Тема 3: моделирование распределений.

Задача 1

Пусть $U \sim Unif[0,1]$. Смоделируем $X \sim Geom(p)$:

$f(k) = q^{k-1}p, q = 1 - p$

$F(k) = 1 - q^k, k = 1,2,...$

$$1 - q^k = U \Rightarrow \ln(1-U) = \ln q^k \Rightarrow k = \frac{\ln(1-U)}{\ln(1-p)}$$

$$X = \min[k : 1 - q^k \geq U] = \left[\frac{\ln(1-U)}{\ln(1-p)}\right]$$

$X \sim Geom(p)$

Задача 2

Пусть $U \sim Unif[0,1]$. Смоделируем $X \sim Unif\{0,1,...,n\}, a = 0, b = n, N = n + 1$:

$f(k) = \dfrac{1}{N}, k = a,a+1,...,b$

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < a \\ \dfrac{k-a+1}{N}, & a \leq k \leq b \\ 1, & k > b \end{cases}$$

$$\frac{k-a+1}{N} = U \Rightarrow k = UN - 1 + a$$

$$X = \min\left[k : \frac{k-a+1}{N} \geq U\right] = [UN - 1 + a] = [U(n+1)] - 1$$

$X \sim Unif\{0,1,...,n\}$

Задача 3

$f(x) = 3/8 * (1 + x^2), -1 \leq x \leq 1$

$f(x) \leq 3/4, h(x) = 1/2 * \mathbb{I}_{|x|\leq 1}$

$3/8 * (1 + x^2) * \mathbb{I}_{|x|\leq 1} \leq k * 1/2 * \mathbb{I}_{|x|\leq 1}$

$k = 3/2$

$3/8 * (1 + x^2) * \mathbb{I}_{|x|\leq 1} \leq 3/2 * 1/2 * \mathbb{I}_{|x|\leq 1}$

$U \sim Unif[0,1], Y \sim h(y)$

$$U \leq g(Y) = \frac{f(Y)}{k * h(Y)} = \frac{3/8 * (1 + Y^2)}{3/2 * 1/2} = 1/2 * (1 + Y^2)$$

В итоге получаем, что,

если $U \leq 1/2 * (1 + Y^2)$, принимаем,

если $U > 1/2 * (1 + Y^2)$, отвергаем.

Задача 4

(а) $f(x) = c(x+1)^{3/4}, 0 \le x \le 1$

$c\int_0^1 (x+1)^{3/4}dx = 1 \Rightarrow \dfrac{4}{7}c(2^{7/4}-1) = 1 \Rightarrow c \approx 0.74$

Пусть $f(x) = 0.74(x+1)^{3/4}\mathbb{I}_{\{x\in[0;1]\}}$, $h(x) = \mathbb{I}_{\{x\in[0;1]\}}$

Тогда $f(X) \le 0.74 * 2^{3/4} \Rightarrow k = 0.74 * 2^{3/4}$

$0.74(x+1)^{3/4}\mathbb{I}_{\{x\in[0;1]\}} \le 0.74 * 2^{3/4}\mathbb{I}_{\{x\in[0;1]\}}$

$U \sim Unif[0,1]$, $Y \sim h(y)$

$$U \le g(Y) = \frac{f(Y)}{k * h(Y)} = \frac{0.74(Y+1)^{3/4}}{0.74 * 2^{3/4}} = \frac{(Y+1)^{3/4}}{2^{3/4}}$$

В итоге получаем, что,

если $U \le \dfrac{(Y+1)^{3/4}}{2^{3/4}}$, принимаем,

если $U > \dfrac{(Y+1)^{3/4}}{2^{3/4}}$, отвергаем.

(б) $f(x) = c|\sin(x)|, -\pi/2 \le x \le \pi/2$

$c\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin(x)|dx = 1 \Rightarrow 2c\int_0^{\pi/2}\sin(x)dx = 2c = 1 \Rightarrow c = 1/2$

$1/2|\sin(x)|\mathbb{I}_{\{x\in[-\pi/2;\pi/2]\}} \le k * 1/\pi * \mathbb{I}_{\{x\in[-\pi/2;\pi/2]\}} \Rightarrow$

Пусть

$f(x) = 1/2 * |\sin(x)| * \mathbb{I}_{\{x\in[-\pi/2;\pi/2]\}}$

$h(x) = 1/\pi * \mathbb{I}_{\{x\in[-\pi/2;\pi/2]\}}$

$k = \pi/2$

$U \sim Unif[0,1]$, $Y \sim h(y)$

$$U \le g(Y) = \frac{f(Y)}{k * h(Y)} = \frac{1/2 * |\sin(Y)|}{\pi/2 * 1/\pi} = |\sin(Y)|$$

В итоге получаем, что,

если $U \le |\sin(Y)|$, принимаем,

если $U > |\sin(Y)|$, отвергаем.

