Линейная алгебра

1 семестр

1 коллоквиум

~~1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11~~
~~12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22~~

Сист. лин. ур-й

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{1m}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Заданы a_{ij}, b_j
i - N ур-ие
j - N неизв. j - N - ур-ие

<u>Опр.</u>: решение системы - набор чисел $\alpha_1 \dots \alpha_n$, при подстановке в ур. α_i вместо x_{ni} получаются верные рав-ва

1) нет решений $\Leftrightarrow$ сист. несовместна
2) 1 решение $\Leftrightarrow$ сист. определена
3) >1 решений $\Leftrightarrow$ сист. неопределённа

Матрица сист.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & & & \\ a_{1m} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

1. Приведение матр. элемент. преобр. строк к ступенчатому виду

Опр.: Ступенчатая матр.

1) ниже нул. строки – нули

2) первый ненул. эл. каждой стр. "1"

3) если "1" расп. в k-том столбце, то все ост. эл. этого ст. "0"

4) 1-ый ненул. эл. послед. стр. расп. правее предыд. стр.

Теорема: при элемент. преобр. сохр. все решения и новых не добавляется

Элемент. преобразования:

1) к $i^{ой}$ строке прибавить $j^{ую}$, умн. на число

2) строку умн. на ненул. число

3) поменять строки местами

Теорема: конечн. числом эл. преобр. мод. матрицу можно привести к ступ. виду

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \Leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-3I]{II-2I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II\cdot(-\frac{1}{3})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

② Решение сист. лин. ур-й методом Гаусса

Для сист. со ступ. матрицей.

1 случай: В матрице есть строка $(0, 0 \ldots, 0 \; 1)$
что соотв. $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \cdots + 0 \cdot x_n = 1$
$\Rightarrow$ система несовместна

2 случай: Таких строк нет. Применяется м. Гаусса

– слау приводится к ступенчатому виду с помощью эл. преобразований, после чего система приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно находятся все переменные сист.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2x_2 + 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

x_1, x_3 – главная неизвестная

x_2 – своб. неизв. – параметр

<u>Опр.</u>: сист. однородна, если все её своб. члены – "0"

Если число ур-й m в однор. меньше числа неизв. n, то у сист. есть ненул. реш.

Матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрицы $m \times n$

③ Операции над матрицами и их св-ва

1) Сложение матриц одного разм. $m \times n$
– слож. элем., стоящих на одинак. местах

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11}) & \dots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ \vdots & & \\ (a_{m1}+b_{m1}) & \dots & (a_{mn}+b_{mn}) \end{pmatrix}$$

<u>Теорема</u> A, B, C – матрицы $m \times n$

Тогда $A + B = B + A$ $\quad A + (B + C) = (A + B) + C$

2) Умн. матрицы на число λ — каждый эл. матрицы умн на λ

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{1m} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ & \dots & \\ \lambda a_{1m} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Теор. A, B — матр. $m \times n$

Тогда $\lambda(A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

$(\alpha+\beta)A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

$(\alpha \cdot \beta)A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

$1 \cdot A = A$

3) Умножение матриц размеров $m \times n$ и $n \times k$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}_{n \times k}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ & \dots & \\ c_{m1} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix}_{m \times k}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

Теорема $(AB)C = A(BC)$

$A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

$\lambda(AB) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$

Примеры: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot X = b} \qquad \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы:

$$^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Теорема $\quad ^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

$^t(\lambda A) = \lambda \cdot {}^tA$

$^t(A \cdot B) = \cancel{A} \cdot {}^tB \cdot {}^tA$

Опр. $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (m = n)$

След A – $\quad tr A = a_{11} + a_{22} \dots + a_{mn}$

Теорема $\quad tr(A+B) = tr A + tr B$

$tr(\lambda A) = \lambda \cdot tr A$

$tr(AB) = tr(BA)$

Опр. ед. матр. размера $n \quad E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Теорема $\quad A_{m \times n}$, то

$$E_n \cdot A = A \cdot E_m = A$$

Опр.

$$C_\lambda = \begin{array}{c|c} & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & \lambda & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \end{array}$$

$i \neq j$

Теорема $C_{\lambda,i,j} A$ получается из A прибавлением к i-ой стр. j-ой, умн. на λ

Опр.

$$D_\lambda = \begin{array}{c|c} & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Теорема $D_{\lambda,i} A$ получается из A, умн. i-ой стр. на λ

4

Перестановки

<u>Опр.</u> Перестановка ст. n — последовательность чисел $1, 2 .. n$, записанных в неп. порядке

Теор. Число всех перест. ст. n $= n!$

Опр. В перестановке $(i_1 \ldots i_s \ldots i_t \ldots i_n)$ ст. n пара (i_s, i_t) — инверсия, если $s < t$, $i_s > i_t$

④ Четность перестановок.

Изм. четности при транспозиции

Перестановка имеет знак +, если число инв. четно; − - если нечетно

2, 4, 1, 3 - 3 инв => −

<u>Опр.</u> Транспозиция - меняем местами два элемента в перестановке

<u>Теорема</u> при транспозиции знак перестановки меняется

2 4 1 3 → 3 → −
1 4 2 3 → 2 → +
1 2 4 3 → 1 → −
1 2 3 4 → 0 → +

<u>Следств.</u> при $n \geq 2$ число четных пер. = числу нечетных пер. = $1/2\, n!$

Док-во:

1) четные | нечетные

$(i_1 \ldots i_n)$ | $(k_1 \ldots k_n)$
$(j_1 \ldots j_n)$ | $(k_j \ldots k_n)$

k - четных | M - нечетных

2) Во всех четных ⟷ 2 первых эл.

3) Из k ~~чет.~~ получим k нечет.

$\Rightarrow \quad k \leq M$

4) Аналогично $\quad M \leq k$

5) $M = k$

5 Определители и их осн. св-ва

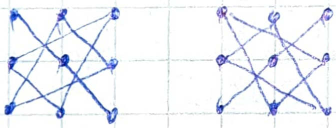
Опр. (детерминант)

Для $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$

$|A| = \det A = \sum a_{1i_1} \dots a_{ni_n} \cdot$ (знак перест. $i_1 \dots i_n$)

$n=2 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n=3$



$+ \qquad\qquad -$

Теор. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots a_{nn}$

Док.: выпишем ненул. пр. разных строк и ст.:

$a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \; (1 \dots n) + 0$

6 Изм. опр. при эл. преобр. строк

Теор. Если эл. одной стр. умн. на λ,

то опр. умн. на λ

Если к одн. стр. прибавить др., умн. на λ, то опр. не меняется

След. Если в опр. 2 строки равны,

то $|A| = 0$

Если в опр. поменять местами

строки, то опр. меняет знак

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 3) = 9$$

7) Опр. произв. матриц. Опр. трансп. матр., Опр. с уг. 0

Теор. $|AB| = |A| \cdot |B|$

$|{}^tA| = |A|$

Опр. матрицы с углом нулей

$A_{n\times n}$, $B_{m\times m}$; $C_{n\times m}$

Тогда $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 10 & -5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 10 \cdot (-1) - 3 \cdot (-5) = -10 + 15 = 5$$

Квадр. матр. $n \times n$

1) эл. преобр. стр. можно привести к E_n

2) $|A| \neq 0$

Опр. Пусть A – квадр. матр., в кот. выд. i-ая стр. j-ый столбец

Минор M_{ij} – опр. матр. A получ. при вычеркивании i-ой стр., j-ого ст. из опр.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 - 3 = \cancel{2}\,3 = -3$$

Опр. Алг. дополнение

$A_{ij} = (-1) \cdot M_{ij}$

⑧ Разл. опр. по стр. Фальш. разложение

Теор. $|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}$

Прим. $|A| = 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23} =$

$$= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Аналогично по столбцам.

Теор. Фальш. разл. $i \neq j$

$$a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} \ldots a_{in} A_{jn} = 0$$

⑨ Присоед. матрица и её св-ва

<u>Опр.</u> A - квадр. матр. $n \times n$

Взаимная (присоед.) матр. $\hat{A}$ разм. n, в кот. на месте (ij) стоит A_{ji}

<u>Теорема</u> $A \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot A = |A| \cdot E_n$

⑩ Обратная матрица и способы её вычисления

<u>Опр.</u> A – кв. матр. разм. n

Обр. матр. A^{-1}

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$

<u>Теор.</u> Единственность A^{-1}

<u>Док.</u> B, C – обратные к A

$$\left.\begin{array}{l} B \cdot A \cdot C = B \cdot (A \cdot C) = B \cdot E_n = B \\ B \cdot A \cdot C = (B \cdot A) \cdot C = E_n \cdot C = C \end{array}\right\} \Rightarrow B = C$$

<u>Теор.</u> Если $\exists A^{-1}$, то $|A| \neq 0$

<u>Док.</u> $\exists A^{-1} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = E_n$

$|AA^{-1}| = |E_n| = 1$

$|A \cdot A^{-1}| = 1$

$|A| \cdot |A^{-1}| = 1$

$|A| \neq 0$

Пусть $|A| \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \hat{A}$$

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot \hat{A}\right) = \frac{1}{|A|} \cdot (A \cdot \hat{A}) =$$

$$\frac{1}{|A|} \cdot (|A| \cdot E_n) = E_n$$

<u>Следств.</u> Если $|A| \neq 0$, то на месте (i,j) стоит $\frac{A_{ij}}{|A|}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$|A| = ad - bc \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot d = d$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot c = -c$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot b = -b$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot a = a$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

12 Теорема Крамера. Ф-лы Крамера

Теор. Крамера

Пусть $AX = b$ - квадр. сист. ур.

A - матрица
X - сист. ур. (неизв.)
b - своб. члены

Она имеет единств. решение $|A| \neq 0$

При этом $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$, где $|A_i|$ получается из $|A|$ заменой i-го столбца на столбец своб. членов b

Док. $AX = b$ им. решение $\Leftrightarrow$

все неизв. главные $\Leftrightarrow$

элем. преобр. A приводится к E_n $\Rightarrow$

$|A| \neq 0$

Пусть $|A| \neq 0$

$$AX = b$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1} \cdot b$$

$$(A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot b$$

$$E_n X = A^{-1} \cdot b$$

$$X = A^{-1} \cdot b$$

разл. $|A_i|$ по i-му столбцу

$$x_i \left(\left(\frac{A_{1i}}{|A|}\right) b_1 + \dots \left(\frac{A_{ni}}{|A|}\right) b_n \right) = \frac{A_{1i} b_1}{|A|} + \dots \frac{A_{ni} b_n}{|A|} =$$

$$= \frac{A_{1i} b_1 + \dots A_{ni} b_n}{|A|} = \frac{|A_i|}{|A|}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \quad (\neq 0)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 9$$

$$x_1 = \frac{3}{5} \qquad x_2 = \frac{9}{5}$$

$AX = \mathcal{E}_n$

$(A \mid \mathcal{E}_n) \to (\mathcal{E}_n \mid A^{-1})$

11 Решение матричного ур-ия

$A \cdot X = B$

A – квадр. матр. n
X – неизв. матр. $n \times m$
B – зад. матр. $n \times m$

Пусть A эл. преобр. приводится к $\mathcal{E}_n$

Составим матрицу $(A|B)$

и элемент. преобр. строк приводим к $(E|C)$

Тогда C – решение ур. $AX=B$

<u>Пример</u> $Y \cdot A = B$

$${}^tA \cdot {}^tY = {}^tB$$

$$({}^tA \mid {}^tB) \to (\mathcal{E} \mid {}^tY) \to Y$$

$$b = \frac{|A_{ji}|}{|A|}$$

$|A|$ – разм. n
$|A_{ji}|$ – разм. $n-1$, их число n^2

13 Комплексн. числа и д-я над ними

$z\ (a,b)$, a, b – вещ. числа

$(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$

$(a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$

<u>Теорема</u> z_1, z_2, z_3 – компл. числа

Тогда $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

$\forall z \quad (1,0) \cdot z = z$

$z = 0 \quad \exists\, z^{-1} : z \cdot z^{-1} = (-1, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} i = (0,1) \\ i^2 = (-1; 0) \end{array}\right\} \quad (0,1)^2 = (-1; 0)$$

$(a,b) = a + bi = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1)$

$(a,0) = a \quad (a \in \mathbb{R})$

<u>Опр.</u> Пусть $z = a + bi$

тогда компл. сопр. $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} \cdot z = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$

<u>Опр.</u> Модуль $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

<u>Следствие</u> $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

<u>Пред.</u> $z \neq 0$, тогда $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

