Автокорреляция AR(1)

① $\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + u_t \qquad -1 < \rho < 1$

$\rho = 1/2$

$\varepsilon_t = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{t-1} + u_t = \dots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{t-3} + u_{t-2}\right) + u_{t-1}\right) + u_t$

$\dots = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u_{t-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \varepsilon_{t-3} =$

$\dots = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u_{t-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 u_{t-3} + \dots$

$Var(\varepsilon_t) = \sigma^2_\varepsilon$

$cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \gamma_1$

$cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \gamma_2$

u_t – i.i.d.; $E(u_t) = 0$; $Var(u_t) = \sigma^2_u$

- $Var(\varepsilon_t) = Var(\rho \cdot \varepsilon_{t-1}) + Var(u_t) + 2\,cov(\rho \cdot \varepsilon_{t-1}, u_t)$

  $\sigma^2_\varepsilon = \rho^2 \cdot \sigma^2_\varepsilon + \sigma^2_u + 0$

  $\sigma^2_\varepsilon = \dfrac{\sigma^2_u}{1-\rho^2}$

- $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = cov(\rho \cdot \varepsilon_{t-1} + u_t, \varepsilon_{t-1}) = \rho \cdot \sigma^2_\varepsilon + 0$
- $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) = cov(\rho \cdot \varepsilon_{t-1} + u_t, \varepsilon_{t-2}) = \rho \cdot \gamma_1 = \rho^2 \cdot \sigma^2_\varepsilon$
- $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = \rho^k \cdot \sigma^2_\varepsilon$
- $Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \dfrac{cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k})}{\sqrt{Var(\varepsilon_t) \cdot Var(\varepsilon_{t-k})}} = \dfrac{\rho^k \cdot \sigma^2_\varepsilon}{\sigma^2_\varepsilon} = \rho^k$

$AR(p)$

$$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \varphi_p \varepsilon_{t-p} + u_t$$

$$\lim_{k \to \infty} Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0$$

Усл. Автокорреляция

→ наруш. предпосылки о независимости (x_i, y_i)

→ наруш. предп. о стр. экзогенности

$$E(\varepsilon_t | X) \neq 0$$

МНК:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} \cdot X'y$$

$$\hat{Var}(\hat{\beta} | X) = \frac{RSS}{n-k} (X'X)^{-1}$$

$$\hat{Var}(\hat{\beta}_j | X) = \frac{\hat{\sigma}^2}{RSS_j}$$

· Конечная выборка, без предположения $\varepsilon \sim N(0; \sigma^2)$

\+ линейность по y

\+ несмещенность $E(\hat{\beta} | X) = \beta$

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

– эффективность

· Конечная выборка, $\varepsilon \sim N(0; \sigma_\varepsilon^2)$

– $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} | X \not\sim t_{n-k}$

– $\frac{RSS}{\sigma^2} | X \not\sim \chi^2_{n-k}$

– $\frac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/n-k} \not\sim F_{r, n-k}$

Асимпт. свойства

+ $\hat{\beta} \to \beta$

+ $\frac{RSS}{n-k} \to \sigma^2$

— $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \not\to N(0;1)$

— $\frac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/n-k} \not\to \chi^2_r$

Вывод:

- $\hat{\beta}$ можно интерпр. и использовать
- $se(\hat{\beta}_j)$ несостоятельны,

  не применимы при постр гипотз

$\Rightarrow$ $\widehat{Var}_{HAC}(\hat{\beta}|X) \Rightarrow se_{HAC}(\hat{\beta}_j)$

$$\widehat{Var}(\hat{\beta}|X) = \frac{RSS}{n-k}(X'X)^{-1}$$

NW: $\widehat{Var}_{HAC}(\hat{\beta}|X) = (X'X)^{-1}\hat{\Phi}(X'X)^{-1}$

где $\hat{\Phi} = \sum_{j=-k}^{k} \frac{k-|j|}{k} \left(\sum_t \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t+j} x_t' \cdot x_{t+j}\right)$

$\Rightarrow \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \to N(0;1)$

$\hat{\beta}_j$ неэф.

$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \not\sim t_{n-k}$

$\frac{RSS}{\sigma^2}|X \not\sim \chi^2_{n-k}$

$\frac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/n-k} \not\sim F_{r,n-k}$

DW: $AR(1)$; $\varepsilon \sim N(0; \sigma_\varepsilon^2)$; $E(\varepsilon_t | X) = 0$

$H_0: \rho = 0$

1) МНК $\Rightarrow \hat{\varepsilon}_i$

2) $DW = \frac{\sum_{i=2}^{n} (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2} \approx 2(1 - \hat{\rho})$

$DW \approx 0 \iff \hat{\rho} \approx 1$

$DW \approx 2 \iff \hat{\rho} \approx 0$

$DW \approx 4 \iff \hat{\rho} \approx -1$

BG: $AR(p)$

$H_0: \phi_1 = \ldots = \phi_p = 0$

1) МНК $\Rightarrow \hat{\varepsilon}_t$

2) $\hat{\varepsilon}_t = \varphi_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \ldots + \varphi_p \cdot \hat{\varepsilon}_{t-p} \Rightarrow R^2_{aux}$

$BG = (n-p) \cdot R^2_{aux} \sim \chi^2_p$

Метод максимального правдоподобия

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta) = \prod f(y_i | \theta)$$

$$\ell(\theta) = \ln\left(\prod f(y_i|\theta)\right) = \sum \ln f(y_i|\theta)$$

ML оценки:

\+ сост. $\hat{\theta}_{ML} \xrightarrow{d} \theta$

\+ ас. несмещ. $E(\hat{\theta}_{ML}) \xrightarrow{d} \theta$

\+ ас. эф. : $Var(\hat{\theta}_{ML})$ наим. среди ас. несм.

\+ $\hat{\theta}_{ML}$ ас. норм. : $\hat{\theta}_{ML} \overset{d}{\sim} N(\theta, I^{-1})$

$$I = -E(\ell''(\theta)) = -E(H)$$

матр. Гесса

$\Rightarrow$ $E(\hat{\theta}_{ML}) \approx \theta$

$Var(\hat{\theta}_{ML}) \approx I^{-1}$ $\Rightarrow$ $\hat{Var}(\hat{\theta}_{ML}) = \hat{I}^{-1}$

где $\hat{I} = -\ell''(\hat{\theta})$

$$\theta \in [\hat{\theta}_{ML} \pm z_{cr} \cdot se(\hat{\theta})]$$

<u>LR - тест</u> :

H_0 : q ур. на неизв. пар-ры

$$LR = 2(\ell(\hat{\theta}_{ML}) - \ell(\hat{\theta}_{H_0})) \sim \chi^2_q$$

PACF :

$\phi_k = Cor(y_t - P(y_t),\ y_{t-k} - P(y_{t-k}))$

где $P(y_t)$ – проекция y_t на лин. оболочку $y_{t-1}, \dots, y_{t-k+1}$

$$\begin{cases} \gamma_0 *_1 + \gamma_1 \varphi_2 = \gamma_1 \\ \gamma_1 *_1 + \gamma_0 \varphi_2 = \gamma_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_0 *_1 + \gamma_1 *_2 + \gamma_2 \varphi_3 = \gamma_1 \\ \gamma_1 *_1 + \gamma_0 *_2 + \gamma_1 \varphi_3 = \gamma_2 \\ \gamma_2 *_1 + \gamma_1 *_2 + \gamma_0 \varphi_3 = \gamma_3 \end{cases}$$

ex $y_t = 5 + \varepsilon_t + 3\varepsilon_{t-1} - 2\varepsilon_{t-2}$

$$\gamma_k = cov(y_t, y_{t-k}) = \begin{cases} 14\sigma^2, & k=0 \\ -3\sigma^2, & k=1 \\ -2\sigma^2, & k=2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases}$$

φ_1: $\gamma_0 \cdot \varphi_1 = \gamma_1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \rho_1 = -\frac{3}{14}$

φ_2: $\begin{cases} \gamma_0 *_1 + \gamma_1 \varphi_1 = \gamma_1 \\ \gamma_1 *_1 + \gamma_0 \varphi_1 = \gamma_2 \end{cases} \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{37}{187}$

φ_3: $\{$ –//– $\Rightarrow \varphi_3$

AR(p)

ex AR(1): $y_t = 2 + 0,5 y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$E(y_t) = 2 + 0,5 \underbrace{E(y_{t-1})}_{= E(y_t)} + 0$$

$E(y_t) = 4 \Rightarrow (y_t - 4) = 0,5(y_{t-1} - 4) + \varepsilon_t$

$\gamma_0 = 0,25\, \gamma_0 + \sigma^2$

$\gamma_1 = 0,5\, \gamma_0$

$\gamma_2 = 0,5\gamma_1$

$\gamma_3 = 0,5\gamma_2$

...

$\Rightarrow \rho^k = 0,5^k$

φ_1: $\gamma_0 \cdot \varphi_1 = \gamma_1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \rho_1 = 0,5$

φ_2: $\begin{cases} \gamma_0 *_1 + \gamma_1 \varphi_2 = \gamma_1 \\ \gamma_1 *_1 + \gamma_0 \varphi_2 = \gamma_2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ выр все через γ_0

$\Rightarrow$ сокр. на γ_0

$\Rightarrow$ выр φ_2

$\varphi(L) y_t = c + \varepsilon_t$

если |все корни| > 1,

то ∃ стац. решение, в

котором y_t выражается через $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$

Эконометрика

1.1) Суть метода наим. квадратов

данные → врем. ряды
данные → перекрестная выборка
данные → панельные данные

y_i – зависимая переменная ε_i – ошибка

$x_i, z_i \ldots$ – регрессоры $\hat{\varepsilon}_i$ – ош. прогноза

$\hat{y}_i$ – прогноз $RSS = \sum \hat{e}_i^2$

МНК

$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$ – ошибка прогноза

$Q(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \sum \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$

– сумма квадратов ош. прогноза

Суть МНК: выбор $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$: $Q \to min$

1.2) Регрессия на константу

	y_i	x_i
В	60	170
П	70	170
К	80	181

$M_1: y_i = \beta_1 + \varepsilon_i$

$M_2: y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$

МНК: $RSS = \min \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$

$M_1: \hat{y}_i = \hat{\beta}$

$$Q(\hat{\beta}) = \sum_1^3 (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_1^3 (y_i - \hat{\beta})^2 =$$

$$= \sum y_i^2 - 2\hat{\beta} \cdot \sum y_i + 3\hat{\beta}^2$$

$$Q'(\hat{\beta}) = -2\sum y_i + 3 \cdot 2 \cdot \beta = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum y_i}{3} = \bar{y}$$

$$M_1: \hat{\beta} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{60+70+80}{3} = 70$$