(в)

$f(x) = c\exp(-3x), 0 \le x \le 1/3, \sigma > 0$

$$\int_0^{1/3} c\exp(-3x)dx = c/3 * \exp(-3x)\Big|_0^{1/3} = 1 \Rightarrow c \approx 4.746$$

$4.746\exp(-3x)\mathbb{I}_{\{x\in[0;1/3]\}} \le k * 3 * \mathbb{I}_{\{x\in[0;1/3]\}} \Rightarrow k \approx 1.582$

$U \sim Unif[0,1]$, $Y \sim h(Y)$

$$g(Y) = \frac{f(Y)}{k * h(Y)} = \frac{4.746\exp(-3Y)}{1.582 * 3} = \exp(-3Y)$$

В итоге получаем, что,

если $U \le \exp(-3Y)$, принимаем,

если $U > \exp(-3Y)$, отвергаем.

Задача 5

(а)

$f(x) = c * x^9\exp(-3x), x \ge 0$

$\int_0^\infty c * x^9\exp(-3x)dx = 1 \Rightarrow c = 729/4480 \approx 6.1454$

Имеем $X \sim Gamma(10,1/3)$, $E[X] = 10 * 1/3 = 10/3$

Возьмем $Y \sim Exp(3/10)$, $E[Y] = \lambda = E[X]$ с таким же средним.

$729/4480 * x^9 * \exp(-3x) \le k * 3/10 * \exp(-3/10x)$

$$k \ge \frac{729x^9\exp(-3x)}{4480 * 0.3 * \exp(-0.3x)} = \frac{243}{448} * x^9 * \exp(-2.7x) = t(x)$$

$FOC: t'(x) = 243/448 * (9 * x^8 * \exp(-2.7x) - 2.7 * x^9 * \exp(-2.7x)) = 0 \Rightarrow x = 10/3$
$t(10/3) = \dfrac{243}{448} * (10/3)^9 * \exp(-2.7 * 10/3) = k$
$k \approx 3.40085$
$g(Y) = \dfrac{f(Y)}{k * h(Y)} = \dfrac{729/4480 * Y^9 * \exp(-3Y)}{3.40085 * 3/10 * \exp(-3/10 * Y)} \approx 0.15949 * Y^9 * \exp(-2.7Y)$
$U \sim Unif[0,1], Y \sim Exp(3/10)$
В итоге получаем, что,
если $U \leq 0.15949 * Y^9 * \exp(-2.7 * Y)$, принимаем,
если $U > 0.15949 * Y^9 * \exp(-2.7 * Y)$, отвергаем.
(б)
$f(x) = c * \exp(-(x-1)^2), x \geq 1$
$c \int_1^\infty \exp(-(x-1)^2) dx = 1 \Rightarrow c = 2/\sqrt{\pi} \approx 1.128$
Если $x \geq 1$
$2/\sqrt{\pi} * \exp(-(x-1)^2) \leq k * \exp(-(x-1))$
$k \geq \dfrac{2/\sqrt{\pi} * \exp(-(x-1)^2)}{\exp(-(x-1))} = 2/\sqrt{\pi} * \exp(-x^2 + 3x - 2) = t(x)$
$FOC: t'(x) = 2/\sqrt{\pi} * \exp(-x^2 + 3x - 2) * (-2x + 3) = 0 \Rightarrow x = 3/2$
$t(3/2) = 2/\sqrt{\pi} * \exp(1/4) = k$
$g(Y) = \dfrac{f(Y)}{k * h(Y)} = \dfrac{2/\sqrt{\pi} * \exp(-(Y-1)^2)}{2/\sqrt{\pi} * \exp(1/4) * \exp(-(Y-1))} = \exp(-1/4) * \exp(-Y^2 + 3Y - 2)$
$U \sim Unif[0,1], Y \sim Exp(1)$
В итоге получаем, что,
если $U \leq \exp(-1/4) * \exp(-Y^2 + 3Y - 2)$, принимаем,
если $U > \exp(-1/4) * \exp(-Y^2 + 3Y - 2)$, отвергаем.

