ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2 КУРС

① Частотная интерпретация вероятностей. Статистическое опр-е вероятности.

Событие – всякий факт, кот. может произойти / не произойти при соблюдении комплекса условий (<u>испытании</u>)

- **достоверное** – соб., которое обязательно происходит при данном испытании
- **случайное** – соб., которое может произойти и не произойти, при дан. исп.
- **невозможное** – соб., кот. никогда не происх., ... при дан. исп.

$$P(H) = \begin{cases} 1, & H - \text{дост.} \\ (0;1), & H - \text{случ.} \\ 0, & H - \text{невозм.} \end{cases}$$

Отн. частота $w(A) = \frac{m}{n}$ появления A в испыт., где n – число провед. исп., m – число появлений A (**частота** появл. A)

Зам.: даже при $n_1 = n_2$ $w(A)$ м. б. разной, но для серий с дост. **большим** числом исп. $w(A_1) \approx w(A_2) \approx ... w(A_n)$ => св-во **устойчивости** при дост. большом числе исп.

Стат. опр. вероятности $P(A) \approx w(A)$, $n \geq N$
– число, около кот. **группир-ся** $w(A_k)$ при дост. бол. n_k

▷ Теор. Бернулли о законе больших чисел

Недостатки: – обязательно проведение исп.
– неоднозначность
– приближенность

② Вероятностные пр-ва. Случайные события.

Пусть исп. проводится неогр. число раз, заканчивается появлением одного исхода

Элемент. событие ω_i – кажд. исход

Пр-во элемент. исходов Ω – совокупность ω_i

- дискретное Ω – число ω_i не более, чем счетно

Сложное событие – всякое подмн-во Ω, кот. наст., если наст. хотя бы один исход, со соб.

$P(\Omega) = 1 \quad P(\varnothing) = 0$

- несовместные события ($A \cap B = \varnothing$) – появление одного **искл.** появл. другого
- совместные события – появление одного **не искл.** появл. другого

Полная группа событий – в рез. исп. наступает **хотя бы одно** из них

- (с попарно несовместными) – Обязательно наст. **только одно** из событий

Дополнительное (противоположное) событие $\bar{A}$ – **ненаступление** события A

События в Ω являются подмн-вами:

1) Объединение (сумма) событий ($A \cup B$; $A + B$) – наступление хотя бы одного из этих событий

2) Пересечение (произвед.) событий ($A \cap B$; $A \cdot B$) – наступление и A и B

3) Разность событий $A \setminus B$ – событие A наступает, B не наступает

③ Вероятность в дискретном пр-ве элементарных событий. Теоремы сложения вероятностей.

Вероятность p в дискр. пр-ве элементарных исходов:
$\forall\, \omega_i \in \Omega$: $\omega_i \longrightarrow p_i \geq 0$: $\sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) = 1$, пе

Вероятность соб. A $\quad p(A) = \sum\limits_{i:\omega_i \in A} p(\omega_i)$

$$P(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ - невозможное} \\ (0;1) & \\ 1, & A \text{ - достоверное } / \ A = \Omega \end{cases}$$

Теор $\quad p(A+B) = P(A) + P(B)$, где A, B - несовместные

▶ Ω - конечное

$$p(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\omega_i) \qquad p(B) = \sum_{j:\omega_j \in B} P(\omega_j)$$

$$p(A+B) = \sum_{k:\omega_k \in (A+B)} P(\omega_k) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\omega_i) + \sum_{j:\omega_j \in B} P(\omega_j) = P(A) + P(B),$$

т.к. A, B - несовм. и не сущ. исх., принадл. $A \cap B$

След. $P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$, где $A_i A_j = \varnothing$, $i \neq j$

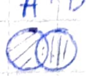
След. $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$; $\quad P(A) = 1 - P(\bar{A})$