<u>Док.</u> $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = 1$

(14) Возведение в степ. и извл. корней из компл. чисел

геометр. интерпретация $\vec{z} = \vec{a} + \vec{bi}$ –

вектор на 2-мерной п-ти с к. (a, b)

<u>Опр.</u> арг. компл. числа φ

$$z = a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) =$$

$= |z| (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ – триг. ф-ма компл. числа

<u>Теор.</u> при умн. $z_1 \cdot z_2$

1) перемн. модули $|z_1| \cdot |z_2|$

2) склад. арг. $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$

<u>Док.</u> $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$

$z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot i \sin\varphi_2$

$+ \cos\varphi_2 \cdot i \sin\varphi_1 + (i)^2 \cdot \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) = |z_1| \cdot |z_2|$

$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$

Теор. Ф-ла Моавра

Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Тогда $z^n = |z|^n(\cos\varphi\cdot n + i\sin\varphi\cdot n)$

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Извлечь $\sqrt[n]{z}$ – найти все комп. числа t, что $t^n = z$

$t = |t|(\cos\omega + i\sin\omega)$

$t^n = |t|^n(\cos\omega n + i\sin\omega n) =$

$= z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

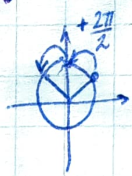
$|z| = |t|^n \Rightarrow |t| = \sqrt[n]{|z|}$

$n\omega = \varphi + 2\pi k$

$\omega = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$ – все знач. с точн. до 2π при $k = 0, 1, \dots, n-1$

$t = \sqrt[n]{z}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$ $k = 0, 1, \dots n$

Окр-ть $\sqrt[n]{|z|}$



Многочлены

$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x \dots + a_n x^n$

a_i – число

Если $a_n \neq 0$, то $\deg f = n$

a_n – старш. коэф. f

a_0 – своб. член f

Осн. операции

Пусть $g = b_0 + b_1 x + \dots b_n x^s$

тогда $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot x \dots + (a_n + b_n) x^n$

если $f, g, f+g \neq 0$

то $\deg(f+g) = \max\{\deg f, \deg g\}$

Теор. Если f, g, h – мн-ны, то

$f + g = g + f$

$f + (g + h) = (f + g) + h$

Опр. $f \cdot g = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \dots$

где $c_1 = a_0 b_i + a_1 \cdot b_{i-1} + a_2 \cdot b_{i-2} \dots a_i b_0$

Теор. • Если $f, g \neq 0$, то старш. член $f\,g$

равен произвед. старш. членов f и g

• Своб. член – произвед. св. членов f и g

• $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$

Теор.

$f \cdot g = g \cdot f$

$(f \cdot g) h = f \cdot (g \cdot h)$

$f(g+h) = f \cdot g + f \cdot h$

$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

15 Деление мн-нов с остатком

Теор. f, g – мн-ны $g \neq 0$

тогда $\exists$ единств. q и r со след. усл.

1) $f = g \cdot q + r$

2) $r = 0$ или $\deg r$ или $\deg g$

Док. Единственность: f / g

$f = q \cdot g + r = q' \cdot g + r'$

$(q - q') \cdot g = (r' - r) \qquad q \neq q'$

$\deg [(q - q') g] = \deg (q - q') + \deg g \geq \deg g$

$\deg (r' - r) \leq \max (\deg r', \deg r) < \deg g$

16 НОД многочленов

deg

Опр. $f_1 \ldots f_n$ мн-ны $\neq 0$

мн-ль g – НОД $(f_1 \ldots f_n) = (f_1, \ldots, f_n)$

делители

если 1) $g \mid f_i$, т.е. $f_i = g \cdot h_i$

2) если $h \mid f_i$ для всех i, то $h \mid g$

Теорема $(f_1, \dots f_n) = (f_1, (f_2, \dots f_n))$

Теорема Пусть d_1, d_2 — НОД для $f_1, \dots f_n$

Тогда $d_1 = c \cdot d_2 \quad c \neq 0$

Док. по опр. $g = d_1 \quad h = d_2$

тогда $d_2 = d_1 \cdot v \qquad d_1 = d_2 \cdot u$

$d_i = d_1 \cdot v = d_2 \cdot u \qquad d_1 = d_2 u = d_1 u \cdot v$

$\deg d_1 = \deg d_1 + \deg v + \deg u$

$c = \underset{0}{\underset{\Downarrow}{\deg u}} + \underset{0}{\underset{\Downarrow}{\deg v}}$

(17) Алгоритм Евклида вычисления НОД двух мн-нов

f и g — мн-ны $\quad \deg g \leq \deg f$

$f = q_1 \cdot g + r_1 \quad \deg r_1 < \deg g$

$g = q_2 \cdot r_1 + r_2 \quad \deg r_2 < \deg r_1$

$r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3 \quad \deg r_3 < \deg r_2$

...

$r_{m-1} = q_{m+1} r_m + r_{m+1} \quad \deg_{m+1} < \deg m$

$r_m = q_{m+2} \cdot r_{m+1}$

Теорема (Евклид)

НОД $(f, g) = r_{m+1}$

Док. $r_{m+1} \mid r_m$

$r_{m+1} \mid r_{m-1}$

...

$r_{m+1} \mid r_i$

$r_{m+1} \mid g, f$

Пусть $h \mid f$ и $h \mid g$

$h \mid r_1$

$h \mid r_{m+1}$

Теор. $d = \text{НОД}(f_1 \dots f_n)$

тогда $\exists$ мн-ны $u_1 \dots u_n$

что $d = f_1 u_1 + \dots f_n u_n$

Опр. $\text{НОД}(f_1 \dots f_n) = 1 \Rightarrow f_1 \dots f_n$ - вз. простые

Теор. $f_1 \dots f_n$ - вз. простые

тогда $\exists\ u_1 \dots u_m$, что $u_1 f_1 + \dots u_n f_n = 1$

Опр. $f_{c+1} = a_0 + a_1 x \dots + a_n x^n$

$f(c) - a_0 + a_1 c + \dots + a_n c^n$

c - корень f, если $f(c) = 0$

(18) Теорема Безу

$f(x)$ - мн-н c - число

$f(x) = q(x-c) + r$

тогда $r = f(c)$. В част., c - корень

$\Leftrightarrow (x-c) \mid f(x)$

Док. $\deg r < \deg(x-c) = 1$

$\Rightarrow \deg r = 0$

$f(c) = g(c)(c-c) + r = r$

Число корней $f \leq \deg f$

(19) Схема Горнера

$$f = a_0 + a_1 x \dots a_n x^n$$

$$x - c$$

$$q = b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$$

$$f = (a_n x^n + \dots + a_0) = (b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0)(x-c) + r$$

$$a_n x^n + \dots a_0 = b_{n-1} x^n + b_{n-2} x^{n-1} + \dots + b_0$$

$$- c b_{n-1} x^{n-1} - \dots - c b_0 + r$$

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - c b_{n-1} \cdot x^{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + c b_{n-1} \end{cases}$$

$\langle \dots \rangle$

$$\begin{cases} a_1 = b_0 - c b_1 \\ a_0 = r - c b_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 = a_1 + c b_1 \\ r = a_0 + c b_0 \end{cases}$$

Схема Горнера

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_0
c	$b_{n-1} = a_n$	b_{n-2}	$\dots$	r

Для дел. g с ост. на $(x-c)$ получаем

ф-му Тейлора

	a_n	a_{n-1}	...	a_1	a_0
c	$a_n = s_{n-1}$	s_{n-2}	...	s_1	$r = b_0$
c	$a_n = t_{n-2}$	t_{n-3}	...	$t_0 = b_1$	
c	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
c	$a_n = u_1$	$u_0 = b_{n-1}$			
c	$a_n = b_n$				

(20) Кратность корней. Связь с производной

Опр. c – корень кр-ти k мн-на $f(x)$,

если $(x-c)^k \mid f(x)$, но

$(x-c)^{k+1} \nmid f(x)$

Теор. по сх. Горнера для f и c

$$\left.\begin{array}{l|cccc} & & & & 0 \\ & & & 0 & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & & \\ k & & & & \end{array}\right\} \text{кратность корня} = k$$

Производная мн-на

Опр. задан мн-н $f(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$

Тогда $f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1$

$f'(x) = \frac{df}{dx}$

Теорема $(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$f' = 0 \Leftrightarrow f - const$

$[(x-c)^k]' = k(x-c)^{k-1}$

Теор. Пусть c – кор. кр-ти k для $f(x)$

тогда c – кор. кр-ти $k-1$ для $f'(x)$

Док. $f(x) = (x-c)^k \cdot g(x)$,

где $g(c) \neq 0$

$$f'(x) = [(x-c)^k]' g(x) + (x-c)^k \cdot g'(x) =$$

$$= k(x-c)^{k-1} g(x) + (x-c)^k \cdot g'(x) =$$

$$= (x-c)^{k-1} [k g(x) + (x-c) \cdot g'(x)]$$

c – не явл. кор. [ ]

$$k \cdot g(c) + (c-c) \cdot g'(c) = k \cdot g(c) \neq 0$$

Следств. $d(x)$ – НОД $[f(x), f'(x)]$

Пусть $h(x) = \frac{f(x)}{d(x)}$

Тогда корнями $f(x)$ будут все

кр. корни $f(x)$, но их кр-ть ↓ на 1

Корнями $h(x)$ будут все корни $d(x)$,

но их кр-ть будет равна 1

Св-ва корней

У кажд. компл. мн-на ∃ компл. корень

След. Пусть $f(x)$ – компл. мн-н

Тогда $f(x) = a(x-c_1)^{k_1} \dots (x-c_m)^{k_m}$,

где $c_1 \dots c_m$ – разл. компл. корни $f(x)$, кр-ти $k_1 \dots k_m$

Теор.

$f(x)$ - вещ. мн-н, c - компл. кор.

Тогда компл. сопрят. $\bar{c}$ - корень $f(x)$

Док. $z = a + bi$, то $\bar{z} = a - bi$

Справедливо $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$\bar{z} = z \iff z \in R$

Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots a_0$

$f(c) = a_n c^n + \dots a_0$

$\overline{a_n c_n + \dots a_0} = \bar{0} = 0$

$\overline{a_n c_n} + \dots \overline{a_0} = \bar{0} = 0$

$\overline{a_n} \cdot \overline{c_n} + \dots \overline{a_0} = 0$

$\underbrace{a_n \cdot \overline{c_n} + \dots a_0}_{= f(\bar{c})} = 0$

След. Если c - в. кор. f, то $f(x) \vdots (x - c)(x - \bar{c})$

(21) Разложение компл. и вещ. мн-нов. Т. Штурма

Теор. Вещ. мн-н f разлагается на мн-н

$f(x) = a(x_1 - c_1)^{k_1} \dots (x_n - c_n)^{k_n} (x^2 + p_1 x + q_1)^{h_1} \dots$

$(x^2 + p_s x + q_s)^{h_s}$, где $x^2 + p_s x + q_s$ не им. вещ. к.

Док. $f(x)$ – компл. мн-н

$x(-c)(x-\bar{c})$

$c = a + bi \quad \bar{c} = a - bi$

$(x-a-bi)(x-a+bi) = (x-a)^2 - (bi)^2 = x^2 - 2xa + a^2 + b^2$

– вещ. мн-н

Пусть $f(x)$ – компл. мн-н

$f(x) = a_n x^k + a_n x^n \dots a_1 x + a_0$

$a_n, a_k \neq 0 \quad n > k$

Пусть $B = \max\{|a_n|, |a_{n-1}| \dots |a_0|\}$

Теор. Если c – компл. кор. $f(x)$,

то $|c| < \sqrt[n-k]{\frac{B}{|a_n|}} + 1$

Пусть $f(x)$ – вещ. мн-н без кр. корней

Построим ряд Штурма

$f_0(x) - f(x) \quad f_1(x) = f'(x) \quad \dots$

Если f_{i-1} и f_i постр., то f_{i+1} –

ост. со зн. '–' от деления $f_{i-1} \mid f_i$

Пусть $f_0, f_1 \dots$ – ряд Штурма и c - вещ. число

Тогда $w(c)$ число смен знаков в р-ти

$f_0(c), \quad f_1(c) \dots$

Теор. (Штурма)

Пусть у вещ. мн-на $f(x)$ нет кр. корней

Пусть $u < v$ (не явл. корн.) - вещ. числа

Тогда число вещ. корней в инт. (u, v)

равно $\omega(u) - \omega(v)$

Рац. дроби

Опр. Рац. дробь - отн мн-нов f/g, где $g \neq 0$

$$\frac{f}{g} = \frac{a}{b} \iff fb = ga$$

Рав-во многочленов: коэф. при одинак. ст. равны

$$\frac{f}{g} = \frac{f \cdot p}{g \cdot p}, \text{ где } p \neq 0$$

Опр. $\frac{f}{g} + \frac{a}{b} = \frac{fb + ag}{g \cdot b}$

$\frac{f}{g} \cdot \frac{a}{b} = \frac{fa}{gb}$

Теор. если $f/g = u/v$, $a/b = p/q$, то

$$f/g + a/b = u/v + p/q$$

$$f/g \cdot a/b = u/v \cdot p/q$$

$f = \frac{f}{1} \Rightarrow$ люб. мн-н пред. в виде ~~рац~~ др.

