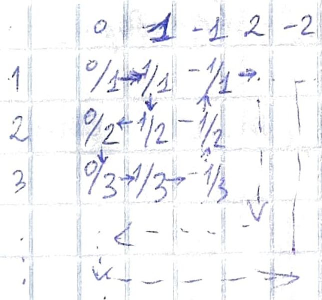
① Счетные и несчетные мн-ва

Счетное мн-во — либо конечное, либо равномощное $\mathbb{N}$

- элементы мн-ва $\mathbb{N}$ можно пронумеровать $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ - счетно
- $\mathbb{Z}$ счетно, т.к. $0, 1, -1, 2, -2 \ldots$ можно пронумеровать
- $\mathbb{Q}$ счетно, т.к.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$



Мн-во м-ти континуум — мн-во равномощное мн-ву $(0;1)$

A и B — равномощные, если между элементами этих мн-в $\exists$ взаимооднозн. соотв

① $\{1, 2, 3\}$ и $\{7, 6, 1\}$ равномощны

② $\{1, 2, 3 \ldots\}$ и $\{2, 4, 6 \ldots\}$ равномощны

③ $\{1, 2, 3, 4\}$ и $\mathbb{N}$ неравномощны, т.к. ост. "меньше"

Теор. S мн-во беск. вправо посл. из 0,1

S – бесконечно, но не равномощно $\mathbb{N}$

▶ Пусть S и $\mathbb{N}$ равномощны

$\exists$ 1 – $\underline{1}000$...   4 – ...$\underline{1}$

2 – $0\underline{0}10$...

3 – $10\underline{1}1$...

Но в любом случае им. посл, кот. не соп. ни одно число:

Пусть $a = 1\ 0\ 1$...

1ое 2ое 3ее

из

1 2 3

$b = 0\ 1\ 0$.. (наоборот)

но b непропущ., т.к. отл. от 1 b 1ым чис.
2 2ым чис.
3 3им ...

$\Rightarrow$ S и $\mathbb{N}$ неравномощны

Теор. A, B – произв. множ., то они

1 либо равномощны

2 либо неравномощны, т.к. A равн. подмн. B

3 –//– , т.к. B равн. подмн. A

▷ ① 2 и 3 не могут произойти вместе

② не может быть так, что

в A нет подм равн. B, а в B – A

След. Если $\operatorname{card} A = \operatorname{card} B'$ $(B' \subseteq B)$

то $A \subseteq B$ $(\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B)$

1. $\mathbb{N}^2$ - объед. счет. мн-ва счет. мн-в счетно

$\mathbb{Z}^n$ - по инд.: $\mathbb{Z}^1$ - счетное

$\mathbb{Z}^{n-1}$ - счетное

$$\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}^1 \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$$

$\mathbb{Q}$ - $f(q)$ - сумма модулей m и n

$(f(-2/3) = 5)$

прошли m/n с $f(q) < 2$

—"— < 3

...

$< n$

$\Rightarrow \mathbb{Q} \simeq \mathbb{N}$

2. $(0;1)$ - cont $(\operatorname{card} [0;1] \times [0;1] > \operatorname{card} [0;1])$

$\mathbb{R}$ - cont

$\mathbb{R}^n$ - cont

$f \in C[0;1]$ - cont

3. $\operatorname{card} \mathbb{C} \geq \operatorname{card} (0;1) > \operatorname{card} \mathbb{N}$

$\underbrace{\mathbb{C} \sim [0;1] \sim \mathbb{R}}$

$\ldots > \sim (0;1) > \sim \mathbb{N} >$ конечные

(4) $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ — cont

1▷ пусть $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ — счетное

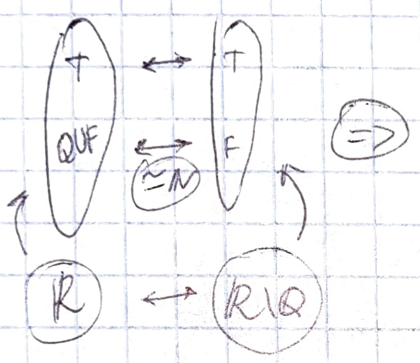
$\mathbb{Q}$ — счетное

$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ — счетное $\Rightarrow$ против.

2▷ Выберем из $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ F — счетное по постр.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = F \cup T$ tail

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup F \cup T$ tail



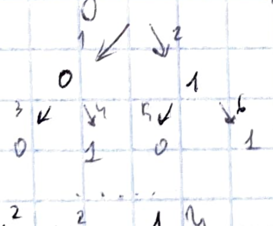
Теор. Если A — произв. мн-во, то

B — мн-во всех подмн-в мн-ва A:

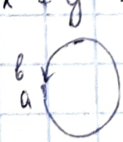
(обозн. 2^A)

$\operatorname{card} 2^A > \operatorname{card} A$

(5) {посл. из 0 и 1, конечн.} — счетное



(6) $\{x^2 + y^2 = 1\}$ — cont



$\simeq [a; b) \simeq [0; 1) \simeq (0; 1)$

$\lim x_n \nearrow \nexists$, $\searrow$ число

$\lim A_i \nearrow \nexists$, $\searrow$ мн-во $= X$

(7) $A_1 = \{1\}$ $\quad$ $\operatorname{card} A_1 = 1$

$A_2 = \{2, 3\}$ $\quad$ ...

...

$A_n = \{ \dots \}$ $\quad$ $\operatorname{card} A_n = n$

$$\lim_{i \to \infty} \operatorname{card}(A_i) = \infty$$

$$\lim_{i \to \infty} A_i = X$$

$1 \notin X$ $\quad$ $+, -, -, \dots$

$57 \notin X$ $\quad$ $- \dots -, +, -, \dots, -$

...

$\Rightarrow X = \varnothing \Rightarrow \lim\limits_{i \to \infty} A_i = \varnothing$

$\operatorname{card} \lim\limits_{i \to \infty} A_i = 0$

(8) $A_n = \{$нег. $\leq 2n\}$

$A_1 = \{1\}$

$A_2 = \{1, 3\}$

...

$\lim A_n = \{2i - 1,\ i \in \mathbb{N}\}$

(9) $A_n = \left(0; \frac{1}{n}\right)$ $\quad$ $\lim A_n = \varnothing$ $\quad$ $\sqrt{3}$ $- - - - \notin X$; $\sqrt{3}/2$ $+ - - - \notin X$

(10) $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{2; 3\}$, $A_3 = \{2\}$ ... $\quad$ $\lim A_n = \nexists$

$1 \ - - \notin$

$2 \ + + \in$

$3 \ - + \ ?$

(II) Сигма-алгебра

$\mathcal{F}$ явл. σ-алгеброй для мн-ва элементарных исходов Ω, если:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$; $\Omega \in \mathcal{F}$
2. если $A \in \mathcal{F}$, то и $\bar{A} \in \mathcal{F}$
3. если $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F}$, то

   $\forall$ лог. оп. из $\forall A_i$ в счетном кол-ве

   обяз. лежит в $\mathcal{F}$

min требования

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. если $A \in \mathcal{F}$, то и $\bar{A} \in \mathcal{F}$
3. если $A_1, \ldots \in \mathcal{F}$, то и $\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}\right]$

   $\left[\forall \cup \text{ и } C_\Omega \in \mathcal{F}\right]$

σ-алгебра индивида – мн-во событий, про которые инд. может гарантиров. сказать, произошли они или нет вне зав-ти от исхода эксперимента

(цель использования σ-алгебр – описать наделенность инф. инд-ов)

$A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$

① Кубик подбр. 2 раза
Инд. знает сумму

$A = \{6;\ \}$ не разл. по опр.

$B = \{\Sigma = 4\}$ разл.

$C = \{2; 5\}$ не разл.

$D = \{6; 6\}$ разл.

② Инд. расп. $\{\{s>4\}, \{s>10\}, \{s>12\}\}$

он не рацион. т.к. может расп.

$\{s \leq 4\}$ $\{s \leq 10\}$ $\{s \leq 12\}$

$s \in (4;10]$ $s \in (10;12]$ $s \in [4;12]$

$s \in (4;10] \cup (12;+\infty)$ $s \in (-\infty;4] \cup [10;12]$

$(+\infty\ -\infty)$ $\varnothing$

...

$(-\infty;4]$ $[4;10]$ $(10;12]$ $(12;+\infty)$

$+$ $+$ $+$ $+$ $(-\infty;+\infty)$

....

