# стат. дело 1

а) $x$ - возраст

- по полу
- по регионам
- по профессиям

$l_x$ - число доживших до возраста $x$

$l_0$ - radix (со скольки нач. отсчет)

$d_x$ - ~~...~~ число умерших (в теч. 1 года) → $_n d_x$ (в теч. n лет)

$\boxed{q_x = d_x / l_x}$ — вер. умереть в возр. $x$ лет

$$_n d_x = \sum_{t=x}^{x+n-1} d_t$$

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - d_x}{l_x}$$

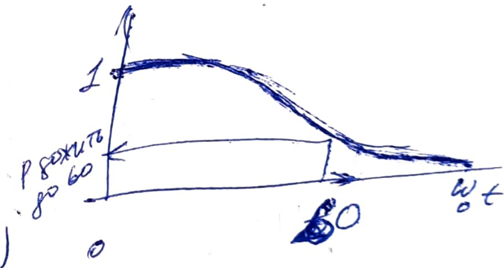
$$_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \ldots p_{x+n-1} = l_{x+n} / l_x$$

$$l_x = \sum_{t=x}^{\omega} d_t$$

$$_{m|n} q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+m+n}}{l_x}$$ — $p$ для $x$-летнего умереть через $(n, n+m)$ лет

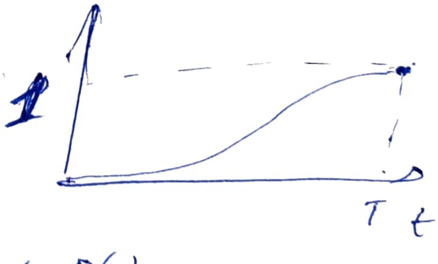
$$_{m|n} q_x = {}_n p_x - {}_{m+n} p_x = {}_n p_x \cdot {}_n q_{x+n}$$

в) Survival function (ф-я дожития)




- $S(x)$ : 1) $S(0) = 1$
  2) $S(\omega) = 0$ $\left( S(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0 \right)$
  3) $S(x)$ - мон. уб. ф-я

- $T$ - прод. предст. жизни




$T \geq x$ => $S(x) = P(T \geq x)$

$F(x) = P(T < x) = 1 - S(x)$

- вер., что новорожденный умрет не позже $x$ лет (прож. менее $x$ лет) ост. прод. жизни для x-летнего

- $S_x(t) = P(T_x \geq t) = {}_tp_x = \dfrac{S(x+t)}{S(x)}$

→ усл. ф-я дожития

$${}_tq_x = 1 - {}_tp_x = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)}$$ — вер. ум. в возр. в пром. $[x, x+t]$

- $${}_t\mu_x = \frac{{}_tq_x}{t} = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)\cdot t}$$

— средн. скорость вымирания лиц дост. x лет (на пром. t)

$$\mu_x = \lim_{t\to 0} {}_t\mu_x = \lim_{t\to 0} \frac{{}_tq_x}{t} = \frac{-1}{S(x)} \lim_{t\to 0} \frac{S(x+t) - S(x)}{t} =$$

$$= -S'(x)/S(x)$$ => force of mortality (интенсивность смертности)

$$\mu_x \Rightarrow \left(\ln(S(x))\right)'_x = -\mu_x$$

$$\ln S_x \Big|_0^x = -\int_0^x \mu_t \, dt$$

$$\begin{cases} S(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_t \, dt\right) \\ S(0) = 1 \end{cases}$$

* $f(x) = F'(x) = -S'(x)$

кривая смертей

Интерполяция для дроб. возрастов: $x=k+u$; $k=[x]$; $u=\{x\}$

1) гипотеза линейности $l_x$ и $S(x)$ линейны на $[k;k+1]$

$$_u q_k = u\cdot q_k$$
$$_u p_k = 1-u\cdot q_k \qquad \mu_{k+u} = \frac{q_k}{1-u q_k}, \text{ где } u\in(0;1)$$

2) гипотеза пост. силы смертности => экспоненц. х-тер ф-и дожития

$$\mu_x = \mu_{k+u} = \mu_k, \quad u\in(0;1)$$

$$_u p_k = p_k^u \qquad \mu_k = -\ln p_k$$

3) гипотеза Балдуччи

$1/S(x)$ – линейна на $[k,k+1]$

$$_u p_k = \frac{p_k}{p_k+u q_k} \qquad \mu_{k+u} = \frac{q_k}{p_k+u\cdot q_k}$$

Законы смертности

1) закон де Муавра (лин. ф-я дожития)

$$S(x) = \frac{\omega - x}{\omega}, \quad x\in[0;\omega]$$

$$\mu_x = -S'(x)/S(x) = \frac{1}{\omega - x}$$

$$F(x) = P(T<x) = 1-S(x) = x/\omega$$

2) Закон Гомперца

$$\mu_x = B\cdot c^x \Rightarrow l_x = k\cdot g^{c^x}$$ [illegible]

3) Закон Мейкхама (уточнение ф. Гомп.)

$$\mu_x = A + B\cdot c^x \quad (\mu_x = A + Hx + Bc^x)$$

- $S_x(t) = {}_tp_x = S(x+t)/S(x)$ — ұл бф.

$S'(x+t) = -\mu_{x+t} \cdot S(x+t) \Rightarrow \frac{d}{dt} S_x(t) = -\mu_{x+t} \cdot \frac{S(x+t)}{S(x)}$

$= -\mu_{x+t} \cdot S_x(t)$

- $l_x = l_0 \cdot S(x)$

$l_x(t) = l_x \cdot S_x(t)$

- complate expectation of life:

$\mathring{e}_x = M(T_x) = \int_0^\infty P(T_x > t)\,dt = \frac{1}{S(x)} \cdot \int_0^\infty S(x+t)\,dt$

$= \frac{1}{S(x)} \cdot \int_x^\infty S(t)\,dt$

curtate expectation of life (сокращенная)

$e_x = \ldots = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x} k\, d_{x+k} = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{t=x+1}^{\omega} l_t$

$\mathring{e}_x \approx e_x + 1/2$ (т.к. предп., что $\sim U[t; t+1]$

Совместное дожитие:

- last - survivor status

$T_{\overline{x,y}} = \max(T_x, T_y)$

$P(T_{\overline{xy}} < t) \xrightarrow{ind.} = \underbrace{P(T_x < t)}_{F(x)} \cdot \underbrace{P(T_y < t)}_{F(y)}$

- joint - life status:

$T_{x:y} = \min(T_x, T_y)$

$P(T_{x:y} > t) \xrightarrow{ind.} = P(T_x > t) \cdot P(T_y > t)$

4) Закон Вейбулла

$\mu_x = kx^n$

5) Стох. модели смертности

Задачи:

1) $_{18}p_0^x = l_{18}^x / l_0^x = 0{,}989$ $\quad {_{18}p_0^y} = 0{,}9901$

дожить до 18 $_{18}$

$_{4|4}q_0^x = (l_1^x - l_5^x) / l_0^x = 1{,}33 \cdot 10^{-3}$ $\quad {_{4|4}q_0^y} = 1{,}12 \cdot 10^{-3}$

ум. между 1 и 5 годами

$_{60}p_0^x = l_{60}^x / l_0^x = 0{,}8$ $\quad {_{55}p_0^y} = 0{,}94$ ст. ПД

$_{65}p_0^x = l_{65}^x / l_0^x = 0{,}72$ $\quad {_{60}p_0^y} = 0{,}91$ нов. ПД

2) $S(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{110}}$ $\quad 0 \le x \le 110$

$_{65}p_{20} = \frac{S(85)}{S(20)} = \frac{\sqrt{1 - 85/110}}{\sqrt{1 - 20/110}} = \frac{5\sqrt{90}}{90}$

$\mu_x = -S'(x) / S(x) = \frac{-1 \cdot -1/110}{2(\sqrt{1 - x/110})^2} = \frac{1}{220 \cdot (1 - x/110)} = \frac{1}{220 - 2x}$

$\mu_{60} = \frac{1}{220(1 - 60/110)} = \ldots$

$_{30}l_0 = l_0 \cdot S(30) / S(0) = \sqrt{80/110} \cdot 1000$ $\quad l_0 = 1000$

$_{10}p_{30} \cdot l_{30} = S(30) / S(10) \cdot {_{30}l_0}$

$e_{50}^0 = \int_0^{110} p(T_x > t)\,dt = \frac{1}{S(50)} \int_{50}^{110} S(t)\,dt =$

$= \frac{1}{\sqrt{1 - 50/110}} \left( \left(1 - \frac{x}{110}\right)^{3/2} \Big|_{50}^{110} \cdot -\left(\frac{220}{3}\right) \right) = 40$

3) $\mu_x = 0{,}001 \cdot x \qquad x \in [30, 33]$

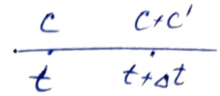
$${}_{2|1}p_{30} = \frac{S(32) - S(33)}{S(30)}$$

$$S(x) = e^{-\int_0^x \mu_t \, dt} = e^{-\int_0^x 0{,}001 t \, dt} = e^{-\frac{0{,}001 x^2}{2}} \Rightarrow {}_{2|1}p_{30}$$

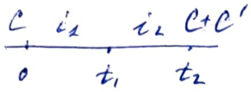
# Акт. дело (2)

Принципы начисления процентов.

$i = C'/C$ - эффект. проц. ставка (eff. rate of int.)




– простые

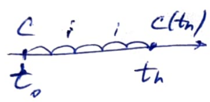



$C' = C(i_1 + i_2) \Rightarrow i = i_1 + i_2$

$C(t_2) = C(t_1)\cdot[1 + i(t_2 - t_1)]$ – лин. х-тер

– сложные (compound) $C + C' = (C(1+i_1))(1+i_2) \Rightarrow i = i_1 + i_1 i_2 + i_2$

$C(t_2) = C(t_1)\cdot(1+i)^{t_2 - t_1}$




$C(t_n) = C\cdot(1+i)^n$

$i_*^{(m)}$ – эф. проц. ст. на пер. $1/m$

$C(1+i) = C\cdot(1+i_*^{(m)})^m$

$i_*^{(m)} = (1+i)^{1/m} - 1$

$C(t) = C(1+i_*^{(m)})^n = C(1+i)^{n/m} = C(1+i)^t$

$t = n/m$

Интенсивность процентов (Force of interest)

$\frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{C(t)\Delta t}$ $\quad C(t+\Delta t) = C(t)\cdot(1+i)^{\Delta t}$

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(1+i)^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = \ln(1+i) = \delta$ ← мгнов. отн. скор. накопления

$i = e^{\delta} - 1$

$$C(t) = \begin{cases} C e^{\delta t}, & \delta(t) = const \\ C e^{\int_0^t \delta(t)dt}, & \delta(t) \neq const \end{cases}$$

коэф. накопления: $A(t_1, t_2) = C(t_2)/C(t_1) = e^{\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt}$

Номинальные проц. ставки


$i_*^{(p)} = (1+i)^{1/p} - 1 = e^{\delta/p} - 1$

$i^{(p)} = p\cdot i_*^{(p)} \Rightarrow i = \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^p - 1 \Rightarrow i^{(p)} = p\left((1+i)^{1/p} - 1\right) = p(e^{\delta/p} - 1)$

Приведенная стоимость:


$$(C(1+i)^{-t})\cdot(1+i)^t = C$$

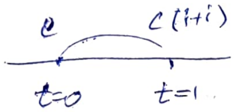
$$PV = P(t) = C(1+i)^{-t} = \begin{cases} C\cdot e^{-\delta t}, & \delta(t) - \text{const} \\ C\cdot e^{-\int_0^t \delta(t)\,dt} \end{cases}$$

$$v(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = e^{-\delta t}$$

$$v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$$

discount factor

Уч. ставка $d = \frac{i}{1+i}$



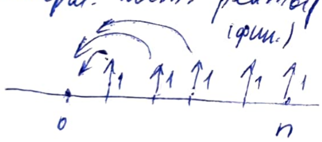

$$d = 1 - v = 1 - e^{-\delta}$$

$$d_*^{(p)} = 1-(1-d)^{1/p}$$

$$d^{(p)} = p\cdot d_*^{(p)}$$

Рента (аннуитет)

Детерм. пост. ренты (level annuity)
(фин.)