Классификация

Опр. f/g - правильная, если $\deg f < \deg g$

(22) Разлож. рац. дроби в сумму мн-на и пр. др.

Разлож. прав. др в сумму прост. в

компл. и вещ. др.

<u>Теор.</u> Люб. рац. дробь явл. суммой

мн-на и прав. дроби

<u>Док.</u> f/g – непр. дробь

$\deg f \geq \deg g$

f/g : $f = g \cdot q + r$, где $\underline{\deg r < \deg g}$

$$\frac{f}{g} = \frac{g \cdot q + r}{g} = q + \frac{r}{g}$$ ← прав. др.

<u>Опр.</u> Простейш. (компл.) дробь

$\dfrac{A}{(x-c)^k}$ A, c – компл. конст. $k \in \mathbb{Z}$

<u>Теор.</u>

Пусть зад. $\dfrac{f}{g}$ – компл. прав. дробь

Тогда g расклад. на мн-ли 1ой ст.

$g = a(x-c_1)^{k_1} \ldots (x-c_m)^{k_m}$, $a \neq 0$ – конст., $c_1 \ldots c_m$ – корни

Тогда $\dfrac{f}{g}$ – сумма прост. др. вида

$\dfrac{A}{(x-c_j)^{r_j}}$, где $1 \leq r_j \leq k_j$

$(x-c_j)$ – мн-ли, пот. встреч. в g,

причем при кр. корне запис. все мн-ли

$k_1 \dots k_n$, пот. встреч. в разложениях

Убирая наибольшую ст., можно

приравнивать Σ коэф. к 0

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-2)}$$

$$0 = A + C$$

<u>Опр.</u> Простейшая вещ. дробь 2ух типов:

1) $\frac{A}{(x-c)^k}$ A, c – вещ числа

2) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ A, B, p, q – вещ. числа x^2+px+q $D<0$

<u>Теор.</u> f/g – прав. вещ дробь

$g = a(x-c_1)^{k_1} \dots (x-c_n)^{k_m} (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \dots$

$(x^2+p_r x+q_r)^{s_r}$

f/g – сумма прост. др.

вида $\frac{A}{(x-c_j)^{\alpha_j}}$ $1 \le \alpha_j \le k_j$

и $\frac{Ax+B}{(x^2+p_jx+q_j)^{\nu_j}}$ $1 \le \nu_j \le s_j$

$$\frac{x^3 + 2x + 1}{(x-1)^2} = q + \frac{r}{(x-1)^2}$$

Т. о сумме мн-на и пр. др.; сумма прост.

Линейная алгебра

2 коллоквиум

~~1 2 3 4 5 6 7 8 9 10~~

~~11 12 13 14 15 16 17 18 19~~

① Векторные пр-ва. Линейная зависимость

Вект. пр-во — непустое мн-во векторов $\mathcal{Z}$, если $\forall x, y \in \mathcal{Z}$ опр-на $x + y \in \mathcal{Z}$ и $\forall \alpha$ опр-н $\alpha x \in \mathcal{Z}$

При этом 1) $x + y = y + x$

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

3) $\exists 0 \in \mathcal{Z}$, что $x + 0 = x \quad \forall x$

▶ O_1 и O_2 удовл. усл.

$$\left.\begin{aligned} &\overset{=x}{O_1} + \overset{=0}{O_2} = O_1 \\ &O_1 + O_2 = \overset{=x}{O_2} + \overset{=0}{O_1} = O_2 \end{aligned}\right\} O_1 = O_2 \text{ — единств.}$$

4) $\forall x \in \mathcal{Z} \ \exists (-x) \in \mathcal{Z} \quad x + (-x) = 0$

▶ y, z противоп. x

$x + y = x + z = 0$

$$\begin{cases} (y + x) + z = (x + y) + z = 0 + z = z + 0 = z \\ (y + x) + z = y + (x + z) = y + 0 = y \end{cases}$$

$z = y$ единств.

5) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$

6) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

8) $1 \cdot x = x$

Опр. Пусть $x_1 \dots x_n \in Z$ $\alpha_1 \dots \alpha_n$ – числа

Тогда вектор $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$

– линейная комбинация $x_1 \dots x_n$

Опр. Сист. векторов $x_1 \dots x_n \in Z$ – лин. зависима,

если $\exists$ ненул. набор $\alpha_1 \dots \alpha_n$, что

$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$

Опр. Сист. векторов $x_1 \dots x_n \in Z$ – лин. независима,

если $\nexists$ $\alpha_1 x_1 + \dots \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \dots = \alpha_n = 0$

Опр. Лин. оболочка $\langle x_1 \dots x_n \rangle$ у набора

векторов $x_1 \dots x_n$ – мн-во всех

лин. комбинаций этой сист. векторов

След. Если в системе $\exists$ нул. вектор $\Rightarrow$ зависима

▶ $x_1 \dots x_n$ – система, $x_1 = 0$, $a_1 \neq 0$

$a_1 x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots 0 \cdot x_n = 0$

След. Если $x_1 \dots x_n$ – зависима $\Leftrightarrow$ один из

её векторов – лин. комбинация остальных

(сумма векторов с ненул. коэф.)

$\Rightarrow$ Пусть $x_1 \dots x_n$ зависима $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ $(\alpha_1 \neq 0)$

$\alpha_1 x_1 = -\alpha_2 x_2 - \dots - \alpha_n x_n$

$x_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) x_2 - \dots \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) x_n$

$\Leftarrow$ $x_1 = \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$

$\underset{\neq 0}{1} \, x_1 + (-\beta_2) x_2 + (-\beta_3) x_3 + \dots + (-\beta_n) x_n = 0$

② Критерий равенства нулю определителя

Теор. $|A| = 0 \Leftrightarrow$ строки/столбцы м-цы зависимы

$\Leftarrow$ Строки $A_1 \dots A_n$ м-цы A лин. зависимы;

значит ~~одна~~ из строк - лин. комб. остальных

Пусть $A_1 = \beta_2 A_2 + \dots + \beta_n A_n$

опр. не меняется

$\underbrace{A_1 - \beta_2 A_2 - \dots - \beta_n A_n}_{} = 0$

$\Downarrow$

$|A| = 0$, т.к. $\exists$ нул. строка

$\Rightarrow$ Для $M_{2\times 2}$ опр. $|A| = 0$, когда строки

пропорциональны

③ Осн. лемма о лин. зависимости.

Размерность пространства

Теор. Пусть в лин. пр-ве L заданы

две сист. векторов $\{a_1 \dots a_n\}$ и $\{b_1 \dots b_m\}$

$a_i = \alpha_{i1} b_1 + \dots \alpha_{in} b_m$ $(1 \leq i \leq n)$, если $n > m$,

то $a_1 \dots a_n$ лин. зависимы

▶ $a_1 = b_1\alpha_{11} + \dots b_m \alpha_{m1}$

$\dots$

$a_n = b_1\alpha_{1n} + \dots b_m \alpha_{mn}$

Рассм. однор. систему

$$\begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \dots + \alpha_{1n} x_n = 0 \\ \dots \\ \alpha_{m1} x_1 + \dots + \alpha_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

Число ур-й $= m$, число неизвестных $= n$ $(n > m)$

– тогда система имеет нетр. решение $(\beta_1 \dots \beta_n)$

$a_1\beta_1 + \dots a_n\beta_n = (b_1\alpha_{11} + \dots b_m\alpha_{m1})\beta_1 + \dots$

$+ (b_1\alpha_{1n} + \dots b_m\alpha_{mn})\beta_n = (\alpha_{11}\beta_1 + \dots \alpha_{1n}\beta_n) b_1 + \dots$

$+ (\alpha_{m1}\beta_1 + \dots \alpha_{mn}\beta_n) b_m = 0 \cdot b_1 + \dots + 0 \cdot b_m = \vec{0}$

Опр. Система векторов $e_1 \dots e_k$ – базис линейного пр-ва V, если

1) $e_1 \dots e_k$ лежат в V

2) $e_1 \dots e_k$ лин. независимые

3) $\langle e_1 \dots e_k \rangle = V$

$\forall x \in V$ явл. лин. комб. $e_1 \dots e_k$

Теор. $\forall$ базисы мн-ва X сост. из одинак. числа векторов

▶ $\{e_1 \dots e_n\}$; $\{e_1' \dots e_m'\}$ – два базиса X

e_i' – лин. комб. $e_1 \dots e_n$

$e_1' \dots e_n'$ - независимы,

т.к., если $m < n$, то $e_1 \dots e_n$ лин. зав., что

неверно $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} m \le n \\ n \le m \end{matrix}\right\} \Rightarrow n = m$

Опр. Размерность лин. пр-ва ($\dim V$)

— число векторов в базисе

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & \underset{-a_1}{\overset{}{a_2}} & a_3 & \underset{2a_1+3a_2}{a_4} & a_5 \end{matrix} \end{array}$$

$a_2 = -a_1$, $a_4 = 2a_1 + 3a_2$

a_1, a_3, a_5 - базисы

$\dim V = 3$

Опр. $e_1 \dots e_n$ - базис пр-ва V и $x \in V$

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, x_i - числа

Набор $(x_1 \dots x_n)$ наз-ся набором коорд.-вект. x в базисе $e_1 \dots e_n$

Теор. Набор коорд. опр-н однозначно

- при сложении вект. коорд. склад-ся
- при умножении на число - умн. на число

▶ $x = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n e_n = y_1 \cdot e_1 + \dots + y_n e_n$

$(x_1 - y_1)e_1 + \dots + (x_n - y_n)e_n = 0$

т.к. $e_1 \dots e_n$ лин. независ., то $(x_1 - y_1) = 0 \dots (x_n - y_n) = 0$

$$+\begin{array}{l} x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \\ z = z_1 e_1 + \ldots + z_n e_n \end{array}$$

$$x + z = (x_1 + z_1) e_1 + \ldots + (x_n + z_n) e_n$$

$$\alpha x = (\alpha x_1) e_1 + \ldots + (\alpha x_n) e_n$$

Переход к другому базису:

$\{e_1 \ldots e_n\}$, $\{e_1' \ldots e_n'\}$ – два базиса

$$\begin{cases} e_1' = e_1 c_{11} + \ldots + e_n c_{n1} \\ \ldots \\ e_n' = e_1 c_{1n} + \ldots + e_n c_{nn} \end{cases} \qquad c_{ij} \text{ – число}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{n1} \\ \ldots \\ c_{1n} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

C – матрица перехода $(e_1 \ldots e_n)$ к $(e_1' \ldots e_n')$

Теор. Матр. перехода C невырожд.,

т.е. $|C| \neq 0$

$$(e_1' \ldots e_n') = (e_1 \ldots e_n) \cdot C$$

$$x = e_1 x_1 + \ldots + e_n x_n = (e_1 \ldots e_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Теор. Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец коорд. x

в базисе $e_1 \ldots e_n$; $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ – столбец

коорд. x' в базисе $e_1' \ldots e_n'$.

Тогда $X = C \cdot X'$

④ Прямые суммы подпространств

Опр. Непустое подмн-во U в лин. пр-ве V — подпространство, если

1) $x, y \in U \Rightarrow x+y \in U$

2) $x \in U \Rightarrow \alpha x \in U$. для $\forall \alpha$

Теор. Если $x_1 \dots x_n \in U$, то $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in U$ для $\forall\ \alpha_1 \dots \alpha_n$

Теор. Подпростр. явл. лин. простр-вом

$\dim U = \dim V$

▶ U им. в себе $(x+y)$ и αx.

Если $x \in U$, то $0 \cdot x = \vec{0}$

$\vec{0} \in U \Rightarrow 0 \in U \Rightarrow \forall x \in U$;

$(-1) \cdot x = -x$

Теор. U — подпростр. в лин. пр-ве V, тогда $\dim U \leq \dim V$.

Если V конечномерно и $\dim U = \dim V$, то $V = U$

Теор. Сист. лин. ур. $(*)\ AX = 0$, где X — ст. неизв.