1.3) Парные регрессия

$M2: \hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot x_i$

$$\frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\sum x_i = n\bar{x} = \sum \bar{x} \Rightarrow \sum (x_i - \bar{x}) = 0$$

residual sum of squares

$$RSS = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \cdot x_i)^2 = Q(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = \sum 2 \cdot (y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \cdot x_i) \cdot (-1) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \beta_2} = \sum 2 \cdot (\varepsilon_i) \cdot (-x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial \beta_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum \varepsilon_i \cdot 1 = 0 \\ \sum \varepsilon_i x_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum y_i - n \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \cdot \sum x_i = 0 \\ \sum y_i x_i - \hat{\beta}_1 \sum x_i - \hat{\beta}_2 \sum x_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{y} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{x}$$

$\hat\beta_1 = \bar y - \hat\beta_2 \cdot \bar x$

$\sum x_i y_i - (\bar y - \hat\beta_2 \bar x) \cdot \sum x_i - \hat\beta_2 \cdot \sum x_i^2 = 0$

<...>

$$\hat\beta_2 = \frac{\bar y \cdot \sum x_i - \sum y_i x_i}{\bar x \cdot \sum x_i - \sum x_i^2} = \frac{\sum (y_i - \bar y)\, x_i}{\sum (x_i - \bar x) \cdot x_i} =$$

$$= \frac{\sum (y_i - \bar y) \cdot x_i - \sum \bar x \cdot (y_i - \bar y)}{\sum (x_i - \bar x) \cdot x_i - \sum \bar x\, (x_i - \bar x)} =$$

$$= \frac{\sum (y_i - \bar y) \cdot (x_i - \bar x)}{\sum (x_i - \bar x)^2}$$

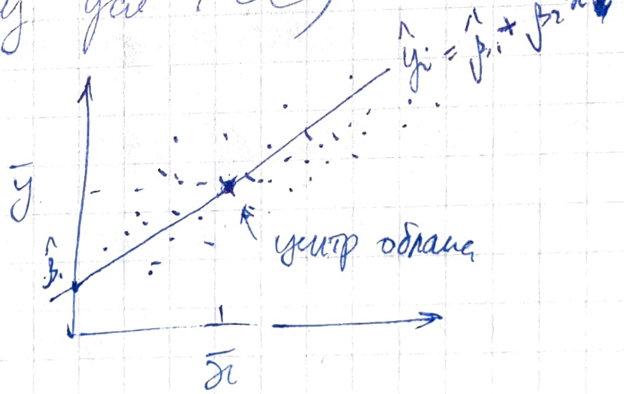
$\Rightarrow$ $\hat\beta_2 = 1{,}36$ $\hat\beta_1 = -166{,}8$

1.4) Случай мн-ва регрессоров

$(\bar x, \bar y)$ лежит на $\hat y_i = \hat\beta_1 + \hat\beta_2 x_i$

(след. из усл FOC)

x_i	y_i
x_1	y_1
y_1	y_2
...	...



$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$

$$\hat\beta_2 = \frac{\sum (x_i - \bar x)(y_i - \bar y)}{\sum (x_i - \bar x)^2}$$

$\hat\beta_1 = \bar y - \hat\beta_2 \bar x$

$\Updownarrow$

$\bar y = \hat\beta_1 + \hat\beta_2 \bar x$

$\in [0;1]$

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 z_i + \varepsilon_i$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot x_i + \hat{\beta}_3 \cdot z_i$$

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i \qquad \text{МНК}: \min \sum \hat{\varepsilon}_i^2 = Q(\beta_1; \beta_2; \beta_3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \hat{\beta}_1} = -1 \\ \dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \hat{\beta}_2} = -x_i \\ \dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \hat{\beta}_3} = -z_i \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}_1} = \sum 2 \hat{\varepsilon}_i \cdot (-1) = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}_2} = \sum 2 \hat{\varepsilon}_i \cdot (-x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}_3} = \sum 2 \cdot \hat{\varepsilon}_i \cdot (-z_i) = 0 \end{cases}$$

Оценки $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ из системы
$$\begin{cases} \sum \hat{\varepsilon}_i = 0 \\ \sum \hat{\varepsilon}_i \cdot x_i = 0 \\ \sum \hat{\varepsilon}_i \cdot z_i = 0 \end{cases}$$

1.5) Суммы квадратов

1) RSS - residual sum of squares

$RSS = \sum \hat{\varepsilon}_i^2$ - насколько велики ε_i

2) TSS - total sum of squares

$TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2$ - насколько y_i непохожи на $\bar{y}$

3) ESS - explained sum of squares

$ESS = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ - насколько $\hat{y}_i$ непохожи на $\bar{y}$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$$

Множ. регрессия

Модель

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1 \cdot \vec{1} + \hat{\beta}_2 \cdot x + \hat{\beta}_3 \cdot z$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots \\ 1 & x_2 & \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$ – м-ца регрессоров

$$|y| = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$$

$$|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \sum_i y_i^2$$

$$RSS = \sum \hat{\varepsilon}_i^2 = |\hat{\varepsilon}|^2$$

$$TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2 = |y - \bar{y} \cdot \vec{1}|^2$$

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(x, y) = \sum_i x_i y_i$$

Усл. перп-ти:

$x \perp y \quad (x, y) = \sum x_i y_i = 0$

Для $\quad y_i = \beta + \varepsilon_i$

$\hat{\beta} = \bar{y} \quad \hat{y}_i = \bar{y} \quad \Rightarrow \quad \hat{y} = \bar{y} \cdot \vec{1}$

$\sum \hat{y}_i = \sum \bar{y} = n \cdot \bar{y} = \sum y_i$

$\sum \hat{y}_i = \sum y_i$

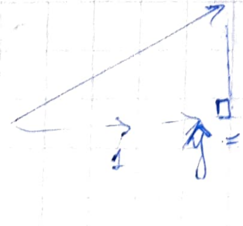
$\sum (y_i - \hat{y}_i) = 0$

$\sum \hat{\varepsilon}_i \cdot 1 = 0$

$\hat{\varepsilon} \perp \vec{1}$

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$$

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{\varepsilon}_i \Rightarrow y = \hat{y} + \hat{\varepsilon}$$



$\vec{\bar{y}} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \vdots \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ — При проецировании на $\vec{1}$ получим вектор из средних $\begin{pmatrix} \bar{y} \\ \vdots \\ \bar{y} \end{pmatrix}$

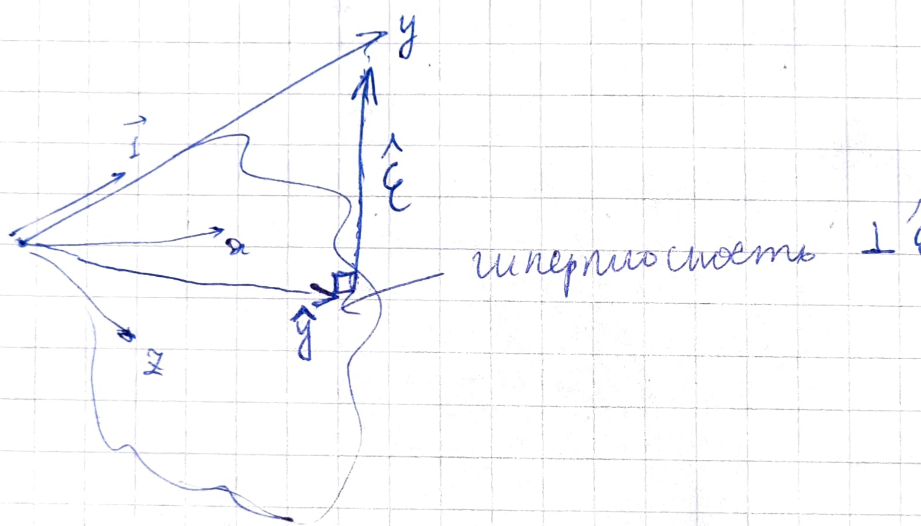
Модель: $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$

FOC, геом. интерпретация:

$$\begin{cases} \sum \hat{\varepsilon}_i \cdot 1 = 0 \\ \sum \hat{\varepsilon}_i \cdot x_i = 0 \\ \sum \hat{\varepsilon}_i \cdot z_i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{\varepsilon} \perp \vec{1} \\ \hat{\varepsilon} \perp x \\ \hat{\varepsilon} \perp z \end{cases} \Rightarrow \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$$

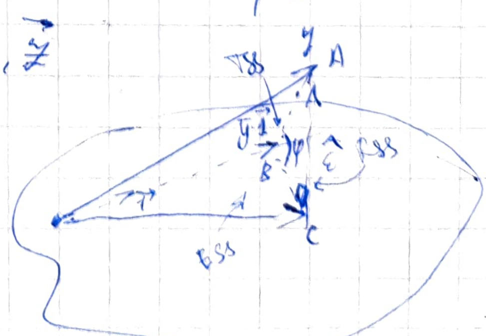
$$\hat{\varepsilon} = y - \hat{y}$$

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1 \cdot \vec{1} + \hat{\beta}_2 \cdot x + \hat{\beta}_3 \cdot z$$



Геом. факты

МНК: 1) $\hat{y}$ — это проекция y на мн-во векторов, получ. с помощью слож. с разными весами $\vec{1}, \vec{x}, \vec{z}$



2) $\sum \hat{\varepsilon}_i = 0$

$\sum (y_i - \hat{y}_i) = 0$

$\sum y_i = \sum \hat{y}_i$

$\bar{y} = \bar{\hat{y}} \Rightarrow$ теорема о трех перпенд.

③ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AC^2 = |\hat{\varepsilon}|^2 = \sum \hat{\varepsilon}_i^2 = RSS$

$AB^2 = |y - \bar{y} \cdot \vec{1}|^2 = \sum (y_i - \bar{y})^2 = TSS$

$BC^2 = |\hat{y} - \bar{y} \cdot \vec{1}|^2 = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = ESS$

$TSS = ESS + RSS$ ← т. Пифагора

④ $\frac{ESS}{TSS} = \frac{BC^2}{AB^2} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = (\cos\varphi)^2$

1.6) Если в регрессию включён свободный член β_1 (и оценки МНК единственны), то

$\sum \hat{\varepsilon}_i = 0$

$\sum y_i = \sum \hat{y}_i$

$\bar{y} = \bar{\hat{y}}$

$TSS = RSS + ESS$

$\boxed{R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}}$

Коэф. детерминации (показатель кач-ва модели)

↳ в мод. со своб. членом

$TSS = RSS + ESS$

$TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2$ – общ. разброс y

$ESS = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ – объясн. регр. разброс

$RSS = \sum \hat{\varepsilon}_i^2$ – доля объясн. разбр. в общ. разбр.