– запаздывающая (постнумерандо)
immediate annuity

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} 1\cdot v^k = \frac{v\cdot(1-v^n)}{1-v} = \frac{1-v^n}{i}$$

приведенная рента
(актуарная)

$$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

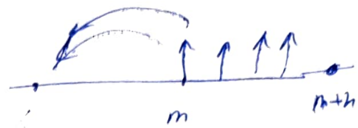
привед. к концу
плат. периода


– упреждающая (пренумерандо)

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} 1\cdot v^k = \frac{1-v^n}{1-v}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n-1}{i/(1+i)}$$

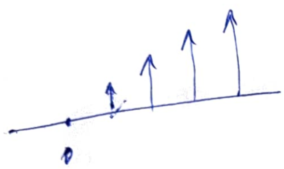
Отсроченные ренты (пост. –) (пре –)

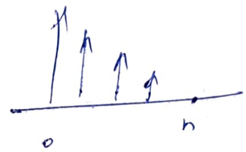




$$m|a_{\overline{n}|} = \sum_{k=m+1}^{n+m} 1 \cdot v^k = v^m \cdot a_{\overline{n}|} \qquad m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^h \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$m|s_{\overline{n}|} = m|\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|}$$

Возрастающие и убывающие ренты




=> произв. геом. пр.

$(Ia)_{\overline{n}|}$ $(Da)_{\overline{n}|}$

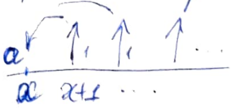
$(Is)_{\overline{n}|}$ $(Ds)_{\overline{n}|}$

$(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ $(D\ddot{a})_{\overline{n}|}$

$(I\ddot{s})_{\overline{n}|}$ $(D\ddot{s})_{\overline{n}|}$

# Акт. дело (3)

## Страховые ренты (аннуитеты)




$a_x$ – постнумерандо
$\ddot{a}_x$ – пренумерандо } пожизненные

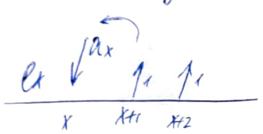
$a_{x:\overline{n}|}$ ; $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ – срочные на n лет

$_{m|}a_x$ – отложенная на m лет

$_{m|}a_x = {}_{m+1|}\ddot{a}_x$

Принцип эквивалентности об-в сторон:

$E(\sum$ диск. премий$) = E(\sum$ диск. выплат$)$




пот. рента постнумерандо

$\underbrace{l_x \cdot a_x}_{\sum \text{премий}} = l_{x+1}\cdot 1\cdot v + l_{x+2}\cdot 1\cdot v^2 + \ldots + l_w\cdot 1\cdot v^{w-x}$

$a_x = \sum_{k=1}^{w-x} {}_kp_x\, v^k = \frac{N_{x+1}}{D_x}$  $\left(\frac{l_{x+k}}{l_x} = {}_kp_x\right)$

Коммутационные ф-и:

$D_x = v^x \cdot l_x$

↑ диск. число дожив. до возр. x

$N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_w = \sum_{t=w}^{w} D_t$

$C_x = v^{x+1}\, d_x$

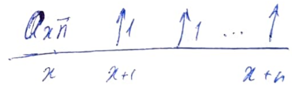
↑ диск. число умерш. в возр. x

$M_x = \sum_{t=x}^{w} C_t$

$\ddot{a}_x = a_x + 1$

$_{m|}a_x = \frac{l_{x+m+1}v^{m+1} + \ldots + l_w \cdot v^{w-x}}{l_x} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$

$a_{x:\overline{n}|} = \frac{l_{x+1}\cdot 1\, v + \ldots + l_{x+n} v^n}{l_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$




$A_x$ – един. выплата премии пожизн. страхования
$P_x$ – период. (ежегодная) } выпл. в конце года смерти

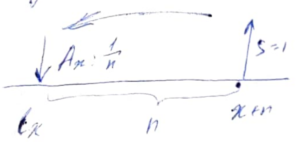
$\bar{A}, \bar{P}$ – непр. => выпл. в момент смерти

$A_{x:\overline{n}|}$ – срочное на n лет (смешанное)

$_nE_x = A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$ – на дожитие

$A^1_{x:\overline{n}|}$ – на случ. смерти } + = $A_{x\overline{n}|}$

На дожитие (pure endowment)




а) единовр. опл.

$$l_x \cdot A_{x:\frac{1}{n}} = l_{x+n} \cdot 1 \cdot v^n \Rightarrow A_{x:\frac{1}{n}} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n = {}_np_x \cdot v^n$$

$$A_{x:\frac{1}{n}} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

б) период. ежег. премии

Σ единовр. = E(Σ сумм. диск. периодов)

$$l_x \cdot A_{x:\frac{1}{n}} = l_x \cdot P_{x:\frac{1}{n}} + l_{x+1} P_{x:\frac{1}{n}} \cdot v + \dots + l_{x+n-1} P_{x:\frac{1}{n}} \cdot v^{n-1}$$

$$P_{x:\frac{1}{n}} = \frac{A_{x:\frac{1}{n}}}{1 + \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot v + \dots + \frac{l_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^{n-1}} = \frac{A_{x:\frac{1}{n}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

На случай смерти (пожизн.) – выпл. в конце года смерти


а) единовр. опл.

$$l_x \cdot A_x = d_x \cdot 1 \cdot v + d_{x+1} \cdot 1 \cdot v^2 + \dots + d_\omega \cdot 1 \cdot v^{\omega - x + 1}$$

$$A_x = \frac{(-//-)}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{d_x v^{x+1} + \dots + d_\omega \cdot v^{\omega+1}}{D_x} = \frac{C_x + \dots + C_\omega}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$

$$\frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}} = {}_kp_x \cdot q_{x+k} = {}_{k|}q_x$$

# Акт. дело (4)

$T_x$ – ост. продолж. жизни (x)

$\tau(T_x)$ – момент выплаты S (страх. возмещения)

$\tau(T_x) \to k_x + 1 = [T_x] + 1$ с выплат. в конце года смерти (дискр.)

$\to T_x$ с выпл. в момент смерти (непр.)

$\to n$ на дожитие

$b_t$ – величина страх. выплаты в момент $t$

1) договор пожизн. страхования (whole life ins.)

$b_t = 1$

$\tau(t) = t$

2) n-летнее чисто накоп. стр-е = на дожитие (n-year pure endowment insurance)

$\tau(t) = n$

$b(t) = \begin{cases} 1, & t > n \\ 0, & t \le n \end{cases}$

3) n-летнее врем. стр-е жизни = на случ. смерти (n-year endowment ins.)

$\tau(t) = t$

$b(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } t \le n \\ 0 & \text{если } t > n \end{cases}$

4) n-летнее смеш. страх-е (n-year endowment ins)

$\tau(t) = \min(t, n)$

$b_t = 1$

5) пожизн. стр-е, отсроч. на m лет (m-year deferred whole life ins)

$\tau(t) = t$

$b_t = \begin{cases} 0, & \text{если } t \le m \\ 1, & \text{если } t > m \end{cases}$

6) n-летнее врем. страх-е жизни, отср. на m лет

$\tau(t) = t$

$b_t = \begin{cases} 0, & \text{если } t \le m \\ 1, & \text{если } m < t \le m+n \\ 0, & \text{если } t > m+n \end{cases}$

7) стр-е с перем. страх. выплатой (varying benefit ins)

- пожизн. стр-е с непр. увел. страх. возмещ. (cont. increasing whole life ins.)

$\tau(t) = t$

$b_t = t$

8) стр-е с выпл. страх. суммы в конце года смерти (ins. payable at the end of the year of death)

$[T_x] + 1 = k_x + 1$

- дискр. пож. страх. $\tau(t) = [t] + 1$; $b_t = 1$

Непр. договора стр-е жизни (= с выпл. S в мом. смерти)

$\tau(t)$; $b_t$

$Z = b_{T_x} \cdot v^{\tau(T_x)}$

$Var(Z) = {}^2A - (A)^2$ — ${}^2A$ с удвоенной интенсивностью, где ${}^2A$ — $A$ - посчит. с $(2\delta)$ интенсивностью

$A = M(Z) (= E(Z))$

Z прив. стоимость на мом. закл. с челов. возр. x

1) непрерыв. стр-е

$$\bar{Z}_x = 1 \cdot v^{T_x} = e^{-\delta \cdot T_x}$$

$$\bar{A}_x = E(\bar{Z}_x) = E(v^{T_x}) = E(e^{-\delta T_x})$$

$$\boxed{\bar{A}_x = \int_0^{\infty(\omega - x)} v^t \cdot f_x(t)\,dt = \frac{1}{v^x S(x)} \int_x^{+\infty(\omega)} v^t f(t)\,dt} =$$

$f(x) = F'(x) = -S'(x)$

$$S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

$$f_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x)}$$

– плотность $T_x$

$$= 1 - \delta \frac{1}{v^x S(x)} \int_x^{\infty} v^t S(t)\,dt = 1 - \delta \frac{1}{v^x l_x} \int_x^{+\infty} \underbrace{v^t l_t}_{D_t} dt$$

$$= 1 - \delta \frac{1}{D_x} \underbrace{\int_x^{+\infty} D_t\,dt}_{\bar{N}_x} = 1 - \delta \frac{\bar{N}_x}{D_x} = \frac{\bar{M}_x}{D_x}$$

$$* \quad \bar{M}_x = D_x - \delta \bar{N}_x$$

2) n-летнее чисто накоп. (= на дожитие n-year pure endowm.)