③ $\mathcal{H}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{s>4\}, \{s \leq 4\}\}$

– σ-алг., т.к. в $\mathcal{H}_1$ входят все

возм. $\cup$ и $\overline{}$

$\sigma(\ldots) = \sigma$-алг. инд., кот. распознает, что в $(\ldots)$

$\sigma(A) = \{A, \bar{A}, \Omega, \varnothing\}$

④ $L + R + M = 100$

$H_1 = \delta(L)$ $\qquad$ $H_3 = \delta(M, R)$

$\subset$ $\qquad$ $\subset$ $\qquad$ $\subset$

$H_2 = \delta(R+M)$ $\qquad$ $H_4 = \delta(L, M, R)$

$\{R = 10\} \in H_3$

$\{R = 10\} \notin H_2$

⑤ Пусть $d_n = \left[\frac{n-1}{2n-1} \text{ для } B\right] = \frac{n \text{ из } B}{n \text{ из } \mathbb{N}}$

$A = \{2, 4, \dots\}$ $\qquad$ $\frac{A}{N}$: $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{4}$ ... $\frac{500}{1000}$

$\varkappa(A) = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = 1/2$ $\qquad$ $\frac{n}{2n}$

$B = \{1, 3, 5 \dots\}$

$\varkappa(B) = 1/2$ $\qquad$ $\frac{n-1}{2n-1}$

$C = \{1, 2, 3, \dots\}$: $\varkappa(C) = 1$ $\qquad$ $\frac{n}{n}$

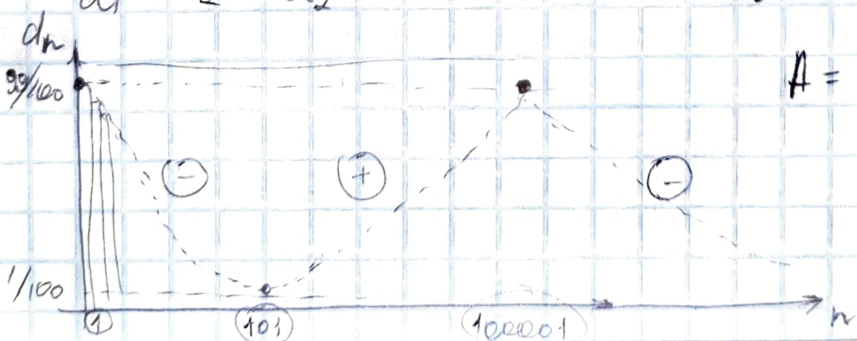
$D = \{500, 501 \dots\}$: $\varkappa(D) = 1$ $\qquad$ $\frac{n}{n}$

$E = \{1, \dots, 100\}$: $\varkappa(E) = 0$ $\qquad$ $\frac{100}{n}$

$F = B \setminus \{99\}$: $\varkappa(F) = 1/2$ $\qquad$ $\frac{n-1}{2n-1}$

⑥ A : $\varkappa(A) = \nexists$ по построению

$d_1 = 1$ $\quad$ $d_2 = 1/2$ $\quad \dots \quad$ $d_n = 1/n$



$A = 1, \underbrace{\overline{100\text{ ч.}}}_{\text{не вкл.}}, \underbrace{100^2}_{\text{вкл.}}, \underbrace{\overline{100^3}}, \underbrace{100^4} \dots$

$\mathcal{F}$ - алгебра, если

1) $\varnothing \in \mathcal{F}$

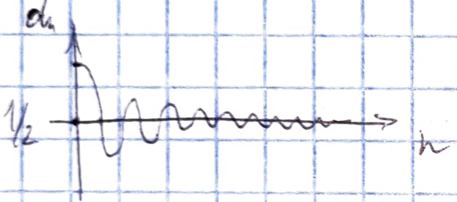
2) если $A_1 \in \mathcal{F}$, то $\bar{A}_1 \in \mathcal{F}$

3) если $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, то $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$

σ - алгебра (если $\mathcal{F}$ - σ-алг. $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ алг.)

3) если $A_1, \dots A_n \in \mathcal{F}$, то $A_i \cup A_j \in \mathcal{F}$

(7) $\underbrace{1\ (2\ 3)\ 4}_{1/2} \,\big|\, \underbrace{5\ 6\ (7\ 8\ 9\ 10)\ 11\ 12}_{1/2} \,\big|\, 13\ 14 \dots$



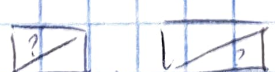
$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n \cdot \frac{n+1}{2} \approx \frac{n^2}{2} \quad (+\ n \text{ блоков})$$

$$+ \quad (+\ 2 \text{ блока}) = \frac{2n}{n^2/2} = \frac{4}{n} \quad (\%)$$

колебания затухающие

(8) * набор тезар. не алгебра

A : {  ... }

B : {  ... }

$A \cup B$ - тез. мн-во незамкн. по объед.

9

Ω	1	2	3	4	5	6
Y	0	1	0	1	0	1
Z	0	0	1	1	1	1
Y·Z	0	0	0	1	0	1

$\sigma(Z) = \{\emptyset, \Omega, \{s > 2\}, \{s \leq 2\}\}$

$\sigma(Y \cdot Z) = \{\emptyset, \Omega, s \in \{4, 6\}, s \in \{1, 2, 3, 5\}\}$

$\sigma(Y, Z) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$

4

+	A	B	C	D	
	−	−	−	−	$\emptyset$
	+	−	−	−	$\{1\}$

. . . .

$2^4 = 16$ подмн - 6

Случайная величина X измерима отн. σ-алгебры, если инф. в $\mathcal{F}$ достаточно, чтобы определить значение X, причем однозначно

1 $Z_1, \ldots, Z_n$ — нез. случ. вел. с од. распр.

Z_n	1	−1
p	1/2	1/2

$\mathcal{F}_1 = \sigma(Z_1)$; $\mathcal{F}_2 = \sigma(Z_1, Z_2)$

$\ldots \mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$

$S_n = Z_1 + \ldots + Z_n \quad (S_1 = Z_1)$

S_{100} измерима отн. $\mathcal{F}_{100}$

S_{100} не изм. отн. $\mathcal{F}_{99}$

S_{100} изм. отн. $\mathcal{F}_{101}$

$$\begin{array}{c|c} Z_1 = 1 & 1 \\ Z_2 = 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}$$

$\mathcal{F}_2$ – сост из 2^4, т.к. 4 эл-та

$\mathcal{F}_3$ – сост из 2^8, т.к. 8 эл-тов

Случайная величина X изм. отн. $\mathcal{F}$ δ-алгебры, если $\mathcal{F}$ сод. все события вида $\{X \leq t\}$, $t \in \mathbb{R}$

$\delta(X, Y)$ – миним. δ-алгебра, отн. кот. X и Y измеримы

(2) $Z_1, \ldots, Z_n$ (–//–)

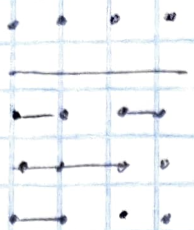
$H_1 = \delta(Z_1, \ldots)$; $H_2 = \delta(Z_2, \ldots)$.. $H_n = \delta(Z_n, \ldots, Z_\infty)$

$\{Z_2 = 1\} \in H_2$; $\notin H_4$

входят во все | $A = \{$ среди Z_i ∞ кол-во '1'$\}$

$B = \{$ –//– конечное число '–1' $\}$

③ $\Omega = \{a, b, c, d\}$ сколько Ω-алгебр?



1
1
3
4
6

15

④ X — равномерн. на $[0;1]$

$$H_1 = \sigma\{x = t\}$$

$$H_2 = \sigma\{x < t\}$$

$$\{x = 0{,}4\} = \underset{①}{\{x < 0{,}5\}} \cap \underset{②}{\overline{\{x < 0{,}25\}}} \cap \underset{③}{\overline{\{x < 3/8\}}} \ldots$$

$$\{x = 0{,}4\} = \overline{\{x < 0{,}4\}} \cap \{x < 0{,}41\} \cap \ldots$$

$$\underline{H_1 \subset H_2}$$

$$\{x < 0{,}4\} = \underbrace{\bigcup_{t < 0{,}4} \{x = t\}}_{\text{объед. мн-в конт.}}$$

H_3 — все подмн. прямой $(H_1 \subset H_2 \subset H_3)$

<u>Теор.</u> (Каратеодори) на мн-ве H_2 можно ввести понятие длины

e.g. $d([0; 0{,}5]) = 0{,}5$ $d([0{,}7]) = 0$ $d([0;1]) = 1$

$d(\varnothing) = 0$

$\exists$ элемент $\in \mathcal{H}_3$, $\notin \mathcal{H}_2$

$\triangleright$ $\mathcal{H}_1 = \{$ подмн. $[0;1)$ $\to$ счет., доп. счет. $\}$