▶ $A + \bar{A} = \Omega \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1$

След. Сумма вер-тей соб., сост. полн. группу равна 1

Теор. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где A, B - совместные

▶ $A + B = \underbrace{A \cdot \bar{B} + AB + \bar{A} \cdot B}_{\text{несовм.}} \Rightarrow P(A+B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A} \cdot B)$



$$\left.\begin{aligned} A &= A\bar{B} + AB \\ B &= \bar{A}B + AB \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} P(A) &= P(A\bar{B}) + P(AB) \\ P(B) &= P(\bar{A}B) + P(AB) \end{aligned}$$

$$P(A+B) = P(A) \cancel{- P(AB)} \cancel{+ P(AB)} + P(B) - P(AB)$$

След. $P(A+B) \leq P(A) + P(B)$, A, B - любые

4 Классическая вероятностная модель

– частный случай дискр. пр-ва эл. событий

* 1. Ω – конечно
  2. все элементарные соб. – равновозможны (т.е. нет осн. считать, что одно более вер., чем др.)
  3. все элементарные события сост. полную гр. и попарно несо

Классическое опр. $P(A)$

$$\sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) = 1$$

ω_i – равновозм. $\Rightarrow p(\omega_i) = \frac{1}{n}$

$$P(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} p(\omega_i) = m \cdot p(\omega_i) = \frac{m}{n}$$

– отношение числа эл. соб., благоприятств. соб. A к общему числу эл. исходов, при усл. *

⑤ Условная вероятность. Теорема умножения.

Усл. вероятность $P_B(A)$; $P(A|B)$ - вероятность соб. A при условии, что B - произошло

$$P_B(A) = \frac{l}{k} = \frac{l}{n} : \frac{k}{n} = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

где n - общее число всех эл. исх

m - благопр. A

k - благопр. B

l - благопр. AB

аналогично $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, $P(A) > 0$

Теор. $P(AB) = P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B)$, где $P(A), P(B) \geq 0$

След. Вероятность произвед. нескол. числа событий равна произвед. вероятностей этих соб., причем предполаг., что все предыд. соб. произошли

$$P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

▶ $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1 \cdot A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2 A_3) =$

$= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3)$

в общ. случ. по инд.

Св-ва условной в-ти:

1) $0 \leq P_B(A) \leq 1$
2) $P_A(A) = 1$
3) $P_B(A) = 1 \iff B \Rightarrow A$
4) $P_B(A) = 0 \iff AB = \varnothing$ - несовместные
5) $P_B(A) + P_B(\bar{A}) = 1$
6) $P_B(A_1 + A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$, $A_1 A_2 = \varnothing$

⑥ Независимые события. Теорема умножения

А независимо от В — появление В не изм. в-ти появления А

Зам. если А незав. от В, то В незав. от А

▶ $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$

т.к. А незав. от В, то $P_B(A) = P(A) \Rightarrow P_A(B) = P(B)$

Независимые соб. — появление одного не меняет в-ти появления другого

Теор. $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, где A, B — независимы

След. A незав. от $B \Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$
B незав. от $A \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$

След. Если A, B — незав., то $A, \overline{B}$ ($\overline{A}, B$; $\overline{A}, \overline{B}$) — незав.

▶ $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$
$\Downarrow$
$P(B) + P_A(\overline{B}) = 1 \Rightarrow P_A(\overline{B}) = 1 - P(B) = P(\overline{B}) \Rightarrow A, \overline{B}$ — нез.

Попарно незав. события $A_1, \dots, A_n$ — A_i, A_j — незав. $\forall i, j, i \neq j$

Независимые (в совокупности) события:
- ~~любые два~~ независимы попарно
- независимо каждое из них и произведение остальных

След. события незав. $\Rightarrow$ события попарно нез.

Теор. $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$, где $A_1, \ldots, A_n$ — незав. в совок.

(7) Вероятность наступления хотя бы одного события

Теор. $P(A_1+\ldots+A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)\cdot\ldots\cdot P(\bar{A}_n)$, где $A_1,\ldots,A_n$ – нез. в сов.

▶ $A = A_1+\ldots+A_n \Rightarrow \bar{A} = \bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\ldots\cdot\bar{A}_n$ – ненаст. всех

$P(A)+P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = P(A_1+\ldots+A_n) = 1 - P(\bar{A}_1\cdot\ldots\cdot\bar{A}_n)$

$= 1 - P(\bar{A}_1)\cdot\ldots\cdot P(\bar{A}_n)$,

т.к. $A_1,\ldots,A_n$ – нез. в сов.