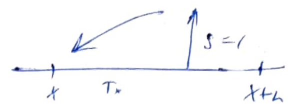
$$Z_{x:\frac{1}{n}} = \begin{cases} 0 & \text{если } T_x \le n \\ 1 \cdot v^n & \text{если } T_x > n \end{cases}$$

$$A_{x:\frac{1}{n}} = E(Z_{x:\frac{1}{n}}) = v^n \cdot P(T_x > n) = v^n \cdot S_x(n) =$$

$$= v^n \frac{S(x+n)}{S(x)} = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n \cdot {}_n p_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

3) n-летнее стр-е жизни (n-year term ins)

$$\bar{Z}^1_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} 1\cdot v^{T_x}, & \text{если } T_x \le n \\ 0 & \text{если } T_x > n \end{cases}$$




$$\bar{A}^1_{x:\bar{n}|} = E(\bar{Z}^1_{x:\bar{n}|}) = E(v^{T_x}, T_x \le n)$$

$$= \int_0^n v^t f_x(t)\,dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^{x+n} v^t f(t)\,dt = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x}$$

4) смеш. стр-е n-летнее (n-year end. ins)

$$\bar{Z}_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} 1\cdot v^{T_x} & \text{если } T_x \le n \\ 1\cdot v^n & \text{если } T_x > n \end{cases} = \underbrace{\bar{Z}^1_{x:\bar{n}|}}_{\text{на случ. смерти}} + \underbrace{Z_{x:\bar{n}|}^{\ \ 1}}_{\text{на дожитие}}$$

$$\Rightarrow \bar{A}_{x:\bar{n}|} = (s_1)\cdot A_{x:\bar{n}|}^{\ \ 1} + (s_2)\cdot \bar{A}^1_{x:\bar{n}|}$$

5) Пожизн.[а)] / n-летнее[б)] страх-е жизни, отлож. на n лет

в) $$m|\bar{Z}^1_{x:\bar{n}|} = \begin{cases} 0, & T_x < m \\ 1\cdot v^{T_x}, & m < T_x < m+n \\ 0, & T_x > m+n \end{cases}$$

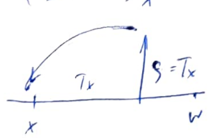
$$m|\bar{A}^1_{x:\bar{n}|} = \int_m^{m+n} v^t f_x(t)\,dt = \frac{\bar{M}_{x+m} - \bar{M}_{x+m+n}}{D_x}$$

а) $$m|\bar{Z}_x = \begin{cases} 1\cdot v^{T_x} & \text{если } T_x > m \\ 0 & \text{если } T_x < m \end{cases}$$

$$m|\bar{A}_x = \int_n^{\infty} v^t f_x(t)\,dt = \frac{\bar{M}_{x+n}}{D_x}$$

6) Пожизн. стр-е с непр. ↑ страх. суммой (cont. increasing whole life ins.)

$$(\bar{I}\bar{Z})_x = T_x \qquad (\bar{I}\bar{A})_x = E(\bar{I}\bar{Z}_x) = \int_0^{\infty\,(w-x)} t\cdot v^t\cdot f_x(t)\,dt$$




$$= \frac{1}{D_x} \int_x^{+\infty} \bar{M}_t\,dt$$

Связь между непр. и дискр.

видами страхования

$\delta(x), b_x$ - мгн. ( = равном. распр. смерт. в теч. посл. года жизни

$$\text{indep.} \begin{cases} K_x = [T_x] & \text{- округл. цел. жизни} \\ \tau_x = T_x - K_x \end{cases}$$

$$\tau_x \in U[0,1) \Rightarrow 1 - \tau_x \in U[0,1]$$

$$\bar{A}_x = E[v^{T_x}] = E[v^{K_x + \tau_x}] = E[v^{K_x+1} \cdot v^{\tau_x - 1}] \overset{\text{ind.}}{=}$$

$$= E[v^{K_x+1}] \cdot E[v^{\overset{U[0,1]}{\tau_x} - 1}] = \underbrace{E[v^{K_x+1}]}_{A_x} \cdot E[e^{\delta(1 - \tau_x)}] =$$

$$= \underset{\text{выпл. в конце года смерти}}{\underbrace{A_x}} \cdot \int_0^1 e^{\delta t}\, dt = \frac{i}{\delta} \cdot A_x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{i}{\ln(1+i)}$$

1) Закон см-ти де Муавра  $w=120$ лет  $S=1000$  $i=15\%$  (40)

$f(x)=\frac{1}{w}=\frac{1}{120}$  $S=\frac{w-x}{w}=\frac{120-x}{120}$

а) пожизн. стр-е

б) пожизн. отср. на 2 года

$f_x(t)=\frac{f(x+t)}{S(x)}=\frac{1/w}{\frac{w-x}{w}}=\frac{1}{w-x}=\frac{1}{80}$

в) пожизн. с непр. ↑ страх. суммой

г) 5-летн. смеш. страх

д) 5-лет. страх. пожизн. отср. на 2 года

а) $$\bar{A}_{40}=\frac{1}{v^{40}\cdot S(40)}\int_0^{120} v^t \underbrace{\frac{1}{120}}_{f(t)} dt=\int_0^{80} v^t\,\frac{\frac{1}{120}}{\frac{\cancel{120-40}}{\cancel{120}}}dt=$$

2 дезуел.

$$\int_0^{80}\frac{120\cdot v^t}{120\cdot 80}dt=\int_0^{80} v^t\frac{1}{80}dt=\frac{1}{80}\cdot\frac{v^t}{\ln(v)}\Big|_0^{80}=\frac{1}{80\cdot\ln\left(\frac{1}{1{,}15}\right)}\cdot\left(\left(\frac{1}{1{,}15}\right)^{80}-1\right)$$

$=0{,}08944$

$\Rightarrow \boxed{89{,}44}$

б) $${}_{2|}\bar{A}_{40}=\int_2^{80} v^t f_x(t)\,dt=\int_2^{80} 0{,}87^t\cdot 0{,}0125\,dt=0{,}0125\left[\frac{0{,}87}{\ln(0{,}87)}\right]\Big|_2^{80}=0{,}06763$$

$\Rightarrow 67{,}63$

в) $$(\bar{I}\bar{A}_x)=\int_0^{80} t v^t f_x(t)\,dt=\frac{1}{80}\left(\left[t\cdot\frac{v^t}{\ln v}\right]\Big|_0^{80}-\frac{1}{\ln v}\cdot\int_0^{80} v^t dt\right)=$$

$$=0{,}0125\left[\frac{80\cdot 0{,}86^{80}}{\ln(0{,}86)}-\frac{80\cdot 0}{\ln(0{,}86)}-\frac{0{,}86^{80}}{(\ln(0{,}86))^2}+\frac{1}{(\ln(0{,}86))^2}\right]=638{,}9$$

г) $$\bar{A}_{40:\bar{5}|}=A_{40:\bar{5}|}^{\;\;1}+\bar{A}^{1}_{40:\bar{5}|}=v^5\left(S(45)/S(40)\right)+\int_0^5\frac{1}{80}\left(\frac{1}{1{,}15}\right)^t dt=$$

$$=\left(\frac{1}{1{,}15}\right)^5\cdot\frac{(120-45)/120}{(120-40)/120}+\frac{1}{80}\cdot\frac{1/1{,}15}{\ln(1/1{,}15)}\Big|_0^5=0{,}4661+0{,}04497=0{,}51107$$

$\Rightarrow 511{,}07$

д) $_{2|}A^{1}_{40:\overline{5}|} = \frac{1}{80}\int_2^7 \left(\frac{1}{1,15}\right)^t dt = \frac{1}{80}\left.\frac{(1/1,15)^t}{\ln(1/1,15)}\right|_2^7 =$

$= \frac{1}{80}\,\frac{(1/1,15)^7 - (1/1,15)^2}{\ln(1/1,15)} = 0,034 \Rightarrow 34$

2) 10,000 – пож. пож. страх. (Whole life ins)

$T_x \sim \mu_x = 0,04 = const$

$\delta = 0,06 = const$

P – гарант. 95% вып. обяз-в по портфелю

$БП = \frac{НП}{1-f}$

брутто

БП

стр. пр.

нетто

НП

рис. надбавка

[нагрузка]

$f$

ФП

РН

НП: $1-\psi = 0,95$

$E(Z) = A$

$\psi = 0,95$

$E(Z)$

$z_{max} = НП_{0,95}$

$1-\rho = 0,95$

$ФП = E(Z) = \bar{A}_x = \int_0^\infty \underbrace{v^t f_x(t)}\,dt = \int_0^\infty v^t \mu e^{-\mu t} dt = \ldots$

$= -S_x'(t) = +\mu \cdot e^{-\mu t}$

$S_x(t) = e^{-\int_0^t \mu_{x+u}\,du} = e^{-\mu t}$

$= \int_0^\infty e^{-\delta t} \mu e^{-\mu t} dt = \int_0^\infty \mu e^{-(\delta+\mu)t} dt = -\frac{\mu}{\delta+\mu} e^{-(\delta+\mu)t}\Big|_0^{+\infty} =$

$= \frac{\mu}{\delta+\mu} = 0,4$

# Акт. дело (5)

до 29

Стр. рез. — объём об-в стр. комп. на отч. дату

Стр. фонд — ден. фонд, обр. стр. комп. за сч. получ. стр. взносов (нетто-премий)

Стр. 1 $НП_1$ → Стр. 2 $НП_2$ → ... Стр. n $НП_n$ →

$\boxed{\text{Страховой фонд}}$

⇓

$\boxed{\text{Страховые резервы}}$

→ $Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_k$ иссл. $M(Y)$ ~ $\sigma(Y)$

стр. выплаты

$\boxed{БП}$ → $\boxed{НП}$, $\boxed{\text{нагр. на вед. дела и прибыль}}$

$\boxed{НП}$ → $\boxed{РП}$, $\boxed{РН}$

$\boxed{\text{Стр. рез.}}$ → $\boxed{\text{Нетто-резерв}}$, $\boxed{\text{Модифиц. (спец) резерв}}$

Нетто-резерв: те же табл. см-ти и $i$, что и при расчете НП

Модифиц. (спец) резерв: при расч. исп. БП и/или
- особые табл. см-ти (сдвиг 1/2)
- изм. $i^*$ (техн.)
- заниж. (на дох.)
- завыш. (на см.)

Мет. расчета страх. резервов

в страх. теории (мат. резервов)

↙ ретроспективный ↘ перспективный

$_tV^{1}_{x:\overline{n}|}$ — вел. резерва в конце $t$-го года после продажи стр. полиса

$$_tV_x = A_{x+t} \;\Big|\; - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}$$

при единовр. оплате пр. — при ежег. опл. премий

$$_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\;1} \;\Big|\; - P_{x:\overline{n}|}^{\;1} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$$_tV^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} \;\Big|\; - P^{1}_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

при единовр. опл. — при ежег. опл.

# Актуарное дело (6)

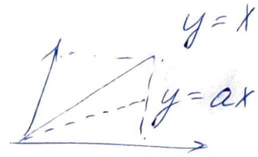
## Методы страхования

$X$ – реальный ущерб → дискретный
→ распределенный (масс)

$C$ – стр-ть объекта

$S$ – стр. сумма ($S \leq C$)

$Y$ – выплаты с.к.




Стр-е → полное
→ частичное

– огр. ответств. страховщика
ост. часть рисков на собств.
удерж. страх-еля, уменьш. ему стр. пр.