$R^2 = ESS/TSS$ – доля объясн. разбр. y в общ. разбросе y

$\in [0;1]$

Теор. если в регрессию вкл. своб. член

($y_i = \beta_1 + \ldots$) и оц. МНК - единств., то

$$R^2 = (s\,Corr(y,\hat{y}))^2 = \left(\frac{\sum(y_i-\bar{y})(\hat{y}_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}\cdot\sqrt{\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2}}\right)^2$$

выборочн. кор.

$$= \left(\frac{\sum(y_i-\bar{y})(\hat{y}_i-\bar{y})}{\sqrt{TSS}\cdot\sqrt{ESS}}\right)^2$$

Д-во: 4 => $\frac{ESS}{TSS} = (\cos\varphi)^2 \Rightarrow R^2 = \cos^2\varphi$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} \in [0;1]$$

$$(a,b) = |a|\cdot|b|\cdot\cos(a,b)$$

$$\Rightarrow \cos(a,b) = \frac{(a;b)}{|a|\cdot|b|}$$

$$\overrightarrow{BA} = y - \bar{y}\cdot\vec{1}$$

$$\overrightarrow{BC} = \hat{y} - \bar{y}\cdot\vec{1}$$

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\hat{y}-\bar{y}\cdot\vec{1},\ y-\bar{y}\cdot\vec{1})$$

$$= \sum(y_i-\bar{y})(\hat{y}_i-\bar{y})$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(\hat{y}_i-\bar{y})^2}$$

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(y_i-\bar{y})^2}$$

$$\Rightarrow R^2 = \left(\frac{\sum(y_i-\bar{y})\cdot(\hat{y}_i-\bar{y})}{\sqrt{(\hat{y}_i-\bar{y})^2}\cdot\sqrt{(y_i-\bar{y})^2}}\right)^2 = (s\,Corr(y,\hat{y}))^2$$

2) Условные E и Var, дов. интервалы

$E(s|r)$ — случ. вел. $\tilde{s}$:

- $\tilde{s} = f(r)$
- $E(\tilde{s}) = E(s)$
- $Cov(s-\tilde{s}, g(r)) = 0$, $\forall g(r)$

$Cov(s, g(r)) = Cov(\tilde{s}, g(r))$

$E(s|r)$ — наил. прогноз s, форм. с пом. r

Теор. если r — дискр. и прин. знач. a, b, c, то

$$E(s|r) = \begin{cases} E(s|r=a), & r=a \\ E(s|r=b), & r=b \\ E(s|r=c), & r=c \end{cases}$$

e.g. s, r — случ. вел.

$E(s), E(r)$ — const

$E(s|r)$ — с.в.

$s \backslash r$	1	2
0	1/4	0,2
10	1/4	0,3

$\Rightarrow$

s^2	0	0	100	100
s	0	0	10	10
r	1	2	1	2
p	$\frac{1}{4}$	0,2	$\frac{1}{4}$	0,3
$p(\cdot|r=1)$	$\frac{1/4}{2/4}$	0	$\frac{1/4}{2/4}$	0
$p(\cdot|r=2)$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{3}{5}$

— без усл. вер-ти

$Var(s|r) = 40 + 10r - (4+r)^2 = 24 + 2r - r^2$ $[= 26 - r]$

$p(26 - r = 24 + 2r - r^2) = 1$

$$E(s|r) = \begin{cases} 0 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}5 = 5, & r=1 \\ 0 \cdot \frac{2}{5} + 10 \cdot \frac{3}{5} = 6, & r=2 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$E(s|r) = 4 + r$

$$E(s^2|r) = \begin{cases} 50, & r=1 \\ 60, & r=2 \end{cases} = 40 + 10r$$

$E(4+r) = 4 + E(r) =$
$= 4 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 = 5{,}5$

$E(s) = 0 \cdot 0{,}45 + 10 \cdot 0{,}55 = 5{,}5$

Св-во: если $\tilde{s} = E(s|z)$

то $\boxed{E(\tilde{s}) = E(s)}$

Теор.: если z, s имеют ф-ю п-ти $f(z,s)$,

то $E(s|z) = \int_{-\infty}^{\infty} s \cdot f(s|z)\, ds$

где $f(s|z) = \dfrac{f(z,s)}{f(z)}$ – усл. ф-я п-ти

Св-ва: a, b – const, s, z – с.в.

1) $E(as + b|z) = a\,E(s|z) + b$

$E(E(s|z)) = E(s)$!

$E(h(z)|z) = h(z)$

$E(h(z)s|z) = h(z) \cdot E(s|z)$

Опр. $Var(s) = E(s^2) - (E(s))^2$

$Var(s|z) = E(s^2|z) - (E(s|z))^2$

Опр. $Cov(s_1, s_2) = E(s_1 s_2) - E(s_1) \cdot E(s_2)$

$Cov(s_1, s_2|z) = E(s_1 \cdot s_2|z) - E(s_1|z) \cdot E(s_2|z)$

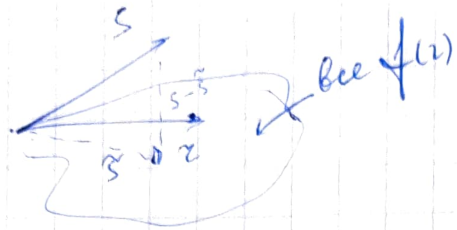
Св-ва: a, b – const, s, z – с.в.

$Var(as + b|z) = a^2\, Var(s|z)$

$Var(s + h(z)|z) = Var(s|z)$

$Var(h(z) \cdot s|z) = h^2\, Var(s|z)$

$Var(s) = Var(E(s|z)) + E(Var(s|z))$



$\tilde{s} = E(s|z)$

$(s,z) = Cov(s,z)$

$|s|^2 = (s,s) = cov(s,s) = Var(s)$

$cos(s,z) = \dfrac{(s,z)}{|s|\cdot|z|}$

Теор.: $E(s,z) = \tilde{s}$

$Cov(s-\tilde{s}, g(z)) = 0$

$cos(s-\tilde{s}, g(z)) = 0$

$s-\tilde{s} \perp g(z)$

$Var(s) = Var(\tilde{s}) + Var(s-\tilde{s})$

$Var(s) = Var(E(s|z)) + Var(s-\tilde{s})$

Чтб. $Var(s-\tilde{s}) = E(Var(s|z))$

$Var(s) = Var(E(s|z)) + E(Var(s|z))$

Мораль $Cov(z,s) \Leftrightarrow (z,s)$

$Var(z) \Leftrightarrow |z|^2$

$Corr(s,z) \Leftrightarrow cos(z,s)$

Предпосылки:

1) $E(\varepsilon_i|X) = 0$

2) $E(\varepsilon_i^2|X) = \sigma^2$ $\quad Var(\varepsilon_i|X) = \sigma^2$

3) $E(\varepsilon_i \varepsilon_j|X) = 0$ $\quad Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j|X) = 0$

$$Var(\varepsilon) = \begin{pmatrix} Var(\varepsilon_1) & Cov(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \dots \\ Cov(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & Var(\varepsilon_2) & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$Var(\varepsilon|X) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots \\ 0 & \sigma^2 & \\ \vdots & & \end{pmatrix} = \sigma^2 \cdot 1_{n\times n}$$

Предпосылки:

$Var(\varepsilon|X) = \delta^2 \cdot 1_{n\times n}$

$Var(\varepsilon_i|X) = \delta^2$

$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j|X) = 0 \quad , i \neq j$

$E(\varepsilon_i|X) = 0$

$y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + \beta_3 \cdot z_i + \varepsilon_i$

Для парной регрессии: $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$

① $Var(\hat{\beta}_1) = \delta^2 \dfrac{\sum x_i^2}{n \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2}$

② $Var(\hat{\beta}_2) = \dfrac{\delta^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

③ $Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \delta^2 \dfrac{-\bar{x}}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\sum (x_i - \bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \sum (x_i - \bar{x}) = \bar{y} \cdot \underbrace{(\sum x_i - n \cdot \bar{x})}_{=0} = 0$$

$$Var(\hat{\beta}_2 | X) = Var\left(\frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sum (x_i - \bar{x}) \cdot y_i \,|\, X\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\right)^2 Var\left(\sum (x_i - \bar{x}) y_i \,|\, X\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sum ()^2}\right)^2 \cdot \sum Var\left((x_i - \bar{x}) \cdot y_i \,|\, X\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sum ()^2}\right)^2 \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2 \, Var(y_i|X) = \frac{\delta^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$Cov(y_i, y_j|X) = 0$

$Var(y_i|X) = \delta^2$

$Cov(y_i, \bar{y}|X) = \delta^2/n$

$$\operatorname{Cov}(\hat\beta_2, \bar y \mid X) = \operatorname{Cov}\left(\frac{\sum (x_i - \bar x) y_i}{\sum (x_i - \bar x)^2}, \bar y \mid X\right) = \frac{\overbrace{\sum (x_i - \bar x)}^{=0}}{\sum (x_i - \bar x)^2} \underbrace{\operatorname{Cov}(y_i, \bar y \mid X)}_{=\sigma^2/n} = 0$$

$$\operatorname{Var}(\hat\beta_1 \mid X) = \operatorname{Var}(\bar y - \hat\beta_2 \cdot \bar x \mid X) = \operatorname{Var}(\bar y \mid X) + \operatorname{Var}(\hat\beta_2 \cdot \bar x \mid X) -$$

$$2\underbrace{\operatorname{Cov}(\bar y, \hat\beta_2 \cdot \bar x \mid X)}_{=0} = \sigma^2/n + \bar x^2 \cdot \frac{1}{\sum (x_i - \bar x)^2} \cdot \sigma^2$$

$$\operatorname{Cov}(\hat\beta_1, \hat\beta_2 \mid X) = \operatorname{Cov}(\bar y - \hat\beta_2 \cdot \bar x, \hat\beta_2 \mid X) = 0 - \operatorname{Cov}(\hat\beta_2 \cdot \bar x, \hat\beta_2 \mid X) =$$

$$- \bar x \cdot \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar x)^2}$$

В парной регрессии:

$$\operatorname{Var}(\hat\beta_2 \mid X) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar x)^2}$$

$$\operatorname{Var}(\hat\beta_1 \mid X) = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar x)^2}$$

$$\operatorname{Cov}(\hat\beta_1, \hat\beta_2 \mid X) = \frac{- \bar x \cdot \sigma^2}{\sum (x_i - \bar x)^2}$$

<u>Теор.</u>:

$\operatorname{Var}(\hat\beta_j \mid X) = \sigma^2 / RSS_j$, где RSS_j – сум. кв. ост. в регр. j-ой объясн. пер. на ост. объясн. пер.

* если Z сильно кор. с др. регр $\Rightarrow RSS_Z \approx 0 \Rightarrow \operatorname{Var}(\hat\beta_2 \mid X)$ – больш.