Все решения $AX=0$ явл. подпр-вом в пр-ве столбцов высоты n

▶ X и Y – решения (*)

$A(X+Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0$

$A \cdot (\alpha X) = \alpha \cdot (AX) = \alpha \cdot 0 = 0$

Теор. Сумма подпр-в $U_1 \dots U_n$ – подпр-во

▶ $x = x_1 + \dots + x_n \in U_1 + \dots + U_n$

$y = y_1 + \dots + y_n \in U_1 + \dots + U_n$

$x + y = \underbrace{(x_1 + y_1)}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{(x_n + y_n)}_{\in U_n}$

$\alpha x = \underbrace{\alpha x_1}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{\alpha x_n}_{\in U_n}$

<u>Прямая сумма</u>

Опр. $U_1 + \dots + U_n$ – прямая сумма, если

$\forall x \in U_1 + \dots + U_n$

однознач. предст. в виде $x = x_1 + \dots + x_n$,

$x_i \in U_i$

Обознач. $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$

Теор. $U_1 + \dots + U_n$ – прямая сумма $\Leftrightarrow$

0 – нулевой эл-т – однозначно пред. в виде

$0 = x_1 + \dots + x_n \in U_1$. Тогда $x_1 = 0$

▶ $\Rightarrow$ Если сумма прям., то 0 одн. пред.

$\Leftarrow$ $x = x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$

$x_i, y_i \in U$

$$0 = \underset{\in U_1}{(x_1 - y_1)} + \ldots + \underset{\in U_n}{(x_n - y_n)}$$

В силу ед-ти разложения $x_1 - y_1 = 0, \ldots, x_n - y_n = 0$

$\Updownarrow$

$x_1 = y_1 \quad \ldots \quad x_n = y_n$

След. 1 Если $U_1 + \ldots + U_n$ – прямая сумма, то

$$\forall i \quad U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1}) = 0$$

▶ $z \in U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1})$

$$z = x_i = \underset{\in U_1}{x_1} + \ldots + \underset{\in U_{i-1}}{x_{i-1}}$$

$$0 = x_1 + \ldots + x_{i-1} + (-x_i)$$

в силу ед-ти разложения

$$x_1 = \ldots = x_{i-1} = -x_i = 0 \Rightarrow z = x_i = 0$$

След. 2 Пусть $U_1 \ldots U_n$ – подпр-во $\forall i = 2 \ldots n$

$$U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1}) = 0$$

Тогда сумма $U_1 + \ldots + U_n$ – прямая

▶ $0 = x_1 + \ldots + x_i^{\neq 0}$

$$0 \neq \underset{\in U_i}{x_i} = \underbrace{-x_1 - \ldots - x_{i-1}}_{\in U_1 + \ldots + U_{i-1}}$$ противоречие

Теор. $Z = U_1 + \ldots + U_n$ условия эквивалентности

1) $Z = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$

2) $U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1}) \quad \forall i = 2, \ldots, n$

3) если $e_{11} \ldots e_{1d_1}$ – базис $U_1, \ldots, e_{n1} \ldots e_{nd_n}$ – базис U_n

то $e_{11} \dots e_{1d_1} \dots e_{n1} \dots e_{kd_n}$ - базис $\mathcal{L}$

▶ Пусть 1) вып-ся

$x = x_1 + \dots + x_n \quad x_i \in U_i$

$x_1 = \sum \lambda_{1i} e_{1i}, \dots x_n = \sum \lambda_{ni} e_{ki}$

x - лин. комб. e_{ji}

проверим независимость

$0 = \sum \lambda_{ji} e_{ji} = \underbrace{\sum \lambda_{1i} e_{1i}}_{\in U_1} + \dots + \underbrace{\sum \lambda_{ki} e_{ki}}_{\in U_k}$

пред. 0 в виде ~~Σ~~ вект. из $U_1 \dots U_n$

$\underbrace{\sum \lambda_{1i} e_{1i} = 0}_{\Downarrow} \dots \underbrace{\sum \lambda_{ni} e_{ni} = 0}$

$\lambda_{1i} = 0 \qquad \lambda_{ni} = 0$

След. $\dim (U_1 \oplus \dots \oplus U_n) = \dim U_1 + \dots + \dim U_n$

⑤ Ранг матрицы, его неизм. при эл. преобр.

Опр. Ранг матрицы - число лин. независ. строк. Размерность лин. оболочки её строк: $r(A) = \dim \langle A_1 \dots A_m \rangle$, где $A_1, \dots A_m$ - строки

Опр. Ранг лин. пр-ва - число лин. независ. векторов этой системы

Теор. При эл. преобразов. строк ранг м-цы не меняется

$A_1 = A_1 + \lambda A_2$

тогда $\langle A_1, A_2 \dots A_m \rangle = \langle A_1 + \lambda A_2, A_2 \dots A_m \rangle$

$r(A) = \dim \langle A_1 \dots A_m \rangle = \dim \langle A_1 + \lambda A_2, \dots A_m \rangle$

размерность совп. $\Rightarrow$ $r(A)$ не изм.

аналогично $A_1 = \alpha A_1$ при $\alpha \neq 0$

$r(A) = \dim \langle A_1 \dots A_m \rangle = \dim \langle \alpha A_1 \dots A_m \rangle$

Замечание: $A_1 \dots A_n$ – строки м-цы A

$A_{i1} \dots A_{ik}$ – базис сис. строк

Рассмотрим лин. оболочку $\langle A_1 \dots A_n \rangle$,

т.е. мн-во всех лин. комб. $A_1 \dots A_n$

Тогда $\langle A_1 \dots A_n \rangle$ – подпр-во, $A_{i1} \dots A_{ik}$ –

базис оболочки этого подпр-ва

$r(A) = k = \dim \langle A_1 \dots A_n \rangle$

6 Теорема об окаймляющих минорах

Опр. Минор – для прям. м-цы –

Выбир. k – строк и k – столбцов

на пересеч. м-ца $k \times k$

Определитель этой м-цы минор п-на k

Если к м-це M добавить еще

одну стр. и столб. – получ. окаймл. минор M

Теор. Ранг A равен порядку ненул. минора, у кот. все окайм. мин. равны 0

$$\begin{array}{c c} & j \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1j} \\ \vdots & M\neq 0 & & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kj} \\ \hline & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & a_{ij} \end{array}\right) \\ i & \end{array}$$

$|A_{i\times j}| = 0$

$|A_{i\times j}| = a_{1j}A_{1j} + \dots + A_{kj}A_{kj} + a_{ij}M$

$a_{ij} = a_{ij}\left(-\frac{A_{1j}}{M}\right) + \dots a_{kj}\left(-\frac{A_{kj}}{M}\right)$ не зав. от j

$a_{ij} = a_{1j}\alpha_1 + \dots + a_{kj}\alpha_k$

$(a_{i1} \dots a_{in}) = (a_{11} \dots \underset{}{\overset{=0}{a_{1k}}})\alpha_1 + \dots + (a_{k1} \dots a_{kn})\alpha_k$

$\Rightarrow$ i-ая стр. - лин. комб. первых k строк

Если первые k строк зав. $\Rightarrow M=0$, что неверно

При добавл. нул. строк опр-ль нов. м-цы равен 0

$\Rightarrow$ окайм. минор $= 0$

(7) Теорема о ранге матрицы

След. Ранг м-цы A = Ранг м-цы ${}^tA$

След. Ранг м-цы равен макс. числу независ. столбцов

След. Ранг ступ. м-цы равен числу ненул. строк

$$M = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix}_{k\times k} \qquad M = 1 \neq 0$$

В мод. окайм. мин. будет 0

⑧ Размерность пространства решений системы линейных однородных уравнений $AX = 0$ (*), где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Теор. Размерность ~~пр~~ пр-ва решений (*) $AX = 0$ равна $n - r(A)$, где n – число неизвестн.

▶ Привод. сист. к ступ. виду

число ненул. ур-й = число гл. неизв. = $r(A)$

Пусть ~~даны~~ даны 2 ур-ия:

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 - 4x_4 + x_5 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases}$$

$r(A) = 2 \qquad n = 5$

Пусть $x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0$

Тогда $x_1 = 5 \quad x_2 = -1$

$e_3 = (5, -1, 1, 0, 0)$

Пусть $x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 0$

Тогда $x_1 = -4 \quad x_2 = -1$

$e_4 = (-4, -1, 0, 1, 0)$

Пусть $x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1$

Тогда $x_1 = 1 \quad x_2 = 0$

$e_5 = (1, 0, 0, 0, 1)$

$$\begin{array}{c} e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Утвержд. e_3, e_4, e_5 векторы независимы

$\triangleright$ Выделим минор (ст. неизв.),

равен единичной м-це

Минор порядка $3 \neq 0$

$$|E| = 1 \neq 0$$

По т. об окаймл. миноре $\Rightarrow$ строки независ.

Любое решение - их лин. комбинация

$(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_5)$ - решение

Рассмотрим; вычтем лин. к. постр. векторов

$(\alpha_1 \dots \alpha_5) - \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 - \alpha_5 e_5 =$

$= (*, *, 0, 0, 0)$ - также явл. решением

$= (0, 0, 0, 0, 0)$

Вывод: $(\alpha_1 \dots \alpha_5) = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5$

любое решение - их лин. комбинац.

Базис пр-ва решений одн. сист. решений -

фундаментальная система решений

(11) Ранг произведения матриц

Связь ранга м-цы с осн. операциями

Теор. 1) $r(AB) \leq \min[r(A), r(B)]$

2) Если одна из м-ц обратима, то $r(AB)$ равен рангу $2^{ой}$ м-цы

▶ 1) $C = A \cdot B$

$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} b_{1j} + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} b_{nj}$$

Столбец C – лин. комб. так. столбц.

Каждый столб. с – лин. комб. столб. A

⇓

Каждый базисной столб. из C явл. лин. комб. базисн. столб. A

$r(C) \leq r(A)$

Аналогично $r(C) \leq r(B)$

2) Пусть $\exists A^{-1}$

$r(AB) \leq r(B) = r(A^{-1} \cdot AB) \leq r(AB)$

по т. о зап. перемен.

$\Rightarrow r(AB) = r(B)$

След. $\left.\begin{array}{l} A_{n\times m} \cdot B_{m\times n} = E_n \\ B_{m\times n} \cdot A_{n\times m} = E_m \end{array}\right\} \Rightarrow m = n$

▶ $r(AB) = r(E_n) = n$

$r(AB) = r(A) \Rightarrow n \leq r(A)$

Пусть $m < n$

$r(A) \leq$ число столбцов $A = m$

$m < n \leq r(A) \leq m$ противоречие

След. $n \leq m$

аналогично получаем $m < n$

$\Rightarrow m = n$

(12) Ранг суммы матриц

Теор. $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

▶ Пусть $A_1 \dots A_n$ – строки A

$B_1 \dots B_n$ – строки B

Размеры A и B – одинак.

Строка $(A+B)_i = A_i + B_i$

A_i – лин. комб. базисн. строк $A_{i1} \dots A_{ir}$ из A

B_i – лин. комб. баз. строк $B_{j1} \dots B_{jk}$ из B

$r = r(A)$

$k = r(B)$

$A_i + B_i$ – лин. комб. строк $A_{i1} \dots A_{ir}$ и $B_{j1} + \dots B_{jk}$

Пусть $(A_{i^*}, \dots, A_{i^{**}})$

Любая базис. строка м-цы $A+B$ –

лин. комб. $A_{i1}, \dots, A_{ir}$; $B_{j1} \dots B_{jk}$

По осн. лемме о лин. зав-ти

$r(A+B) \le r+k = r(A) + r(B)$

$\Rightarrow r(A+B) \le r(A) + r(B)$

След. $\alpha \ne 0$, то $r(\alpha A) = r(A)$

9 Теорема Кронекера – Капелли

Теор. Сист. лин. ур. $AX=b$ совместна

$\iff r(A) = r(A|b)$

$\tilde{A}$ – расш. м-ца $(A|b)$

▶ 1) $\Rightarrow$ Если $\exists$ решение, то столб. b – лин. комб.

столбцов м-цы A $\Rightarrow$ добавление

столбца b в м-цу, т.е. переход $A \to \tilde{A}$

не изм. ранга

2) $\Leftarrow$ Если $r(A) = r(\tilde{A})$, то они имеют

одинак. базисный минор.

Столбец b – лин. комб. столб. базисн. минора

$\Rightarrow$ $AX = b$ – совместна

⑩ Критерий единственности решения совместной системы лин. ур-й

Теор. Сист. лин. ур-й $AX = b$ им. единств. реш.

$\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A|b)$ = число неизвестных

▶ 1) $\Rightarrow$ Если $\exists$ единств. решение $AX = b$,

то b – лин. комб. ст. A,

причем $r(A) = n = \dim \langle A_1 \ldots A_n \rangle$

2) $\Leftarrow$ $r(A) = r(\tilde{A}) = n$ $\Rightarrow$

$\exists$ одинак. базисный минор $n \times n$

столбец b – лин. комб.