Задача 6

Пусть
$U_1, Y_1, U_2, Y_2, ..., i = 1,2,...$
$U_i \sim Unif[0;1], i = 1,2,...$
$Y_i \sim Gamma(2,1), i = 1,2,...$
$\tau = \min\{k \geq 1 : Y_k \leq \ln 2\}$,
$X = Y_\tau$.
Построим закон распределения X.
Выборка с отклонением $\forall x \in \mathbb{R}, c \geq 1, f(x) \leq c * g(x)$
$f(y) = \dfrac{y * \exp(-y)}{\Gamma(2)}, y > 0$
$2 * U_k * q(Y_k) \leq \rho(Y_k)$,
$q(Y_k) = \dfrac{1}{\Gamma(2)} * y * \exp(-y) * \mathbb{I}_{\{Y_k \geq 0\}}$
Неравенство
$2U_k * \dfrac{1}{\Gamma(2)} * Y_k * \exp(-Y_k) * \mathbb{I}_{\{Y_k \geq 0\}} \leq 2 * \dfrac{1}{\Gamma(2)} * Y_k * \exp(-Y_k) * \mathbb{I}_{\{0 \leq Y_k \leq \ln 2\}}$
верно, тогда и только тогда, когда $Y_k \in [0; \ln 2]$. Тогда $\tau = \min\{k \geq 1 : Y_k \leq \ln 2\}$ это минимальный номер при котором $2 * U_k * q(Y_k) \leq \rho(Y_k)$ верно.
$\rho(x) = 2 * \dfrac{1}{\Gamma(2)} * x * \exp(-x) * \mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq \ln 2\}} \leq 2 * \dfrac{1}{\Gamma(2)} * x * \exp(-x) * \mathbb{I}_{\{x \geq 0\}} = 2 * q(x)$
$q(x) \sim Gamma(2,1)$
Тогда из метода выборки с отклонением следует, что $X = Y_\tau \sim \rho(x)$,
$\rho(x) = 2 * \dfrac{1}{\Gamma(2)} * y * \exp(-y) * \mathbb{I}_{\{0 \leq y \leq \ln 2\}}$

Задача 7

$X \sim N(0,\sigma^2), Y = \exp(X)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * \exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2})$

(a) $F_Y(y) : F_Y(y) = 0$ if $y \leq 0$

$f_Y(y) = 0, y \leq 0$

Если $y > 0$,

$F_Y(y) = P(y \leq y) = P(\exp(X) \leq y) = P(X \leq \ln(y))$

$F_Y(y) = \int_{\infty}^{\ln(y)} f(x)dx$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\ln(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * \exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2})dx = \frac{1}{y} * \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * \exp(\frac{-(\ln(y))^2}{2\sigma^2})dx$

$y = \exp(X) = f(x)$

(б)

$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * \exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2})$

$E(Y) = E(f(x)) = E(\exp(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * \exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2}) * \exp(X)dx = \exp(\sigma^2/2)$

$E(Y^2) = E(f^2(x)) = E((\exp(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)f(x)^2dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * \exp(\frac{-x^2}{2\sigma^2}) * (\exp(X))^2dx = \exp(2\sigma^2)$

$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \exp(2\sigma^2) - \exp(\sigma^2)$

(в)

Пусть $U_1, ..., U_n \sim Unif[0,1]$. Построим оценку числа e:

$S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$

$N = \min\{n : S_n > 1\}$

$P(N = n) = P((S_n > 1)\&(S_{n-1} < 1)) = P(S_{n-1} < 1) - P(S_n < 1)$

$P(S_n < 1) = \frac{1}{n!}$

$P(N = n) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n-1}{n!}$

$E(N) = \sum_{n=2}^{\infty} n * P(N = n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Задача 8

$f(x) = \lambda/2 * \exp(\lambda|x - \theta|)$

(а)

$\theta = 0, \lambda = 1$

$f(x) = \lambda/2 * \exp(-|x|), x \in \mathbb{R}$

$Y = F(x) = \int_{-\infty}^{x} 1/2 * \exp(-|u|)du = \begin{cases} 1/2 * \exp(x), x < 0 \\ 1 - 1/2 * \exp(-x), x \geq 0 \end{cases}$

Смоделируем X от $U \sim Unif[0,1]$.