$\cap$

$\mathcal{H}_2 = \delta(\{x<t\})$

$\cap$

$\mathcal{H}_3 =$ все подмн-ва

d опр. на $\mathcal{H}_2$

$$\begin{cases} d([0;1]) = 1 \\ d(A_1 \cup A_2 \dots) = d(A_1) + d(A_2) + \dots \quad A_i \cap A_j = \varnothing \\ d(A) = d(B), \text{ если } A = B + x \quad (\text{сдвиги}) \end{cases}$$

$[0,1) = [0, 0{,}5) \cup [[0;0{,}5) + 0.5)$

$d=1 \quad = \quad d=0{,}5 \qquad d=0{,}5$ (сдвиг)

$[0;1) = \underbrace{A_1 \cup A_2 \dots}_{d \neq 0 \text{ и } d \neq const}$

A_2 – сдвиг из A_1 $\quad (A_i = A_1 + r_i)$

Берем разность цветов A_i

получаем несч. мн-во цветов

$A_5 \cap A_{17} = \varnothing$ – только по 1 члену кажд. цвета

$d(A_1) = \dots = d(A_i) = \dots$

Кажд. A_i несчетное

Ⅲ Вероятность

Вероятность — ф-е зад. на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ (над Ω) такие что:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, если $A \in \mathfrak{A}$
3. $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$

   если $A_i \cap A_j = 0$, $i \neq j$

$\liminf_n A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{i=n}^{+\infty} A_i$ — все A_n, кроме конечного числа i

$\limsup_n A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} A_i$ — беск. кол-во A_i

$1_A = \begin{cases} 1 & A \text{ произошло} \\ 0 & A \text{ не произошло} \end{cases}$ — случ. величина

① $1_{\liminf_n A_n} = \liminf_n 1_{A_n}$

$1_{\limsup_n A_n} = \limsup_n 1_{A_n}$

A_1 — 0 1ый ... A_n — 0 n-ый

$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ — 000...

$\liminf_n A_n = \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_i\right) \cup \left(\bigcap\limits_{n=2}^{\infty} A_i\right) \cup \ldots$ — начиная с 1, или 2, ... или n все 0 (перестает вып. P)

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \ldots$ — начиная с 1 ∃ хотя бы 1 О

$\limsup_n A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_i\right) \ldots$ — // —

ОРОР(ОР). $\Rightarrow$ С = $\limsup_n A_n$ — произошло

ОРРО...(Р) $\Rightarrow$ С не пр-ло

$p\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_i\right) = 0$

$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = 1$

Точки накопления — точка $\forall O_\delta()$ которой посещается ∞ раз

Предел п-ти — точка $\forall O_\delta()$ которой содержит все члены п-ти, начиная с какого-то члена

e.g. $B = 1\ 1\,2\ 1\,2\,3 \ldots$

$\liminf B = 1 \quad \limsup = \infty$

$\liminf_{n\to\infty} a_n$ — самая мал. т. накопления

$\limsup_{n\to\infty} a_n$ — супр. т. накопления

$1_{\liminf A_n} = \begin{cases} 1 & \text{Р — конечное} \\ 0 & \text{Р — бесконечное} \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 = 1 \\ 0 = 0 \end{matrix}$

$1_{\limsup A_n} = \begin{cases} 1 & \text{О — бескон.} \\ 0 & \text{О — конечное} \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 = 1 \\ 0 = 0 \end{matrix}$

2

$$C_n = \begin{cases} A, & n = 2k \\ B, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\limsup C_n = (A \cup B) \cap (A \cup B) \ldots = A \cup B$$

$$\liminf C_n = (A \cap B) \cup (A \cap B) \ldots = A \cap B$$

$$\liminf C_n \subset \limsup C_n$$

Условные вероятность

Борелевская σ-алгебра — σ-алг., порождённая откр. подмн-ми мн-ва Ω

Сл. вел. X — ф-я сопост. кажд. исходу сл. эксперимента целое число $X: \Omega \to \mathbb{R}$

$\sigma(X)$ — σ-алг., порожд. сл. вел. — мин. σ-алг., сод. все соб. вида $\{X < t\}$, где $t \in \mathbb{R}$

(т.е. $\sigma(X) := \sigma(\{X < t \mid t \in \mathbb{R}\})$

$\sigma(\{X \in A \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$)

Прообраз мн-ва A — если $X: \Omega \to \mathbb{R}$,

то $X^{-1}(A) = \{w \in \Omega \mid X(w) \in A\}$

Теор. X — с.в. $\Rightarrow \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ — σ-алг.

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ изм. отн. $\mathcal{F}$, если $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$

Теор. $\forall X: \Omega \to \mathbb{R}$ изм. отн. 2^{Ω}

Теор. $X : \Omega \to \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{D} := \{D \mid X^{-1}(D) \in \mathcal{F}\}$ – δ-алг.

Теор. $\mathcal{H} : \delta(\mathcal{H}) = \mathcal{B}$

X изм. отн-но $\mathcal{F}$ тогда и т.т.,

тогда $\forall H \in \mathcal{H} \quad \{X \in H\} \in \mathcal{F}$

Теор. Если X, Y $\mathcal{F}$-изм.,

то $X+Y$; $X-Y$; $X \cdot Y$; X/Y, $Y \neq 0$ $\mathcal{F}$-изм.

Теор. Если X_i – посл-ть $\mathcal{F}$изм. с.в.

то 1) $A = \{\omega \mid \exists \lim X_i(\omega)\} \in \mathcal{F}$

2) если для $\forall \omega \in \Omega$ $\exists \lim X_n(\omega)$,

то $\lim X_n$ $\mathcal{F}$-изм.

Оп $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелевская, если

$f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$ для $\forall B \in \mathcal{B}$

Теор: если f имеет счетное

число разрывов, то она борелевская

Теор. Если $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-изм. с.в.

и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – борелевская,

то $f(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}$-изм. с.в.

Теор Y – с.в. явл. $\mathcal{F}$ изм тогда и т.т.,

если $Y = f(X)$, где f – бор. ф-я

$\mu : \mathcal{F} \to [0; +\infty]$ - мера $\mathcal{F}$ σ - алгебры,
если 1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\forall A_i \in \mathcal{F}$: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$

Мера P - вер-ть, если $P(\Omega) = 1$

Мера μ - конечная, если $\mu(\Omega) < \infty$

Мера μ - σ-конечна, если Ω
можно разбить на счетное число Ω_i :
$(\Omega = \bigcup \Omega_i)$ что $\mu(\Omega_i) < \infty$

Теор если P - вероятность, то

1 $P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$

2 если $P(A_i) = 0$, то $P(\bigcup A_i) = 0$

3 если $P(A_i) = 1$, то $P(\bigcap A_i) = 1$

4 если $A_1 \subset \ldots \subset A_n \ldots$, то $P(\bigcup A_i) = \lim P(A_i)$

5 если $A_1 \supset A_2 \ldots$, то $P(\bigcap A_i) = \lim P(A_i)$

6 если $\exists \lim A_i$, то $P(\lim A_i) = \lim P(A_i)$

7. $P(\limsup A_i) \geq \limsup P(A_i)$

8. если $\sum P(A_i) < \infty$, то $P(\limsup A_i) = 0$

Условное ожидание $\mathbb{E}(Y|A) := \mathbb{E}_{\tilde{P}}(Y) = \int_\Omega Y \, d\tilde{P}$

где $\tilde{P}(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | A)$

Усл. ожидание $\mathbb{E}(Y|A) := \dfrac{\mathbb{E}(1_A Y)}{\mathbb{P}(A)}$ A - событие

Усл. ож. если $A_1, \ldots, A_n$ поп. не пер.,

$\mathbb{P}(A_i) > 0$, $\mathcal{H} = \sigma(\{A_i\})$, то

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{H}) := \sum_i \mathbb{E}(Y|A_i) \cdot 1_{A_i}$$

Усл. ож. $\mathcal{H}$ - σ-алг., Y - с.в. : $\mathbb{E}(Y) < \infty$

$\mathbb{E}(Y|\mathcal{H}) = \hat{Y}$:- с.в.