т.е. если Z – хорошо объясн. др. рег., значит ошибки в прогн. маленькие $\Rightarrow$ дисп. высокие

<u>Теор</u> $Var(\hat{\beta}|X) = \delta^2 \cdot (X'X)^{-1}$

Св-ва: $Var(a \cdot x_i) = a^2 \cdot Var(x_i)$

$Var(Ay) = A\, Var(y) \cdot A'$

$(AB)' = B'A'$

$(A^{-1})' = (A')^{-1}$

$\hookrightarrow (X'X)' = X'X'' = X'X$

$((X'X)^{-1})' = ((X'X)')^{-1} = (X'X)^{-1}$

$$Var(\hat{\beta}|X) = \begin{pmatrix} Var(\hat{\beta}_1|X) & Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2|X) \dots \\ Cov(\ |X) & Var \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Св-ва.
$$E(y) = \begin{pmatrix} E(y_1) \\ \vdots \\ E(y_n) \end{pmatrix}$$

- $E(a y_1) = a E(y_1)$
- $E(Ay) = A \cdot E(y)$

$E(yB) = E(y) \cdot B$

<u>Опр</u> $Var(\hat{\beta}|X) = E(\hat{\beta} \cdot \hat{\beta}'|X) - E(\hat{\beta}|X) \cdot E(\hat{\beta}'|X)$

Св-во: $Var(A \cdot \hat{\beta}|X) = A \cdot [E(\hat{\beta}\hat{\beta}'|X) - E(\hat{\beta}|X) \cdot E(\hat{\beta}'|X)] A'$

$= A \cdot Var(\hat{\beta}|X) \cdot A'$

т.е. $Var(a \cdot y_1|X) = a \cdot Var(y_1|X)$

$Var(Ay|X) = A \cdot Var(y|X) \cdot A'$

$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X' y$

$Var(\varepsilon | X) = \sigma^2 \cdot I$

$y = X \cdot \beta + \varepsilon$

1) $Var(y|X) = Var(X \cdot \beta + \varepsilon | X) = Var(\varepsilon | X) = \sigma^2 I$

2) $Var(\hat{\beta} | X) = Var((X'X)^{-1} \cdot X' \cdot y | X) =$

$(X'X)^{-1} \cdot X' \cdot Var(y|X) \cdot ((X'X)^{-1} X')' =$

$= (X'X)^{-1} X' \cdot \sigma^2 I \cdot \underbrace{X''}_{=X} \underbrace{((X'X)^{-1})'}_{=(X'X)^{-1}} = \sigma^2 \cdot (X'X)^{-1} \cdot X' \cdot X \cdot (X'X)^{-1}$

$= \sigma^2 \cdot (X'X)^{-1}$

$Var(\hat{\beta} | X) = \sigma^2 (X' \cdot X)^{-1}$

Оценка σ^2

$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-k}$ – несмещ. оценка для σ^2

$Var(\hat{\beta}_j | X) = \sigma^2 \cdot f(X)$

$\hat{Var}(\hat{\beta}_j | X) = \hat{\sigma}^2 \cdot f(X)$

$\hookrightarrow \hat{Var}(\hat{\beta}_j | X) = \hat{\sigma}^2 / RSS_j$

$se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\hat{Var}(\hat{\beta}_j | X)}$ – standart error

e.g. $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$

$se(\hat{\beta}_2) = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$

$$\boxed{\hat{Var}(\hat{\beta} | X) = \hat{\sigma}^2 \cdot (X'X)^{-1}}$$

2.1) Свойства оценок

Базовые: верны даже на мал. выб.,

без предп о норм. ε_i

Асимптот.: верны на больших выб.,

без предп. о норм. ε_i

При норм-ти: верны на мал. выб.

при норм-ти ε_i

Предпосылки:

1) $y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + \beta_3 \cdot z_i + \varepsilon_i$

$y = X\beta + \varepsilon$

2) С пом. МНК оценивается регрессия

y_i на конст. x_i, z_i

$\hookrightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1} X' \cdot y$

3) $n > k$, набл. больше, чем оц. коэф-тов

Предположения на ε_i

1) Строгая экзогенность

$E(\varepsilon_i | X) = 0$

2) Условная гомоскедастичность

$E(\varepsilon_i^2 | X) = \delta^2$ или $Var(\varepsilon_i | X) = \delta^2$

3) Условная некоррелир-ть $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j | X) = 0$, $i \neq j$

Предпосылки на регрессоры

1) P(среди регрессоров нет лин. зав.) = 1

↳ $\operatorname{rank}(X) = k$

или

$\exists (X'X)^{-1}$

или

$\det(X'X) \neq 0$

2) (x_i, z_i, y_i) – независимы, один. распр.

Баз. св-ва (т. Гаусса – Маркова)

1. $\hat{\beta}_j$ линейны по y_i

$\hat{\beta}_j = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$

2. Оценки несмещены

и условно $E(\hat{\beta}_j | X) = \beta_j$

и безусловно $E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$

3. Эффект. среди лин. и несмещ.

$Var(\hat{\beta}_j^{alt} | X) \geq Var(\hat{\beta}_j | X)$, где $\hat{\beta}_j^{alt}$ – ? лин. по y_i и несм. альт. оценка

$Var(\hat{\beta}_j^{alt}) \geq Var(\hat{\beta}_j)$

4. ков. матрица: $Var(\hat{\beta} | X) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$

$Var(\hat{\beta}_j | X) = \sigma^2 / RSS_j$

$Cov(\hat{\beta}_j, \hat{\varepsilon}_i | X) = 0$

$E(\hat{\sigma}^2 | X) = \sigma^2$ $\quad E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$, где $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{RSS}{n-k}$

Асимпт. св-ва, $n \to \infty$

① $\hat{\beta}_j \to \beta_j$ по в-ти, т.е. $\hat{\beta}_j$ - состоятельны

② $\dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \to N(0;1)$

③ $\hat{\sigma}^2 \to \sigma^2$ по в-ти, где $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{RSS}{n-k}$

При норм-ти: $\varepsilon_i | X \sim N(0, \sigma^2)$

① оценки эф-ные среди несмещ.

② $\dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k}$; $\dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} | X \sim t_{n-k}$

③ $\dfrac{RSS}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$; $\dfrac{RSS}{\sigma^2} | X \sim \chi^2_{n-k}$

Св-ва оценок

"Успокоительные" - несмещенность, состоят., эф-ть

"практические" - оценки имеют опр. закон распр., что позволяет строить дов. инт.

Проверка гипотез возможна, если

число набл. велико

(или)

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Проверка гип. о β_j:

или

- асимптотически

$t = \dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \to N(0,1)$

- при норм-ти

$t = \dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k}$

~ 95% инт. $[\hat{\beta}_j - 2se(\hat{\beta}_j) ; \hat{\beta}_j + 2se(\hat{\beta}_j)]$

Описание любого теста

1) предпосылки теста

2) провер. гипотеза H_0

3) конкур. гипотеза H_1

4) ф-ла для вычисления статистики

5) закон распр. стат. при верной H_0

Практические шаги

1) Форм. H_0, выбираем ур. зн-ти $\alpha = P(\text{Отв. } H_0 \mid H_0 \text{- верна})$

2) Расчёт S_{obs} - набл. знач. тест. статистики

3) Находим S_{cr} - крит. знач. тест. стат-и

4) — сравниваем S_{obs} и S_{cr} => вывод о H_0

или

— ~~...~~ сравн. P-знач. и α => вывод о H_0

e.g. по $n = 47$ $\hat{Fertility} = 59.8 + 0.103 \cdot Agricult_i + 0.11\ Cat_i$

$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix}$ $\hat{Var}(\hat{\beta}) = \begin{pmatrix} 15 & -0.2 & -0.07 \\ -0.2 & 0.06 & -0.001 \\ -0.07 & -0.001 & 0.01 \end{pmatrix}$ $\hat{S}^2 = 11.07^2$

★ с ростом $se(\hat{\beta})$ шир. д. и. увеличивается

1) 95% д.и. для β_3 ?

2) $H_0: \beta_2 = 0$, $H_1: \beta_2 \neq 0$, $\alpha = 0.05$?

3) 95% д.и. для σ^2

Исп. предп. $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2)$

(1) $t = \dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k}$

$j = 3,\ n = 47,\ k = 3$

$$p\left(-t_{cr} < \frac{\hat{\beta}_3 - \beta_3}{se(\hat{\beta}_3)} < t_{cr}\right) = 0.95$$

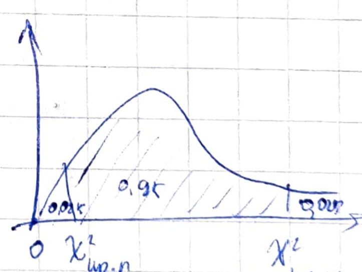
$$p\left(\hat{\beta}_3 - t_{cr} \cdot se(\hat{\beta}_3) < \beta_3 < \hat{\beta}_3 + t_{cr} \cdot se(\hat{\beta}_3)\right) = 0,95$$

$$\beta_3 \in [\,0,109 - \underbrace{2,02}_{\substack{\| \\ qt(0,975;\ tf = 44)}} \cdot \sqrt{0,06}\ ;\ 0,109 + 2,02 \cdot \sqrt{0,06}\,]$$

(3) $\dfrac{RSS}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-k} \Rightarrow RSS = (n-k)\cdot\hat{\sigma}^2$$

$$(n-k)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$$



$$p\left(\chi^2_{кр.л.} < \frac{\hat{\sigma}^2(n-k)}{\sigma^2} < \chi^2_{кр.п.}\right) = 0,95$$

$$p\left(\frac{\hat{\sigma}^2(n-k)}{\chi^2_{кр.п.}} < \sigma^2 < \frac{\hat{\sigma}^2(n-k)}{\chi^2_{кр.л.}}\right) = 0,95$$

q(0,025; 44) q(0,975; 44)

$\sigma^2 \in [\,84;\ 196\,]$

② 1 способ:

$\beta_2 \in [-0{,}05;\ 0{,}27]$

$H_0: \beta_2 = 0$ не отв.

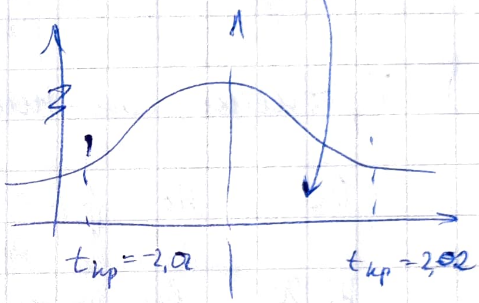
2 способ

t_{obs} и t_{cr}?

