ для $\hat{x}$, если $\forall \tau \in (t_0; t_1)$ $h(\tau) \neq 0$

нет сопр. точ. с t_0

где τ – сопр. к t_0, если $h(\tau) = 0$ $\quad (t_0; t_1]$ – усил.

(29) Условие Вейерштрасса вып. на $\hat{x}$-экстремали, если $\mathcal{E}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, u) \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [t_0; t_1]$

где Ф-я Вейер.: $\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) = L(t, x, u) - L(t, x, \dot{x}) - L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})(u - \dot{x})$

где $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{E}(x, x') = f(x') - f(x) - f'(x)(x' - x)$ – ур-е кас-ой

причем $\mathcal{E}(x, x') \geq 0$, $\forall x, x' \in A \Leftrightarrow f(x)$ – вып. на A

(Усил) $\exists O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})$: $\forall x \in O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})$ $\quad \mathcal{E}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, u) \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [t_0; t_1]$

где x – доп., т.е. $x \in C^1[t_0; t_1] \cap \{x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1\}$

(30) (Необх.; ПЗ) $\begin{cases} \hat{x} \in w\,locmin \\ \hat{x} \in C^2[t_0; t_1] \\ L \in C^3(O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{усл. Эйлера} \\ \text{усл. Лежандра} \\ \text{если усил. усл. Леж.} \Rightarrow \text{усл. Якоби} \end{cases}$

(31) (Необх.; ПЗ) $\begin{cases} \hat{x} \in str\,locmin \\ \hat{x} \in C^1[t_0; t_1] \\ L \in C^1(O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{усл. Эйлера} \\ \text{усл. Вейерштрасса} \\ \text{если } \exists \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \Rightarrow \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0,\ \forall t \in [t_0; t_1] \end{cases}$

(32) (Дост.; ПЗ) $\begin{cases} \hat{x} \in C^2[t_0; t_1] \\ L \in C^3(O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})) \\ \text{усл. Эйлера} \\ \text{усил. усл. Лежандра, усил. усл. Якоби} \end{cases} + \{x(t_0) = x_0;\ x(t_1) = x_1\} \Rightarrow \hat{x} \in w\,locmin$

(33) (Дост.; ПЗ) $\begin{cases} \hat{x} \in C^2[t_0; t_1] \\ L \in C^3(O(\Gamma_{\hat{x}}) \times \mathbb{R}) \\ \text{усл. Эйлера} \\ \text{усил. усл. Лежандра, усил. усл. Якоби, усил. усл. Вейерштрасса} \end{cases} + \{x(t_0) = x_0;\ x(t_1) = x_1\} \Rightarrow \hat{x} \in str\,locmin$

(34) (Необх.; Больц) $\begin{cases} \hat{x} \in wlocmin \\ \hat{x} \in C^2[t_0, t_1] \\ L \in C^3(O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})) \\ l \in C^2(\mathbb{R}^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ур. Эйлера + усл. трансверсальности} \\ \text{усл. Лежандра} \\ \text{если усил. усл. Леж., то усл. Якоби} \\ \text{если усил. усл. Леж. + усил. усл. Якоби, то } P+Q \geq 0 \end{cases}$

(35) (Необх.; Больц) $\begin{cases} \hat{x} \in strlocmin \\ \hat{x} \in C^2[t_0; t_1] \\ L \in C^3(O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})) \\ l \in C^2(\mathbb{R}^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ур. Эйлера + усл. транс-ти} \\ \text{усл. Лежандра} \\ \text{если усил. Леж., то Якоби} \\ \text{если усил. Леж. + усил. Якоби, то } P+Q \geq 0 \\ \text{усл. Вейерштрасса} \end{cases}$

(36) (Дост.; Больц) $\begin{cases} \text{Усл. Эйлера + усл. тр-ти для } \hat{x} \\ \text{усил. Лежандр, усил. Якоби} \\ P+Q>0 - min \\ \hat{x} \in C^1[t_0; t_1] \\ L \in C^3(O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})) \\ l \in C^2(\mathbb{R}^2) \end{cases} \Rightarrow \hat{x} \in wlocmin$

(37) (Дост.; Больц) $\begin{cases} \text{Усл. Эйлера + усл. тр-ти} \\ \text{Усил. Лежандр, усил. Якоби} \\ P+Q>0 - min \\ \hat{x} \in C^1[t_0; t_1] \\ L \in C^3(O(\Gamma_{\hat{x}}) \times \mathbb{R}) \\ l \in C^2(\mathbb{R}^2) \\ \text{Усил. Вейерштрасс} \end{cases} \Rightarrow \hat{x} \in wlocmin$

34–37, где $P = \begin{pmatrix} \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_1)\dot{H}_1(t_1) + \hat{L}_{x\dot{x}}(t_1) & 1/2(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_1)\dot{H}_0(t_1) - \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_0)\dot{H}_1(t_0)) \\ -//- & -\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_0)\dot{H}_0(t_0) - \hat{L}_{x\dot{x}}(t_0) \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} \hat{l}''_{x(t_1)x(t_1)} & \hat{l}''_{x(t_1)x(t_0)} \\ -//- & \hat{l}''_{x(t_0)x(t_0)} \end{pmatrix}$