1) $\hat{Y}$ - $\mathcal{H}$-измерима

2) $\forall A \in \mathcal{H}$ $\mathbb{E}(\hat{Y} \cdot 1_A) = \mathbb{E}(Y \cdot 1_A)$

$\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ - сл. вел. наил. прогноз Y,

т.к. можем построить инд. расп. соб. из $\mathcal{F}$

$\mathbb{E}(Y|X)$ - сл. вел., -//-, зная что X - с.в.

e.g. $\mathbb{E}(X^2|X) = X^2$

Теор. если $\mathbb{E}(Y) < \infty$, $\mathcal{H}$ - σ-алг.,

то $\exists$ $\hat{Y} = \mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$

если $\exists$ $\hat{Y}' = \mathbb{E}(Y|\mathcal{H})$, то $P(\hat{Y} = \hat{Y}') = 1$

Теор. если у X, Y есть совм. ф-я п-ти $p(x,y)$,

то $\mathbb{E}(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p(y|X) \, dy$,

где $p(y|x)$ - усл. ф-я п-ти, $p(y|X) = \dfrac{p(x,y)}{p(x)}$

Теор. $\mathcal{M}$ – набор событий замк. отн. пересечений (если $A, B \in \mathcal{M}$, то и $A \cap B \in \mathcal{M}$),

$\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{M})$, $\mathbb{E}(\hat{Y}) = E(Y) < \infty$.

Если $\mathbb{E}(\hat{Y} \cdot 1_A) = E(Y \cdot 1_A)$, для $\forall A \in \mathcal{M}$,

то – " – , для $\forall A \in \mathcal{H}$

Теор. $\mathbb{E}(Y|X) = f(X)$, где f – неслуч. бор. ф-я
с. в.

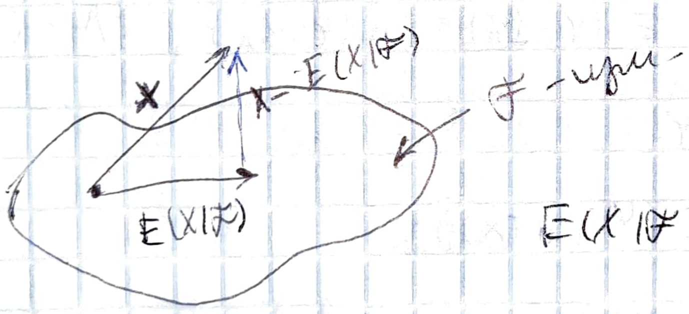
Теор. с. в. X, Y независимы, если и т. т.

$$\mathbb{E}(f(X)|Y) = E(f(X))$$

(1) $X \sim U[0,1]$ $\quad A = \{x \geq 0{,}5\}$

$\mathcal{F} = \sigma(A) = \{\varnothing, \Omega, \{x < 0{,}5\}, \{x \geq 0{,}5\}\}$

$$E(X|\mathcal{F}) = \begin{cases} 0{,}25, & x \geq 0{,}5 \\ 0{,}75, & x < 0{,}5 \end{cases}$$



$E(X|\mathcal{F})$: можно посчитать + блин. к X

$\rho(R, S) = \sqrt{E(R-S)^2}$ – расстояние

$\overrightarrow{(X - E(X|\mathcal{F}))} \perp$ плоск-ти $(\ni \overrightarrow{E(X|\mathcal{F})})$

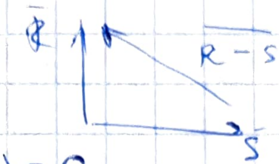
$\langle R, S \rangle = E(R \cdot S)$

e.g. $|\bar{a}| = \sqrt{\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle}$; $\rho(R, 0) = \sqrt{E(R^2)}$

$$\cos(\bar a, \bar b) = \frac{\langle \bar a, \bar b\rangle}{|\bar a| \cdot |\bar b|}$$

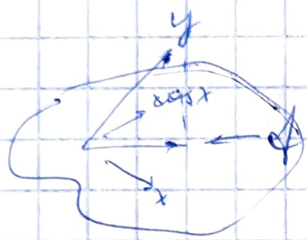
$$\cos(R, S) = \frac{E(R \cdot S)}{\sqrt{E(R^2)} \cdot \sqrt{E(S^2)}}$$, аналог коррел-и

* по т. Пиф.:



если $E(R \cdot S) = 0$

то $E(R-S)^2 = E(R^2) + E(S^2)$



$f(x)$: расст до y min

Опр если $\exists E(Y)$, $\mathcal{F}$ – σ-ал., то $\exists \hat Y$:

1) $\hat Y$ – $\mathcal{F}$-изм.

2) $Y - \hat Y \perp \forall \mathbb{1}_A$, где $A \in \mathcal{F}$

т.е. $E(Y - \hat Y) \cdot \mathbb{1}_A = 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$

$E(Y \cdot \mathbb{1}_A) = E(\hat Y \cdot \mathbb{1}_A)$, $\forall A \in \mathcal{F}$

$E(Y \mid \mathcal{F}) = \hat Y$

Опр $E(Y \mid X) = E(Y \mid \sigma(X))$

Св-ва $E(a \cdot Y + b \mid \mathcal{F}) = aE(Y \mid \mathcal{F}) + b$

$E(X + Y \mid \mathcal{F}) = E(X \mid \mathcal{F}) + E(Y \mid \mathcal{F})$

$E(f(X) \cdot Y \mid \mathcal{F}) = f(X) \cdot E(Y \mid \mathcal{F})$, где $f(X)$ – $\mathcal{F}$-изм.

$E(Y \mid \{\emptyset, \Omega\}) = E(Y)$

(2)

Ω	a	b	c	d
P	0,1	0,2	0,3	0,4
X	1	1	2	2
Y	2	3	2	3
$\hat{Y}_1$	e	e	e	f

Y_2

$Y \cdot 1^A$	0	0	0	3	$Y \cdot 1^B$	2	3	2	0
$\hat{Y} \cdot 1^A$	0	0	0	f	$\hat{Y} \cdot 1^B$	e	e	e	0

$\mathcal{F} = \sigma(\{d\}) = \{\varnothing, \Omega, \{d\}, \{a, b, c\}\}$

$E(Y \mid \mathcal{F}) = Y_1 = \begin{cases} 3, & \text{если } d \\ 7/3, & \text{если } a, b, c \end{cases}$ (=)

$E(Y \mid X) = \hat{Y}_2 = \begin{cases} \frac{0,1}{0,3} \cdot 2 + \frac{0,2}{0,3} \cdot 3, & \text{если } X = 1 \\ \frac{0,3}{0,7} \cdot 2 + \frac{0,3}{0,7} \cdot 3, & \text{если } X = 2 \end{cases}$

(=) $E(Y \cdot 1_A) = 3 \cdot 0,4$

$E(\hat{Y} \cdot 1_A) = f \cdot 0,4$

$\Rightarrow f = 3 = 3 \cdot \frac{0,4}{0,4}$

$E(Y \cdot 1_B) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + \cancel{\ldots} = 1,4$

$E(\hat{Y} \cdot 1_B) = 0,6\, e$

$\Rightarrow e = \frac{7}{3}$

$= 2 \cdot \frac{0,1}{0,6} + 3 \frac{0,2}{0,6} + 2 \frac{0,3}{0,6}$

$Var(X \mid \mathcal{F}) = E(X^2 \mid \mathcal{F}) - (E(X \mid \mathcal{F}))^2$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$P(A) = E(1_A)$ $\qquad P(A \mid B)$ – число, если A, B – события

$P(A \mid \mathcal{F}) = E(1_A \mid \mathcal{F})$ – с. в.

(3)

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	1/10	1/10	1/10	1/10
2	0	1/10	1/10	1/10
3	0	0	1/10	1/10
4	0	0	0	1/10

$$E(Y|X) \begin{cases} 1 \cdot \frac{1/10}{4/10} + 2 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 = 10/4, \text{ при } x=1 \\ 0 + 2 \cdot 1/3 + 3 \cdot 1/3 + 4 \cdot 1/3 = 3, \text{ при } x=2 \\ 3{,}5, \text{ при } x=3 \\ 4, \text{ при } x=4 \end{cases}$$

(4) $X \sim N(0;1)$

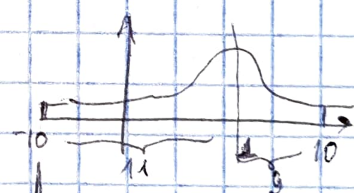
$$E(X|X^2) = 1/2 \cdot X + \frac{1}{2}(-X) = 0$$

$X \sim N(1;1)$

$E(X|X^2)$?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1} \cdot e^{-(x-1)^2/2 \cdot 1^2}$$

пусть $Y = 100$ $X = \pm 10$

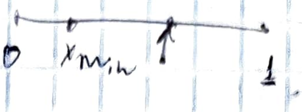


$$E(X|X^2) = 10 \cdot f(10) + (-10) \cdot f(-10) =$$

$$= 10 \cdot \frac{e^{-81/2}}{e^{-81/2} + e^{-121/2}} - 10 \frac{e^{-121/2}}{e^{-81/2} + e^{-121/2}} = 10 \underbrace{\left(\frac{e^{20} - 1}{e^{20} + 1} \right)}_{\approx 1} \approx 10$$

$$E(X|X^2) = \sqrt{Y} \cdot \frac{e^{2\sqrt{Y}} - 1}{e^{2\sqrt{Y}} + 1}$$

⑤ $\mathbb{E}(X_1 | X_{min})$, где $X_1, \ldots \sim U[0;1)$



$$= \frac{1}{n} \cdot X_{min} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(1 + X_{min})}{2}$$