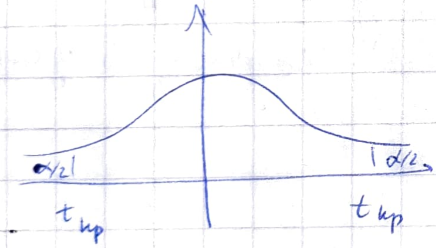
$t = \dfrac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{se(\hat{\beta}_2)} = \dfrac{\hat{\beta}_2}{se(\hat{\beta}_2)} = \dfrac{0{,}109}{\sqrt{0{,}006}} \approx 1{,}4 \Rightarrow H_0$ не отв

$\Uparrow$

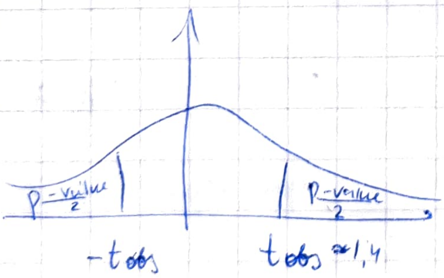
$H_0: \beta_2 = 0$



3 способ.



$\alpha = 0{,}05$



$t_{obs} \approx 1{,}4$

$\dfrac{p\text{-value}}{2} = 1 - pt(1{,}4,\ 44)$

$p\text{-value} = 2 - 2pt(1{,}4,\ 44) = 0{,}17 > \alpha$

$\Rightarrow H_0$ – не отв.

$\approx 95\%$ д.и. $[\hat{\beta}_j - 2se(\hat{\beta}_j);\ \hat{\beta}_j + 2se(\hat{\beta}_j)]$

2.2) Значимость и существенность

Стандарт. коэф.:

Существенность – можно придать мат. смысл.

e.g. • стандарт. переменные:

$$y_i^{st} := \frac{y_i - \bar{y}}{sd(y)}, \quad x_i^{st} := \frac{x_i - \bar{x}}{sd(x)}, \quad z_i^{st} := \frac{z_i - \bar{z}}{sd(z)}$$

• переоценим модели:

$$y_i^{st} = \beta_1^{st} + \beta_2^{st} \cdot x_i^{st} + \beta_3^{st} \cdot z_i^{st} + \varepsilon_i^{st}$$

2.3) Проблема мн-ных сравнений

OK: $H_0: \beta_i = 0$

не OK: выяснить какие из 100 регр. значимы?

↳ нужна поправка, т.к. даже если все $\beta_i = 0$ с вер. 5% получим 5 знач. пер.

~~2.4)~~ ∘ Проверка гип. об одном огр-и

$$\beta_2 - \beta_3 = 0$$

$$t = \frac{(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3) - (\beta_2 - \beta_3)}{se(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3)}$$

ас-ки: $\sim N(0,1)$

при норм. $\varepsilon_i \sim t_{n-k}$

∘ Переформулировка модели

$H_0 \quad \theta \quad \theta_2 - \theta_3$

↳ переформ. так, что $\theta_2' = \beta_2 - \beta_3$

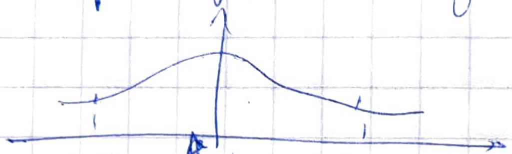
e.g. Проверка гип. о связи коэф.

1. $H_0: \beta_A - \beta_C = 0 \quad \alpha = 0{,}05\ \%$

$$t = \frac{(\hat{\beta}_A - \hat{\beta}_C) - (\overset{0}{\beta_A - \beta_C})}{se(\hat{\beta}_A - \hat{\beta}_C)} = \frac{(\hat{\beta}_A - \hat{\beta}_C)}{se(\hat{\beta}_A - \hat{\beta}_C)} = \frac{0{,}1 - 0{,}11}{0{,}1} \approx -0{,}05$$

$$se(\hat{\beta}_A - \hat{\beta}_C) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_A - \hat{\beta}_C)} =$$

$$= \sqrt{Var(\hat{\beta}_A) + Var(\hat{\beta}_C) - 2cov(\hat{\beta}_A, \hat{\beta}_C)}$$



$\Rightarrow H_0$ – не отв.

2. $H_0: \beta_A - \beta_C = 0 \quad \alpha = 0{,}05\ \%$

$$y_i = \beta_1 + \beta_A \cdot a_i + \beta_C \cdot c_i + \varepsilon_i$$

$$+ \beta_A \cdot c_i - \beta_A \cdot c_i$$

$$= \beta_1 + \underbrace{(\beta_C - \beta_A)}_{} \cdot c_i + \beta_A (a_i + c_i) + \varepsilon_i$$

$$H: \beta' = 0 \Leftrightarrow \beta_C - \beta_A = 0$$

3) Прогнозирование

$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 \cdot z_i + \varepsilon_i$

точеч. прогн. $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i$

точность прогноза опр. шириной д.и.

д.и. для $E(y_i | x_i, z_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 \cdot z_i$

д.и. для $y_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i + \beta_3 \cdot z_i + \varepsilon_i$

$E(y_i | X)$

→ Ошибка прогноза усл. ср. $\hat{y}_i - E(y_i | X)$

дисп. ош. прогноза $Var(\hat{y}_i - E(y_i | X) | X)$

$= Var(\hat{y}_i | X) = Var(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i | X)$

Конкр. набл. y_i

→ Ош. прогноза $\hat{y}_i - y_i$

дисп. ош. прогноза:

$Var(\hat{y}_i - y_i | X) = Var(\hat{y}_i - E(y_i | X) - \varepsilon_i | X) =$

$= Var(\hat{y}_i - \varepsilon_i | X) = Var(\hat{y}_i | X) + Var(\varepsilon_i | X) =$

$= Var(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i + \hat{\beta}_3 z_i | X) + Var(\varepsilon_i | X)$

Оценка дисп.

$Var(\hat{y}_i | X)$, $Var(\varepsilon_i | X)$ – неизв., зав. от σ^2

$\hat{Var}(\hat{y}_i | X)$, $\hat{Var}(\varepsilon_i | X)$ – изв., $se(\hat{y}_i) = \sqrt{\hat{Var}(\hat{y}_i | X)}$

Д.и. для $E(y_i|X)$

асимпт. $\dfrac{\hat{y}_i - E(y_i|X)}{se(\hat{y}_i)} \to N(0;1)$

$$E(y_i|X) \in [\hat{y}_i - z_{\alpha}\, se(\hat{y}_i) ;\ + \ ]$$

$(\approx 1,96)$

при норм. $\dfrac{\hat{y}_i - E(y_i|X)}{se(\hat{y}_i)} \sim t_{n-k}$

$$E(y_i|X) \in [\hat{y}_i - t_{\alpha} \cdot se(\hat{y}_i) ;\ + \ ]$$

Д.и. для y_i

ас. $\dfrac{\hat{y}_i - y_i}{se(\hat{y}_i - \varepsilon_i)} \to N(0;1)$

при норм $\dfrac{\hat{y}_i - y_i}{se(\hat{y}_i - \varepsilon_i)} \sim t_{n-k}$

e.g. $\hat{p}_i = -62 + 2{,}6\, t_i$

$\hat{\sigma}^2 = 1154$ $\quad \hat{Var}(\hat{\beta}|X) = \begin{pmatrix} 13 & -0{,}18 \\ -0{,}18 & 0{,}025 \end{pmatrix}$

$t_F = 60$ $\quad \hat{p}_F = -62 + 2{,}6 \cdot 60 = 94$

$\hat{Var}(\hat{p}_i|X) = \hat{Var}(\hat{\beta}_1|X) + 60^2 \cdot \hat{Var}(\hat{\beta}_2|X) + 60 \cdot 2\, \hat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2|X)$

$\hat{Var}(\hat{p}_i|X) = 13 + 60^2 \cdot 0{,}025 + 60 \cdot 2 \cdot (-0{,}18) \approx 1$

~~$\hat{Var}(E(y_F|t_F = 60))$~~

$\hat{Var}(\underbrace{E(y_F|t_F=60)}_{const} - \hat{y}_F|X) = \hat{Var}(\hat{p}_i|X) \approx 1$

$\hat{Var}(y_F - \hat{y}_F|X) = \hat{Var}(E(y_F|t_F=60) + \varepsilon_F - \hat{y}_F|X) = \hat{Var}(\varepsilon_F|X) + \hat{Var}(\hat{y}_F|X) =$

$1154 + 1 = 1155$

5) Гомоскедастичность и гетероскедастичность

Усл. гомоск-ти $Var(\varepsilon_i | X) = E(\varepsilon_i^2 | X) = \delta^2$

Усл. гетероск-ти $Var(\varepsilon_i | X) = E(\varepsilon_i^2 | X) \neq const$

$E(\varepsilon_i^2 | X) = \delta^2 \Rightarrow E(E(\varepsilon_i^2 | X)) = \delta^2 \Rightarrow E(\varepsilon_i^2) = \delta^2$

→ усл. гомоск. $E(\varepsilon_i^2 | X) = \delta^2$; безусл. гомоск. $E(\varepsilon_i^2) = \delta^2$

→ усл. гетероск. $E(\varepsilon_i^2 | X) \neq const$; безусл. гетероск. $E(\varepsilon_i^2) \neq \delta^2$

e.g.

$X_1 \backslash \varepsilon_1$	-10	-1	1	10
1	0	1/4	1/4	0
10	0	1/4	1/4	0

$X_2 \backslash \varepsilon_2$	-10	-1	1	10
1		– // –		
10				

$E(\varepsilon_1 | X_1) = 0$

$E(\varepsilon_1^2 | X_1) = 1$

$Var(\varepsilon_1 | X_1) = 1 - 0^2 = 1$

$E(\varepsilon_1) = E(E(\varepsilon_1 | X_1)) = E(0) = 0$

$Var(\varepsilon_1) = Var(E(\varepsilon_1 | X_1)) + E(Var(\varepsilon_1 | X_1)) = Var(0) + E(1) = 1$

усл. гомоск. $Var(\varepsilon_i | X_i) = const = 1$ +

безусл. гом. $Var(\varepsilon_i) = 1$ +

e.g.

$X_1 \backslash \varepsilon_1$	-10	-1	1	10
1	0	1/4	1/4	0
10	1/4	0	0	1/4

$X_2 \backslash \varepsilon_2$	-10	-1	1	10
1		– // –		
10				

$E(\varepsilon_1 | X_1) = 0$

$E(\varepsilon_1^2 | X_1) = x_1^2$

$Var(\varepsilon_1 | X_1) = x_1^2$

$E(\varepsilon_1) = E(E(\varepsilon_i^2 | X_1)) = 0$

$E(\varepsilon_1^2) = 1 \cdot 1/2 + 100 \cdot 1/2 = 50{,}5$

$Var(\varepsilon_1) = 50{,}5$

$Var(\varepsilon_1 | x_1) \neq const$

→ усл. гетероск.

$Var(\varepsilon_1) = 50{,}5$

→ безусл. гомоск.

e.g.