столбца баз. минора $n \times n$

$\Rightarrow$ $AX = b$ имеет един. решение

⑬ Плоскости и способы их задания

Опр. V – вект. пр-во, U – подпр-во, $a \in U$

Плоскость π, проходящая через a

с направляющ. подпр-вом U

– мн-во всех векторов $a + x$, $x \in U$

Замечание $U = \{ x - t \mid x, t \in \pi \}$

Опр. $\dim \pi = \dim U$

Пл-ть р-ти 1 – прямая

Теор.

Рассмотрим совм. сист. лин. ур-й

Пусть $AX = b$

Все решения $AX = b$ обр-ют пл-ть

размерностью $n - r(A)$, где n - число неиз.

▶ X_0 - частное решение

Рассмотрим однор. систему $AY = 0$

Все реш. однор сист. - подпр-во

размерности $n - r(A)$

Y - решение одн. системы

$A(X_0 + Y) = AX_0 + AY = b + 0 = b$,

т.е. $X_0 + Y$ - решение $AX = b$

Пусть Z - решение $AX = b$

$Z - X_0 = Y$

$AY = A(Z - X_0) = AZ - AX_0 = b - b = 0$ ■

$\pi = a + U = \{a + u \mid u \in U\}$

I. $U = \langle f_1 \dots f_k \rangle$ - лин. оболочка $f_1 \dots f_k$

$z \in \pi \quad z = a + t_1 f_1 + \dots t_k f_k$, где $t_1 \dots t_k$ - пар-ры

Параметр. задание пл-тей

Миним. число п-ров k получ-ся, если $f_1 \dots f_k$ - базис U

Замечание: мин. число п-ров $k = \dim \pi$

II. Пусть в V выбран базис $e_1, \ldots, e_n$

$a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$

$a_1 = \alpha_{11} e_1 + \ldots + \alpha_{1n} e_n$

$\ldots$

$a_k = \alpha_{k1} e_1 + \ldots + \alpha_{kn} e_n$

тогда $п$-ть из всех векторов

вида $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ с координатами

$x_1 = \alpha_1 + t_1 \alpha_{11} + \ldots + t_k \alpha_{k1}$

$\ldots$

$x_n = \alpha_n + t_1 \alpha_{1n} + \ldots + t_k \alpha_{kn}$

Пример: $a = (1, -1, 2, 4)$

$f_1 = (1, 1, 0, 0)$

$f_2 = (7, 1, 0, -6)$ $\quad f_1, f_2$ — не пропорц., независ.

$$\begin{cases} z_1 = 1 + t_1 + 7t_2 \\ z_2 = -1 + t_1 + t_2 \\ z_3 = 2 \\ z_4 = 4 - 6t_2 \end{cases}$$

2-мерная пл-ть в 4-мерном пр-ве

Пример: Дана сист. ступ. вида

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 \\ x_2 = -7 + x_3 + x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \\ x_1 = 5 - 3t_1 + 4t_2 - t_3 \\ x_2 = -7 + t_1 + t_3 \end{cases}$$

Пример: Даны п-ры. зад. сист. ур-й

$$\begin{cases} z_1 = 1 + t_1 + 7t_2 \\ z_2 = -1 + t_1 + t_2 \\ z_3 = 2 \\ z_4 = 4 \qquad - 6t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 + 7t_2 = z_1 - 1 \\ t_1 + t_2 = z_2 + 1 \\ 0 = z_3 - 2 \\ -6t_2 = z_4 - 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & z_1 - 1 \\ 1 & 1 & z_2 + 1 \\ 0 & 0 & z_3 - 2 \\ 0 & -6 & z_4 - 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & z_2 + 1 \\ 0 & 6 & z_1 - z_2 - 2 \\ 0 & -6 & z_4 - 4 \\ 0 & 0 & z_3 - 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & z_2 + 1 \\ 0 & 6 & z_1 - z_2 - 2 \\ 0 & 0 & z_1 - z_2 + z_4 - 6 \\ 0 & 0 & z_3 - 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} z_1 - z_2 + z_4 - 6 = 0 \\ z_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

Пример: Даны т. A_0, A_1, A_2 – пр-ти пл-ть

U – лин. оболочка f_1, f_2

$A_0 = (-1, 1, 2, 2)$
$A_1 = (0, -1, -2, -1)$
$A_2 = (0, 0, 3, -3)$

$a = A_0$
$f_1 = A_0A_1 \in U \qquad f_1 = A_1 - A_0 = (1, -2, -4, -3)$
$f_2 = A_0A_2 \in U \qquad f_2 = A_2 - A_0 = (1, -1, 1, -5)$
$\qquad x - A_0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 + 1 \\ -2 & -1 & x_2 - 1 \\ -4 & 1 & x_3 - 2 \\ -3 & -5 & x_4 - 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 + 1 \\ 0 & 1 & 2x_1 + x_2 + 1 \\ 0 & 0 & -6x_1 - 5x_2 + x_3 - 3 \\ 0 & 0 & 7x_1 + 2x_2 + x_4 + 3 \end{array}\right) \quad \begin{cases} -6x_1 - 5x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_4 + 3 = 0 \end{cases}$$

Теор. $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Ур-ие прямой через т. A, B

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n}$$

при $a_k = b_k$ $x_k - a_k = 0$

(14) Пересечения плоскостей и способы их вычисления

Теор. Непустое пересеч. плоскостей явл. плоскостью

▶ $\Pi_1 : A_1 X = b_1$

$\Pi_2 : A_2 X = b_2$

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 : \begin{cases} A_1 X = b_1 \\ A_2 X = b_2 \end{cases}$$

Пример:

$$\Pi_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Pi_2 : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 4 + 2t \end{cases}$$

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 : \begin{cases} (1+t) + (-t) - (4+2t) = 1 \\ 2(1+t) + 3(-t) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -2t = 4 \\ -t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t = 2 \\ t = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ сист. несовм.

пл-ти не пересекаются

Пример:

$$\Pi_1 = \begin{cases} x_1 = 2 + t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = 4 + t_2 \end{cases}$$

$$\Pi_2 = \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 4 + 2t \end{cases}$$

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 : \begin{cases} 2 + t_1 - t_2 = 1 + t \\ t_1 = -t \\ 4 + t_2 = 4 + 2t \end{cases} \Rightarrow t_2 = -1 + 2t$$

п-ти пересек.

(15) Параллельность плоскостей. Условия параллельности плоскостей, заданных системами уравнений

Опр. $\Pi_1 = a_1 + U_1$

$\Pi_2 = a_2 + U_2$

тогда $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, если

1) $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$

2) $U_1 \subseteq U_2$

Теор. $\Pi_1 : A_1 X = b_1$

$\Pi_2 : A_2 X = b_2$

Сл. усл. эквивалентности

1) $\Pi_1 \parallel \Pi_2$

2) $r(A_1) = r\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix}$

$\Pi_1 \cap \Pi_2 \quad \begin{cases} A_1 x = b_1 \\ A_2 x = b_2 \end{cases}$

$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing \iff$ Сист несовместна

по т. Кронекера - Капелли это экв.

$$r\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} U_1 : A_1 x = 0 \\ U_2 : A_2 x = 0 \end{cases}$

$U_1 \subseteq U_2 \iff \forall$ реш $A_1 x = 0$

является решением $\begin{cases} A_1 x = 0 \\ A_2 x = 0 \end{cases}$

Размерность решения $A_1 x = 0$

$n - r\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$

$n - r(A_1)$

$\Pi = a + U$ — все векторы $a + x$, $x \in U$

$\Pi \quad Ax = b$ — сист лин ур-й

$U \quad Ax = 0$ — однородн сист

$\dim \Pi = \dim U$

$\dim \Pi$ опр-ся dim ведущего напр пр-ва U

$\dim \Pi = n - r(A)$

Пл-ть р-ти d в n мерном прве | см $n - d$ ур-ние

(16) Усл. параллельности плоскостей и гиперплоскостей. Условие параллельности двух гиперплоскостей

Опр. Гиперплоскость в n-мерном пр-ве — пл-ть размерности $n-1$

Теор. Гиперплоскость з-ся 1им ур-ем

$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$, где $\exists\, a_i \neq 0$

Замеч. в $2^{ом}$ пр-ве гиперпл-ть — прямая

в $3^{ом}$ пр-ве гиперпл-ть — пл-ть ($2^{ая}$)

Опр. $P_1 = a_1 + U_1$

$P_2 = a_2 + U_2$

$P_1 \parallel P_2 \iff$ 1) $P_1 \cap P_2 = \varnothing$

2) $U_1 \subseteq U_2$

Теор. $P_1 : A_1 X = B_1$

$P_2 : A_2 X = B_2$

Условия эквивалентны 1) $P_1 \parallel P_2$

2) $r(A_1) = r\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$

Теор. P - пл-ть ; Π - гиперпл-ть

Условия эквивалентны 1) $P \parallel \Pi$

2) $P \cap \Pi = \varnothing$

▶ $\Rightarrow$ по опр. п-ти

$\Leftarrow$ $\Pi: c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = d$ $\exists c_i \neq 0$

Пусть $\dim P = d$

Тогда $P: AX = b$ из $n-d$ ур-й

строки A независимы

$r(A) = n-d$

$\Pi \cap P: \begin{cases} AX = b \\ c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = d \end{cases}$

Положим $c = (c_1, \ldots, c_n)$ - строка

$\Pi \cap P = \varnothing \Leftrightarrow$ сист. несовместна

По т. Кронекера - Капелли

$r\begin{pmatrix} A \\ c \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} \leq r(A) + 1$

$\begin{cases} r\begin{pmatrix} A \\ c \end{pmatrix} \leq r(A) \\ r\begin{pmatrix} A \\ c \end{pmatrix} \geq r(A) \end{cases} \Rightarrow r(A) = r\begin{pmatrix} A \\ c \end{pmatrix}$

c - лин. комб. строк м-цы A

$r(A) = r\begin{pmatrix} A \\ c \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P \parallel \Pi$

Теор. Пусть зад. 2 гиперпл-ти

$P_1: a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$

$P_2: c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = d$

Усл. эквивалентности 1) $P_1 \parallel P_2$

2) $P_1 \cap P_2 = \varnothing$

3) $\frac{a_1}{c_1} = \ldots = \frac{a_n}{c_n} \neq \frac{b}{d}$

▶ 1) $1 \Leftrightarrow 2$ частн. случ. предыд. теор.

2) $P_1 \cap P_2 : \begin{cases} a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b \\ c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = d \end{cases}$

$P_1 \cap P_2 = \varnothing \Leftrightarrow$ по т. Кронекера – Капелли

$$1 \leq r\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ c_1 & \ldots & c_n \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n & b \\ c_1 & \ldots & c_n & d \end{pmatrix} \leq 2$$

$$\underset{1}{\shortparallel} \qquad\qquad \underset{2}{\shortparallel}$$

$$r\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ c_1 & \ldots & c_n \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{c_1} = \ldots = \frac{a_n}{c_n}$$

$$r\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n & b \\ c_1 & \ldots & c_n & d \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{c_1} = \ldots = \frac{a_n}{c_n} \neq \frac{b}{d}$$

Пример: $2x - y + 4z = 7$ – гиперпл-ть P_1

$A(1, 4, 5)$

1) Написать ур-ие п-ти через A параллельно P_1

$2x - y + 4z = 2 \cdot 1 - 4 + 4 \cdot 5 = 18$

2) $P_1 : 2x - y + 4z = 7$ $\qquad P_1 \cap P_2 = \varnothing$

$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 4 \\ z = -1/4\, t + 5 \end{cases}$ $\qquad U_2 \subseteq U_1$

$\left.\begin{array}{l} U_2 \ \langle 1, 1, -\frac{1}{4} \rangle \\ U_1 = 2x - y + 4z = 0 = 2 \cdot 1 - 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} \end{array}\right\} U_2 \subset U_1$

$2(t+1) - (t+4) + 4(-\frac{1}{4}t + 5) = 7$

$2t + 2 - t - 4 - t + 20 = 7$

$18 \neq 7$ => пл-ти не пересекаются

=> $P_2 \parallel P_1$

17 Билинейные функции и их матрицы Грама. Изменение матриц Грама при изменении базиса

Опр. P — вещ. пр-во, α, β - числа, x, y - векторы

Веществ.-значная ф-я $b(x,y)$, где $x, y \in P$ наз-ся билинейной, если

1) $b(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha b(x_1, y) + \beta b(x_2, y)$

2) $b(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha b(x, y_1) + \beta b(x, y_2)$