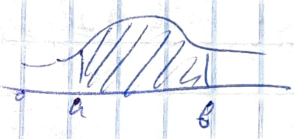
$$\mathbb{E}(X_1 | X_{max}) = \frac{1}{n} \cdot X_{max} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{X_{max}}{2}$$

$$\mathbb{E}(X_1 | X_{min}, X_{max}) = \frac{1}{n}(X_{min} + X_{max}) + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{X_{min} + X_{max}}{2}$$

$$= \frac{X_{min} + X_{max}}{2}$$

$$\mathbb{E}(X_1^2 | X_{max}) = \frac{1}{n} \cdot X_{max}^2 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{X_{max}^2}{3} = \frac{(n+2)\, X_{max}^2}{3}$$

$P(Z \in [a;b]) = S$



, $Z \sim U[0;b]$

$E(Z) = b/2$

$Var(Z) = b^2/12 = E(Z^2) - (b/2)^2 \Rightarrow E(Z^2) = b^2/3$

⑦ Монетки подбр. до 2-ух О подряд

X – кол-во О

Y – кол-во Р

$Z = X + Y$

[illegible] $\mathbb{E}(Y) = np$ $\qquad D(Y) = npq$

$\mathbb{E}(Y^2) = np(q + np)$

$Bin(np) \approx N(np, npq)$

$Bin(n, \lambda/n) \approx P(\lambda)$

(61) $E(X|Y) \in [2; Y+2]$

$E(X|Y=0)=2$

$E(X|Y=1) = 2 + [0\cdot\frac{2}{3} + 1\cdot\frac{1}{3}]$

$E(X|Y=2) = 2 + [0\cdot\frac{4}{9} + 1\cdot\frac{4}{9} + 2\cdot\frac{1}{9}]$

...

$\left(\frac{1}{2^{Y+2}} + \dots + C_Y^Y \frac{1}{2^{2Y+2}}\right)$ т.к. норм. $\parallel$

$E(X|Y) = 2 + [0\cdot\frac{1}{2^{Y+2}} + 1\cdot C_Y^1 \cdot \frac{1}{2^{Y+3}} + \dots + Y C_Y^Y \frac{1}{2^{2Y+2}}] : (1+\frac{1}{2}\dots$

$$= 2 + \frac{\frac{1}{2^Y}\left(1\cdot C_Y^1 \cdot 1/2 + \dots + Y\cdot C_Y^Y \cdot 1/2^Y\right)}{\frac{1}{2^Y}\underbrace{\left(1 + C_Y^1 \cdot 1/2 + \dots + C_Y^Y \cdot 1/2^Y\right)}_{=(1+1/2)^Y = \sum C_Y^k \alpha^k = (1+\alpha)^Y}} = 2 + \frac{\alpha Y(1+\alpha)^{Y-1}}{(1+\alpha)^Y} = 2 + \frac{\alpha Y}{1+\alpha} = 2 + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{Y} C_Y^k k \cdot \alpha^k = \sum C_Y^k k \alpha^{k-1} \cdot \alpha =$$

$$\alpha \cdot \left(\sum C_Y^k \alpha^k\right)' = \alpha\left((1+\alpha)^Y\right)' =$$

$$= \alpha Y(1+\alpha)^{Y-1}$$

(62) $\underbrace{0/Y\ P\ \ 0/Y\ \ P\ \dots\ 0/Y\ P}_{Y}\ 00$

$X = 2 + X_1 + \dots + X_i + \dots + X_Y$

X_i	0	1	......	X_Y
P				

$E(X|Y) = 2 + P(X_1=1|Y) + \dots + P(X_Y=1|Y)$

$= 2 + \frac{1/2\tau}{1/2\tau+\tau} \cdot Y$, т.к. $P(X_i=1|Y) = P(X_j=1|Y)$

$P(X_1=1|Y) = \frac{1/2\tau}{1+1/2\tau}$

⑦ $N = R + L + M$

$E(R+L \mid M) = N - M$

$E(M \mid R+L) = N - (R+L)$

$E(R \mid L) = (N-L) \cdot \frac{r}{r+m}$ (np)

$Var(R \mid L) = (N-L) \cdot \frac{r}{r+m} \cdot \frac{m}{r+m}$ (npq)

$R \mid L \sim Bin\left(n-L, \frac{r}{r+m}\right)$

$P(R=2 \mid L) = C^2_{N-L} \left(\frac{r}{r+m}\right)^2 \cdot \left(\frac{m}{r+m}\right)^{N-2-L}$

$E(R+L \mid L+M) = R + E(L \mid L+M) = N - \frac{m}{l+m}$

$L \mid L+M \sim Bin$, $\tilde{p}_l = \frac{l}{l+m}$

$R \mid L \sim Bin\left(n = 100-L, p = \frac{r}{r+m}\right)$

$\left(\tilde{p}_m = \frac{m}{l+m}\right)$

$= E(L \mid L+M) = (L+M) \cdot \frac{l}{l+m}$

$L \sim Bin\left(L+M, \frac{l}{l+m}\right)$

$p(E(R \mid L) = 0) = p(L = N) = l^{100}$ $= N$

$p(R = 0 \mid L) = \left(\frac{m}{m+r}\right)^{100-L}$

$p(E(R \mid L) = 0 \mid L) = p(L = 100 \mid L) = \begin{cases} 1, & L = 100 \\ 0, & L \neq 100 \end{cases}$

$E(R \mid R-L) = \alpha + \beta(R-L)$

IV Случайные процессы

X_1, X_2, X_3 — п-ть случ. вел.

Непр. время (e.g. $[0; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$)

X_t опр. для $\forall t \in$ мн-ву доп. инд-ов

Опр. X_i — п-ть с. в., равновер. прин. зн. 1 и -1

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ — симметр. случ. блужд.

Фильтрация — пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вер. пр-во,

п-ть σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}$ — фильтр., если

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}; \quad \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}, \ \forall n$$

☆ $\mathcal{F}_n$ — список событий, причем

со временем инд. накапливает инф.,

поэтому список расшир-ся

X_n адапт. к фильтр. $\mathcal{F}_n$, если

для $\forall n$ X_n $\mathcal{F}_n$-измерима

☆ в $\forall n$ момент времени инф. в $\mathcal{F}_n$

дост., чтобы различать X_n

X_n — мартингал по отн. к фильтр $\mathcal{F}_n$,

если 1. $\forall n$ $\mathbb{E}(X_n)$ — конечно

2. X_n адапт. к фильтрации $\mathcal{F}_n$

3. $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ a.s.

X_n — мартингал, если*

1. $\forall n \quad E(X_n)$ — конечно

2. $E(X_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \dots X_1) = X_n$ a.s.**

* равносильно, если в к-ве фильтр. взяли ест-ю

** Наилучший прогноз буд. значения мартингала — это его текущее знач.

(1) $X_i \sim Bin(n=20, p=1/2)$

наил. прогноз зав. от n и p ⇒ не мартингал

(2) $y_t = \begin{cases} 2 ; & t \in [0; 10) \\ z ; & t \geq 10 \end{cases} \qquad z \sim N(2; 49)$

y_t — март., т.к. $E(z) = 2$

(* если бы $E(z) = 3$, то не март.)