$X_1 \backslash \varepsilon_1$	-10	-1	1	10
1	0	1/4	1/4	0
10	0	1/4	1/4	0

$X_2 \backslash \varepsilon_2$	-10	-1	1	10
1	1/4	0	0	1/4
10	1/4	0	0	1/4

$E(\varepsilon_1 | x_1) = 0$

$E(\varepsilon_1^2 | x_1) = 1$

$Var(\varepsilon_1 | x_1) = 1$

$E(\varepsilon_1) = 0$

$Var(\varepsilon_1) = 1$

$\neq$

$E(\varepsilon_2 | x_2) = 0$

$E(\varepsilon_2^2 | x_2) = 100$

$Var(\varepsilon_2^2 | x_2) = 100$

$E(\varepsilon_2) = 0$

$Var(\varepsilon_2) = 100$

$\Rightarrow$ безусл. гетероскедост.

$$Var(\varepsilon_1) \neq Var(\varepsilon_2)$$

Случ. выборка:

- безусл. гетероск. не бывает
- усл. гетероск. появл.
  - наличие "размера" у объектов
  - практически всегда

Предпосылки:

1) стр. экзогенность $E(\varepsilon_i | X) = 0$
2) некор. ош. $Corr(\varepsilon_i, \varepsilon_j | X) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j | X) = 0$
3) $n > k$
4) P(нет лин. зав. регр.) $= 1$

Для оценок коэф.: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} \cdot X'y$

Для оц. ков. м-цы оц. коэф.: $\widehat{Var}(\hat{\beta} | X) = \frac{RSS}{n-k} (X'X)^{-1}$

$\hookrightarrow$ $\widehat{Var}(\hat{\beta}_j | X) = \frac{\hat{\sigma}^2}{RSS_j}$

$\hookrightarrow$ $se(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_j | X)}$

Св-ва (при гомоск.) (при гет.)

1) линейность по y +

2) несмещ. $E(\hat\beta|X)=\beta$, $E(\hat\beta)=\beta$ +

3) эф. оц. среди лин. несмещ. −

∀ при норм.

4) $t=\frac{\hat\beta_j-\beta_j}{se(\hat\beta_j)}|X \sim t_{n-k}$ $\nsim t_{n-k}$

5) $\frac{RSS}{\sigma^2}|X \sim \chi^2_{n-k}$ $\nsim \chi^2_{n-k}$

6) $F=\frac{(RSS_R-RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/(n-k)} \sim F_{r,n-k}$ $\nsim F_{r,n-k}$

∀ асимпт.

7) $\hat\beta \to \beta$ +

8) $\frac{RSS}{n-k} \to \sigma^2$ +

9) $t=\frac{\hat\beta_j-\beta_j}{\sigma(\hat\beta_j)} \to N(0;1)$ $\not\to N(0;1)$

10) $\frac{RSS_R-RSS_{UR}}{RSS_{UR}/(n-k)} \to \chi^2_r$ $\not\to \chi^2_r$

⇒ $\hat\beta$ можно интерпр. и использовать

$se(\hat\beta_j)$ − несостоятельны ⇒ нельзя построить ди. для β_j и пров. H_0

↳ исп. другие ст. ош. $se_{HC}(\hat\beta_j)$, где с.о. heteroskedasticity consistent

$se(\hat\beta_j)$ − $\sqrt{\ }$ из диаг. $\widehat{Var}(\hat\beta|X)$

$se_{HC}(\hat\beta_j)$ − $\sqrt{\ }$ из диаг. $\widehat{Var}_{HC}(\hat\beta|X)$

5.1) Обнар. гетероск-ти

Робастная (устойчивая) к гетероск-ти оц-ка ков. м-цы

$$\hat{Var}(\hat{\beta}|X) = \frac{RSS}{n-k} \cdot (X' \cdot X)^{-1}$$

$\Downarrow$

$$\hat{Var}_{HC}(\hat{\beta}|X) = (X'X)^{-1} \cdot X' \hat{\Omega} (X'X)^{-1}$$

Уайт (1980) HC0 : $\hat{\Omega} = diag(\hat{\varepsilon}_1^2, \ldots, \hat{\varepsilon}_n^2)$

Совр. вариант : $\hat{\Omega} = diag\left(\frac{\hat{\varepsilon}_1^2}{(1-h_{11})^2}, \ldots, \frac{\hat{\varepsilon}_n^2}{(1-h_{nn})^2}\right)$

Суть корректировки:

$se(\hat{\beta}_j) \Rightarrow se_{HC}(\hat{\beta}_j)$

решается:

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se_{HC}(\beta_j)} \to N(0;1)$$

не реш.:

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se_{HC}(\beta_j)} \not\sim t_{n-k}$$

$$\frac{RSS}{\sigma^2} | X \not\sim \chi^2_{n-k}$$

$$\frac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/(n-k)} \not\sim F_{r, n-k}$$

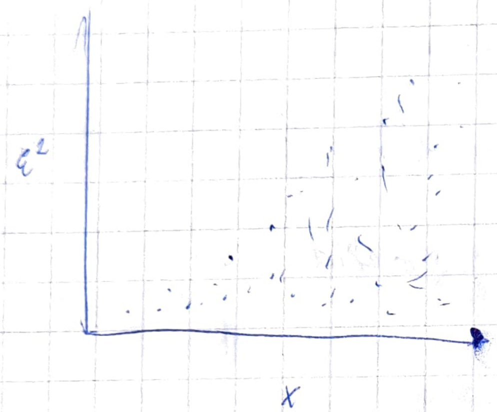
$\Rightarrow$ Если предпол. зависимость от "размера", то вводим робастные ст. ош.

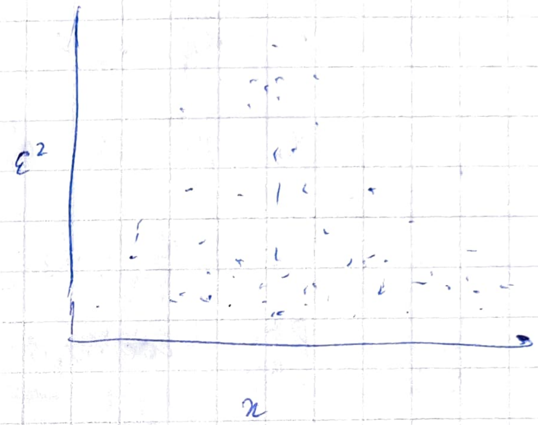
Обнаружение

1) Оцениваем модель с пом. МНК

Строим график квадратов ост. в зав-ти от регр. (модулей)

Гетероск. Гомоск.





2) Тест Уайта (асимпт., не треб. норм. ост. ε_i)

↳ с пом. одной доп. вспом. регрессии

1. Оценить осн. регр., получить $\hat{\varepsilon}_i$

2. Оценить вспомог. регр.:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \gamma_1 + \gamma_2 \cdot z_{i2} + \ldots + \gamma_{i,k} z_{i,m} + u_i$$

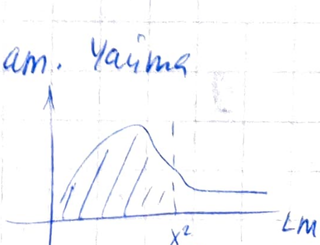
строится регр на пер., от кот. зав. гетероск.

где $z_{i2}, \ldots, z_{im}$ – факт., опр. форму гет-ти

(если не изв., то бер. исх. регр., квадраты регр., поп. произв.)

3. $LM = n \cdot R^2_{aux}$ – посчитать стат. Уайта

при $H_0: Var(\varepsilon_i | X) = \sigma^2$



$LM \sim \chi^2_{m-1}$, где m – число коэф. вспом. регр. ($\hat{\varepsilon}_i^2$)

e.g. $q_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot p_i + \beta_3 \cdot a_i + \beta_4 \cdot d_i + \varepsilon_i$

$H_0: \ Var(\varepsilon_i | X) = \sigma^2$ $\qquad \alpha = 0{,}05$

$H_1: \ Var(\varepsilon_i | X) \neq \sigma^2$ $\qquad n = 200$

Тест Уайта: $R^2_{aux} = 0{,}15$ (вспом. регр.)

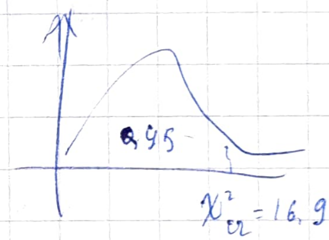
Шаг 1) исх. мод. $\Rightarrow \hat{\varepsilon}_i$

Шаг 2) $\hat{\varepsilon}_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 p_i + \alpha_3 a_i + \alpha_4 \cdot d_i +$

$\alpha_5 \cdot p_i^2 + \alpha_6 \cdot a_i^2 + \alpha_7 \cdot d_i^2 +$

$\alpha_8 \cdot p_i a_i + \alpha_9 \cdot p_i d_i + \alpha_{10} a_i d_i + u_i$

$W = n \cdot R^2_{aux} = 200 \cdot 0{,}15 = 30$



при H_0: $W \sim \chi^2_{10-1}$

$\Rightarrow W > \chi^2_{cr} \Rightarrow H_0$ отв. $\Rightarrow$ гетероск.

3) Тест Голдфельда - Квандта

Предп.:

1. есть перем., от кот. предп. монот. зав. усл. дисп. ош.
2. треб. норм. ошибок
3. подх. для мал. выборок

Алгоритм:

1. Сорт. набл. по предпол. убыв. усл. дисп.
2. Выкинуть часть набл. посередине ($\approx 20\%$)
3. Оценить исх. модель по перв. и посл. набл.

4. RSS_1, RSS_2

5. $$F = \frac{RSS_1 / n_1 - k}{RSS_2 / n_2 - k}$$ n_1 – число набл. в верх. ч. выб.; n_2 – —||— нижн. части выб.

Если $H_0: Var(\varepsilon_i | X) = \sigma^2$

то $$F = \frac{RSS_1/(n_1-k)}{RSS_2/(n_2-k)} \sim F_{n_1-k;\, n_2-k}$$

$$\left(F_{obs} < F_{1-\alpha;\, n_1-k;\, n_2-k}\right)$$

★ тест осн. на отд. набл. с предп. высокой усл. дисп. от набл. с предп. низкой усл. дисп., причем крит. разд. м.б. любым

e.g. $q_i = \beta_1 + \beta_2 p_i + \beta_3 Q_i + \beta_4 d_i + \varepsilon_i$

$H_0: Var(\varepsilon_i | X) = \sigma^2$ $\alpha = 0{,}05$

$H_1: Var(\varepsilon_i | X) \neq \sigma^2$ $n = 200$

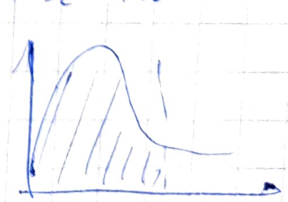
Предпол. $Var(\varepsilon_i | X) = g(d_i)$

200 → 80 d_i – мало $RSS_1 = 210$

40 ×

→ 80 d_i – велико $RSS_2 = 120$

$$GQ = \frac{RSS_1 / n_1 - k}{RSS_2 / n_2 - k} = \frac{210}{120} = 1{,}75$$



F_{cr}

H_0 верно $\Rightarrow GQ \sim F_{n_1-k;\, n_2-k}$ $(F_{76;76})$

$GQ > F_{cr}$ $(1{,}75 > 1{,}46) \Rightarrow H_0$ – отв. $\Rightarrow$ усл. гетероск.