След. $P(A_1+\ldots+A_n) = 1 - \left(P(\bar{A}_1)\right)^n$,

если $A_1,\ldots,A_n$ – нез. в сов. и им. один. вер.

⑧ Формула полной вероятности

A происх. вместе с одним из $H_1, \dots, H_n$, кот. составляют полную группу и попарно нез.

Тогда $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$

▶ A происх. только с одним из $H_1, \dots, H_n$ $\Rightarrow$

$$A = \underbrace{\underbrace{H_1 \cdot A}_{\text{наст. и } H_1, \text{ и } A} + H_2 A + \dots + H_n \cdot A}_{\text{несовм. соб.}}$$

тогда

$$P(A) = P(H_1 A) + \dots + P(H_n A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$$

⑨ Вероятности гипотез. Формулы Байеса

A происх. вместе с одним из $H_1, \dots, H_n$, пот. составляют полную группу и попарно нез.

$H_1, \dots, H_n$ **гипотезы** – неизвестно с каким H_i происходит A

Пусть в рез. исп. A наступило

$$P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = P(A) \cdot P_A(H_i) \quad (= P(AH_i))$$

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad i = \overline{1,n}$$

Зам. Формулы Байеса исп. для пересчета в-ти гипотез, при усл., что A – наст.

10 Геометрические вероятности

Пр-во элемент. исходов не явл. дискретным и предст. собой некоторую область (на прямой, п-ти, пр-ве => более, чем счетно)

Пусть $A \subseteq \Omega \in \mathbb{R}^d$, на Ω наугад ставится точка

тогда в-ть попадания в обл. A

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$, где $\mu(A)$ – длина, площадь, объем...

Зам. Вероятность попадания в конкретную точ. $P(A) = 0$, но A не явл. невозможным соб.

(11) Вероятностные пр-во общего вида. Аксиоматическое построение теории вероятности

Пр-во более чем счетно => подход Колмогорова
(событием явл. только подмн-во удовл. треб.)

Ω - пр-во элемент. событий (более, чем счетное)

Алгебра - F совокупность подмн-в пр-ва Ω:
1) $\Omega \in F$
2) $\forall A, B \in F \Rightarrow A+B,\ AB,\ \bar{A},\ \bar{B} \in F$

__Зам.__ $\varnothing \in F$; {объед., пересеч. и доп. люб. кон. числа мн. $\in F$} $\in F$

σ-алгебра - F: {объед. любого счетн. числа мн. $\in F$} $\in F$
$\Downarrow$ {пересеч...} $\in F$

Событие - элемент σ-алгебры

$P(A)$, $A \in F$ (σ-алгебре) - числовая ф-я $P: \Omega \to \mathbb{R}$:
1) $P(A) \geq 0$ (неотрицат.)
2) $P(\Omega) = 1$ (нормированность)
3) $P(\sum_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$, $A_i A_j = \varnothing$, $i \neq j$ (конечн. аддит.)
4) $n \to \infty$ (счетн. аддит.)

__Зам.__ в дискр. пр-ве $P(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} p(\omega_i)$
явл. конечно аддит.

__След.__
1) $P(\varnothing) = 0$
2) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
3) $A \subseteq B$ (влечет за собой), то $P(A) \leq P(B)$
4) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

__Зам.__ (Ω, F, P) - вероятн. пр-во,
где Ω - пр-во исходов, F - σ-алгебра,
P - вер-ть (числ. ф-я на F)

(12) Последовательность независимых исп-й. Формула Бернулли

П.-ть незав. исп. (повторные нз. исп.) – исход каждого из n экспериментов не зав. от предыд.

Схема Бернулли (нез. исп. Берн.):

1) исп. независимы
2) исп. заканчивается одним из двух исходов
3) в-ть наступление A одинакова в кажд. исп.

Формула Бернулли:

Теор.: Пусть в n нез. исп. соб. A появл. с один. в-ю
Тогда $P_n(m)$ – в-ть, что в n исп.
соб. A появится m раз: $P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$
где $q = 1 - p$ (ненаст. A)

▶ Пусть A появилось в первых m исп., а в ост. $(n-m)$ – нет

$P(A_1 A_2 \dots A_m \overline{A_{m+1}} \dots \overline{A_n}) = p^m \cdot q^{n-m}$ по т. умн. в-тей нз. соб.