(3) d выстр./мин

p вер. попадания, причем $p(d)$

$E(X_i) = 2$, X_i — попад. в мин

1) $p(d) = 2/d$

$$p \cdot d = 2$$

$X_i \sim Bin(n = d, p)$

$E(X_i) = d \cdot p = 2$

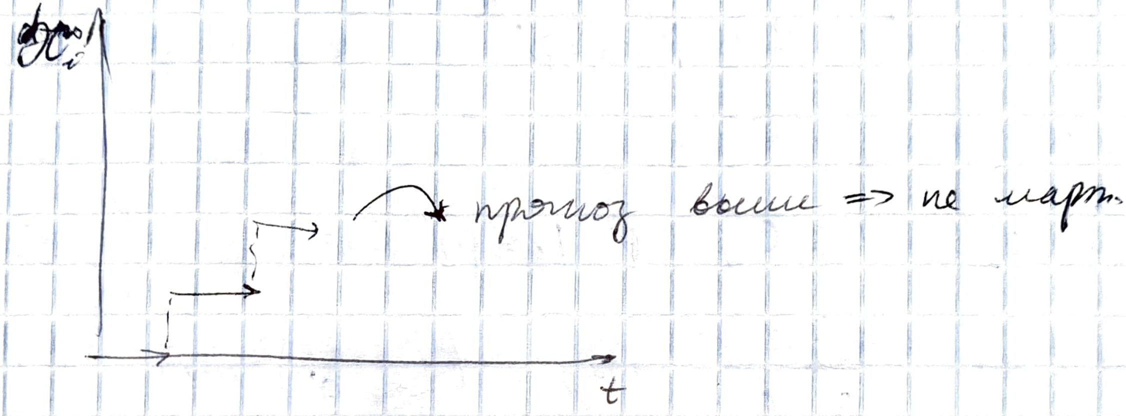
2) $P(X_1 = k) = C_d^k \, p^k (1-p)^{d-k}$ — за 1 мин. k попад

$Var(X_1) = d \cdot p \cdot (1-p)$

3) $Var(X_1 \mid t \to \infty) =$

$$= \lim_{d \to \infty} C_{dt}^{k} \left(\frac{2}{dt}\right)^{k} \left(1 - \frac{2}{dt}\right)^{dt-k}$$

$$= e^{-2t} \lim_{d \to \infty} C_{dt}^{k} \left(\frac{2}{dt}\right)^{k} \left(1 - \frac{2}{dt}\right)^{-k} = \frac{2^k}{k!\, e^{2t}}$$



$F(t) = P(Z_1 \le t)$

N – номер выстрела, при кот. было $1^е$ попадание

$Z_1 = N_1 \cdot 1/d$

$P(Z_1 \le t) = P\left(\frac{N_1}{d} \le t\right) = P(N_1 \le dt)$

$= P(N_1 = 1) + \ldots + P(N_1 = dt)$

$= 2/d + (1 - 2/d)\, 2/d + \ldots + (1 - 2/d)^{dt-1} \cdot 2/d$

$S_{бугп} = \frac{b_1}{1-q}$

$\cancel{S = \frac{2/d}{1 - (1 - 2/d)}}$

$S_{бугп} - q S_{бугп} = \frac{2}{d} - \left(1 - \frac{2}{d}\right)^{dt} \cdot \frac{2}{d}$

$$S = \frac{2/d - (1-q)^{dt} \cdot 2/d}{1-q}$$

$= 1 - (1 - 2/d)^{dt}$

$$\lim_{d\to\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{2}{d}\right)^{dt}\right) = \lim_{d\to\infty} \left(1 - e^{-2t}\right) = P(Z_1 < t)$$

$$= F(t)$$

$$f = \begin{cases} 2e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$P(X_1 = k) = C_d^k \, p^k (1-p)^{d-k}$$

<...>

$$P(X_1 = 2) = C_d^2 \cdot p^2 (1-p)^{d-2} = \ldots = \frac{2^k}{k!} e^{-2}$$

$$\frac{d \cdot d-1}{d \cdot d} \to 1; \quad \left(1 - \frac{2}{d}\right)^3 \to 1$$

$$P(X_1 = k) \xrightarrow[d\to\infty]{} \frac{2^k}{k!} e^{-2}$$

Пуас. $\sim e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

<u>Опр.</u> Проводится $\to \infty$ число испыт. за ед. вр.

причем ср. знач. усп. за ед. вр. $= \lambda$

X_t – N успехов за $[0; t]$

то X_t – Пуас. процесс (проц. в непр. врем.)

$$P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) = P(X_1 = 0) = e^{-2}$$

$$P(X_2 = 0) = e^{-2} \cdot e^{-2} = e^{-4}$$

$$P(Z_1 < 1 \mid X_2 = 3) = P(X_1 = 1 \mid X_2 = 3) =$$

$$= \frac{P(X_1 = 1 \mid X_2 = 3) + P(X_1 = 2 \mid X_2 = 3) + P(X_1 = 3 \mid X_2 = 3)}{P(X_2 = 3)} =$$

$$= \left(P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1) + P(X_1 = 0)\right) : P(X_2 = 3) = \ldots$$

Мартингал (X_t)

1) $E(X_{t+s} | F_t) = X_t$, $\forall t, s \geq 0$

2) X_t – изм. отн. F_t

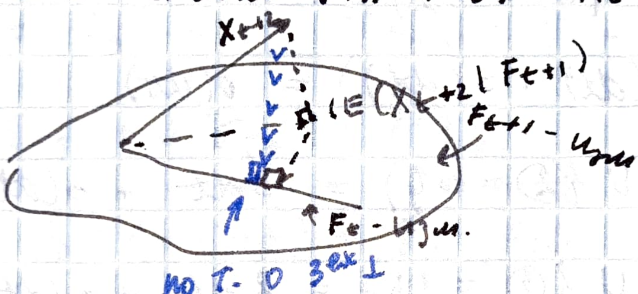
Фильтрация (F_t) – набор σ-алгебр:

$F_t \subseteq F_{t+s}$, $\forall s \geq 0$

① $E(X_{t+1} | F_t) = X_t \Rightarrow E(X_{t+s} | F_t) = X_t \quad \forall s \geq 0$

▷ $E(X_{t+1} | F_t) = X_t$

$E(E(X_{t+2} | F_{t+1}) | F_t) = X_t \Rightarrow E(X_{t+2} | F_t) = X_t$



Пуассоновский поток N_t:

N_t – кол-во происшествий за $[0;t]$

1) $N_0 = 0$

2) $N_t - N_s$: закон распр. зависит только от $(t-s)$

$(s;t]$

3) $(s_1;t_1]$, $(s_2;t_2]$ – непересекающиеся промежутки

$\Rightarrow (N_{t_1} - N_{s_1})$, $(N_{t_2} - N_{s_2})$ – независимые

4) $P((N_t - N_0) = 1) = \lambda t + o(t)$

$P((N_t - N_0) \geq 2) = o(t)$

② $P((N_t - N_0) = 0) = 1 - \lambda t + o(t)$

при $t \to 0$ $\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^2}{t} = 0 \Rightarrow o(t) \\ \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1 \Rightarrow \text{не } o(t) \end{cases}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$$

(3)

$\lambda_1 = 3$

(независимые)

$\lambda_2 = 2$

Если только что ушли два клиента, найти p, что (1) обсл. быстрее?

$$p(\{① \geq 1\} \cup \{② \geq 1\}) = (3dt + o(dt) + o(dt)) \cdot (2dt + o(dt) + o(dt)) = o(dt)$$

$$p(\{① \geq 1\} \cup \{② = 0\}) = 3dt + o(dt)$$

$$p(\{① = 0\} \cup \{② = 1\}) = 2dt + o(dt)$$

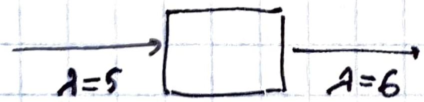
$$p(\{① = 0\} \cup \{② = 0\}) = 1 - 5dt + o(dt)$$

$$\alpha = o(dt) + (3dt + o(dt)) + (1 - 5dt + o(dt)) \cdot \alpha \quad \Big| :dt$$

$$0 = \frac{o}{dt} + 3 + \frac{o}{dt} + \left(-5 + \frac{o}{dt}\right)\alpha$$

$$\alpha = 3/5$$

(4)



, D_t — длина очереди

$p(D_t = k) =$ const (π_k), не зав. от t

$$p(D_t = 0) = p(D_{t+dt} = 0)$$

...

$$p(D_t = k) = p(D_{t+dt} = k)$$

$0 \longrightarrow 0 \quad p = 1 - 5dt + o(dt)$

$\searrow 1 \quad p = (5dt + o)(1 - 6dt + o) = 5dt + o$

$k \longrightarrow k \quad p = (5dt + o)(6dt + o) = o$

$$
\begin{array}{ll}
 & \nearrow^{6dt} \; 0 \\
1 & \longrightarrow \; 1 \; (1 - 11dt) \\
 & \searrow_{5dt} \; 2
\end{array}
$$

$P(D_{t+dt} = 56) = P(D_t = 55) \cdot 5dt +$

$+ P(D_t = 56)(1 - 11dt) + P(D_t = 57) \cdot 6dt + o(t)$

$0 = \gamma_{55} \cdot 5 - 11\gamma_{56} + \gamma_{57} \cdot 6 + \frac{o}{dt}$

$5\gamma_{55} + 6\gamma_{57} = 11\gamma_{56}$

$\gamma_0 = \gamma_0(1 - 5dt) + \gamma_1 \cdot 6dt + o$

$5\gamma_0 = 6\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = 5/6\, \gamma_0$