5.2) Последствия гетероск-ти:

- проверка гипотез некорректна
- $se_{HC}(\hat{\beta})$ исправл. ситуац. при большом n (ас.)
- $\hat{\beta}$ - неэф. (смирились),

довольны несмещ., сост., возм. проверять гип.

↳ постр. эф. оценки большая разность

(надо очень точно понимать, если устр. гетероск-ть)

e.g. $m_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot r_i + \beta_3 \cdot t_i + \varepsilon_i$

$$Var(m_{ij} | X) = \sigma^2 \overset{\text{предп.}}{\Longrightarrow} Var(m_i | X) = \frac{\sigma^2}{r_i}$$

$$Var(\varepsilon_i | X) = \frac{\sigma^2}{r_i} \Longrightarrow Var(\sqrt{r_i} \cdot \varepsilon_i | X) = r_i \cdot \frac{\sigma^2}{r_i} = \sigma^2$$

Мод. β

$$\sqrt{r_i}\, m_i = \beta_1 \cdot \sqrt{r_i} + \beta_2 \cdot \sqrt{r_i} \cdot r_i + \beta_3 \cdot t_i \cdot r_i + \underbrace{u_i}_{= \sqrt{r_i} \cdot \varepsilon_i}$$

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{r_1} & r_1^{3/2} & t_1\sqrt{r_1} \\ \vdots & & \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

6) <u>Автокорреляция</u>

Усл. некор. ошибок $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j | X) = E(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j | X) = 0$, $i \neq j$

Автокорр. возникает, если:

- "близость" набл. во времени или пр-ве
- наличие ненабл. факт., действ. на "соед." набл.

Подробно:

- анализ врем. рядов
- пространств. эконометрике

При автокор.

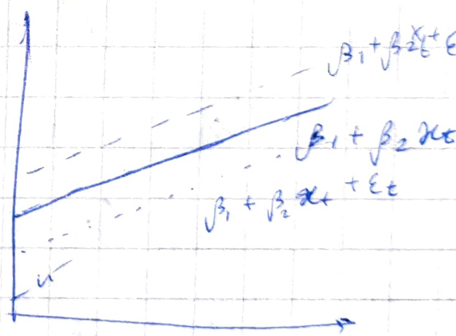
- м. б. несост. оценки $\hat{\beta}$.

e.g. $E(y_t) = \beta_1 + \beta_2 x_t$

$y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_t + [\varepsilon_t]$

если $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n$

ε_i	1	-1
p	1/2	1/2



<u>Автокор. пор. p.</u>

$p = 1$: $\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-1} + u_t$ $\quad \rho \in (-1; 1)$

где u_t - i.i.d., нез. от рег.

$E(u_t) = 0$, $Var(u_t) = \sigma_u^2$

e.g. $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \quad \rho \in (-1; 1)$

$\rho = 1/2 \quad \varepsilon_t = 1/2 \cdot \varepsilon_{t-1} + u_t$

$\varepsilon_t = 1/2\,(1/2\,\varepsilon_{t-2} + u_{t-1}) + u_t$

$= 1/2\,(1/2\,(1/2 \cdot \varepsilon_{t-3} + u_{t-2}) + u_{t-1}) + u_t$

$\dots = u_t + 1/2\,u_{t-1} + (1/2)^2 u_{t-2} + (1/2)^3 u_{t-3} \dots$

$=$

$Var(\varepsilon_t) = \delta_\varepsilon^2$

$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \gamma_1$

$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) = \gamma_2$

$Var(\varepsilon_t) = Var(\rho \cdot \varepsilon_{t-1}) + Var(u_t) + 2\underbrace{Cov(\rho \cdot \varepsilon_{t-1}, u_t)}_{=0}$

$\delta_\varepsilon^2 = \rho^2 \cdot \delta_\varepsilon^2 + \delta_u^2 + 0$

$\delta_\varepsilon^2 = \dfrac{\delta_u^2}{1-\rho^2}$

$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = cov(\rho\varepsilon_{t-1} + u, \varepsilon_{t-1}) =$

$= \rho\, Cov(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \underbrace{Cov(u, \varepsilon_{t-1})}_{=0} = \rho \cdot \delta_\varepsilon^2$

$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) = \dots = \rho \cdot Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \rho^2 \cdot \delta_\varepsilon^2$

$Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \dfrac{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k})}{\sqrt{Var(\varepsilon_t) \cdot Var(\varepsilon_{t-k})}} = \dfrac{\rho^k \cdot \delta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2} = \rho^k$

$k \uparrow \Rightarrow cov, cor \downarrow$

Автокор. пор. p:

$$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \varphi_p \cdot \varepsilon_{t-p} + u_t$$

u_t – i.i.d, нез. от рег.

$E(u_t)=0$, $Var(u_t)=\sigma^2$

↳ допуск-ся более богатые стр. $Corr(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$

при этом $\lim\limits_{k\to\infty} Corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k})=0$

Условная автокорреляция:

↳ наруш. предп. о нез-ти наб. (x_i, y_i)

– обычно нар. предп. о ст. экзогенности:

$E(\varepsilon_t | X)=0$

(e.g.) y_{t-1} – исп. в кач-ве рег. $\Rightarrow E(\varepsilon_t|X)\neq 0$

Изб. от автокор.

1) Ослабить предпосылки

2) Исп. метод макс. правдоподобия

e.g. $\hat\beta = (X'X)^{-1} \cdot X' y$

$\hat{Var}(\hat\beta | X) = \frac{RSS}{n-k} (X'X)^{-1}$

↳ $\hat{Var}(\hat\beta_j | X) = \frac{\hat\sigma^2}{RSS_j}$. $se(\hat\beta_j) = \sqrt{\hat{Var}(\hat\beta_j|X)}$

Автокор. (нет) | Автокор. (есть)

1) Линейность по y — $+$

2) $E(\hat\beta|X)=\beta$; $E(\hat\beta)=\beta$ — $+$

3) оценки эф. среди лин. несм. — $-$

$\varepsilon \to N$

4) $\left.\dfrac{\hat\beta_j-\beta_j}{se(\hat\beta_j)}\right| X \sim t_{n-k}$ — $\not\sim t_{n-k}$

5) $\left.\dfrac{RSS}{\sigma^2}\right| X \sim \chi^2_{n-k}$ — $\not\sim \chi^2_{n-k}$

6) $\dfrac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/(n-k)} \sim F_{r,n-k}$ — $\not\sim F_{r,n-k}$

$n \to \infty$

7) $\hat\beta \to \beta$ — $+$

8) $\dfrac{RSS}{n-k} \to \sigma^2$ — $+$

9) $\dfrac{\hat\beta_j-\beta_j}{se(\hat\beta_j)} \to N(0;1)$ — $\not\to N(0;1)$

10) $\dfrac{(RSS_R - RSS_{UR})}{RSS_{UR}/(n-k)} \to \chi^2_r$ — $\not\to \chi^2_r$

$\Rightarrow$ $\hat\beta$ — можно исп. и сост.

но $se(\hat\beta_j)$ — несост. $\Rightarrow$ нельзя строить д.и. и пров. H_0

Испр. автокор.

1) Исправление $se_{HAC}(\hat{\beta}_j)$

↳ вместо $\hat{Var}(\hat{\beta}|X)$ исп. $\hat{Var}_{HAC}(\hat{\beta}|X)$

$$\hat{Var}(\hat{\beta}|X) = \frac{RSS}{n-k}(X'X)^{-1}$$

$$\hat{Var}_{HAC}(\hat{\beta}|X) = (X'X)^{-1}\hat{\Phi}(X'X)^{-1}$$

Ньюи-Вест (1987) $\hat{\Phi} = \sum_{j=-k}^{k} \frac{k-|j|}{k}\left(\sum_t \hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t+j} x_t' x_{t+j}\right)$

↳ $se(\hat{\beta}_j) \to s_{HAC}(\hat{\beta}_j)$

теперь $\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{s_{HAC}(\hat{\beta}_j)} \to N(0;1)$

↳ можно пров. гип. и стр. д.и. для β_j

Ф-ла исп., если им. подозр. об автокор. и лень модел.

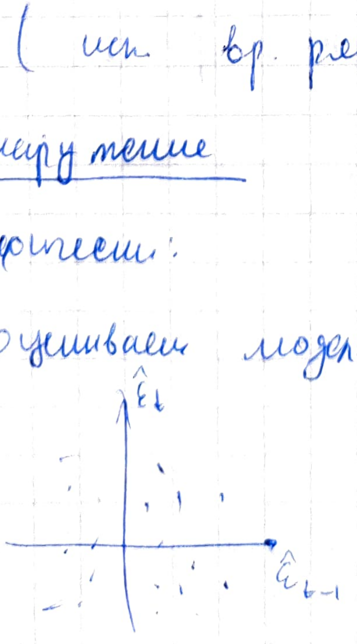
(исп. вр. ряды или геогр. близость)

Обнаружение

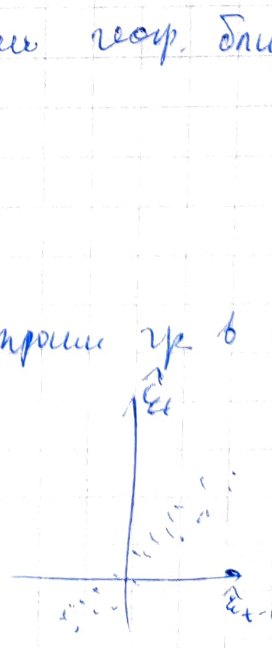
1) Графически:

оцениваем модель, строим гр. в осях $\hat{\varepsilon}_{t-1}, \hat{\varepsilon}_t$

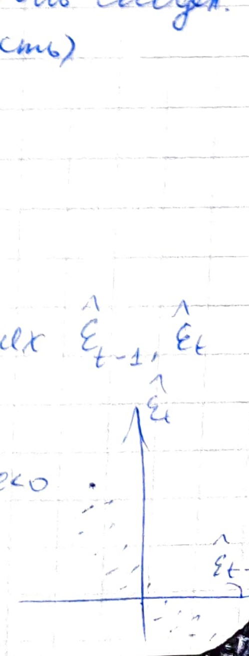
нет АС



есть AC>0



AC<0



2) Тест Дарбина – Уотсона

(только для ас. 1ого пор. $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$

+ норм. ошибок ε

+ стр. экзог. $E(\varepsilon_t | X) = 0$)

$H_0: \rho = 0$

Шаг 1) Оценить регр., получить $\hat{\varepsilon}_i$

Шаг 2) Посч. статистику

$$DW = \frac{\sum (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_{i-1})^2}{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}$$ – сильно зав. от X

Если $\hat{\rho}$ – выб. кор. ост., то $DW = 2(1 - \hat{\rho})$

$\in (0; 4)$

$DW \approx 0$ – пол. АС $\hat{\rho} \approx 1$

$DW \approx 2$ – отсут. АС $\hat{\rho} \approx 0$

$DW \approx 4$ – отр. АС $\hat{\rho} \approx -1$

3) Тест Бройша – Годфри

(тест на АС порядка p,

не тр. норм. ост.,

верен при ряде наруш. стр. гипот.