где $H_0(t)$ – решение $-\frac{d}{dt}B_{\dot{h}} + B_h = 0$ $\quad h(t_0) = 1 \quad h(t_1) = 0$

$H_1(t)$ – решение $-//-$ $\quad h(t_0) = 0 \quad h(t_1) = 1$

$h(t) = h_0 H_0(t) + h_1 H_1(t)$ $-//-$ $\quad h(t_0) = h_0 \quad h(t_1) = h_1$

① Норма и метрика. Окрестность

(X,ρ) – метр. пр-во, где $\rho : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ – метрика
1) $\forall x,y\in X \;\; \rho(x,y)\geq 0$
2) $\forall x,y\in X \;\; \rho(x,y)=\rho(y,x)$
3) $\forall x,y,z\in X \;\; \rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$

X – норм. пр-во, если $\forall x\in X \to \|x\|$ – норма
1) $\forall x\in X \;\; \|x\|\geq 0 \;\; (\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0)$
2) $\forall x\in X,\ \alpha\in\mathbb{C} \;\; \|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$
3) $\forall x,y\in X \;\; \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

Откр. шар $B(x_0,r)\subset X = \{x\in X : \rho(x,x_0)<r\}$ $\qquad (O_\varepsilon(x_0)=B(x_0,\varepsilon))$
Замк. шар $B[x_0,r]\subset X = \{x\in X : \rho(x,x_0)\leq r\}$

Норм. пр-во метрическое, если $\rho(x,y)=\|x-y\|$

① $C[t_0,t_1]$ $\quad \|x\|_{C[t_0;t_1]}=\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)|$; $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)-y(t)|$

▷ $t^*\in[t_0;t_1]$: $\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)+y(t)|=|x(t^*)+y(t^*)|$

$\|x+y\|_{C[t_0;t_1]}=\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)+y(t)|=|x(t^*)+y(t^*)|\leq|x(t^*)|+|y(t^*)|\leq\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)|+\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}|y(t)|=\|x\|_{C[t_0;t_1]}+\|y\|_{C[t_0;t_1]}$

② $C^r[t_0;t_1]$ $r\in\mathbb{N}$, $\|x\|_{C^r[t_0;t_1]}=\max\{\|x\|_{C[t_0;t_1]},\dots,\|x^{(r)}\|_{C[t_0;t_1]}\}$;

$\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}\{|x(t)-y(t)|,\dots|x^{(r)}(t)-y^{(r)}(t)|\}$,

где $x^{(k)}(t_0)=\lim\limits_{t\to t_{0+}}\dfrac{x^{(k-1)}(t)-x^{(k-1)}(t_0)}{t-t_0}$, $k=\overline{1,r}$

▷ пусть max в норме $\|x+y\|_{C^r[t_0;t_1]}$ дост. на $k_0\in[0;r]$ – ой пр-ой

$\|x+y\|_{C^r[t_0;t_1]}=\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x^{(k_0)}(t)+y^{(k_0)}(t)|\leq\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x^{(k_0)}(t)|+\max\limits_{t\in[t_0;t_1]}|y^{(k_0)}(t)|=\|x^{(k_0)}\|_{C[t_0;t_1]}+\|y^{(k_0)}\|_{C[t_0;t_1]}\leq\|x\|_{C^r[t_0;t_1]}+\|y\|_{C^r[t_0;t_1]}$

③ $PC[t_0;t_1]$ $\quad\|x\|_{PC[t_0;t_1]}=\sup\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)|$ $\quad\rho(x,y)=\sup\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)-y(t)|$

▷ $t^*\in[t_0;t_1]$: $\|x\|_{PC[t_0;t_1]}=\max\{|x(t^*)|,|x(t^*+0)|,|x(t^*-0)|\}$

$\|x+y\|_{PC[t_0;t_1]}=\dots=|x(t^*)+y(t^*)|\leq|x(t^*)|+|y(t^*)|\leq\sup\limits_{t\in[t_0;t_1]}|x(t)|+\sup\limits_{t\in[t_0;t_1]}|y(t)|$

аналог. для $|x(t^*\pm0)+y(t^*\pm0)|$

④ $PC^1[t_0;t_1]$ $\quad\|x\|_{PC^1[t_0;t_1]}=\max\limits_{s=\overline{0,n-1}}\|x(t)\|_{C^1[\xi_s;\xi_{s+1}]}$; $\rho(x,y)=\max\limits_{s=\overline{0,n-1}}\|x(t)-y(t)\|_{C^1[\xi_s;\xi_{s+1}]}$

где $t_0=\xi_0<\dots<\xi_n=t_1$: $x\in C^1[\xi_s;\xi_{s+1}]$ $\forall s=\overline{0,n-1}$

▷ $\exists m=\overline{0,n-1}$: $\max\limits_{s=\overline{0,n-1}}\|x(t)+y(t)\|_{C^1[\xi_s;\xi_{s+1}]}=\|x(t)+y(t)\|_{C^1[\xi_m;\xi_{m+1}]}$