1) пропорциональное $y = ax \quad a \in (0;1)$

2) не проп-ое $a = S/C$

2.1. по пр-му 1го риска

$S - bC, \quad b \in (0,1)$

$$y = \begin{cases} x & x < s \\ s & x \geq s \end{cases}$$

2.2. с франшизой

– безусловная (вычитаемая)

$$y = \begin{cases} 0 & x \leq d \\ x - d & x > d \end{cases}$$

– условная

$$y = \begin{cases} 0 & x \leq d \\ x & x > d \end{cases}$$

– смеш.

$$y = \sum_i X_i - d$$

Акт. дело (7)

$БП = \frac{НП}{1-f}$ → $f$ нагрузка → РВД (фин. буд. дела) ; → РПМ (рез. фонды) ; → фонд прибыли

→ НП → РП ; → РН (loading)

СП — ден. сумма, кот. с-ль обязан запл. СК для стр. защ.

НП — опр-т х-ки взятого на стр. риска

$НП_1, \ldots, НП_n$ → стр. фонд => стр. рез. → $У_1$ ; → $У_k$ $(k << n)$

Нагрузка — рез. на финансирование самого процесса страх-ия и формир-е прибыли

РВД (организационные, инкассационные, ликвидационные, аудиторские и др.)

Спец. рез. фонды — бедств., на случай форс-мажоров

$РП = E(Y) = p \cdot E(Y/A)$

↳ принцип экв-ти обяз-в сторон (р-во стр. взносов и стр. возм.)

$СРП = E(\sum Y_i) = \sum E(Y_i) \overset{i.i.d.}{=} n \cdot РП$

(сумм. РП портфеля)

РН (гарант., защит.) — обеспеч. безубыт. стр. операций, если факт. сумма выплат будет выше мат. ож. ущерба

$\Theta = \frac{РН}{РП}$ — отн. риск. надбавка

Осн. принципы расчета риск. надбавки:

1) Принцип мат. ожидания (применим, если дисперсии примерно равны, но м. о. разные)

$$НП = (1+\alpha)\cdot \underbrace{E(Y)}_{РП} \qquad 0<\alpha<1$$

Если дисп. разные

2) Принцип СКО (для пол. зависимых рисков СКО обл. аддитивностью) в отл. от Наиб. осн на дисперсии

$$НП = E(Y) + \lambda \cdot \sigma(Y) \quad , \quad 0<\lambda<1$$

3) Принцип дисперсии:

$$НП = E(Y) + \beta \cdot D(Y) \quad , 0<\beta<1$$

4) Показательный принцип (exp)

$$НП = \frac{1}{\alpha}\cdot \ln\big(\underbrace{E(e^{\alpha x})}_{MGF}\big)$$

PGF: д.с.в. (дискр), $x_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \geq 0$ $\quad g_x(z) = E(z^x) = \sum_{i=1}^{\infty} z^{x_i} p_i$

MGF: н.о.в., д.с.в.

$$m_x(t) = E(e^{xt}) = \begin{cases} \sum e^{x_i t} p_i \\ \int e^{xt} f(x)\,dx \end{cases}$$

Ch F: $\exists$ для всех с.в. $\quad \varphi_x(t) = E(e^{ixt})$

5) Принцип Эшера — чист. премия для риск $\tilde{X}$, связ. с $X$

$$НП_x = \frac{E(Xe^{hx})}{E(e^{hx})} = E(\tilde{x}) \quad , \quad h>0$$

$X$ — н.с.в. $(0;\infty)$, $f(x)$:
огр. слева

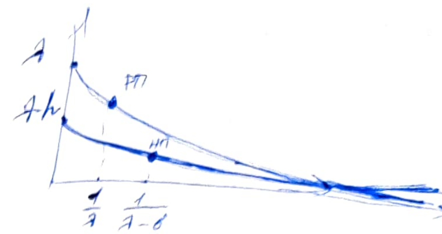
$$g(X) = \frac{e^{hx}\cdot f(x)}{\underbrace{\int_0^\infty e^{hx} f(x)\,dx}_{MGF\,(m_x(h))}} \quad — \text{ п-ть с.в. } \tilde{X}$$

$$G(X) = \frac{\int_0^x e^{hy} f(y)\,dy}{\varphi_x(h)} \quad — \text{ б распр. — Эшер-преобр. } F \text{ с пар-ом } h$$

$$\boxed{m_{\tilde{X}}(t) = \frac{m_X(t+h)}{m_X(h)}}$$

e.g. $X \sim \exp(\lambda)$

$F(X) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$




MGF : $m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

$$m_{\tilde{X}}(t) = \frac{m_X(t+h)}{m_X(t)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda - t - h}}{\frac{\lambda}{\lambda - h}} = \frac{\lambda - h}{\lambda - h - t}$$

$\Rightarrow \tilde{X} \sim \exp(\lambda - h)$

$HП = E(\tilde{X}) = \frac{1}{\lambda - h} > \frac{1}{\lambda}$, $h > 0$

6) Премия с поправкой на риск (Risk-adj premium principle)

$$HП = \int_0^\infty [1 - F(x)]^{1/\rho} dx$$

с.в. $X \geq 0$ с $F(x)$

$\Downarrow$

с.в. $X^* \geq 0$ с $H(x)$ : $H(X) = [1 - F(x)]^{1/\rho}$

$HП = E(X^*)$

e.g. $X \sim \exp(\lambda)$

$1 - F(x) = e^{-\lambda x}$

$1 - H(x) = e^{-\lambda x/\rho}$

$\Rightarrow$ $X^* \sim \exp(\lambda/\rho)$

$HП = E(X^*) = \rho/\lambda \geq \underbrace{1/\lambda}_{РП}$, $\rho > 1$

7) Квантильный принцип

$$Z = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$E(Z) = СРП \overset{i.d.}{=} n \cdot РП$

Ц.П.Т. $\frac{Z - E(Z)}{\sigma(Z)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z - E(Z)}{\sigma(Z)} < t_{1-\varepsilon}\right) = F_{N(0,1)}(t_{1-\varepsilon})$$

$$P(Z < \underbrace{E(Z)}_{СРП} + \underbrace{t\sigma_Z}_{СРН}) = F_{N(0,1)}(t_{1-\varepsilon})$$

$$СРН = t_{1-\varepsilon} \cdot \underbrace{\sigma(Z)}_{\text{портфель}} = t_{1-\varepsilon} \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma(y_i)$$

$$РН = t_{1-\varepsilon}\, \sigma(y_i)/\sqrt{n}$$

## Задача 1

$$\rho\Pi = E(y_i) = p \cdot E(y|A) = p \cdot S$$

$$D(y_i) = p \cdot D[(y|A)] + p \cdot q \cdot E[(y_i|A)^2]$$

$$y_i = \begin{cases} 0 , & s \\ 1 , & p \end{cases}$$

$$y_i \sim B(p)$$

$$\sum y_i \sim B(n, p)$$

$$E(y_i) = s \cdot p$$

$$D(y_i) = s^2 p - s^2 p^2 = s^2 pq$$

$$pH = \frac{t_{1-\varepsilon}\,\sigma(y_i)}{\sqrt{n}}$$

1) $$pH = \frac{t_{0,95}\sqrt{pqs^2}}{\sqrt{300}} \approx 162$$

2) $$pH = \frac{t_{0,95}\sqrt{pqs^2}}{\sqrt{800}} \approx 98,$$

$$H\Pi = 395$$

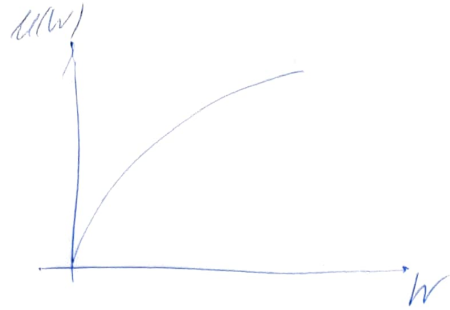
## Задача 2

$$X \sim Pois(\lambda)$$

$$m_x(t) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx_i} \cdot p_i =$$

$$= \sum e^{tm} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \ldots$$

Акт. дело (8)




$u'(W) > 0$

$u''(W) < 0 \Rightarrow$ не скл. к риску

Нер-во Йенсена:

1) $v(x)$ – вып. вниз ф-я, $Y$ – с.в.

$$E(v(Y)) \geq v(E(Y))$$

( $=$ если $v$ лин. на мн-ве с.в. $Y$ или $Y = const$ )

2) $u(x)$ вып. вверх

$$E[u(W-X)] \leq u(E[W-X]) = u(W - \underbrace{E(X)}_{РП})$$

I Стр-тель: $W$ – капитал

$u(\cdot)$ – ф-я полезности $\quad E[u(W-X)] \leq u(W-p)$

$p \leq p^+$ – max премия кот. гот. зап. ст-тель

Для ст-ля: $E[u(W-X)] = u(W-p^+) \Rightarrow p^+$

II Для с.к.: $E[U(W+p-X)] \geq U[W]$

$p \geq p^-$ – min премия за кот с.к. готова принять этот риск

$$E[U(W+p^- - X)] = U[W] \Rightarrow p^-$$

$\Leftrightarrow$ дог. закл. если $\exists p$: $\quad p_- \leq p \leq p_+$

Найдем пр. зн. $p^+$ ( $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$ )

Раз. в р.Т. в т. $(W-\mu)$

$$u(W-p^+) \approx u(W-\mu) + \underbrace{(\mu - p^+)}_{= (W - p^+ - (W-\mu))} \cdot u'(W-\mu)$$

$$u(W-X) \approx u(W-X) + (\mu - X)\, u'(W-\mu) + \tfrac{1}{2}(\mu - X)^2 \cdot u''(W-\mu)$$

$$E[u(W-X)] = u(W-\mu) + 0 + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot u''(W-\mu)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma^2 u''(W-\mu) \approx (\mu - p^+)\, u'(W-\mu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^+ \approx \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{u''(W-\mu)}{u'(W-\mu)}$$

$$r(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)}$$ – к-т несклонности к риску

$$\Rightarrow p^+ \approx \mu + \frac{1}{2} r(W-\mu)\sigma^2$$

$W$, $u(x)$, $x$

$u(W - БП) > E[u(W-X)] \Rightarrow$ выгодно стр-ть

част. страх. $W_{ост.} = W - БП - X_{част.}$

(– проп.

– пр-ло 1-го риска

– франш.)

$$E(u(W_{ост.})) = \int_0^{\infty} {}_{(X_{min})}^{(X_{max})} u(W_{ост.}) f(x)\, dx$$

<u>Гр. условия:</u>

ст-ль отк. от страх.

$U_{min} = u(W - x_{max})$ – max. убытки

$U_{max} = u(W - 0)$ – нет убытков

$U_{min} \leq U \leq U_{max}$

Акт. дело (9)

PGF $\quad g_x(t) = E(z^x)$ дискр. неотриц. $X \geq 0$

$E(X) = g_x'(1)$

$\mathrm{var}(X) = g''(1) + g'(1) - (g'(x))^2$

$\downarrow$

MGF $\quad m_x(t) = E(e^{tx})$ (не $\exists$, если не $\exists$ мом. $\to \nu^k = E(x^k) = m_x^{(k)}(0)$)

$\downarrow$

ChF $\quad \varphi_x(t) = E(e^{itx})$ для $\forall$ с.в.

$$M_\xi(t) = E(e^{t\xi}) = \sum e^{tx} \cdot p_x = \int e^{tx} f_x \, dx$$

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t)$$

Томас Мак

Мод. отд. страх. выпл.