$U = F(x)$

Если $x < 0$, $U = 1/2 * \exp(X) \Rightarrow X = \ln(2U)$.

Для всех значений U, $\ln(2U) < 0 \Rightarrow U < 1/2$.

Если $x \geq 0$, $U = 1 - 1/2 * \exp(-X) \Rightarrow X = -\ln(1 - U)$.

Для всех значений U, $-\ln(1 - U) \geq 0 \Rightarrow U \geq 1/2$.

(б)

$f(x) = \lambda/2 * \exp(\lambda|x-\theta|) = \lambda/2 * \begin{cases} \exp(\lambda(x-\theta)), & x < \theta \\ \exp(-\lambda(x-\theta)), & x \geq \theta \end{cases}$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \begin{cases} 1/2 * \exp(\lambda(x-\theta)), & x < \theta \\ 1 - 1/2 * \exp(-\lambda(x-\theta)), & x \geq \theta \end{cases}$

Смоделируем X от $U \sim Unif[0,1]$.

$U = F(x), X = F^{-1}(U)$

Если $x < \theta, U = 1/2 * \exp(\lambda(X-\theta)) \Rightarrow X = \ln(2U)/\lambda + \theta$.

Для всех значений U, $\ln(2U)/\lambda + \theta < 0 \Rightarrow U < 1/2$.

Если $x \geq 0, U = 1 - 1/2 * \exp(-\lambda(X-\theta)) \Rightarrow X = -\ln 2(1-U)/\lambda + \theta$.

Для всех значений U, $-\ln 2(1-U)/\lambda + \theta \Rightarrow U \geq 1/2$.

(в)

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dX = \lambda/2 * \int_{-\infty}^{\infty} X \exp(\lambda(X-\theta)) dX = \lambda/2 * 1/\lambda * X \exp(\lambda(X-\theta))\Big|_{\infty}^{\theta} - \lambda/2 * 1/\lambda \int_{-\infty}^{\theta} \exp(\lambda(X-\theta)) dX - \lambda/2 * 1/\lambda * X \exp(-\lambda(X-\theta))\Big|_{\theta}^{\infty} + \lambda/2 * 1/\lambda \int_{\theta}^{\infty} \exp(-\lambda(X-\theta)) dX = \lambda/2 - 1/(2\lambda) * \exp(\lambda(X-\theta))\Big|_{\infty}^{\theta} + \lambda/2 - 1/(2\lambda) * \exp(-\lambda(X-\theta))\Big|_{\theta}^{\infty} = \theta - 1/(2\lambda) + 1/(2\lambda) = \theta$

Задача 9

$f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\mathbb{I}_{\{x \in [0;1]\}}$

$F(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 1) = P(X \leq x) = \frac{1}{2}P(U \leq \sqrt{x}) + \frac{1}{2}P(U \leq 1 - \sqrt{1-x}) = \frac{1}{2}P(U^2 \leq x) + \frac{1}{2}P(\sqrt{1-x} \leq 1-U) = \frac{1}{2}P(U^2 \leq x) + \frac{1}{2}P(1-x \leq (1-U)^2) = \frac{1}{2}P(U^2 \leq x) + \frac{1}{2}P(2U - U^2 \leq x)$

То есть эта случайная величина $X = \begin{cases} U, & \text{w.p.1/2 (если орел)} \\ 2U - U^2, & \text{w.p.1/2 (если решка)} \end{cases}$

Задача 10

Пусть $U \sim Unif[0,1]$. Смоделируем распределение Коши $X \sim Cauchy(x_0,\gamma)$ методом обращения:

$f(k) = \frac{1}{\pi\gamma\left(1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2\right)}$

$F(k) = 1/2 + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)$

$F^{-1}(u) = x_0 + \gamma * \tan(\pi(u - 1/2))$

$X = x_0 + \gamma * \tan(\pi(U - 1/2)) \sim Cauchy(x_0,\gamma)$