$\|x+y\|_{PC^1[t_0;t_1]}=\|x(t)+y(t)\|_{C^1[\xi_m;\xi_{m+1}]}\leq\|x\|_{C^1[\xi_m;\xi_{m+1}]}+\|y\|_{C^1[\xi_m;\xi_{m+1}]}\leq\max\limits_{s=\overline{0,n-1}}\|x(t)\|_{C^1[\xi_s;\xi_{s+1}]}+\max\limits_{s=\overline{0,n-1}}\|y(t)\|_{C^1[\xi_s;\xi_{s+1}]}$

⑤ $C^1[I]\times\mathbb{R}^2$ $\quad\|\xi\|=\sum\limits_{k=1}^{d}\|x_k\|_{C^1[I]}+|t_0|+|t_1|=\sum\limits_{k=1}^{d}\max\{\|x_k\|_{C[t_0;t_1]},\|\dot{x}_k\|_{C[t_0;t_1]}\}+|t_0|+|t_1|$, где $I\subset\mathbb{R}$; $\xi(x(t),t_0,t_1)$: $x_k(t)\in C^1(I)$, $k=\overline{1,d}$

▷ $\|\xi_1+\xi_2\|=\sum\limits_{k=1}^{d}\|x_k+y_k\|_{C^1[I]}+|t_0+T_0|+|t_1+T_1|\leq\sum\limits_{k=1}^{d}\|x_k\|_{C^1[I]}+|t_0|+|T_0|+\dots=\|\xi_1\|+\|\xi_2\|$, где $\xi_1=(x,t_0,T_0)$, $\xi_2=(y,t_1,T_1)$

② Лемма Дюбуа - Реймонда

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \ell: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt + \ell(x(t_0), x(t_1)) \to extr$; $\quad \Gamma_x = \{(t, x(t)), t \in [t_0; t_1]\}$

$\Gamma_{x\dot{x}} = \{(t, x(t), \dot{x}(t)), \ t \in [t_0; t_1]\}$

<u>Лемма</u> $a_0, a_1 \in C[t_0; t_1]$

если $\forall x \quad C^1[t_0; t_1] : x(t_0) = x(t_1) = 0 \quad \int_{t_0}^{t_1} (a_1(t) \cdot \dot{x}(t) + a_0 x(t))dt = 0$

то $a_1 \in C^1[t_0; t_1]$ и $-\frac{d}{dt} a_1 + a_0 = 0$

$\triangleright \quad \dot{\gamma} = a_0 \quad : \quad \int_{t_0}^{t_1} \gamma(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} a_1(t)\,dt \iff \int_{t_0}^{t_1} \dot{\tilde{x}}\,dt = 0$

$\dot{\tilde{x}} = a_1 - \gamma \quad : \quad \tilde{x}(t_0) = 0, \ \tilde{x}(t_1) = 0$

$\int (a_1 \dot{\tilde{x}} + a_0 \tilde{x})dt = \int a_1 \dot{\tilde{x}}\,dt + \int \dot{\gamma} \cdot \tilde{x}\,dt = \int a_1 \dot{\tilde{x}}\,dt + \int \tilde{x}\,d\gamma = \int a_1 \dot{\tilde{x}}\,dt + \underbrace{\gamma \tilde{x} \Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int \gamma\,d\tilde{x}$

$= \int (a_1 - \gamma) \cdot \dot{\tilde{x}}\,dt = \int (a_1 - \gamma)^2\,dt$

$\int (a_1 - \gamma)^2\,dt = 0 \iff a_1 = \gamma \in C^1$

$-a_1 + \gamma = 0$

$-\frac{d}{dt} a_1 + a_0 = 0$

③ Необх. условия extr в прост. зад. вар. исч. Интегралы Эйлера

ПЗВИ: $J(x)=\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot x(t))dt \to extr$, $x(t_0)=x_0$ $x(t_1)=x_1$

x – доп. ф-я, если $x\in C^1[t_0,t_1]$, $x(t_0)=x_0$ $x(t_1)=x_1$

$\hat x \in wlocmin$ – $\hat x \in X_0$ – пр-во доп. ф-й $\exists O(\hat x)$: $\forall x \in O(\hat x)$ допуст-го : $J(x)\geq J(\hat x)$

Теор: $L, L_x, L_{\dot x} \in C(O(\Gamma_{\hat x \dot{\hat x}}))$ $\hat x \in wlocmin$ в ПЗВИ

то $\hat L_{\dot x} \in C^1[t_0;t_1]$ и вып. на $\hat L$ $-\frac{d}{dt}\hat L_{\dot x} + \hat L_x = 0$

где $\hat L_x = L_x(t, \hat x(t), \dot{\hat x}(t))$ $\hat L_{\dot x} = L_{\dot x}(t, \hat x(t), \dot{\hat x}(t))$

$\triangleright$ $\forall h \in C^1[t_0;t_1]$: $h(t_0)=h(t_1)=0$ $\hat x + \lambda h$ – доп. ф-я для $\forall \lambda \in R$

$\varphi(\lambda) = J(\hat x+\lambda h) - J(\hat x) = \int_{t_0}^{t_1}\left(L(t, \hat x+\lambda h, \dot{\hat x}+\lambda \dot h) - L(t,\hat x, \dot{\hat x})\right)dt$