1) Гамма распр (сумма гамма = гамма)

2) Обратное гауссовское распр. (сохр. при свертке)

т.е. подх для разных $\mu_i$ $\alpha_i$

$$F(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{ax}{\mu}} - \sqrt{\frac{a\mu}{x}}\right) + e^{2a}\Phi\left(-\sqrt{\frac{ax}{\mu}} - \sqrt{\frac{a\mu}{x}}\right)$$

$\Phi(x)$ — табулир. ф-я Лапласа ст. з. норм. распр.

3) Лог-нормальное

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right) \qquad \Phi(t) = \dots$$

1) свёртка

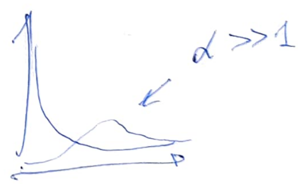
2) MGF

3) Np — аппроксимация

$\Gamma(\alpha < 1)$

$NG(\alpha < 1)$

$LN(\sigma_x^2 < 1)$




(А) модель Панджера

Коллект. модель

$N$ – число договоров $\in$ ДСВ $\frac{0}{1}$

$Y$ – выпл. по договорам $\in$ НСВ

$Y \geq 0$ (правостор.)

Bin – дог. с фикс. ущербом (об урона)

Pois → смеш. pois. (сумма простых) $\lambda$ для разн. групп
$\lambda$ – ТИР

comp. Pois. ($N$ – pois, $Y$ – др.)

Лемма: $p_n = \int_0^\infty \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} u(\lambda)\, d\lambda$

струк. ф-я

I) Хорошо работают: $u(\lambda) = \Gamma(a, b)$ ← Пирсона по кр. согл. Куми. апр.

$p_k \int f_{pois} \cdot u(\lambda) \underset{\langle \ldots \rangle}{=} C^{k}_{k+\alpha-1} \left(\frac{b}{1+b}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{1+b}\right)^{k}$

=> отр. биком. распр.

=> рекуррентная формула расчета $p_{k+1} = \frac{k+a}{(k+1)(1+b)} \cdot p_k$

$p_0 \ldots$

II) $u(\lambda) = NG$ (без параметр.)

=> тоже рекуррентно выводится

III хорошие / плохие риски

$p_k = a_1 \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^k}{k!} + a_2 \frac{e^{-\lambda_2} \cdot \lambda_2^k}{k!}$

Акт. дело (10)

GLM (пример из D. Anderson, et al Practitioners Guide to G.L.M., 2007)

| Пол \ Регион | гор. | сел. местн. |
|---|---|---|
| м | 800 | 500 |
| ж | 400 | 200 |

← mean severity

$$Y = \begin{bmatrix} 800 \\ 500 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$Y \in Poi(\lambda) \Rightarrow f(y, \mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^y}{y!}$$

$$\mu = E(y) = g^{-1}(X\beta) = e^{X\beta} = \begin{bmatrix} e^{\beta_1+\beta_3} \\ e^{\beta_1} \\ e^{\beta_2+\beta_3} \\ e^{\beta_2} \end{bmatrix}$$

$$L = \prod f(y_i, \mu_i) \Rightarrow \ln L \Rightarrow \sum \ln f$$

$$\Rightarrow \ln(L(y_i\ \mu_i)) = -e^{(\beta_1+\beta_2)} + 800(\beta_1+\beta_2) - \ln 800! + e^{-\beta_1} + 500\beta_1 + \ln 500! - e^{\beta_2+\beta_3} + 400(\beta_2+\beta_3) - \ln 400! - e^{\beta_2} + 200\beta_2 - \ln 200! \longrightarrow \max_{\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \beta_1}, \frac{\partial L}{\partial \beta_2}, \frac{\partial L}{\partial \beta_3} \Rightarrow$$

$$\hat\beta_1 = \ln\frac{9100}{19} = 6,1716$$

$$\hat\beta_2 = \ln\frac{4200}{15} = 5,3584$$

$$\hat\beta_3 = \ln\frac{12}{7} = 0,539$$

$$\hat y = g^{-1}(X\beta)$$

$$e^{\hat\beta_1+\hat\beta_3} \approx 821,1 \qquad e^{\hat\beta_1} = 479$$

$$e^{\hat\beta_2+\hat\beta_3} \approx 378,9 \qquad e^{\hat\beta_2} \approx 221,1$$

} разница по полу

$e^{\hat\beta_3}$ – повыш. коэф. для города

СБМ – переход в классы – марк. цепь

(пересчит. ф-ла Байеса)

# СТРАХОВАНИЕ ИНОЕ, ЧЕМ СТРАХОВАНИЕ ЖИЗНИ (НЕ-ЖИЗНИ)

## Тема 1. *Основные понятия страхования и актуарных расчетов*

***Основные виды договоров полного и частичного страхования и зависимость выплат страховщика Y=g(x) от реально наступившего ущерба X***

| № п/п | Название договора | Вид функции Y=g(x) | Примечания |
|---|---|---|---|
| 1. | Полной защиты | $Y=X$ | |
| 2. | Пропорциональной защиты | $Y=aX$ | $S=a\cdot C$<br>$0<a<1$ |
| 3. | По правилу первого риска | $Y=\begin{cases}X, X\le S\\ S, X>S\end{cases}$;<br>$Y=\min(X;S)$ | $S=b\cdot C$<br>$0<b<1$ |
| 4. | С безусловной (вычитаемой) франшизой | $Y=\begin{cases}0, X\le L\\ X-L, X>L\end{cases}$;<br>$Y=\max(0;X-L)$ | $L=d\cdot C$<br>$0<d<1$ |
| 5. | С условной (невычитаемой) франшизой | $Y=\begin{cases}0, X\le L\\ X, X>L\end{cases}$ | $L=d\cdot C$<br>$0<d<1$ |

## Тема 2. *Структура страховой премии*

***Характеристики риска***

| Характеристики ущерба | Закон распределения ущерба: Дискретная случайная величина | Закон распределения ущерба: Непрерывная случайная величина |
|---|---|---|
| | $x_i$ (возможные значения ущерба) : $x_1$ … $x_n$<br>их вероятности $p_i=P(X=x_i)$ : $p_1$ … $p_n$ |  $f(x)$ - функция плотности |
| Условное математическое ожидание | $M(Y\mid A)=\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot p_i$<br>$y_i=g(x_i)$ | $M(Y\mid A)=\int_0^\infty g(x)\cdot f(x)dx$<br>$Y=g(x)$ |
| Условная дисперсия | $D(Y\mid A)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-M(Y\mid A))^2\cdot p_i$ или<br>$D(Y\mid A)=\sum_{i=1}^{n}y_i^2\cdot p_i-(M(Y\mid A))^2$ | $D(Y\mid A)=\int_0^\infty(g(x)-M(Y\mid A))^2\cdot f(x)dx$ или<br>$D(Y\mid A)=\int_0^\infty(g(x))^2\cdot f(x)dx-(M(Y\mid A))^2$ |
| Матем. ожидание | $M(Y)=p\cdot M(Y\mid A)$ | |
| Дисперсия | $D(Y)=p\cdot D(Y\mid A)+p\cdot q\cdot(M(Y\mid A))^2$ | |





| Структура страховой премии | |
|---|---|
| *Брутто-премия* $Б\Pi=\frac{Н\Pi}{1-f}$ | *Нетто-премия* $Н\Pi=Р\Pi+РН=Р\Pi(1+\Theta)$<br>$РН$ – *рисковая надбавка* |
| *Рисковая премия* $Р\Pi=M(Y)$ | $\Theta=\frac{РН}{Р\Pi}$ - *относительная рисковая надбавка* |
| *Суммарная рисковая премия(по портфелю)*<br>$СР\Pi=M(Z)=\sum_{i=1}^{n}M(Y_i)$ | *Степень риска* $K(Y)=\frac{\sigma(Y)}{M(Y)}=\sqrt{\frac{(K(Y\mid A))^2}{p}+\frac{q}{p}}$ |
| *Квантильный принцип (с вероятностью разорения СК ε):*<br>$Н\Pi=F^{-1}(1-\varepsilon)=Z_{\max(1-\varepsilon)}=\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)_{\max(1-\varepsilon)}$ | *Квантильный принцип (с вероятностью разорения СК ε):*<br>$СРН=t_{1-\varepsilon}\sigma(Z)=t_{1-\varepsilon}\sqrt{nD(Y_i)}=t_{1-\varepsilon}\sqrt{n}\sigma(Y_i)$ |
| $m\in B(n;p)$<br>$m_{\max}=M(m)+t_{1-\varepsilon}\sigma(m)=np+t_{1-\varepsilon}\sqrt{npq}$ | $РН=\frac{СРН}{n}=\frac{t\sigma(Z)}{n}=\frac{t\sigma(Y_i)}{\sqrt{n}}$ |
| $m\in B(n;p)$ $\Theta=\frac{СРН}{СР\Pi}=\frac{t_{1-\varepsilon}\sqrt{npq}S}{npS}=t\sqrt{\frac{q}{np}}$ | $K_n=\frac{\sigma(Z)}{M(Z)}=\frac{\sqrt{nD(Y_i)}}{nM(Y_i)}=\frac{\sqrt{n}\sigma(Y_i)}{nM(Y_i)}=\frac{K_1}{\sqrt{n}}$ |
| $m\in B(n;p)$ $СРН=t_{1-\varepsilon}\sigma(m)S=t_{1-\varepsilon}\sqrt{npq}S$ | $\Theta=\frac{СРН}{СР\Pi}=\frac{t\sigma(Z)}{M(Z)}=t\cdot K_n=t\cdot\frac{K_1}{\sqrt{n}}$ |
| *Принцип Эшера (Esscher principle):*<br>$Н\Pi=\frac{M(Xe^{hX})}{M(e^{hX})}=M(\tilde{X}),\ \ m_{\tilde{X}}(t)=\frac{m_X(t+h)}{m_X(t)}, h>0$ | *Премия с поправкой на риск (Risk-adjusted premium principle):*<br>$Н\Pi=M(X^*)=\int_0^{+\infty}[1-F(x)]^{1/\rho},\ \rho\ge 1$ |
| ***Теория полезности (Utility theory)***<br>*Уравнения равновесия полезности с точки зрения:* | $u_{max}=u(w-0)=u(w)$<br>$u_{min}=u(w-X_{max})$ |
| *страхователя:* $M[u(w-X)]=u(w-P_{\max})$ | *страховщика:* $U(W)=M[U(W+P_{\min}-X)]$ |
| $P_{\max}\approx\mu+\frac{1}{2}r(w-\mu)\cdot\sigma^2$; $\quad r(w)=-\frac{u''(w)}{u'(w)}$ | $M(u(w_{ост}))=\int_0^{+\infty}u(w_{ост})\cdot f(x)dx$ |