Число комбинаций: C_n^m => по т. слож. в. несовм. соб. ◻

<u>След</u> $(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1^n = 1$

<u>След</u> по т. слож. вер. несовм. соб.

а) $P(0 \le k \le m) = \sum_{k=0}^{m} P_n(k)$ A появится не более m раз

б) $P(m \le k \le n) = \sum_{k=m}^{n} P_n(k)$ –//– не менее m раз

в) $P(m_1 \le k \le m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_n(k)$ –//– от m_1 до m_2 раз

(13) Локальная, интегральная теорема Муавра-Лапласа

Теор. при n нез. исп. A наст. с одинак. в-ю $p \in (0;1)$ тогда при $n \to \infty$

$$\sqrt{npq}\; P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} \underset{x\in[a;b]}{\rightrightarrows}, \text{ где } x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

▶ $m = np + x\sqrt{npq}$, $n\to\infty$ $\quad n-m = nq - x\sqrt{npq}$, $n\to\infty$

$\Downarrow$ $m, (n-m) \to \infty$

по ф-ле Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\theta_n}$, $|\theta_n| < 1/12n$

$$P_n(m) = \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n}\cdot e^{\theta_n}}{\sqrt{2\pi m}\cdot m^m\, e^{-m}\cdot e^{\theta_m}\cdot \sqrt{2\pi(n-m)}\cdot (n-m)^{(n-m)}\cdot e^{-(n-m)}\cdot e^{\theta_{n-m}}}\, p^m q^{n-m} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}\cdot \underbrace{\left(\frac{np}{m}\right)^m\cdot\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}}_{A}\cdot e^{\theta_n-\theta_m-\theta_{n-m}}$$

(3) $|\theta| = |\theta_n - \theta_m - \theta_{n-m}| \le \left|\frac{1}{12n} + \frac{1}{12m} + \frac{1}{12(n-m)}\right| = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{np+x\sqrt{npq}} + \frac{1}{nq - x\sqrt{npq}}\right)$

$\le \frac{1}{12n}\left(1 + \frac{1}{p+a\sqrt{\frac{pq}{n}}} + \frac{1}{p-b\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)$, $|\theta| \to 0$, $e^{\theta}\to 1$, $n\to\infty$

(2) $A = \left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} \Rightarrow \ln A = -m \ln\frac{m}{np} - (n-m)\ln\frac{n-m}{nq}$

$= -m\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (n-m)\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)$

$n\to\infty$, $x\in[a;b]$ $\Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$= -(np + x\sqrt{npq})\cdot\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{q}{np} + \ldots\right) - (nq - x\sqrt{npq})\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{p}{nq} + \ldots\right)$

$= -\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow A \underset{x\in[a;b]}{\rightrightarrows} e^{-x^2}$, $n\to\infty$

(1) $\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} = \sqrt{\frac{n}{(np+x\sqrt{npq})(nq - x\sqrt{npq})}} = \sqrt{\frac{1}{n\left(p+x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\left(q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)}} \le \sqrt{\frac{1}{n\left(p+a\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\left(q-b\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)}}$

$\le \frac{1}{\sqrt{npq}}$

$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot e^{-x^2}\cdot 1 = \varphi(x)\,\frac{1}{\sqrt{npq}}$

Теор. при n нез. исп. A наст. m раз (A наст. с вер. $p\in(0;1)$) тогда при $n\to\infty$

$$P_n\left(a \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \to \int_a^b \varphi(x)\,dx, \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\le \frac{C}{\sqrt{n}}\right)$$

▶ $P_n\left(a\le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = P_n(a,b) = \sum\limits_{a\le x_n\le b} P_n(x_n) = \sum\limits_{a\le x_n\le b} \frac{1}{\sqrt{npq}}(\varphi(x_n) + \alpha_n)$

$= \sum \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_n) + \sum \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_n)\cdot\alpha_n = \Sigma_1 + \Sigma_2$

$$\frac{1}{\sqrt{npq}} = x_{m+1} - x_m = \frac{m+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

$$\Sigma_1 = \sum \varphi(x_m)\cdot \Delta x_m, \text{ где } \Delta x_m \to 0,\ n\to\infty$$

$$\Sigma_1 \to \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$|\Sigma_2| = \left|\sum \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m)\,\alpha_n\right| \le \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot 1\ [(b-a)\cdot\sqrt{npq}+1] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\varphi_{max} = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}};$$