$\lambda=0 \in loc\,min\ \varphi(\lambda) \Rightarrow \varphi'(0) = \int_{t_0}^{t_1}\left(L_x(t,\hat x, \dot{\hat x})\cdot h + L_{\dot x}(t,\hat x,\dot{\hat x})\dot h\right)dt = 0$ по т. Ферма

$\Rightarrow$ по лемме Д-Р $\hat L_{\dot x} \in C^1[t_0;t_1]$

$-\frac{d}{dt}\hat L_{\dot x} + \hat L_x = 0$

Интегралы Эйлера

$-\frac{d}{dt}L_{\dot x} + L_x = -\ddot x L_{\dot x\dot x} - \dot x L_{x\dot x} - L_{t\dot x} + L_x = 0$ – ур-е Эйлера

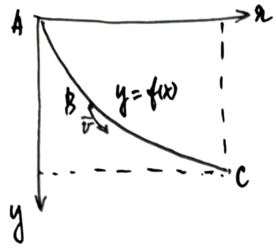
1) $L=L(t,x) \Rightarrow L_x = 0$

2) $L = L(t,\dot x) \Rightarrow L_{\dot x} = const$

3) $L = L(x,\dot x) \Rightarrow \dot x L_{\dot x} - L = const$

$\triangleright$ $\frac{d}{dt}(\dot x L_{\dot x} - L) = \left(\ddot x L_{\dot x} + \dot x \frac{d}{dt}L_{\dot x}\right) - \left(\dot x L_x + \ddot x L_{\dot x}\right) = \dot x\left(\frac{d}{dt}L_{\dot x} - L_x\right) = 0$

④ Задача о брахистохроне



$f(x)$ — ? $\quad : \; A \to C \quad t \to \min$

$$mv^2 = mgh \Rightarrow f(x) = h = \frac{v^2}{2g} \Rightarrow \begin{cases} \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g f(x)} \\ \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{2g f(x)}\, dt = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$\sqrt{2g} \cdot dt = \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{f(x)}}\, dx$$

$$\sqrt{2g} \cdot T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{y}} \cdot dx \longrightarrow \inf \quad y(0) = 0 \quad y(a) = b$$

$$L(y, \dot{y}) \Rightarrow \dot{y} L_{\dot{y}} - L = const$$

$$\dot{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\dot{y}^2}} \cdot 2\dot{y} - \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}} = c$$

$$\frac{-1}{\sqrt{y}\sqrt{1+\dot{y}^2}} = c \Rightarrow \dot{y} = \sqrt{\frac{1}{c^2 y} - 1} \Rightarrow \dot{y} \sqrt{\frac{c^2 y}{1 - c^2 y}} = 1$$

$$\int \dot{y} \sqrt{\frac{c^2 y}{1 - c^2 y}}\, dy = x + C_1$$

пусть $y = \frac{\sin^2 z}{c^2} \Rightarrow dz = \frac{dy \cdot c^2}{2 \sin z \cdot \cos z}$

$$\int \frac{2 \sin z}{c^2} \cdot \cos z \sqrt{\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}}\, dz = x + C_1$$

$$\frac{2}{c^2} \int \sin^2 z\, dz = x + C_1 \Rightarrow \frac{1}{c^2} \int (1 - \cos 2z)\, dz = x + C_1$$

$$\frac{1}{c^2}\left(z - \frac{\sin 2z}{2}\right) = x + C_1$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{c^2}\left(z - \frac{\sin 2z}{2}\right) - C_1 \\ y = \frac{1}{c^2} \cdot \sin^2 z \end{cases}$$

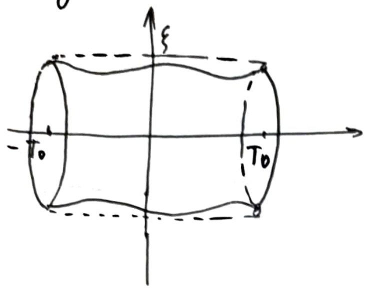
$y(0) = 0$
$y(a) = b$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{cases}$ — циклоида

$C_1 = 0 \quad t = 2z$
$r = \frac{1}{2c^2}$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

⑤ Задача о мин. площади поверхности вращения отн. Ot



$x(t)$ – ? : $S = 2\pi \int_{-T_0}^{T_0} \rho\, dl = 2\pi \int_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot{x}^2}\, dt \to min$

$x(T_0) = x(-T_0) = \xi$

$L(x,\dot{x}) = x\sqrt{1+\dot{x}^2} \Rightarrow \dot{x} L_{\dot{x}} - L = C$

$$\dot{x}\frac{x \cdot 2\dot{x}}{2\sqrt{1+\dot{x}^2}} - x\sqrt{1+\dot{x}^2} = -C_1$$

$$\frac{x(\dot{x}^2 - 1 - \dot{x}^2)}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = -C_1$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = C_1$$

$(sh\, x)' = ch\, x$

$(ch\, x)' = sh\, x$

пусть $\dot{x} = sh\, \tau = \frac{e^{\tau} - e^{-\tau}}{2} \Rightarrow x = C_1 ch\, \tau = C_1 \frac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{2}$