$5\gamma_0 + 6\gamma_2 = 11\gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \gamma_0$

$\dots$

$\gamma_k = \left(\frac{5}{6}\right)^k \gamma_0$

$\gamma_0 + \frac{5}{6}\gamma_0 + \dots \left(\frac{5}{6}\right)^t \gamma_0 = 1$

$\frac{\gamma_0}{1 - \frac{5}{6}} = 1 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{1}{6}$

$P(D_t = 0) = 1/6$

$\dots$

$P(D_t = k) = 1/6 \cdot (5/6)^k$

N_t — пришло человек

$E(N_{t+dt} \mid F_t) =$

$= E(N_t + (N_{t+dt} - N_t) \mid F_t) =$

$= N_t + E(N_{t+dt} - N_t \mid F_t) =$

$= N_t + E(N_{t+dt} - N_t) =$

$= 0 \cdot (1 - dt + o) + 1 \cdot (5dt + o) + 2 \cdot o + \ldots$

$= N_t + \underbrace{5dt} + o(dt)$

растет => не мартингал

$E(D_{t+dt} \mid D_t = 10) = 9 \cdot 6dt + 10(1 - 11dt) +$

$11 \cdot 5dt + 0 = 10 - \underbrace{dt} + 0$

=> не мартингал

(5) $P(N_{dt} = 1) \sim \lambda dt$

$P(N_{dt} = 0) \sim 1 - \lambda dt$

т.к. независимые по усл.

$P(Y_1 > t + dt) = P(Y_1 > t) \cdot \underbrace{P(Y_1 > dt)}_{= 1 - \lambda dt + o(dt)}$

$\dfrac{P(Y_1 > t + dt) - P(Y_1 > t)}{dt} = P(Y_1 > t) \cdot \left(-\lambda + \dfrac{o}{dt}\right)$

$\dfrac{H(t+dt) - H(t)}{dt} \longrightarrow H'(t)$, где $H(t) = P(Y_1 > t)$

$H'(t) = H(t) \cdot (-\lambda)$

=> $H(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$

$P(Y_1 > 0) = 1 \Rightarrow H(0) = 1 \Rightarrow c = 1$

$P(Y_1 > t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}$

$P(Y_1 \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$$P(N_t = 0) = e^{\lambda t} = 1 - \lambda t + \underbrace{\frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots}_{o} \quad \text{(Тейлор)}$$

$$P(N_{t+dt} = 1) = P(N_t = 0) \cdot (\lambda dt + o) + P(N_t = 1) \cdot (1 - \lambda dt + o)$$

$$\frac{P(\dots) - P(\dots)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda P(N_t = 1) + \frac{o}{dt}$$

$$H_1'(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda H_1(t)$$

$$P(N_t = 1) = H_1(t)$$

$$H_1 = \lambda t \cdot e^{-\lambda t} + c \cdot e^{-\lambda t}$$

$$H_1(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$H_0(t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

$$H_1(t) = P(N_t = 1) = \lambda t \cdot e^{-\lambda t}$$

$$H_2(t) = P(N_t = 2) = H_2(t) \cdot (1 - \lambda dt + o) +$$

$$H_1(t) \cdot (\lambda dt + o) + H_0(t) \cdot o = \dots$$

$$H_k(t + dt) = H_{k-1}(t) \cdot \lambda dt + H_k(t) \cdot (1 - \lambda dt)$$

$$N_t \sim Poiss(\lambda t)$$

$$E(N_t) = \lambda t$$

$$Var(N_t) = \lambda t$$

6 $\quad M_t = N_t - \lambda t, \quad F_t = \sigma(M_u),\ u \in [0; t]$

$$E(M_{t+s} | F_t) = E(N_{t+s} - \lambda(t+s) | F_t)$$

$$= E(N_{t+s} | F_t) - \lambda(t+s) = N_t + E(N_{t+s} - N_t | F_t) - \lambda(t+s)$$

$$= N_t + \underbrace{E(N_s)}_{= \lambda s} - \lambda t - \lambda s = N_t - \lambda t = M_t \Rightarrow \text{мартингал}$$

(7) X_n — доля тузов в неоткр. части колоды (52 карты) после откр. n карт

$X_0 = 4/52$

X_1	$4/51$	$3/51$
p	$48/52$	$4/52$

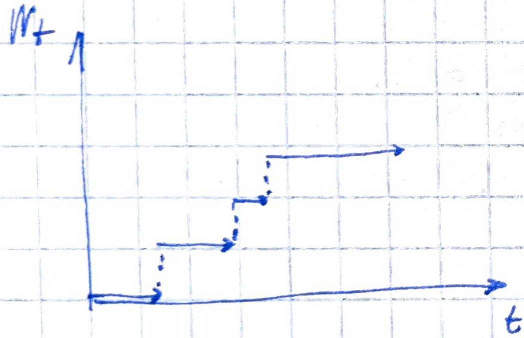
X_{51}	1	0
p	$4/52$	$48/52$

$E(X_{n+1} \mid F_n)$

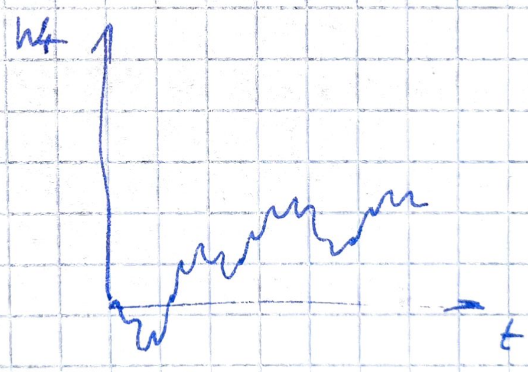
	n (откр)	$52-n$ (закр.)
доля т.	$\frac{(4-52X_n)}{n} - X_n$	X_n
всего т	$4-(52-n)\cdot X_n$	$X_n \cdot (52-n)$

$$E(X_{n+1} \mid F_n) = p(\text{откр. т} \mid F_n)\cdot\frac{(52-n)\cdot X_n - 1}{51-n}$$

$$+ (1 - p(\text{откр. т.} \mid F_n))\cdot\frac{(52-n)X_n}{51-n} = X_n$$



Poisson — прерыв.



Wiener — непрер.

Броуновское движение (Wiener process)

$W_t,\ t \in [0;\infty)$, если:

1) $W_0 = 0$

2) $W_{t+s} - W_t$ не зав. от F_t $\Big\}$ (5) причем $W_{t+s} - W_t \sim N(0;s)$

3) $W_{t+s} - W_t \sim W_s$

4) W_t — непрерывный

Интеграл Ито

Сходимость в пр-ве L^2,

где L^2 - пр-во сл. вел. : $E(X^2) < \infty$

$X_1, \dots, X_n \xrightarrow{L^2} Z$, $n \to \infty$

$\Rightarrow$ $E((X_n - Z)^2) \to 0$, $n \to \infty$

① $P(W_6 < W_7) = P(N(0;1) < 0) = 1/2$

$Var(W_{57}) = 57$

②

X_n	0	p
	$(1/3)^n$	$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$X_n \xrightarrow{L^2} Z$, где

Ω	0	p
Z	0	e

$$E((X_n - Z)^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

③ $U \sim U[0;1]$

$Y_n = 1_{U \le 1/n}$

$E((Y_n - 0)^2) = E(Y_n^2) = E(Y_n) = 1 \cdot P(Y_n = 1) + 0 \cdot P(Y_n = 0)$

$= P(U \le 1/n) = \frac{1/n}{1} = \frac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty$

$\Rightarrow$ $Y_n \xrightarrow{L^2} 0$

$R_n = n \cdot 1_{U \le 1/n}$

$E(R_n^2) = E((n \cdot 1_{U \le 1/n})^2) = n^2 \cdot E(1_{U \le 1/n}) =$

$= n^2 \cdot \frac{1}{n} = n \not\to 0$, $n \to \infty$

Если $X_n \xrightarrow{L^2} Z$, то $X_n \xrightarrow{P} Z$

$E((X_n - Z)^2) \to 0$ $\quad$ $P(|X_n - Z| > \varepsilon) \to 0$

$\triangleright\ E\left((X_n - z)^2 \cdot 1_{|X_n - z| > \varepsilon} + \underbrace{(X_n - z)^2 \cdot 1_{|X_n - z| \geq \varepsilon}}_{0 \leq \quad \leq \varepsilon^2}\right)$

$\geq E(\varepsilon^2 \cdot 1_{|X_n - z| > \varepsilon}) = \varepsilon^2 \cdot P(|X_n - z| > \varepsilon) \to 0$

$P(|R_n - 0| > \varepsilon) = P(U \leq 1/n) = 1/n \to 0, \ n \to \infty$

$\Rightarrow \quad R_n \xrightarrow{P} 0 \quad \Rightarrow \quad R_n \stackrel{L^2}{\not\to}$ не сх.