асимптот.)

$$H_0: \varphi_1 = \ldots = \varphi_p = 0$$

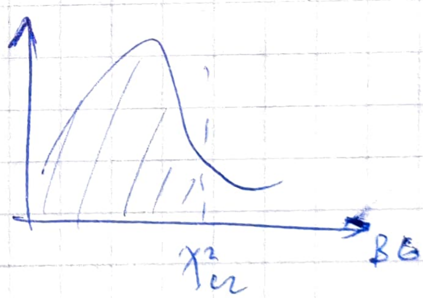
Шаг 1) Оц. исх. регр., получаем $\hat{\varepsilon}_t$

Шаг 2) строим всп. регр. $\hat{\varepsilon}_t$ на исх. рег. $\hat{\varepsilon}_{t-1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_{t-p}$

находим R^2_{aux}

Шаг 3) считаем стат.:

$$BG = (n-p) \cdot R^2_{aux} \quad (\sim \chi^2_p)$$



e.g. $\hat{I}_t = -12 - 1 \cdot r_t + 0{,}166 P_t \qquad n = 19$

A: $\varepsilon_t = \gamma_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + u_t \quad (DW = 1{,}32)$

$DW = 2(1 - \hat{\rho}) \Rightarrow \hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2} = 0{,}34$

B: $\varepsilon_t = \gamma_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \gamma_2 \cdot \varepsilon_{t-2} + u_t$

всп. регр. $\hat{\varepsilon}_t$ на r_t, P_t, $\hat{\varepsilon}_{t-1}$, $\hat{\varepsilon}_{t-2}$, $R^2_{aux} = 0{,}075$

$BG = (T-p) \cdot R^2_{aux} = (19-2) \cdot 0{,}075 = 1{,}28 \sim \chi^2_2 \qquad \chi_{cr} = 5{,}99 \Rightarrow H_0$: не отв.

Эконометрика (*)

Энтропия с.в. x – мера предсказуемости с.в. x (кол-во инф., нот. пол., набл. x)

Если X, Y независ., то $H\left(\binom{X}{Y}\right) = H(X) + H(Y)$

$H(X) = E(-\ln p(X))$, где $p(t) = P(X = t)$

e.g.

Y	1	17	36
$p(Y=y)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$P(42) = 0$

$P(17) = 1/3$

$E(Y) = 1 \cdot 1/3 + 17 \cdot 1/3 + 36 \cdot 1/3$

$H(Y) = E(-\ln p(Y)) = 1/3 \cdot (-\ln 1/3) + (-''-) + (-''-) = -\ln\frac{1}{3} = \ln$

e.g.

R	0	1
p	$0{,}1$	$0{,}9$

$H(R) = 0{,}1 \cdot (-\ln 0{,}1) + 0{,}9 \cdot (-\ln 0{,}9)$

Спутанность (perplexity): $Perp(x) = \exp(H(X))$

e.g.

v	0	1
p	$0{,}1$	$0{,}9$

$0 < H(v) < \ln 2$

e.g. $Y \sim U[0; a]$

$H(Y) = \int_0^a \frac{1}{a} \cdot (-\ln \frac{1}{a})\, dt = \ln a$

$Perp(Y) = a$

Метод макс. энтропии

e.g.

v	1	2	3
p	1/2	? $\downarrow$ 1/4	? $\downarrow$ 1/4

★ если $E(S) = 100$, $Var(S) = 23$

то $S \sim N(100, 23)$ max энтропийно

e.g.

$x \backslash y$	2	8
5	0,1	0,2
7	0,3	0,4

$\Rightarrow$

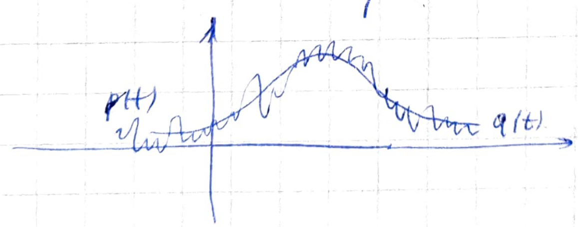
w	X_1	X_2	X_3	X_4
p	0,1	0,2	0,3	0,4

$$p\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 0,3$$

Расхождение (дивергенция) Кульбака-Лейблера

Суть: заменить сложное $p(t)$ на более простое $q(t)$

e.g. $N(\mu, \sigma^2)$



X: истинная ф-я плотности

предп. ф-я плотности

Дивергенция KL из p в q

$$D_{KL}(p \| q) = E(-\ln q(x)) - \underbrace{E(-\ln p(x))}_{\text{энтропия}}$$

$$D_{KL}(p \| q) \neq D_{KL}(q \| p) \quad (\geq 0)$$

e.g.

	v	x_1	x_2	x_3
	$p(v)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$
	$q(v)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$$D_{KL}(p\|q) = \left[\frac{1}{2}\left(-\ln\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(-\ln\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(-\ln\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$- \left[\frac{1}{2}\left(-\ln\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(-\ln\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(-\ln\frac{1}{4}\right)\right] =$$

$$= \ln 3 - 1{,}5 \ln 2 \approx 0{,}059$$

e.g. $D(N(0;1) \,\|\, N(0;4)) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\cdot(-\ln q(t))\,dt -$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)\cdot(-\ln p(t))\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\left(-\ln\frac{q(t)}{p(t)}\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,\ln\left(\frac{1}{2}\exp\left(\frac{3t^2}{8}\right)\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\cdot\left(\ln 2 - \frac{3t^2}{8}\right)dt$$

$$= E\left(\ln 2 - \frac{3x^2}{8}\right) = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 4}}\cdot e^{-t^2/2\cdot 4}$$

$E(X^2) = 1 \quad E(X) = 0$

t - SNE алгоритм (stochast. neighbourhood embedd.)

t-распр.

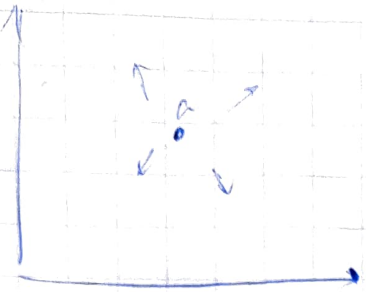
x →

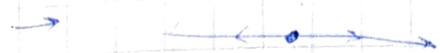
perp. →

① Подбор, вычисление $\delta_a, \delta_b, \delta_c$:

$Perp(w_a) = Perp(w_b) = Perp(w_c) = Perp(p)$

② Точки a, в, c... распр в пр-ве меньшей р-ти так, чтобы $D_{KL}(P\|Q) \longrightarrow \min$





w	b	c
$p(W_a = w)$	$p_{b\mid a}$	$p_{c\mid a}$

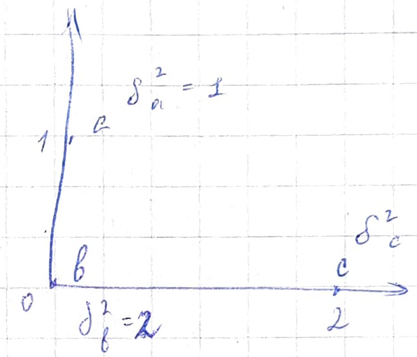
w	a	c
$p(W_b = w)$	$p_{a\mid b}$	$p_{c\mid b}$

w	a	b
$p(W_c = w)$	$p_{a\mid c}$	$p_{b\mid c}$

π	b	c
$p(\pi_a = \pi)$	$p_{b\mid a}$	$p_{c\mid a}$

— // —　　　— // —

$$p_{b\mid a} = \frac{f_a(b)}{f_a(b) + f_a(c)}$$



$$f_a \sim N(a, \delta_a^2 \cdot I)$$

$$f_a(b) = \frac{1}{\sqrt{\det 2\pi \Sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(b-a)' \cdot \Sigma' \cdot (b-a)\right)$$

ков. м-ца

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \delta_a^2 & 0 \\ 0 & \delta_b^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\ldots}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\|b-a\|^2}{\delta_a^2}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \cdot \exp\left(\frac{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}{\delta^2}\right)$$

$$\hookrightarrow \Sigma^{-1} = \frac{1}{\delta_a^2} \cdot I$$

$$\boxed{v^T \cdot v = \|v\|^2}$$

$$p_{b\mid a} = \frac{\exp\left(-1/2 \cdot 1^2/1\right)}{\exp\left(-1/2 \cdot 1^2/1\right) + \exp\left(-1/2 \cdot 5/1\right)} = \frac{e^{-1/2}}{e^{-1/2} + e^{-5/2}}$$

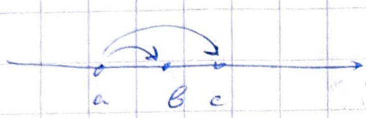
* регрес. — кол. исходов

* $w_a = w(=5)$ ≈ равновер. и 5

$$q_{b|a} = \frac{\varphi_a(b)}{\varphi_a(b) + \varphi_a(c)}$$

↳ для t распр. $\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2}$.

$$q_{b|a} = \frac{\frac{1}{1+\|b-a\|^2}}{\frac{1}{1+\|b-a\|^2} + \frac{1}{1+\|c-a\|^2}}$$



начало (a, b, c ...)

← вер-ти пройти маршруты

Случ. отпр. в $P[a \leftarrow b]$

$$P[ab] = \frac{1}{n} \cdot p_{b|a} + \frac{1}{n} p_{a|b}$$

$$Q[a, b] = \frac{1}{n} \cdot q_{b|a} + \frac{1}{n} q_{a|b}$$

Регр (δ)
+
Регр $\downarrow 0$ →

w_1	w_2
0,99	0,01

$$P[a:b] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{12}$$

$$P[a:c] = \frac{5}{12}$$

$$P[b:c] = \frac{2}{12}$$

(−) t-SNE - случ. алг. (град. спуск со случ. стартом)

* mbsread t-SNE