$dt = \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{C_1 \cdot sh\, \tau\, d\tau}{sh\, \tau} = C_1\, d\tau$

$t = C_1 d\tau + C_2 \Rightarrow \tau = \frac{t - C_2}{C_1}$

экстремаль $x = C_1\, ch\left(\frac{t - C_2}{C_1}\right)$, $x(T_0) = \xi$

$x(T_0) = x(-T_0) \Rightarrow C_2 = 0$

$x(T_0) = \xi \Rightarrow \frac{\xi}{T_0} = \frac{C_1}{T_0} \cdot ch\left(\frac{T_0}{C_1}\right)$

$f(z) = \frac{ch\, z}{z}$

$f'(z) = \frac{z \cdot sh\, z - ch\, z}{z^2} = \frac{sh\, z\,(z - cth\, z)}{z^2} = \frac{sh\, z}{z^2}(z - cth\, z)$

$z = cth\, z$ при $\tau^* \Rightarrow \tau^*$ – $min\, f(z)$

Вывод: $\hat{x} = C \cdot ch\left(\frac{t}{C}\right)$ – экстремали, где $C \cdot ch\left(\frac{T_0}{C}\right) = \xi$

при $\frac{\xi}{T_0} < sh\, \tau^*$ – нет экс.

$\frac{\xi}{T_0} = sh\, \tau^*$, $\hat{x} = C \cdot ch\left(\frac{t}{C}\right)$ – 1 экс

$\frac{\xi}{T_0} > sh\, \tau^*$, $\hat{x} = C \cdot ch\left(\frac{t}{C}\right)$ – 2 экс.

соотв. $\xi = C \cdot ch\left(\frac{T_0}{C}\right)$

⑥ Задача Рамсея

$\int_0^T F(D,a)\,dt = D + \int c\,dt$, где S - доход, D - сбережения, c - потр.

$S = F(D,a)$, где $a(t)$ - кол-во раб. вр.

$F(D,a) = \frac{dD}{dt} + c$

$V = \int_0^T u(c(t))\,e^{-rt}\,dt \longrightarrow \max$, $\frac{\dot c}{c}$ - ? где V - взвеш. сумма буд. "пот. пол-ти"

e^{-rt} - норм. межвр. предп.

$r \geq 0$ - коэф. дисконт.

$x(0) = x_0 \quad x(T) = x_1$

где $c(t) = f(x) - \dot x$, $u'(t) > 0$ $u''(t) < 0$ $f''(t) < 0$

▷ $L(t,x,\dot x) = u(c(t))e^{-rt} = u(f(x) - \dot x)e^{-rt}$

$0 = -\frac{d}{dt}L_{\dot x} + L_x = -\frac{d}{dt}\left(u'(c)\cdot(-1)\cdot e^{-rt}\right) + u'(c)\cdot f'(x)e^{-rt} = u''(c)\cdot\dot c\cdot e^{-rt} - r u'(c)\cdot e^{-rt} + u'(c)\cdot f'(x)e^{-rt} = 0$

$u''(c)\cdot\dot c - r u'(c) + u'(c)\cdot f'(x) = 0$

$u''(c)\cdot\dot c + u'(c)\cdot(f'(x) - r) = 0 \quad |: u''(c)$

$\frac{\dot c}{c} = \frac{u'(c)\cdot(r - f'(x))}{c\,u''(c)} = \frac{r - f'(x)}{w}$, где $w = \frac{c\,u''(c)}{u'(c)} < 0$, т.к. $u''(c) < 0$, $u'(c) > 0$

$\left.\begin{matrix}\dot c/c > 0 \\ w < 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow r < f'(x)$

$\frac{u'(c)}{u''(c)}\cdot(f'(x) - r) + \dot c = 0$, $c = f(x) - \dot x$

$\frac{u'(c)}{u''(c)}(f'(x) - r) + f'(x)\cdot\dot x - \ddot x = 0 \Rightarrow \ddot x - f'(x)\cdot\dot x + \frac{u'(c)}{u''(c)}(r - f'(x)) = 0$

$L(t,x,\dot x) = u(f(x) - \dot x)e^{-rt}$

Гессиан: $\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{x\dot x} \\ L_{x\dot x} & L_{\dot x\dot x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u''(c)(f'(x))^2 + u'(c)\cdot f''(x) & -u''(c)\cdot f'(x) \\ -u''(c)\cdot f'(x) & u''(c)\end{pmatrix}\cdot e^{-rt}$

т.к. $f''(x) < 0$, $u'(c) > 0$, $u''(c) < 0$

$\Delta_1 e^{-rt} = \ddot u\cdot\dot f^2 + \dot u\,\ddot f < 0$

$\Delta_2 e^{-rt} = \ddot u^2\cdot\dot f^2 + \dot u\ddot f\cdot\ddot u - \ddot u^2\cdot\dot f^2 = \dot u\ddot f\ddot u > 0$