## Тема 3. *Моделирование в актуарных расчетах*

| | |
|---|---|
| $Z=X_1+X_2$: $\quad F(z)=\int_0^S F_1(z-x_2)f_2(x_2)dx_2$<br>$f(z)=\int_0^S f_1(z-x_2)f_2(x_2)dx_2$ | $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\xrightarrow{n\to\infty}N(0;1)$<br>$\lim_{n\to\infty}P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\le n\mu+t\sigma\sqrt{n}\right)=F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ |
| $p(k)=P(X_1+X_2=k)=\sum_{l=1}^{k}p_1(l)\cdot p_2(k-l)$ | $n=\left(\frac{t\cdot\sigma(X_i)}{\Theta\cdot M(X_i)}\right)^2$ |
| $PGF$ $\quad P(\xi=m)=p_m;\ m=0;1;2;\ldots$ ДСВ<br>$g_\xi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}z^m p_m=M(z^\xi)$ | $MGF$ $\quad m_\xi(t)=M(e^{t\xi})=\sum_{i=1}^{\infty}e^{tx_m}p_m$ ДСВ<br>$m_\xi(t)=M(e^{t\xi})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f_\xi(x)dx$ НСВ |
| $M(\xi)=g'(1)$;<br>$D(\xi)=g''(1)+g'(1)-[g'(1)]^2$ | $v_k(\xi)=M(\xi^k)=m_\xi^{(k)}(0)$ ; $\ M\xi=v_1=m_\xi'(0)$<br>$D\xi=v_2-(v_1)^2=m_\xi''(0)-(m_\xi'(0))^2$ |
| $g_{\xi_1+\xi_2}(z)=g_{\xi_1}(z)\cdot g_{\xi_2}(z)$;<br>$\xi_1,\xi_2$ – независимы | $m_{\xi_1+\xi_2}(t)=m_{\xi_1}(t)\cdot m_{\xi_2}(t)$;<br>$\xi_1,\xi_2$ – независимы |

$$m_{kT} = p_{kT} \cdot n$$

Pois/u(λ) $\quad p_k = P(K=k) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} u(\lambda) d\lambda$

Pois $\quad p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots$

$$\tilde{\lambda} = \bar{k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} k_i \cdot m_i; \quad n = \sum_{i=1}^{l} m_i$$

Pois/Г(a;b) $\quad P(K=k) = C_{r+k-1}^{k} \cdot p^r \cdot (1-p)^k$

$$p_0 = \left(\frac{b}{1+b}\right)^a; \quad p_{k+1} = \frac{k+a}{(k+1)(1+b)} \cdot p_k$$

$$\hat{b} = \frac{\bar{k}}{S_k^2 - \bar{k}}; \quad \hat{a} = \frac{(\bar{k})^2}{S_k^2 - \bar{k}}$$

Pois/IG(g;h)

$$p_0 = e^{g(1-\sqrt{1+2h})/h};$$

$$p_1 = p_0 \frac{g}{\sqrt{1+2h}}$$

$$p_k = \frac{p_{k-1} \cdot h \cdot (k-1) \cdot (2k-3) + p_{k-2} \cdot g^2}{(1+2h) \cdot k \cdot (k-1)}; \quad k = 2,3,\ldots$$

$$\hat{g} = \bar{k}; \quad \hat{h} = \frac{S_k^2}{\bar{k}} - 1, \; S_k^2 > \bar{k}$$

Lemair $\quad p_k = a_1 \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!} + a_2 \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^k}{k!}$

$$\hat{a}_1 = \frac{a - \hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2}, \quad \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 = \frac{A \mp \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$

$$A = \frac{c - ab}{b - a^2}, \; B = \frac{ac - b^2}{b - a^2}$$

$$a = \bar{k}; \quad b = \overline{k^2} - \bar{k}; \quad c = \overline{k^3} - 3\overline{k^2} + 2\bar{k}$$

## Тема 4. *Сострахование и перестрахование как методы повышения финансовой устойчивости страховщика*

***Пропорциональное перестрахование***

$$П = \underbrace{П \cdot r}_{цедент} + \underbrace{П \cdot (1-r)}_{Re}$$

$$Y = \underbrace{Y \cdot r}_{цедент} + \underbrace{Y \cdot (1-r)}_{Re}$$

***Непропорциональное перестрахование***

$$Y = \underbrace{\min(Y; r)}_{цедент} + \underbrace{\max(Y - r; 0)}_{Re}; \quad r > 0$$

## Тема 5. *Резервы страховой компании в страховании не-жизни*

***Резерв незаработанной премии (РНП) (базовая часть)***

$$РНП_i = БСП_i \cdot \frac{n_i - m_i}{n_i}$$

$n_i$ – срок действия договора;
$m_i$ – срок, прошедший с момента заключения договора до отчетной даты:

- «pro rata temporis» - в днях;
- «1/24» - в полумесяцах;
- «1/8» - в полукварталах

$$БСП_i = БП_i - (B_i + OO_i)$$

где $БП_i$– начисленная страховая брутто-премия по $i$-договору;
$B_i$– вознаграждение, начисленное за заключение $i$-го договора;
$OO_i$– обязательные отчисления от страховой брутто-премии по $i$-му договору в случаях, предусмотренных законодательством РФ.

$$РНП = \sum РНП_i$$

***Резерв заявленных убытков (РЗУ)***

$$РЗУ = ЗУ + ВПР$$

где $ЗУ$ – сумма заявленных, но неурегулированных убытков и премий, подлежащих возврату в связи с досрочным прекращением договора страхования;
$ВПР$– сумма возвращенных на отчетную дату премий по всему портфелю.





***Резерв произошедших, но не заявленных убытков (РПНУ)***

### ***Метод цепной лестницы*** *(Chain Ladder method)*

**Этап 1.** Оценка коэффициентов развития.

$$\hat{m}_j = \frac{\sum_{i=1}^{N-j} Y_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{N-j} Y_{ij}}, \quad j = 1,\ldots,N-1$$

$$\hat{M}_N = \frac{\hat{Y}_{1\infty}}{Y_{1N}}; \quad \hat{M}_j = \left(\prod_{k=j}^{N-1} \hat{m}_k\right) \hat{M}_N$$

**Этап 2.** Расчет значений будущих выплат

$$\hat{Y}_{i\infty} = Y_{i,N-i+1} \cdot \hat{M}_{N-i+1}; \quad i = 2,\ldots,N$$

$$\hat{Y}_{i,j+1} = \hat{m}_j \cdot Y_{ij}, \; i = 1,\ldots,N, j = 1,\ldots,N-1$$

**Этап 3.** Оценка резерва убытков к концу каждого $i$–го периода

$$\hat{R}_i = \hat{Y}_{i\infty} - Y_{i,N-i+1}; \quad i = 1,\ldots,N$$

**Этап 4.** Оценка общего *РПНУ*:

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^{N} \hat{R}_i .$$

### ***Метод Борнхьюттера-Фергюсона*** *(Bornhuetter R. L. and Ferguson R. E.)*

**Этап 1.** Расчет *совокупной величины убытков*, произошедших во все периоды наступления убытков, и оплаченных на конец каждого из периодов оплаты (развития) убытков:

$$Y_j = X_{1j} + X_{2j} + \ldots + X_{N-j+1,j} = \sum_{k=1}^{N-j+1} X_{kj}, \; j = \overline{1,N}.$$

$Y_j$ равно общей сумме убытков, которые были оплачены в $j$-м квартале развития убытков независимо от того, в каком периоде они произошли.

**Этап 2.** Определение коэффициентов развития убытков (равен 1, если недостаточно данных в конце)

$$C_{j,j+1} = \begin{cases} \frac{Y_{j+1}}{Y_j - X_{N-j+1,j}}, & если \; Y_j - X_{N-j+1,j} \neq 0; \; j = \overline{1;N} \\ C_{j+1,j+2}, & если \; Y_j - X_{N-j+1,j} = 0, \; C_{N,N+1} = 1 \end{cases}$$

**Этап 3.** Расчет значений *факторов развития убытков* $H_j$.

$$H_j = C_{j,j+1} \cdot C_{j+1,j+2} \cdot \ldots \cdot C_{N,N+1} = \prod_{k=j}^{N} C_{k,k+1}, \; j = \overline{1,N}.$$

**Этап 4.** Определение *факторов запаздывания*

$$L_j = \frac{1}{H_j}, \quad j = 1,2,\ldots,N.$$

С помощью фактора запаздывания можно определить накопленную величину будущих выплат:

$$\hat{Y}_{i,N} = X_{i,N-i+1} \cdot L_{N-i+1}.$$

**Этап 5.** Расчет *коэффициентов оплаченных убытков* – расчетной убыточности по страховым случаям i-го периода

$$U_i = \frac{X_{i,N-i+1} \cdot H_{N-i+1}}{ЗП_i}, \; i = 1,2,\ldots,N,$$

Размер *заработанной премии*:

$$ЗП_i = БП_i + (РНП_{нi} - РНП_{кi}),$$

где $БП_i$ – размер брутто-премии, начисленной в данном $i$-м периоде;
$РНП_{нi}$ и $РНП_{кi}$ – значение РНП на начало и конец $i$-го периода.

**Этап 6.** Определение ожидаемого коэффициента произошедших убытков:

$$\bar{U} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i .$$

Если число периодов $N$<12 (по учетным группам 1, 2, 7 - 10, 16), $N$<20 (по учетным группам 3 - 6, 11 - 15, 17), то

$$\bar{U} = \max\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i; \; 1\right]$$

**Этап 7.** Расчет *ожидаемой* (прогнозной) на конец каждого $i$-го отчетного периода *величины всех (оплаченных и неоплаченных) убытков* $V_i$ по страховым случаям, наступившим в $i$-м периоде на основе ожидаемого коэффициента произошедших убытков:

$$V_i = \bar{U} \cdot ЗП_i, \quad i = 1,2,\ldots,N.$$

**Этап 8.** Для каждого из периодов наступления убытков рассчитывается *суммарная величина произошедших, но неоплаченных на отчетную дату убытков* $R_i$:

$$R_i = (1 - L_{(N-i+1)}) \cdot V_i, \quad i = 1,2,\ldots,N.$$

**Этап 9.** Расчет суммарной величины произошедших к концу $i$-го отчетного периода *размеров произошедших, но незаявленных убытков* $ПНУ_i$ по страховым случаям, наступившим в $i$-м периоде:

$$ПНУ_i = \max\{R_i - ЗНУ_i; 0\}, \quad i = 1,2,\ldots,N,$$

где $ЗНУ_i$ – величина заявленных, но неурегулированных на отчетную дату убытков по страховым случаям, произошедшим в $i$-м периоде.