U - все квадр. м-цы $n \times n$

$b(X, Y) = t_2(XY)$ — след $X \cdot Y$

U - все диффер. ф-ии

$b(f,g) = (fg)'(c)$

U - непрерывные ф-и

$b(f,g) = \int_0^1 fg(x)\,dx$

Опр. $b(x,y)$ - билин. ф-е, $a_1 \dots a_2 \in U$

Тогда м-ца Грама

$$G(a_1 \dots a_n) = \begin{pmatrix} b(a_1, a_1) & \dots & b(a_1, a_k) \\ \vdots & & \\ b(a_n, a_1) & \dots & b(a_n, a_k) \end{pmatrix}$$

Пусть $e_1 \dots e_n$ – базис U

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$

Тогда $b(x,y)$ выраж-ся через $x, y, G(e_1 \dots e_n)$

$b(x,y) = b\left(\sum_i x_i e_i, y\right) = \sum_i x_i \cdot b(e_i, y) =$

$= \sum_i x_i \cdot b\left(e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum x_i \cdot b(e_i, e_j) \cdot y_j =$

$= (x_1 \dots x_n) \cdot G(e_1 \dots e_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Изм. м-цы G при переходе к др. базису:

$(e_1' \dots e_n')$ – новый базис, C – м-ца перехода

$(e_1' \dots e_n') = (e_1 \dots e_n) \cdot C$

$e_i' = e_1 c_{1i} + \dots + e_n c_{ni}$

$\forall i \quad C = (c_{ij})$

$G(e_1' \dots e_n')$:

$b(e_i', e_j') = (c_{1i} \dots c_{ni}) \cdot G(e_1 \dots e_n) \cdot \begin{pmatrix} c_{j1} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{pmatrix}$

Теорема: $G(e_1' \dots e_n') = {}^tC \cdot G(e_1 \dots e_n) \cdot C$

Пример $\quad b(x,y) = 1 \cdot x_1 y_1 + 2 x_1 y_2 + 3 x_2 y_1 + 0 \cdot x_2 y_2$

$G(e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

(18) Билинейные симметричные и квадратичные функции

Опр. Билин. ф-я $b(x,y)$ – симметрична, если $b(x,y) = b(y,x)$ $\forall x,y$

Теор. $e_1 \dots e_n$ – базис

ф-я $b(x,y)$ симм-на $\Leftrightarrow G(e_1 \dots e_n)$ – симметр.

▶ $\Rightarrow$ $b(x,y)$ – симметр.

Тогда $b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i)$

$\Rightarrow G(e_1 \dots e_n)$ – симметр.

$\Leftarrow$ $G(e_1 \dots e_n)$ – симметр.

т.е. $b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i)$ $\forall i,j$

$$b(x,y) = \sum_{i,j} x_i\, b(e_i, e_j) \cdot y_j$$

$$b(y,x) = \sum_{i,j} y_i\, b(e_i, e_j) \cdot x_j = (i \Leftrightarrow j)$$

$$= \sum_{i,j} y_j\, b(e_j, e_i)\, x_i = \sum_{i,j} y_j\, b(e_i, e_j) \cdot x_i =$$

$$= \sum_{i,j} x_i\, b(e_i, e_j) \cdot y_j$$

Опр. $b(x,y)$ – бил. симм. ф-я

Тогда квадр. ф-я вводится как

$q(x) = b(x,x)$

Теор. По $q(x)$ ф-я $b(x,y)$ находится однозначно

▶ $\frac{1}{2}[q(x+y)-q(x)-q(y)] = \frac{1}{2}[b(x+y,x+y)-$

$-b(x,x)-b(y,y)] = \frac{1}{2}[b(x,x+y)+b(y,x+y)-$

$-b(x,x)-b(y,y)] = \frac{1}{2}[b(x,x)+b(x,y)+b(y,x)$

$+b(y,y)-b(x,x)-b(y,y)] = \frac{1}{2}\cdot 2b(x,y) = b(x,y)$

М-ца G квадр. ф-ии:

$$b(x,y) = \sum_{i,j} x_i \cdot b(e_i,e_j)\cdot y_j$$

$$q(x) = b(x,x) = \sum_{i,j} x_i\, b(e_i,e_j)\cdot x_j =$$

(если $i=j$) $= x_1^2 b(e_1,e_1) + \ldots + x_n^2 b(e_n,e_n)$

(если $i<j$) $= \sum_{i,j} x_i x_j (b(e_i,e_j)+b(e_j,e_i))$

Тогда

$$q(x) = b(x,x) = x_1^2 b(e_1,e_1) + \ldots + x_n^2 b(e_n,e_n) +$$

$$+ 2\sum_{i<j} x_i x_j b(e_i,e_j)$$

Пример: $q(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$

$$G \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$k:2$

19 Положительно определенные квадр. ф-ии. Критерий Сильвестра

Опр. Квадр. ф-я $q(x)$ полож. опр., если $q(x) > 0$ при $x \neq 0$

Пример: $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2$

Теор. Крит. Сильвестра

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

м-ца Грама квадр. ф-ии $q(x)$ в нек. базисе

Ф-я $q(x)$ полож. опр. $\Leftrightarrow$ $\forall k = 1 \dots n$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

Пример: $2\lambda x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$

$$G \begin{pmatrix} 2\lambda & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2\lambda > 0 \\ \begin{vmatrix} 2\lambda & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10\lambda - 4 > 0 \end{matrix}\right\} \lambda > \frac{2}{5}$$

① Евклидовы пространства. Процесс ортогонализации

Евклидово пр-во E — веществ. конечномерное пр-во, в кот. задана билинейная симметричная полож. опр. ф-я (x, y) (— скалярное произведение)

$x \perp y$ ортогональны при $x, y \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $(x, y) = 0$

$(a_1, \dots, a_k) \neq 0$ - сист. вект. ортогон. $\Leftrightarrow$ $a_i \perp a_j$ $i \neq j$

$(a_1, \dots, a_k) \neq 0$ - сист. век. ортонормиров. $\Leftrightarrow$ $(a_i, a_j) = 1$, $i = j$ и $(a_i, a_j) = 0$, $i \neq j$

~~[illegible]~~ -

Длина вектора $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

Теор. Если $(a_1, \dots, a_k)$ - орт. система, то $(a_1, \dots, a_k)$ - лин. независима

▶ $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

$(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k, a_1) = (0, a_1) = 0$

$\lambda_1 \underset{=0}{(a_1, a_1)} + \lambda_2 \underset{=0}{(a_2, a_1)} + \dots + \lambda_n \underset{=0}{(a_n, a_1)} = \lambda_i (a_i, a_1) = 0$

$a_1 \neq 0 \Rightarrow (a_1, a_1) > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$e_1, \dots, e_n$ - ортонорм. базис, если $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, т.е. $G(e_1, \dots, e_n) = E_n$

$(x, y) = (x_1, \dots, x_n) E \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Процесс ортогонализации

$a_1, \dots, a_n$ - незав. сист. вект. в E.

Построим $b_1, \dots, b_k$: $b_1 = a_1$ Пусть $b_1, \dots, b_j$ построены

то $b_{j+1} = a_{j+1} - \frac{(a_{j+1}, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \dots - \frac{(a_{j+1}, b_j)}{(b_j, b_j)} b_j$

Теор. при ортогонализации опр. м-цы Грама не меняется

▶ $G(b_1, \dots, b_n) = {}^t C \cdot G(a_1, \dots, a_n) \cdot C$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$\det G(b_1, \dots, b_n) = \underset{=1}{\det {}^t C} \cdot \det G(a_1, \dots, a_n) \cdot \underset{=1}{\det C}$

② Матрица Грама скалярного произведения и св-ва её опред-ля

Скалярное произведение – пол. опр. симметр. билинейная ф-я в вещ. вект. пр-ве V

М-ца Грама сист. вект. $b_1, \dots, b_k$ пр-ва E:

$$G(b_1, \dots, b_k) = \begin{pmatrix} (b_1, b_1) & \dots & (b_1, b_k) \\ \dots & & \\ (b_k, b_1) & \dots & (b_k, b_k) \end{pmatrix}$$

Теор. Опр. м-цы Грама не меняется при проц. ортогонализации

▶ при переходе $\langle a_1, \dots, a_k \rangle = \langle b_1, \dots, b_k \rangle$, $b_1, \dots, b_k$ – ортонорм. базис пр-ва

тогда $e_i = \dfrac{b_i}{\|b_i\|}$, $i = \overline{1,k}$

сост. ортонорм. баз. пр-ва.

Из $a_i = e_1 \lambda_{1i} + \dots + e_{i-1} \lambda_{i-1\,i} + \|b_i\| e_i \quad i = \overline{1,k}$

$$G(a_1, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} \|b_1\| & \dots & 0 \\ \dots & & \\ * & \dots & \|b_k\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|b_1\| & \dots & * \\ \dots & & \\ 0 & \dots & \|b_k\| \end{pmatrix}$$

$$\det G(a_1, \dots, a_k) = \|b_1\|^2 \cdots \|b_k\|^2 = \det(b_1, \dots, b_k))$$

Теор. 1) если $a_1, \dots, a_k$ незав., то $\det G(a_1, \dots, a_k) > 0$

2) если $a_1, \dots, a_k$ завис., то $\det G(a_1, \dots, a_k) = 0$

▶ 1) $b_1, \dots, b_k$ получены пр. ортогон. из $a_1, \dots, a_k$

$$\det G(a_1, \dots, a_k) = \det G(b_1, \dots, b_k) = \begin{vmatrix} (b_1, b_1) & \dots 0 & 0 \\ \dots & & 0 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \dots (b_k, b_k) \end{vmatrix} = (b_1, b_1) \dots (b_k, b_k) > 0$$

2) $a_1, \dots, a_k$ – зависимы,

тогда ранг м-цы $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{k1} \\ \dots & & \\ a_{1k} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$ меньше k

$\Rightarrow$ ранг м-цы Грама также меньше k $\Rightarrow \det G = 0$

③ Ортогональное дополнение и разложение евклидова пр-ва

Теор[Пиф] Если $x \perp y$, то $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

▶ $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x+y) + (y, x+y) = (x,x) + \underbrace{(x,y)}_{=0} + \underbrace{(y,x)}_{=0} + (y,y) =$

$= (x,x) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Ортогон. дополнение $U^\perp$ к подпр-ву U в E — подпр-во, сост. из всех x в E, что $(x,y)=0$ $\forall y \in U$

$U^\perp = \{x \in E : x \perp y \ \forall y \in U\}$

Теор. $U^\perp$ явл. подпр-вом E; $E = U \oplus U^\perp$

$\forall z \in E$, $z = x + y$, где $x \in U$, $y \in U^\perp$

▶ $e_1, \ldots, e_k$ — ортонорм. базис U $\Rightarrow$ можно доп. до ортонорм базиса $e_1, \ldots, e_n$ в E

Пусть $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$

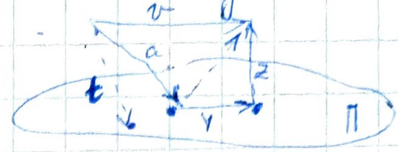
Тогда $x \in U^\perp \Leftrightarrow x_i = (x, e_i) = 0$ $\forall i = \overline{1,k}$

$\Rightarrow U^\perp = \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$

(4) Расстояние от т. до плоскости и гиперплоскости

Расстояние $\rho(x,\Pi)$ от $x\in E$ до Π — $\inf\limits_{t\in\Pi}\|x-t\|$.