$\Rightarrow L(t,x,\dot x)$ - вып. вверх (вог.) по $\dot x, x$

$\Rightarrow \forall$ реш. ур. $\ddot x - \dot f\dot x + \frac{\dot u}{\ddot u}(r - \dot f) = 0$

при $x(0) = x_0$, $x(T) = x_T$

явл. реш. зад. Рамсея

(7) Задача Больца

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to extr$$

x – доп., если $x \in C^1[t_0, t_1]$

$\hat{x} \in wlocmin$, если $\hat{x}$ – доп. : $\exists\, O(\hat{x}) : \forall x \in O(\hat{x})$ $\quad J(x) \geq J(\hat{x})$

<u>теор</u> $\hat{x} \in wlocmin$, $L, L_x, L_{\dot{x}} \in C(O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}))$, $l \in C^1(O(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)))$

то $\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1]$; вып-ся $\quad -\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0 \quad$ ур-е Эйлера

$$\begin{cases} \hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)} \\ \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \end{cases}$$ усл. транс-ти

где $\hat{l} = l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$; $\hat{l}_{x(t_0)} = l_{x(t_0)}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$

$\triangleright$ Пусть $h \in C^1[t_0, t_1]$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda) = J(\hat{x} + \lambda h) - J(\hat{x}) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x} + \lambda h, \dot{\hat{x}} + \lambda \dot{h})dt + l(\hat{x}(t_0) + \lambda h(t_0), \hat{x}(t_1) + \lambda h(t_1))$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$$

(Ферма) $\varphi'(0) = 0 = \int_{t_0}^{t_1} (\hat{L}_{\dot{x}} \dot{h} + \hat{L}_x \cdot h)dt + \hat{l}_{x(t_0)} h(t_0) + \hat{l}_{x(t_1)} h(t_1)$ $\quad$ верно для $h \in C^1[t_0; t_1]$: $h(t_0) = h(t_1)$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} (\hat{L}_{\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_{x}h)dt = 0$$

по лемме Д-Р

$\hat{L}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1]$; $-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0$

т.е. $\forall h \in C^1[t_0; t_1]$

$$\int_{t_0}^{t_1} (\hat{L}_{\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_x h)dt + \hat{l}_{x(t_0)} h(t_0) + \hat{l}_{x(t_1)} \cdot h(t_1) =$$
$$= \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \left(-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x\right) h\,dt}_{=0} + (\hat{L}_{\dot{x}}(t_1) + \hat{l}_{x(t_1)}) \cdot h(t_1) + (-\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) + \hat{l}_{x(t_0)}) h(t_0)$$

выбрав h: $\quad h(t_1) = 0 \quad h(t_0) = 1$ и $h(t_1) = 1 \quad h(t_0) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_x(t_0) \\ \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \end{cases}$ усл. тр-ти

⑧ Задача выпуклого программирования

Вып. задача: X – лин. пр-во, $A \subset X$ – вып. мн-во, $f_k : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $k = \overline{0,d}$ – вып. ф

$$f_0(x) \to \min, \quad f_k(x) \le 0, \; k = \overline{1,d}, \quad x \in A$$

Теор. (вып. з.) $x \in locmin \Rightarrow x \in globmin$

Теор. (Каруша) 1) $\hat{x} \in locmin \Rightarrow \exists \lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ – нетр.

a) $\lambda_k \ge 0$, $k = \overline{0,d}$

b) $\lambda_k f_k(\hat{x}) = 0$, $k = \overline{1,d}$

c) $\min\limits_{x \in A} L(x, \lambda) = L(\hat{x}, \lambda)$

2) $\hat{x}$ – доп. т., A – набор, вып. a, b, c, $\lambda_0 > 0 \Rightarrow \hat{x} \in locmin$

3) усл. Слейтера: $\exists x \in A : f_k(x) < 0$, $k = \overline{1,d} \Rightarrow \lambda_0 \ne 0$ для $\forall \lambda$: уд. a, b, c, доп. $\hat{x}$

1▷ пусть $f_0(\hat{x}) = 0$ (иначе $\tilde{f}_0(x) = f_0(x) - f_0(\hat{x})$)

$Y = \{(y_0, \dots, y_d)\} = \mathbb{R}^{d+1}$ $\quad B = \{(y_0, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^{d+1} : y_k < 0, k = \overline{0,d}\}$ – вып. тело; $\operatorname{int} B \ne \emptyset$

$C = \{(y_0, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^{d+1} : \exists x \in A \; f_0(x) \le y_0, \dots, f_d(x) \le y_d\}$ – вып.

$B \cap C = \emptyset$, иначе противоречие экстр-ти $\hat{x}$

по т. об отделимости $\exists \lambda^* = (\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in Y \setminus \{0\}$: $\forall b \in B, c \in C$:

$(\lambda^*, b) \le (\lambda^*, c) \iff \sum\limits_{k=0}^{d} \lambda_k^* b_k \le \sum\limits_{k=0}^{d} \lambda_k^* c_k \Rightarrow \lambda^*$ – мн-ли Лагр.