**Этап 10.** Расчет *ожидаемых* (прогнозных) к концу $N$-го отчетного периода *размеров произошедших, но незаявленных убытков* ПНУ *по всем периодам* наступления страховых случаев:

$$РПНУ = ПНУ_1 + ПНУ_2 + \ldots + ПНУ_N = \sum_{i=1}^{N} ПНУ_i .$$

Для расчета РПНУ, если число периодов меньше требуемого:
N<12 (по учетным группам 1, 2, 7 - 10, 16),
N<20 (по учетным группам 3 - 6, 11 - 15, 17), то

$$РПНУ = \max\left\{РПНУ; 0{,}1 \cdot \sum_{k=N-3}^{N} ЗП_k\right\}$$

| Вид договора страхования | Актуарная современная стоимость единичной страховой ренты ( a - обыкновенной (постнумерандо); ä - приведенной (пренумерандо)) | |
|---|---|---|
| | Через коммутационные функции | Через демографические и финансовые показатели |
| Пожизненная рента | $a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$ | $a_x = \frac{\nu l_{x+1} + \nu^2 l_{x+2} + \cdots + \nu^{\omega-x} l_\omega}{l_x}$ |
| | $\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$ | $\ddot{a}_x = 1 + \frac{\nu l_{x+1} + \cdots + \nu^{\omega-x} l_\omega}{l_x}$ |
| формулы связи рент | $a_x = a_{x:\overline{n}\|} + {}_{n\|}a_x$;  $\ddot{a}_x = 1 + a_x$ | |
| Пожизненная рента, отложенная (отсроченная) на *m* лет | ${}_{m\|}a_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$ | ${}_{m\|}a_x = \frac{l_{x+m+1}\nu^{m+1} + \cdots + \nu^{\omega-x} l_\omega}{l_x}$ |
| | ${}_{m\|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$ | ${}_{m\|}\ddot{a}_x = \frac{l_{x+m}\nu^m + \cdots + \nu^{\omega-x} l_\omega}{l_x}$ |
| формулы связи рент | ${}_{m\|}a_x = \frac{D_{x+m}}{D_x} \cdot a_{x+m}$;  ${}_{m\|}\ddot{a}_x = {}_{m\|}a_x + {}_m p_x \cdot \nu^m$;  ${}_{m\|}\ddot{a}_x = {}_{m-1\|}a_x$ | |
| Срочная страховая рента (на срок *n* лет) | $a_{x:\overline{n}\|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$ | $a_{x:\overline{n}\|} = \frac{\nu l_{x+1} + \cdots + \nu^n l_{x+n}}{l_x}$ |
| | $\ddot{a}_{x:\overline{n}\|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$ | $\ddot{a}_{x:\overline{n}\|} = 1 + \frac{\nu l_{x+1} + \cdots + \nu^{n-1} l_{x+n-1}}{l_x}$ |
| формулы связи рент | $\ddot{a}_{x:\overline{n}\|} = a_{x:\overline{n}\|} + 1 - {}_n p_x \cdot \nu^n$ | |
| Срочная страховая рента (на срок *n* лет), отложенная на *m* лет ${}_{m\|n}\ddot{a}_x$ или ${}_{m\|}a_{x:\overline{n}\|}$ | ${}_{m\|}a_{x:\overline{n}\|} = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$ | ${}_{m\|}a_{x:\overline{n}\|} = \frac{l_{x+m+1}\nu^{m+1} + \cdots + \nu^{m+n} l_{x+m+n}}{l_x}$ |
| | ${}_{m\|}\ddot{a}_{x:\overline{n}\|} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$ | ${}_{m\|}\ddot{a}_{x:\overline{n}\|} = \frac{l_{x+m}\nu^m + \cdots + \nu^{m+n-1} l_{x+m+n-1}}{l_x}$ |
| формулы связи рент | ${}_{m\|}\ddot{a}_{x:\overline{n}\|} = {}_{m\|}\ddot{a}_x - {}_{m+n\|}\ddot{a}_x$ (то же для ${}_{m\|}a_{x:\overline{n}\|}$ )  ${}_{m\|}\ddot{a}_{x:\overline{n}\|} = {}_{m-1\|}a_{x:\overline{n}\|}$ | |

*MironkindY*

| Вид договора страхования | Нетто-премии (страховые выплаты в конце года смерти ) А-единоврем.; Р-ежегодные | | |
|---|---|---|---|
| | Через КФ | Через демографические и финансовые показатели | |
| Пожизненное на случай смерти | $A_x = \frac{M_x}{D_x}$ | Коммутационные функции (КФ): $D_x = v^x \cdot l_x$ | $A_x = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + \dots + v^{\omega-x+1} d_\omega}{l_x}$ |
| | $P_x = \frac{M_x}{N_x}$ | | $P_x = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + \dots + v^{\omega-x+1} d_\omega}{l_x + l_{x+1}v + \dots + l_\omega v^{\omega-x}} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$ |
| Пожизненное с периодом выплат $k$ | ${}_kP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+k}}$ | $N_x = \sum_{i=x}^{w} D_i$ | ${}_kP_x = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + \dots + v^{\omega-x+1} d_\omega}{l_x + l_{x+1}v + \dots + v^{k-1} l_{x+k-1}} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}\|}}$ |
| На дожитие (на $n$ лет) | ${}_nE_x = A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$ | $C_x = v^{x+1} \cdot d_x$ | ${}_nE_x = A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1} = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n \cdot {}_np_x$ |
| | $P_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$ | $M_x = \sum_{i=x}^{w} C_i$ | $P_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1} = \frac{v^n l_{x+n}}{l_x + l_{x+1}v + \dots + l_{x+n-1}v^{n-1}} = \frac{A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}$ |
| Страхование на случай смерти (на $n$ лет) | $A^1_{x:\overline{n}\|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$ | Коэффициент дисконтирования: | $A^1_{x:\overline{n}\|} = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + \dots + v^n d_{x+n-1}}{l_x}$ |
| | $P^1_{x:\overline{n}\|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$ | $v = \frac{1}{1+i}$ | $P^1_{x:\overline{n}\|} = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + \dots + v^n d_{x+n-1}}{l_x + l_{x+1}v + \dots + l_{x+n-1}v^{n-1}} = \frac{A^1_{x:\overline{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}$ |
| Смешанное страхование (на $n$ лет) | $A_{x:\overline{n}\|} = A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1} + A^1_{x:\overline{n}\|}$; $P_{x:\overline{n}\|} = P_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1} + P^1_{x:\overline{n}\|}$ | | |
| | $A_{x:\overline{n}\|} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}$ | $A_{x:\overline{n}\|} = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + \dots + v^{n-1} d_{x+n-2} + v^n (d_{x+n-1} + l_{x+n})}{l_x}$ | |
| | $P_{x:\overline{n}\|} = \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$ | $P_{x:\overline{n}\|} = \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + \dots + v^{n-1} d_{x+n-2} + v^n (d_{x+n-1} + l_{x+n})}{l_x + l_{x+1}v + \dots + l_{x+n-1}v^{n-1}} = \frac{A_{x:\overline{n}\|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\|}}$ | |

*Страховые выплаты сразу после смерти (непрерывные договоры):* $\bar{A} = A \cdot \frac{i}{\ln(1+i)}$; $\bar{P} = P \cdot \frac{i}{\ln(1+i)}$ *MironkindY*

*MironkindY*

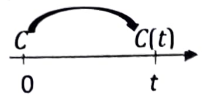
| Вид договора страхования | Нетто-премии (страховые выплаты в момент смерти (непрерывные договоры)) А-единовременные | | |
|---|---|---|---|
| | Через КФ | Через демографические и финансовые показатели | |
| Пожизненное на случай смерти | $\bar{A}_x = \frac{\bar{M}_x}{D_x}$ | Коммутационные функции (КФ): | $\bar{A}_x = \int_0^{\infty(\omega-x)} v^t f_x(t)\,dt = \frac{1}{v^x \cdot s(x)} \int_x^{\infty(\omega)} v^t f(t)\,dt$ |
| На дожитие (на $n$ лет) | $A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$ | $D_x = v^x \cdot l_x$ | $A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1} = v^n \frac{s(x+n)}{s(x)} = v^n \cdot {}_np_x$ |
| На случай смерти (на $n$ лет) | $\bar{A}^1_{x:\overline{n}\|} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x}$ | $\bar{N}_x = \int_x^{\infty} D_t dt$ | $\bar{A}^1_{x:\overline{n}\|} = \int_0^{n} v^t f_x(t)\,dt = \frac{1}{v^x \cdot s(x)} \int_x^{x+n} v^t f(t)\,dt$ |
| Смешанное страхование (на $n$ лет) | $A_{x:\overline{n}\|} = \frac{D_{x+n} + \bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x}$ | $\bar{M}_x = D_x - \delta \bar{N}_x$ | $\bar{A}_{x:\overline{n}\|} = A_{x:\overline{n}\|}^{\ \ 1} + \bar{A}^1_{x:\overline{n}\|}$ |
| Пожизненное, отсроченное на $m$ лет | ${}_{m\|}\bar{A}_x = \frac{\bar{M}_{x+m}}{D_x}$ | $= \int_x^{\infty} D_t \mu_t dt$ | ${}_{m\|}\bar{A}_x = \int_m^{\infty(\omega-x)} v^t f_x(t)\,dt = \frac{1}{v^x \cdot s(x)} \int_{x+m}^{\infty(\omega)} v^t f(t)\,dt$ |
| На случай смерти (на $n$ лет), отсроченное на $m$ лет | ${}_{m\|}\bar{A}^1_{x:\overline{n}\|} = \frac{\bar{M}_{x+m} - \bar{M}_{x+m+n}}{D_x}$ | Коэффициент дисконтирования: | ${}_{m\|}\bar{A}^1_{x:\overline{n}\|} = \int_m^{m+n} v^t f_x(t)\,dt = \frac{1}{v^x \cdot s(x)} \int_{x+m}^{x+m+n} v^t f(t)\,dt$ |
| Пожизненное страхование с непрерывно увеличивающейся страховой суммой | $(\overline{IA})_x = \frac{1}{D_x} \int_x^{\infty} \bar{M}_t dt$ | $v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$ | $(\overline{IA})_x = \int_0^{\infty(\omega-x)} t v^t f_x(t)\,dt = \frac{1}{v^x \cdot s(x)} \int_x^{\infty(\omega)} t v^t f(t)\,dt$ |

MironkindY

| *Вид договора страхования* | ***Страховые резервы на конец t-го года страхования*** *(по проспективному методу)* *Договоры с выплатой в конце года смерти (дискретные)* | |
|---|---|---|
| | **с *единовременной* уплатой взносов (*A*)** | **с *ежегодной* уплатой взносов (*P*)** |
| **Пожизненное на случай смерти** | ${}_tV_x = A_{x+t}$ | ${}_tV_x = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}$ |
| Через КФ | ${}_tV_x = \dfrac{M_{x+t}}{D_{x+t}}$ | ${}_tV_x = \dfrac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \dfrac{M_x}{N_x} \cdot \dfrac{N_{x+t}}{D_{x+t}}$ |
| **На дожитие (на *n* лет)** | ${}_tV_{x:\overline{n}\|}^{\;\;1} = A_{x+t:\overline{n-t}\|}^{\;\;\;\;\;\;1}$ | ${}_tV_{x:\overline{n}\|}^{\;\;1} = A_{x+t:\overline{n-t}\|}^{\;\;\;\;\;\;1} - P_{x:\overline{n}\|}^{\;\;1} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\|}$ |
| Через КФ | ${}_tV_{x:\overline{n}\|}^{\;\;1} = \dfrac{D_{x+n}}{D_{x+t}}$ | ${}_tV_{x:\overline{n}\|}^{\;\;1} = \dfrac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - \dfrac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \dfrac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$ |
| **Страхование на случай смерти (на *n* лет)** | ${}_tV^1_{x:\overline{n}\|} = A^1_{x+t:\overline{n-t}\|}$ | ${}_tV^1_{x:\overline{n}\|} = A^1_{x+t:\overline{n-t}\|} - P^1_{x:\overline{n}\|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\|}$ |
| Через КФ | $V^1_{x:\overline{n}\|} = \dfrac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}}$ | ${}_tV^1_{x:\overline{n}\|} = \dfrac{M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - \dfrac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \dfrac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$ |
| **Смешанное страхование (на *n* лет)** | ${}_tV_{x:\overline{n}\|} = A_{x+t:\overline{n-t}\|}$ | ${}_tV_{x:\overline{n}\|} = A_{x+t:\overline{n-t}\|} - P_{x:\overline{n}\|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\|}$ |
| Через КФ | ${}_tV_{x:\overline{n}\|} = \dfrac{D_{x+n} + M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}}$ | ${}_tV_{x:\overline{n}\|} = \dfrac{D_{x+n} + M_{x+t} - M_{x+n}}{D_{x+t}} - \dfrac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \dfrac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$ |