(4) $X_1, \ldots, X_n \sim N(5; 10)$

LLN: $\overline{X}_n \xrightarrow{P} 5 \Rightarrow \overline{X}_n \stackrel{L^2}{\not\to} 5$

$E((\overline{X}_n - 5)^2) = Var(\overline{X}_n - 5) + (E(\overline{X}_n - 5))^2$

$= \frac{10n}{n^2} + (5 - 5)^2 \to 0, \ n \to \infty$

$\Rightarrow \quad \overline{X}_n \xrightarrow{L^2} 5$

Если $E(Y_n) \to \mu$, то $Y_n \xrightarrow{L^2} \mu$

$Var(Y_n) \to 0 \qquad Y_n \xrightarrow{P} \mu$

(5) $\int_0^1 W_u \, dW_u = \frac{W_1^2}{2}$

~~Шшш~~ I_n - корректировка портфеля (через каждые $1/n$)

$I_n = -(W_{1/n} - W_{0/n}) \cdot W_{1/n} - \ldots - (W_{n/n} - W_{n-1/n}) \cdot W_{n/n} + W_1 \cdot W_1$

$= W_1^2 - \sum (W_{i/n} - W_{i-1/n}) \cdot W_{i/n}$

$= W_1^2 - \sum W_{i/n}^2 + \sum W_{i/n} \cdot W_{i-1/n}$

$\Rightarrow \quad 2 I_n + J_n = W_1^2$

$I_n = \frac{W_1^2 - J_n}{2} \xrightarrow{L^2} \frac{W_1^2}{2} - \frac{1}{2}$

(6) $dX_u = W_u^3 \, dW_u \Rightarrow X_t = X_0 + \int_0^t W_u^3 \, dW_u$

Лемма Ито :

$X_t = X_0 + \underbrace{\int_0^t A_u du}_{\text{Rieman's}} + \underbrace{\int_0^t B_u dW_u}_{\text{Ito's}}$

$dX_u = A_u du + B_u dW_u$

Лемма Ито :

Если $dX_u = A_u du + B_u dW_u$

$Y_u = F(u, X_u)$, F'_u, F''_{uX_u}, $F''_{X_uX_u} \in C$

то $dY_u = F'_u du + F'_{X_u} dX_u + 1/2 \, F''_{X_uX_u} B_u^2 du$

(7) $X_t = W_t = 0 + \int_0^t 0 \cdot du + \int_0^t 1 \cdot dW_u$

$dX_t = dW_t$

(8) $Y_u = W_u^2$

$Y_t = W_t^2 = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^t du + 2 \int_0^t W_u dW_u$

$dW_u = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t + 2 \int_0^t W_u dW_u$ •

$\Rightarrow \frac{W_t^2 - t}{2}$

(9) $dX_t = 5X_t dW_t + 6X_t dW_t$

a) $X_t = X_0 + 5\int_0^t X_u du + 6 \int_0^t X_u dW_u$

$Y_t = X_t^2$

$dY_t = F'_t dt + F'_x dX_t + \frac{1}{2} F''_{xx} \cdot B_t^2 dt$

$= 2X_t dX_t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (6X_t)^2 \cdot dt =$

$= 2X_t \cdot (5X_t dt + 6X_t dW_t) + 36X_t^2 dt = 46X_t^2 dt + 12X_t^2 dW_t$

б) $z_t = \ln x_t$

$$dz_t = \left(0 + \frac{1}{x_t}\cdot 5x_t + \frac{-1}{x_t^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 36x_t^2\right)dt$$

$$+ \frac{1}{x_t}\cdot 6x_t \cdot dW_t = -13\,dt + 6\,dW_t$$

$$dz_t = \frac{1}{x_t}\cdot(5x_t dt + 6x_t dW_t) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x_t^2}\right)\cdot(6x_t)^2 dt$$

$$= 5\,dt + 6\,dW_t - 18\,dt = -13\,dt + 6\,dW_t$$

$$z_t = z_0 - 13\int_0^t du + 6\int_0^t dW_u =$$

$$= z_0 - 13t + 6W_t$$

$$\ln x_t = \ln x_0 - 13t + 6W_t$$

$$x_t = x_0 \cdot e^{-13t + 6W_t}$$

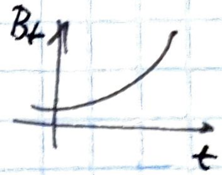
Модель Блэка - Шоулза

$$dS_t = \mu S_t dt + \delta \cdot S_t \cdot dW_t$$

S_t - цена акции

Безрисковый актив:

$$B_t = B_0 \cdot e^{rt} \left[= B_0 \cdot (1+r)^t\right]$$



Если $dS_t = \mu S_t dt$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt$$

$$\Delta S_t \approx \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \Delta W_t$$

① $dS_t = \mu S_t dt + \delta S_t dW_t$; $B_t = B_0 \cdot e^{rt}$

$$S_t = S_0 + \int \mu S_u du + \int \delta S_u dW_u$$

$$dW_t = e^{-rt} \cdot S_t \left((\mu - r) dt + \delta dW_t\right)$$

Св-ва стохастического интеграла

1) $\int_0^t (X_u + Y_u) dW_u = \int_0^t X_u dW_u + \int_0^t Y_u dW_u$

2) $\int_0^t a X_u dW_u = a \int_0^t X_u dW_u$

3) $\int_0^a X_u dW_u + \int_a^b X_u dW_u = \int_0^b X_u dW_u$

4) если X_u - непр. процесс
X_u - адапт. к фильтрации F_u
$\int_0^t X_u^2 du < \infty$

то $I_t = \int_0^t X_u dW_u$ - мартингал

Св-ва ст. интеграла

(I) 1) $\int_0^t (X_u + Y_u)\,dW_u = \int_0^t X_u\,dW_u + \int_0^t Y_u\,dW_u$

2) $\int_0^t a\,X_u\,dW_u = a\int_0^t X_u\,dW_u$

3) $\int_0^a X_u\,dW_u + \int_a^b X_u\,dW_u = \int_0^b X_u\,dW_u$

(II) 4) если (X_u) — непр. проц.

X_u адапт. к фильтр. F_u

$\int_0^t X_u^2\,du < \infty$

то $I_t = \int_0^t X_u\,dW_u$ — мартингал

$E(I_{t+s} \mid F_t) = I_t$

$E(I_{t+s} \mid I_t) = I_t$

$E(I_t) = I_0 = 0$

$\boxed{\text{Утв. (4)} \quad Y_t \ [\text{3 усл.}] \ \text{явл. март. iff} \ dY_t = B_t\,dW_t}$

5) Изометрия Ито

мотив-я: $\sum^n \left(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 1$

$\sum^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \to 1, \ n\to\infty$

$\sum^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)^2 \to 0, \ n\to\infty$

$$\sum \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)\left(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}}\right) = \frac{1}{n} W_1 \to 0, \ n \to \infty$$

$$(dW)^2 = dt$$

$$\left[\sum (\Delta W_i)^2 \to \sum \Delta t\right]$$

$$(dt)^2 = 0$$

$$dW \cdot dt = 0$$

$$E\left(A_0 + \int_0^t A_u \, dW_u\right) = A_0$$

крапко (усл.) $E(A_t \, dW_t) = 0 \longleftrightarrow E\left(\int_0^t A_u \, dW_u\right) = 0$

$$\mathrm{Var}(A_t \, dW_t) = E(A_t^2 \, dt)$$

$$\updownarrow$$

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^t A_u \, dW_u\right) = E\left(\int_0^t A_u^2 \, du\right) = \int_0^t E(A_u^2) \, du$$

бесси. $\mathrm{Cov}(A_u \, dW_u, B_u \, dW_u) = E(A_u B_u \, dW)$

$$\updownarrow$$

$$\mathrm{Cov}\left(\int_0^t A_u \, dW_u, \int_0^t B_u \, dW_u\right) = E\left(\int_0^t A_u B_u \, dt\right) = \int_0^t E(A_u B_u) \, dt$$

Ex: $Y_t = e^{W_t + k \cdot t}$

1) $dY_t = k e^{W_t + kt} dt + e^{W_t + kt} dW_t + \frac{1}{2} e^{W_t + kt} \cdot 1^2 dt$

$dW_t = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW_t$

$= e^{W_t + kt} \left(\left(k + \frac{1}{2}\right) dt + dW_t \right)$

если $k = -1/2 \Rightarrow (Y_t)$ - мартингал

ДЗ

9.1

9.3

8.3