пусть $c_k = f_k(x)$ $\forall x \in A \Rightarrow \forall y \in B$: $\sum\limits_{k=0}^{d} \lambda_k^* y_k \le \sum\limits_{k=0}^{d} \lambda_k^* f_k(x)$

при $k = k_0$, $x \in A$ если $\lambda_{k_0} < 0 \Rightarrow$ противоречие $-\infty = \lim\limits_{y_{k_0} \to -\infty} \lambda_{k_0} y_{k_0} \le \sum - \sum \Rightarrow \lambda_k^* \ge 0$

при $y \to 0-$, $y \in B$ $\quad \sum \lambda_k^* f_k(x) \ge 0$

$x = \hat{x}$ $\quad \sum \lambda_k^* f_k(\hat{x}) \ge 0$, где $\lambda_k^* \ge 0$, $f_0(\hat{x}) = 0$, $f_k(x) \le 0$ $\Rightarrow \sum \lambda_k^* f_k(\hat{x}) \le 0$ $\Rightarrow \sum \lambda_k^* f_k(\hat{x}) = 0 \Rightarrow$ b-док.

2▷ $x \in A$ – доп $\quad \lambda_0 f_0(x) \underset{a}{\ge} L(x, \lambda) \underset{c}{\ge} L(\hat{x}, \lambda) \underset{b}{=} \lambda_0 f_0(\hat{x})$

3▷ $\exists x \in A$: $f_k(x) < 0$, a, b, c, $\lambda_0 = 0 \Rightarrow 0 > \sum\limits_{1}^{d} \lambda_k f_k(x) = \sum\limits_{0}^{d} \lambda_k f_k(x) = L(x, \lambda) \ge L(\hat{x}, \lambda) \ge 0$

$\Rightarrow$ против. $\Rightarrow \lambda_0 \ne 0$

⑨ сильный и слабый extr в прост. задаче вар. исч.

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t,x,\dot{x})\,dt \to extr\ ;\quad x(t_0)=x_0,\quad x(t_1)=x_1$$

$\hat{x} \in wlocmin$ $(\hat{x} \in C^1[t_0;t_1])$, если $\exists\, O_\delta(\hat{x}) \in C^1[t_0;t_1]$. $\forall x \in O_\delta(\hat{x})$ $J(x) \geq J(\hat{x})$
- доп.

где x - доп $\quad x \in C^1[t_0,t_1] \cap \{x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1\}$

$\hat{x} \in strlocmin$ $(\hat{x} \in PC[t_0,t_1])$, если $\exists\, O_\delta(\hat{x}) \in C[t_0;t_1]$ $\forall x \in O_\delta(\hat{x})$ $J(x) \geq J(\hat{x})$
- доп

где x - доп. $\quad x \in PC^1[t_0,t_1] \cap \{x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1\}$

Пример $\quad \int_0^1 \dot{x}^3\,dt \to inf \qquad x(0)=0,\ x(1)=1$

$\triangleright \quad -\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\cdot 3\dot{x}^2 = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}=0 \Rightarrow x = C_1 t + C_2$

$\begin{matrix} x(0)=0 \\ x(1)=1 \end{matrix} \Rightarrow \hat{x} = t \in C^1[0;1]$

$h \in C_0^1[0,1]$

$$J(\hat{x}+h) - J(\hat{x}) = \int_0^1 \left((1+\dot{h})^3 - 1\right)dt = \int_0^1 \dot{h}\,(3+3\dot{h}+\dot{h}^2)\,dt = \ldots = \int_0^1 \dot{h}^2(3+\dot{h})\,dt > 0$$

верно $\forall h: \|h\|_{C^1[0;1]} < 3$

$\Rightarrow \hat{x} = t \in wlocmin$

$S_{wlocmin} = 1$

$\triangleleft \quad h_n(t): \quad \dot{h}_n = 0$

$$J(\hat{x}+h_n) - J(\hat{x}) = \int_0^1 \dot{h}_n^2(3+\dot{h}_n)\,dt = \int_0^{1/2} n(3-\sqrt{n})\,dt + \int_{1/2}^1 \frac{4}{n}\left(3+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)dt = -\sqrt{n} + O(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

$\hat{x} = t \notin strlocmin$

$S_{strlocmin} = -\infty$

⑩ Необх. условия существования wlocextr, strlocextr в прост. зад. вар. исч.

ПЗВИ: $\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to extr \qquad x(t_0)=x_0, \ x(t_1)=x_1$

(Необх.) $\begin{cases} \hat{x} \in wlocmin \\ \hat{x} \in C^2[t_0;t_1] \\ L \in C^3(O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0 & \text{(Эйлер)} \\ \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0, \ \forall t \in [t_0;t_1] & \text{(Лежандр)} \\ \text{если} \ \underset{\text{(усил.)}}{>} \ , \text{то} \ \forall \tau \in (t_0;t_1) \ h(\tau) \neq 0 & \text{(Якоби)} \end{cases}$

(Необх.) $\begin{cases} \hat{x} \in strlocmin \\ \hat{x} \in C^1[t_0;t_1] \\ L \in C^1(O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0 & \text{(Эйлер)} \\ \mathcal{E}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, u) \geq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0;t_1] & \text{(Вейерштрасс)} \\ \text{если} \ \exists \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \Rightarrow \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} \geq 0, \ \forall t \in [t_0;t_1] \end{cases}$