Теор. $\Pi=a+U$, $v\in E$ имеет разложение $v-a=y+z$, где $y\in U$, $z\in U^\perp$. Тогда $\rho(v,\Pi)=\|z\|$



▶ Пусть $t\in\Pi$ $t=a+u$, $u\in U$ $\Rightarrow$ $t-a\in U$

$v-t=a+y+z-t=(y+a-t)+z$, где $y+a-t\in U$, $z\in U^\perp$

по т. Пиф. $\rho(v,\Pi)=\inf\limits_{t\in\Pi}\|v-t\|=\inf\limits_{t\in\Pi}\|(y+a-t)+z\|=\inf\limits_{t\in\Pi}\sqrt{\|y+a-t\|^2+\|z\|^2}=\|z\|$
$t=y+a$

<u>Алгоритм</u> нах. $\rho(v,\Pi)$, $\Pi=a+\langle b_1,\dots,b_k\rangle$

Пусть в нек. ортонорм. баз. $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b_i=(b_{1i},\dots,b_{ni})$ $i=\overline{1,k}$

$v-a=y+z$, $y\in U$, $z\in U^\perp$; то $y=t_1b_1+\dots+t_kb_k$

для $\forall i=\overline{1,k}$ $(y,b_i)=(b_1,b_i)t_1+\dots+(b_n,b_i)t_n$
$(y,b_i)=(v-a-z,b_i)=(v-a,b_i)$

$\Rightarrow$ сист. лин. ур. $G(b_1,\dots,b_k)\begin{pmatrix}t_1\\\vdots\\t_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v-a,b_1\\\vdots\\v-a,b_k\end{pmatrix}$

Отсюда нах. y и $z=v-a-y$; $\rho(v,\Pi)=\sqrt{\dfrac{\det G(b_1,\dots,b_k,v-a)}{\det G(b_1,\dots,b_k)}}$

<u>Алгоритм</u> нах $\rho(v,\Pi)$, Π: $f_1(x)+c_1=\dots=f_m(x)+c_m=0$
$f_i(x)=x_1a_{i1}+\dots+x_na_{in}$, $i=\overline{1,m}$

Тогда напр. подпр-во U зад-ся: $f_1(x)=\dots=f_m(x)=0$

Рассм. $d_i=(a_{i1},\dots,a_{in})$, $i=\overline{1,m}$, где $f_i(x)=(x,d_i)$

т.е. U: $(x,d_1)=\dots=(x,d_m)=0$ $\Rightarrow$ $\langle d_1,\dots,d_m\rangle=U^\perp$

$\Rightarrow$ $z=t_1d_1+\dots+t_mz_m$, $i=\overline{1,m}$ $\Rightarrow$ $(v-a,d_i)=(y+z,d_i)=(z,d_i)=$
$=t_1(d_1,d_i)+\dots+t_m(d_m,d_i)$

т.к. $a\in\Pi$, то $(a,d_i)=f_i(a)=-c_i$
$\Rightarrow$ $(v-a,d_i)=(v,d_i)-(a,d_i)=f_i(v)+c_i$ $\Rightarrow$ $G(d_1,\dots,d_m)\begin{pmatrix}t_1\\\vdots\\t_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(v)+c_1\\\vdots\\f_m(v)+c_m\end{pmatrix}$

⑤ Нер-во Коши-Буняковского. Угол между векторами

Нер-во $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$ $\quad (|(x,y)| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow x, y$ лин. зав$)$

▶ $\det G(x,y) = \begin{vmatrix} (x,x) & (y,x) \\ (x,y) & (y,y) \end{vmatrix} = \|x\|^2\|y\|^2 - (x,y)(y,x) = \|x\|^2\|y\|^2 - |(x,y)|^2 \geq 0$

причем рав-во, если x, y - пропорц.

След. $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, то $|\sum a_i b_i| \leq \sqrt{\sum a_i^2} \cdot \sqrt{\sum b_i^2}$

$\varphi(\widehat{x,y})$, где $x, y \in E \setminus 0$

$\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$ $\quad 0 \leq \varphi \leq \pi$ $\quad$ Причем $x \perp y \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\pi}{2}$

⑥ Угол между вектором и подпр-вом

Теор. $П \in E$ с пайр. прост. U $x \in E \setminus 0$

$x = y + z$ $\widehat{x, П} = \widehat{x, y} = \left|\inf_{y \in U \setminus 0} \{x, y\}\right|$ Опр

$y \in U$, $z \in U^\perp$

▶ $t \in U$, по К-Б $(y,t) \le \|t\| \|y\|$

$$\frac{(y,t)}{\|x\|\|t\|} \le \frac{\|y\|}{\|x\|} = \frac{(y,y)}{\|x\|\|y\|}$$

$z \in U^\perp \Rightarrow (y,t) = (x,t)$, $(y,y) = (x,y)$

$$\cos\varphi = \frac{(x,t)}{\|x\|\|t\|} \le \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|} = \cos\varphi$$

Квадр. вещ. м-ца Q ортог. $\Leftrightarrow Q^{-1} = {}^tQ$

Теор. e - ортонорм. базис $\in E$ $(a_1, \dots, a_n) = eQ$

1) Q - ортогональна
2) $a_1, \dots, a_n$ - ортонорм. базис $\in E$

Теор. Q разм. 2 ортогональна $\det Q = 1 \Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

⑦ Лин. операторы, их м-цы. Изм. м-цы оператора при изм. базиса. Действия над операторами и их м-цами

Лин. оператор $\mathcal{A}: V \to V$, если $\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}x + \beta \mathcal{A}y$ для $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta$

М-ца лин. опер. $A_e (a_{ij}) \in Mat(n)$ в базе $e \in V$

$$\mathcal{A}(e_j) = e_1 a_{1j} + \ldots + e_n a_{nj}, \quad j = \overline{1,n}$$

$$A = \begin{array}{c} \quad A(e_1) \quad\quad A(e_n) \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$ — м-ца A в баз. $e_1, \ldots, e_n$

Пусть $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Найдем коорд. $\mathcal{A}(x)$ в $e_1, \ldots, e_n$

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \mathcal{A}(e_1) + \ldots + x_n \mathcal{A}(e_n) = x_1 (e_1 a_{11} + \ldots + e_n a_{n1}) + \ldots + x_n (e_1 a_{1n} + e_n a_{nn}) =$$
$$= e_1 (a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n) + \ldots + e_n (a_{1n} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n) \Rightarrow \quad A(x) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

__Теор.__ Пусть $(e_1', \ldots, e_n') = (e_1, \ldots, e_n) C$, где C — м-ца перехода. Тогда A' в баз. e': $A' = C^{-1} A C$, где A — м-ца в базе e

$$\det A' = \det (C^{-1} A C) = \det A$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — лин. операторы λ — скаляр:

$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)$

$(\mathcal{A}\mathcal{B})(x) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x))$

$(\lambda \mathcal{A})(x) = \lambda (\mathcal{A}(x))$

__Теор.__ $\mathcal{A}+\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}, \lambda\mathcal{A}$ — лин. операторы

__Теор.__ A, B — м-цы $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ в $e_1, \ldots, e_n$, то $A + B$, AB, λA м-цы операторов $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}$, $\lambda\mathcal{A}$ соотв.

(8) Ядро лин. оператора, его размерность

Ядро $\ker \mathcal{A}$ – мн-во всех x : $\mathcal{A}(x)=0$
Образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ – мн-во всех вект. вида $\mathcal{A}(y)$ для $\forall y$ из лин. пр-ва

Теор. $\ker A$ – подпр-во V
Если x – вектор из V $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$
то $x \in \ker A \iff A_e X = 0$, где A_x – м-ца $\mathcal{A}$ в баз. e

▶

$x, y \in \ker A \Rightarrow \alpha x + \beta y \in \ker A$

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha(A(x)) + \beta(A(y)) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, т.е. $\alpha x + \beta y \in \ker A$

Если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то у $A(x)$ коорд. ст. $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$x \in \ker A \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

Следст. $\dim \ker A = \dim V - r(A_e)$

▶ $\dim \ker A$ – разм. пр-ва реш. сист $AX = 0$

$\dim \ker A = n - r(A_e) = \dim V - r(A_e)$

★ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ – подпр-во в V

$\dim \operatorname{Im} A = r(A_e)$

Обратный $\mathcal{A}^{-1}$ к $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}$

Тожд. опер. $\mathcal{E}(x) = x$, $\forall x$

Нул. опер. $\mathcal{O}(x) = 0$, $\forall x$

Теор. $e \in V$, A_e – м-ца $\mathcal{A}$ в e. Тогда $\mathcal{A}^{-1}$ в e : $A_e^{-1} - \mathcal{A}_e^{-1}$

Экв. условия
1) $\exists \mathcal{A}^{-1}$
2) $\ker \mathcal{A} = 0$
3) $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V$
4) $\det A_e \neq 0$

⑨ Инвариантные подпр-ва. Связь с м-цами

Инвариантное подпр-во $U \in V$ отн. $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}x \in U \quad \forall x \in U$

Теор. $\mathcal{A}$ лин. опер. в V, e - базис V, причём $(e_1, \dots, e_k)$ - базис U
A_e - м-ца $\mathcal{A}_e$

Усл. эквивалентны 1) U инвариантно отн $\mathcal{A}$

2) $A_e = \left(\begin{array}{c|c} A' & A'' \\ 0 & A''' \end{array}\right)$, где A', A'', A''' — м-цы

размеров $k \times k$, $k \times (n-k)$, $(n-k) \times (n-k)$

▶ Пусть U инв. $\Rightarrow \forall i = \overline{1,k} \ : \ A(e_i) \in U = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$

$\Rightarrow$ если $A_e = \left(\begin{array}{c|c} A' & A'' \\ 0 & A''' \end{array}\right)$, то $\mathcal{A}(x) \in U \quad \forall x = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k$

След. $\mathcal{A}$ - лин. опер. в V, причём $V = U \oplus W$, где U, W
инвар. подпр-ва в V

Пусть e - баз. V, причём $(e_1, \dots, e_k)$ - баз. U
$(e_{k+1}, \dots, e_n)$ - баз W

Тогда в баз. e м-ца $\mathcal{A}$ $\quad A_e = \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{array}\right)$

$A' \in Mat(k)$
$A'' \in Mat(n-k)$

⑩ Собств. векторы и собств. значения. Независимость собств. векторов с разн. собств. значениями. Характ. мн-н. м-цы. Вычисление собств. знач. и собств. векторов

Собственный вектор x – ненул. вектор для лин. оп. $\mathcal{A}$ с собств. знач. λ, если $\mathcal{A}(x) = \lambda x$

Характ. мн-н $\chi_A(t)$ м-цы A – мн-н $\det(A - tE)$

$\chi_A(t) = (-t)^n + (-t)^{n-1} \cdot \operatorname{tr} A + \ldots + \det A$

$\chi_{C^{-1}AC}(t) = \chi_A(t)$

Теор. Собств. знач. $\mathcal{A}$ – корни $\chi_{A_e}(t)$

Теор. $\mathcal{A}$ – лин. оператор в V. Собств. векторы для $\mathcal{A}$ с разл. собств. знач. – лин. независимы

▶ $\mathcal{A}(a_i) = \lambda_i a_i$, $i = \overline{1,k}$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$

$\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_k a_k = 0$

1) при $k=1$ утв. очевидно, т.к. $a_1 \neq 0$ 2) Пусть $k-1$ доказано
3) Применим $\mathcal{A}$:

$\lambda_1 \mu_1 a_1 + \ldots + \lambda_k \mu_k a_k = 0$

$(\lambda_1 - \lambda_k)\mu_1 a_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mu_{k-1} a_{k-1} = 0$

по инд. для $\forall i = \overline{1, k-1}$ $(\lambda_i - \lambda_k)\mu_i = 0 \Rightarrow \mu_i = 0$, т.к. $\lambda_i \neq \lambda_k$

$\Rightarrow \mu_k a_k = 0$ $\mu_k = 0$

След. $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ опер. $\mathcal{A}$ разл. $\Rightarrow \exists$ баз. в кот. мат-ца опер-ра $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Теор. $\mathcal{A}$ – лин. опер. в комплекс. вект. пр. V $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ имеет либо одномер., либо двумерное инв. подпр-во

Вычисление 1) вычисл. $|A - tE|$ 2) найти корни $t_1, \ldots, t_k$
3) для t_i решить сист. лин. одн. ур-й с м-цей $A - t_iE$

18 Симметрические операторы и их м-цы

e – ортонорм. баз. в E. $\mathcal{A}$ – лин. опер. в E с м-цей $A_e = (a_{ij})$

Тогда $(e_i, \mathcal{A}(e_j)) = a_{ji}$; $(\mathcal{A}(e_i), e_j) = a_{ij}$

▶ $(e_i, \mathcal{A}(e_j)) = \sum_{s=1}^{n} a_{js} (e_i, e_s) = a_{ji}$

$(\mathcal{A}(e_i), e_j) = (e_j, \mathcal{A}(e_i)) = a_{ij}$

<u>Симмет.</u> (самосопр.) <u>лин. оп.</u> $\mathcal{A}$ в E : $(\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{A}(y))$ $\forall x, y \in E$

<u>Теор.</u> e – ортонорм. баз. в E $\mathcal{A}$ – лин. опер. E с м-цей $A_e = (a_{ij})$

Усл. эквивалентны: 1) оператор $\mathcal{A}$ – симмет.