MironkindY

# Основы финансовой математики

| | |
|---|---|
|  $FV_C = C(t) = \begin{cases} C\cdot(1+i)^t = Cv^{-t} = C\cdot e^{\delta t}; & \delta(t) = const \\ C\cdot e^{\int_0^t \delta(t)dt}; & \delta(t) \neq const \end{cases}$ | |
|  $PV_C = P(t) = \begin{cases} C\cdot(1+i)^{-t} = Cv^{t} = C\cdot e^{-\delta t}; & \delta(t) = const \\ C\cdot e^{-\int_0^t \delta(t)dt}; & \delta(t) \neq const \end{cases}$ | |
| $i_*^{(p)} = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 = e^{\frac{\delta}{p}} - 1 = \frac{i^{(p)}}{p}$ | $v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$ |
| $\delta = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{(1+i)^{\Delta t}-1}{\Delta t} = ln(1+i) = -ln v$ | $d = \frac{i}{1+i} = v\cdot i = 1 - v = 1 - e^{-\delta}$ |
| $i = \left(1+\frac{i^{(p)}}{p}\right)^p - 1 = e^{\delta} - 1 = \frac{1-v}{v} = \frac{d}{1-d}$ | $d^{(p)} = p\cdot d_*^{(p)} = p\left(1-(1-d)^{\frac{1}{p}}\right)$ |
| $a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \dots + v^n = \frac{v - v^{n+1}}{1-v} = \frac{1-v^n}{i}$ | $\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \dots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d} = \frac{1-v^n}{i\cdot v}$ |
| ${}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^{m+1} + \dots + v^{m+n} = v^m\cdot a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}$ | ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m + \dots + v^{m+n-1} = v^m\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}$ |
| $s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}\cdot(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ | $\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}\cdot(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$ |
| $(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + \dots + nv^n$<br>$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i(1-v)} - \frac{nv^n}{i} = \frac{a_{\overline{n}|}}{1-v} - \frac{nv^n}{i}$ | $(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = 1 + 2v + \dots + nv^{n-1}$<br>$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{(1-v)^2} - \frac{nv^n}{1-v} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{1-v}$ |
| ${}_{m|}(Ia)_{\overline{n}|} = v^m\cdot(Ia)_{\overline{n}|}$ | ${}_{m|}(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = v^m\cdot(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ |
| $(Is)_{\overline{n}|} = (1+i)^n\cdot(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{s_{\overline{n}|}}{1-v} - \frac{n}{i} = \frac{s_{\overline{n}|}}{d} - \frac{n}{i}$ | $(I\ddot{s})_{\overline{n}|} = (1+i)^n\cdot(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - n}{1-v} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - n}{d}$ |
| $(Da)_{\overline{n}|} = nv + (n-1)v^2 + \dots + v^n$<br>$(Da)_{\overline{n}|} = \frac{(ni-1)\cdot a_{\overline{n}|} + nv^n}{i}$ | $(D\ddot{a})_{\overline{n}|} = n + (n-1)v + \dots + v^{n-1}$<br>$(D\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{(ni-1)\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|} + nv^{n-1}}{i}$ |
| $(Ds)_{\overline{n}|} = (1+i)^n\cdot(Da)_{\overline{n}|} = \frac{(ni-1)\cdot(1+i)^n + 1}{i^2}$ | $(D\ddot{s})_{\overline{n}|} = (1+i)^n\cdot(D\ddot{a})_{\overline{n}|} = (1+i)\,(Ds)_{\overline{n}|}$ |
| $a_{\overline{n}|}^{(p)} = \frac{1-v^n}{p((1+i)^{1/p} - 1)} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}} = \frac{i}{i^{(p)}}a_{\overline{n}|}.$ | $a_{\overline{n}|}^{(p)} = \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}v^n$ |
| $s_{\overline{n}|}^{(p)} = a_{\overline{n}|}^{(p)}\cdot(1+i)^n$ | $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(p)} = \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)}\cdot(1+i)^n$ |

# Основы демографической статистики

$$l_x - l_{x+1} = d_x; \qquad l_x - l_{x+n} = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots + d_{x+n-1} = {}_n d_x = \sum_{t=x}^{x+n-1} d_t$$

$$l_x = \sum_{t=x}^{\omega} d_t; \qquad q_x = \frac{d_x}{l_x}; \qquad p_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$${}_n p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1} = \frac{l_{x+n}}{l_x};$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{{}_n d_x}{l_x} = \frac{\sum_{t=x}^{x+n-1} d_t}{l_x}$$

$${}_{m|n} q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = {}_m p_x - {}_{m+n} p_x = {}_m p_x \cdot {}_n q_{x+m}$$

$$S(x) = P(T > x) = \int_x^{\infty} f(t)dt = 1 - F(x); \qquad f(x) = F'(x) = -S'(x)$$

$$F(x) = P(T < x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - S(x)$$

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = P(T_x < t) = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)}; \qquad {}_{m|n} q_x = \frac{S(x+m) - S(x+m+n)}{S(x)} = {}_m p_x - {}_{m+n} p_x = {}_m p_x \cdot {}_n q_{x+m}$$

$${}_t \mu_x = \frac{{}_t q_x}{t} = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x) \cdot t}; \qquad \mu_x = \lim_{t \to 0} {}_t \mu_x = -\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}; \qquad S(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_t dt\right)$$

$$S_x(t) = 1 - F_x(t) = P(T_x \ge t) = P(T \ge x + t \mid T \ge x) = {}_t p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_u du\right); \qquad f_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x)};$$

$$F_x(t) = P(T_x < t) = P(T \le x + t \mid T \ge x) = {}_t q_x = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)}; \qquad \mu_x(t) = \frac{f(x+t)}{S(x+t)} = \mu_{x+t}$$

$$e_x^0 = M(T_x) = \int_0^{\infty} P(T_x > t)dt = \int_0^{\infty} S_x(t)dt = \frac{1}{S(x)} \cdot \int_0^{\infty} S(x+t)dt = \frac{1}{S(x)} \cdot \int_x^{\infty} S(t)dt$$

$$e_x = \frac{1}{l_x} \cdot (d_{x+1} + 2 \cdot d_{x+2} + 3 \cdot d_{x+3} + \ldots) = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{k=1}^{\omega - x} k \cdot d_{x+k} \Rightarrow e_x = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{t=x+1}^{\omega} l_t$$

***Life tables interpolation***

$x = [x] + \{x\} = k + u$

1. $s(x)$ – лин. на $[k; k+1]$

$S(k+u) = S(k) \cdot (1 - u \cdot q_k);$

${}_u q_k = u \cdot q_k; \quad {}_u p_k = 1 - u \cdot q_k;$

$$\mu_{k+u} = \frac{q_k}{1 - u \cdot q_k}$$

2. $\mu = const$ на $[k; k+1]$

$S(k+u) = S(k) \cdot p_k^{\,u};$

${}_u p_k = p_k^{\,u}; \quad \mu_k = -\ln p_k$

3. Balducci: $\frac{1}{s(x)}$ – лин. на $[k; k+1]$

$$S(k+u) = \frac{S(k+1)}{p_k + u \cdot q_k};$$

$${}_u p_k = \frac{p_k}{p_k + u \cdot q_k}; \quad \mu_{k+u} = \frac{q_k}{p_k + u \cdot q_k}$$

***last - survivor status***

$T_{\overline{x:y}} = \max(T_x, T_y)$

$$P(T_{\overline{x:y}} < t) \xrightarrow{indep.} = P(T_x < t) \cdot P(T_y < t)$$

***joint - life status***

$T_{x:y} = \min(T_x, T_y)$

$$P(T_{x:y} > t) \xrightarrow{indep.} = P(T_x > t) \cdot P(T_y > t)$$

## *Mortality laws*

**de Moivre** $\quad S(x) = \frac{\omega - x}{\omega}; \qquad 0 \le x \le \omega$

$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}; \qquad f(x) = \frac{1}{\omega}; \qquad F(x) = \frac{x}{\omega}$$

**Gompertz** $\quad \mu_x = B \cdot c^x; \;\; B > 0; \;\; c > 0;$

$${}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu_u du} = e^{\left(-\frac{Bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right)}, \quad S(x) = e^{\left(-\frac{B}{\ln c}(c^x - 1)\right)}$$

**Makeham** $\quad \mu_x = A + B \cdot c^x;$

$$\mu_x = A + H \cdot x + B \cdot c^x$$

**Perk** $\quad \mu_x = \frac{A + B \cdot c^x}{K \cdot c^{-x} + D \cdot c^x + 1}$

**Weibull** $\quad \mu_x = kx^n$

$$S(x) = \exp\left(-\frac{kx^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$F_x(t) \equiv P(T_x < t) = P(T - x < t \mid T > x) =$$

$$= \frac{P(x < T < x+t)}{P(T > x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} =$$

$$= \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = {}_t q_x$$

$$S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} \qquad f_x(t) = \frac{f(x+t)}{1-F(x)}$$

$$\mu_x(t) = \frac{f_x(t)}{\bar{F}_x(t)} = \frac{f(x+t)/S(x)}{S(x+t)/S(x)} = \frac{f(x+t)}{S(x+t)} = \mu_{x+t}$$

$${}_t p_x \equiv P(T_x > t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x} = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1}$$

$$q_x = P(T_x < 1) = \frac{S(x) - S(x+1)}{S(x)}$$

$$p_x \equiv P(T_x > 1) = \frac{S(x+1)}{S(x)}$$

$${}_{t|u} q_x \equiv P(t < T_x < t+u) = {}_{t+u} q_x - {}_t q_x =$$

$$= \frac{S(x+t) - S(x+t+u)}{S(x)}$$

$${}_{t|} q_x = \frac{S(x+t) - S(x+t+1)}{S(x)}$$

$$\mathring{e}_x = ET_x = \int_0^\infty P(T_x > t)\,dt = \frac{1}{S(x)} \int_x^\infty S(u)\,du$$

$$E(T_x)^2 = \frac{2}{S(x)} \int_0^\infty t \cdot S(t+x)\,dt$$

полн. ожид. продолж. жизни

$e_x = E[T_x]$ — ожид. ост. прод. жизни.

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)}$$

$$\boxed{s(x) = e^{-\int_0^x \mu_u \, du}}$$

$$s(x) = \int_x^\infty f(u) \, du$$

$$f(x) = -s'(x) \qquad d_x \approx l_0 f(x)$$