(11) Функция Вейерштрасса и дост. условия суц-я wlocextr, strlocextr в ПЗВИ

ПЗВИ: $\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to extr \quad x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = x_1$

Функция Вейерштрасса функции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ | $\varepsilon(x, x') = f(x') - f(x) - f'(x)(x' - x)$:

причем $\varepsilon(x, x') \geq 0 \quad \forall x, x' \in A \Leftrightarrow f(x)$ – вып. на A

* если L – интегрант ПЗВИ, то $\varepsilon(t, x, \dot{x}, u) = L(t, x, u) - L(t, x, \dot{x}) - L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})(u - \dot{x})$

(Дост.; ПЗВИ) $\begin{cases} \hat{x} \in C^2[t_0; t_1] \\ L \in C^3(O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}})) \\ -\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0 \quad \text{(Эйлер)} \\ \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad \text{(ус. Леж.)} \\ \forall \tau \in (t_0; t_1],\ h(\tau) \neq 0 \quad \text{(ус. Якоби)} \end{cases}$ $+ \{x(t_0) = x_0; x(t_1) = x_1\} \Rightarrow \hat{x} \in wlocmin$

(Дост.; ПЗВИ) $\begin{cases} \hat{x} \in C^2[t_0; t_1] \\ L \in C^3(O(\Gamma_{\hat{x}}) \times \mathbb{R}) \\ -\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0 \quad \text{(Эйлер)} \\ \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0; t_1] \quad \text{(ус. Леж.)} \\ \forall t \in [t_0; t_1],\ h(t) \neq 0 \quad \text{(ус. Якоби)} \\ \exists O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}) : \forall x \in O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}) \quad \varepsilon(t, x, \dot{x}, u) \geq 0,\ \forall u \in \mathbb{R},\ \forall t \in [t_0; t_1] \end{cases}$ $+ \{x(t_0) = x_0; x(t_1) = x_1\} \Rightarrow \hat{x} \in strlocmin$

(12) Дост. условия сущ. wloc extr, str loc extr в задаче Больца. Критерий Сильвестра

Задача Больца $J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt + \ell(x(t_0), x(t_1)) \to extr$

(Дост.)
$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + \hat{L}_x = 0 \quad (\text{эйлер}) + \begin{cases}\hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{\ell}_{x(t_0)} \\ \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\ell_{x(t_1)}\end{cases} (\text{тр-ть}) \\ \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0, \ \forall t \in [t_0; t_1] \quad (\text{ус. Леж.}) \\ \forall \tau \in (t_0; t_1] \quad h(\tau) \neq 0 \quad (\text{ус. Якоби}) \\ P + Q > 0 - \min \\ \hat{x} \in C^1[t_0; t_1] \\ L \in C^3(O(\Gamma_{\hat{x}\hat{x}})) \\ \ell \in C^2(\mathbb{R}^2) \end{cases} \Rightarrow \hat{x} \in wloc\min$$

(Дост)
$$\begin{cases} -\text{''}- , \text{ где } L \in C^3(O(\Gamma_{\hat{x}}) \times \mathbb{R}) \\ \exists O(\Gamma_{\hat{x}\dot{\hat{x}}}) : \forall x (\in C^1[t_0; t_1]) \in O(\Gamma_{\hat{x}\hat{x}}) \quad \mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R},\ \forall t \in [t_0; t_1] \end{cases} \Rightarrow \hat{x} \in strloc\min$$

где $P = \begin{pmatrix} \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_1)\dot{H}_1(t_1) + \hat{L}_{x\dot{x}}(t_1) & \frac{1}{2}\left(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_1)\dot{H}_0(t_1) - \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_0)\dot{H}_1(t_0)\right) \\ -\text{''}- & \hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t_0)\dot{H}_0(t_0) + \hat{L}_{x\dot{x}}(t_0) \end{pmatrix}$

$Q = \begin{pmatrix} \hat{\ell}''_{x(t_1)x(t_1)} & \hat{\ell}''_{x(t_1)x(t_0)} \\ -\text{''}- & \hat{\ell}''_{x(t_0)x(t_0)} \end{pmatrix}$

где $H_0(t)$ — реш. $-\frac{d}{dt}B_{\dot{h}} + B_h = 0$ $\quad h(t_0) = 1 \quad h(t_1) = 0$

$H_1(t)$ $-\text{''}-$ $\quad h(t_0) = 0 \quad h(t_1) = 1$

$h(t) = h_0 H_0(t) + h_1 H_1(t)$ $-\text{''}-$ $\quad h(t_0) = h_0 \quad h(t_1) = h_1$

Критерий Сильвестра: для $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

1) $\Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0, \ \Delta_3 > 0 \Rightarrow$ пол. опр. $A > 0$

$\Delta_1 < 0, \ \Delta_2 > 0, \ \Delta_3 < 0 \Rightarrow$ отр. опр. $A < 0$

2) $a_{11} \geq 0 \quad a_{22} \geq 0 \quad a_{33} \geq 0$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0 \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0$

$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \\ \vdots & & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0$

то $A \geq 0$ неотр. опр.