2) м-ца A_e симметрична ($a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$)

▶ $\overrightarrow{1)}$ $\mathcal{A}$ – симмет. $\Rightarrow$ A_e – симмет. $(e_i, (\mathcal{A}(e_j)) = a_{ij} = (\mathcal{A}(e_i), e_j) = a_{ji}$

2) Если $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, то $(\mathcal{A}(x), y) = \sum_{i,j} x_i y_j (\mathcal{A}(e_i), e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j a_{ij}$

$y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$

Аналогично $(x, \mathcal{A}(y)) = \sum_{i,j} x_i y_j a_{ij}$

(12) Ортогональность собств. векторов сим. оператора с разными собств. значениями

Теор. $\mathcal{A}$ - сим. оператор
x, y - собств. вект. с разн. собств. знач. $\lambda \neq \mu$
тогда $x \perp y$

▶ $\mathcal{A}(x) = \lambda x$
$\mathcal{A}(y) = \mu y \qquad \lambda \neq \mu$

$\left.\lambda(x, y) = (\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{A}(y)) = \mu(x, y)\right\} \Rightarrow (x, y) = 0$

⑬ Инвариантность ортогон. дополнения для сим. оператора

<u>Теор.</u> U - инвар. подпр-во в E отн. сим. опер. A
Тогда $U^{\perp}$ - инвариантно отн. A

► Пусть $x \in U^{\perp}$
$y \in U$

Тогда $(\underbrace{A(x)}_{\in U^{\perp}}, \underbrace{y}_{\in U}) = (\underbrace{x}_{\in U^{\perp}}, \underbrace{A(y)}_{\in U}) = 0$, поскольку $A(y) \in U$ по предположению

Отсюда $A(x) \in U^{\perp}$

(14) Диагонализируемость сим. оператора

Теор. A – сим. опер. в E
Тогда в E $\exists$ собств. ортонорм. базис

▶ Если $\dim E = 1$ => очевидно

Пусть $n = \dim E \geq 2$

в E $\not\exists$ собств. вектор для A
=> в E $\exists$ двумерное инвар. подпр-во U

Выберем в U произв. ортонорм. базис $f = (f_1, f_2)$

м-ца оператора $A|_U$: $A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Тогда $\begin{vmatrix} a-t & b \\ b & c-t \end{vmatrix} = t^2 - t(a+c) + ac - b^2$

$$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 =$$
$$= a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

=> в U есть собств. вектор
=> противоречие

Пусть e_1 – собств. вектор $\|e_1\| = 1$

Тогда $U = \langle e_1 \rangle$ – инвар. подпр-во

$E = U \oplus U^\perp$ => $U^\perp$ – инвариантно

$$\dim U^\perp = \dim E - 1$$

Аналогично по индукции => верно для $n - \dim E \geq 2$

След. A – сим м-ца => $\exists$ ортог. м-ца Q :
$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(15) Приведение билинейных симметричных ф-й к главным осям

Теор. Пусть $b(x,y)$ – билин. сим. ф-я в E, имеющ. в ортонорм баз. м-цу Грама B

Тогда $\exists$ ортонорм. базис в ком. м-ца ф-и $b(x,y)$ имеет диаг. вид, причем по гл. диагонали стоят собств. значения B

▶ Пусть $e_1, \dots, e_n$ – произв. ортонорм. базис

$$G(e_1, \dots e_n) = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & \dots & b(e_1, e_n) \\ \vdots & & \\ b(e_n, e_1) & \dots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

$$b_{ij} = b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i) = b_{ji}$$

По след. $\exists$ $Q^{-1} G(e_1, \dots, e_n) Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\underset{\text{ортонорм.}}{(e_1', \dots, e_n')} = (e_1, \dots, e_n) Q$$

$$G(e_1', \dots e_n') = \underset{\substack{\shortparallel \\ Q^{-1}}}{{}^tQ}\, G(e_1, \dots, e_n)\, Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(16) Ортогональные операторы и их м-цы

Ортогон. оператор Q в E сохр. длины векторов:
$\|Q(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$

Теор. Произвед. ортог. операторов – ортогонально
Обратный к ортог. опер. – ортогонален.

Теор. λ – собств. знач. Q $\Rightarrow$ $\lambda = \pm 1$

▶ $Q(x) = \lambda x \Rightarrow \|Q(x)\| = |\lambda| \|x\| = \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1$

Теор. $(x, y) = (Qx, Qy) \quad \forall x, y \in E$

Теор. Q – ортог. оп. в E
U – инв. подпр-во в E отн. Q
$U^{\perp}$ – инв. отн Q

Теор. x, y – собств. векторы с разн. собств. знач. орт. оп. $\Rightarrow x \perp y$

Теор. e – ортонорм. базис в E, Q – лин. оп. в E с м-цей Q_e
Условия эквиваленты: 1) Q – ортогонален
2) Q_e – ортогональна

▶ 1) $Q(e) = e\, Q_e$
Если Q – ортогон. опер., то $Q(e) = eQ_e$ – ортонорм. баз.
причем Q_e – м-ца перехода от e к $Q(e)$
$\Rightarrow$ м-ца Q_e ортогон.

2) Пусть Q_e ортогональна $\Rightarrow Q(e) = e\, Q_e$ – ортонорм. базис
Если $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in E$
то $Q(x) = x_1 Q(e_1) + \ldots + x_n Q(e_n)$
$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} = \|Q(x)\|$

Теор. Q – орт. оп. в двум. E. Если $\det Q = 1$, e_1, e_2 – произв. ортонорм. баз. в E, то $Q_e = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Если $\det Q = -1$, то $\exists$ ортонорм. баз. с $Q_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Теор. Q в трехмерном пр-ве E $\quad Q_e = \begin{pmatrix} \det Q & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

(17) Движения в евклидовом пр-ве

Расстояние между $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в E — длина $\overline{x-y}$

Движение (изометрия) евклидова пр-ва E — $\Phi : E \to E$, что сохр. расстояние между. $\forall x, y \in E$ $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \|x-y\|$

Сдвиг на фикс. $\bar{a}$, т.е. отображ. $x \longmapsto x+a$

<u>Теор.</u> композ. движений — движение

▶ Φ, Ψ - движения

$\forall x, y \in E$: $\|\Phi\Psi(x) - \Phi\Psi(y)\| = \|\Phi(\Psi(x)) - \Phi(\Psi(y))\|$
$= \|\Psi(x) - \Psi(y)\| = \|x-y\|$

<u>Теор.</u> $\Phi : E \to E$ явл. движением $\Longleftrightarrow$ $\exists$ лин. орт. оператор φ и вектор b, что $\Phi(x) = \varphi(x) + b$ $\forall x \in E$

$\Phi(x) = \varphi(x) + a$ — движ., где φ — орт лин. опер. в E

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — ортонорм. в E
$A = (a_{ij})$ — м-ца опер. φ в баз. e

Пусть $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$
$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ — произв. вект. из E

Тогда столбец коорд $\Phi(x)$ в e =

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(18) Приведение уравнений квадрик движением к канон. виду

Квадрика (п-ть второго порядка) в E с баз. e
— мн-во всех векторов $x = e_1x_1 + \ldots + e_nx_n$, что
$q(x) + 2(b_1x_1 + \ldots + b_nx_n) + c = 0$,
где $q(x)$ – квадр. ф-я, $b_1, \ldots b_n, c$ – вещ. числа

М-ца квадрики – м-ца A её квадр. части $q(x)$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Расшир. м-ца квадрики $\tilde{A} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{pmatrix}$

Тогда $0 = {}^tX \cdot A \cdot X + 2b \cdot X + c = (x_1, \ldots, x_n, 1)\tilde{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$,
где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b_1 = (b_1, \ldots, b_n)$

Теор. Примен. двит. E ур-е квадрики в E можно прив. к:
1) $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 + \mu = 0$, $\mu \neq 0$
2) $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 = 0$
3) $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 + 2\mu x_r - 1 = 0$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$

▶ Ур-е квадрики имеет вид $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 + 2(\mu_1 x_1 + \ldots + \mu_n x_n) + c = 0$,
где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$
если $i = \overline{1,r}$, то $\lambda_i x_i^2 + 2\mu_i x_i = \lambda_i(x_i + \frac{\mu_i}{\lambda_i})^2 - \frac{\mu_i^2}{\lambda_i}$

совершая сдвиг, можно считать $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$

Если $\mu_{r+1} = \ldots = \mu_n = 0$, то ур-ие вида 1 или 2

Пусть. вектор $f = \mu_{r+1}e_{r+1} + \ldots + \mu_n e_n \neq 0$

тогда вектор $g = \frac{f}{\|f\|}$ имеет длину 1,
перпендикулярен векторам $e_1, \ldots, e_r$

След. сист. $e_1, \ldots, e_r, g$ можно доп. до ортонорм. базиса E

В этом базисе ур-ие имеет вид $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 + 2\mu x_{r+1} + c' = 0$
$\mu \neq 0$

При этом $2\mu x_{r+1} + c' = 2\mu(x_{r+1} + \frac{c'}{2\mu})$

Совершая перенос, получим ур-ие вида 3.

(19) Инварианты преобр. ур-й квадрик при движениях

__Теор.__ в E зад. e', e два ортонорм баз.: $e' = eC$
Если $A, \tilde{A}$ – м-цы квадр. в баз. e, то в e'
они будут иметь вид $A' = {}^tC A C$

$$\tilde{A}' = {}^t\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\tilde{A}\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Если мы совершаем преобр. переноса нач. коорд.
$x_1 = x_1' + d_1, \dots, x_n = x_n' + d_n$

то м-ца A не меняется, $\tilde{A}$ заменяется на:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ d_1 & \dots & d_n & 1 \end{pmatrix} \tilde{A} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & d_1 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 1 & d_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

__Теор.__ Инвар. ур-й квадрик при движ. пр-ва
явл. ф-и $\det A, \operatorname{tr} A, \det \tilde{A}, r(A), r(\tilde{A})$

При движ. не меняются $\det A, \operatorname{tr} A, \det \tilde{A}, r(A), r(\tilde{A})$

▶ $\det(Q^{-1} A Q) = \det A$
$\det \tilde{A} = \det(\ )^{-1} \tilde{A} (\ ) = \det \tilde{A}$
$\operatorname{tr}(Q^{-1} A Q) = \operatorname{tr} A$

20 Классификация кривых второго порядка

Теор. В двумер. E ур-е квадрики с пом. движ. и умн. на ненул. коэф. приводится к:

1) эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: $\det A>0$; $\operatorname{tr} A$, $\det\tilde{A}\neq 0$, разные знаки

2) мнимый эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$: $\det A>0$; $\operatorname{tr} A$, $\det\tilde{A}\neq 0$, один. знаки

3) гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$: $\det A<0$, $\det\tilde{A}\neq 0$

4) пара пересек. прямых $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$: $\det A<0$, $\det\tilde{A}=0$

5) пара мним. перес. прям. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$: $\det A>0$ $\det\tilde{A}=0$

6) парабола $y^2=2px$: $\det A=0$, $\det\tilde{A}\neq 0$

7) пара паралл. прямых $x^2=a^2$: на кривой им. хотя бы 1 т. с вещ. коорд. $r(A)=1$, $r(\tilde{A})=2$

8) пара мним. пар. прям $x^2=-a^2$: на крив. нет ни одной вещ. т. $r(A)=1$, $r(\tilde{A})=2$

9) пара совп. прямых: $x^2=0$: $r(A)=r(\tilde{A})=1$

21 Эллипс, гипербола и парабола

- Эллипс – мн-во всех т. E, сумма расст. до кот. от заданных двух точек (фокусов), постоянно

Гипербола – мно-во всех т. E, модуль разности расстояний до кот. от зад. двух точек постоянно

- Парабола – мн-во всех т. пр-ва E, расст. от кот. до зад. точки F и зад. прям. равны

1) Пусть фокусы эллипса / гиперболы расположены на OX и имеют коорд. $(-a, 0)$, $(a, 0)$, где $a>0$

Точка (x, y) лежит на эллипсе / гиперболе
$\Longleftrightarrow \quad \left|\sqrt{(x+a)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-a)^2+y^2}\right| = r$

В Δ с верш. в т. $(-a;0)$, $(a;0)$, (x, y) сумма длин любых двух его сторон > третьей
$\Rightarrow$ в эллипсе $r > 2a$
в гиперболе $0 < r < 2a$

При переносе: $\pm 2r\sqrt{(x-a)^2+y^2} = r^2 - 4ax$

$$x^2 \frac{4}{r^2} + y^2 \frac{4}{r^2-4a^2} = 1$$

С учетом $r>2a$; $0<r<2a$ ур-ия привод. к кан. виду
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

2) Зад. ортог. сист. коорд.: нач. коорд. – серед. перпендикуляра, опущ. из F на прямую

e_1, e_2 – ортонорм. базис: $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$
$x = -p/2$, $p>$

Т. $X=(x, y)$ принадл. параболе $\Longleftrightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} = |x+p|$

$x^2 - py + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2 = 2px$ (~~[illegible]~~

что мы назов. вид – ур-ие параб