$a \le x_m \le b \to [(b-a)\sqrt{npq}]$ — длина промежутка

$$P_n(a,b) \to \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

Зам. Верно при $a = -\infty$, $b = \infty$

Зам. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — ф-я Лапласа

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Зам. при $x \ge 5$ $\Phi(x) = 0{,}5$

$x < 0$ $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

(14) Формула Пуассона

Теор. n независим. исп., дост. велико
p достаточно мала: $np = \lambda$ — сохр. пост. знач.

$$P_n(m) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$$

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(m-1))}{m!} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} 1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}\right] =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$$

Зам. Ф-ла Пуассона (закон распр. массовых и редких соб.)
исп. при $n \geq 12$, $p < 0.1$ $\Rightarrow$ $\lambda \leq 10$

15 В-ть отклонения отн. частоты появления события от пост. в-ти в нез. исп-ях

Теор. n незав. исп., в кажд. A появл. m раз с в-ю p; m/n - отн. частота

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

▶ $-\varepsilon\le\frac{m-np}{n}\le\varepsilon$

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon\le\frac{m-np}{n}\le\varepsilon\right)=$$

$$=P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

$$\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-x^2/2}\,dx=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Зам. при дост. больших n, $\forall\varepsilon>0$: $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 1$

Зам. известно p, q, ε, β

1) опр. наименьш. n : $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\ge\beta \Rightarrow \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\ge\frac{\beta}{2}$

2) при n, p опр. границы изм. $p-\varepsilon\le\frac{m}{n}\le p+\varepsilon$

16 Наивероятнейшее число наст. события в нез. исп.

Наив. число наст. соб. A в n нез исп. — то число, котор. соотв. наиб. в-ть

__Теор.__ m_0 — наивер. число

$$np - q \le m_0 \le np + p$$

▶ $$P_n(m+1) = \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}\, p^{m+1} q^{n-m-1}$$

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{p}{q} > 1$$

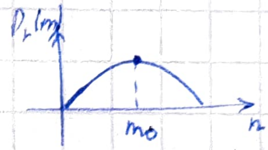
$np - mp > mq + q$

$np - q > m$

$P_n(m+1) > P_n(m)$, $m < np - q$

$P_n(m+1) = P_n(m)$, $m = np - q$

$P_n(m+1) < P_n(m)$ $m > np - q$



$$\exists\, m_0 : \quad \frac{P_n(m_0)}{P_n(m_0-1)} \ge 1 \qquad \frac{P_n(m_0+1)}{P_n(m_0)} \le 1$$

$$\begin{cases} P_n(m_0) \ge P_n(m_0-1) \\ P_n(m_0+1) \ge P_n(m_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_0 - 1 \le np - q \\ m_0 \ge np - q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_0 \le np + 1 \\ m_0 \ge np - q \end{cases} \;\square$$

__Зам.__ 1) $np - q \notin \mathbb{Z}$, то m_0 — единств.

2) $np - q \in \mathbb{Z}$, то $m_0^{I} = np - q$

$m_0^{II} = np + p$

3) $np \in \mathbb{Z}$, то $m_0 = np$

(17) Простейший поток событий

Поток событий - посл-ть событий, происход. в случ. момент времени

- **Стационарный поток событий** - в-ть, что за время t появится m событий этого потока зависит только от m и t. (пром. времени непересек.)

- Поток с св-вом **отсутствия последствия** - в-ть появления за время t m событий этого потока не зав. от того, сколько соб. наст. в предш. (непересек.) промежутках времени

- **Одинарный поток событий** - за бесконечно малый промеж. времени вер-ть появления более, чем одного соб. пркт. мала

- **Простейший (Пуассоновский)** пот. соб. - стационарный, одинарный пот. с отсутств. посл-

- **Интенсивность** потока - число соб. в ед. времени

Зам. интенс. стац. потока - константа

Зам. математ. модель прост. потока -

$$P_t(m) \approx \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!},$$ где λ - интенсивность

(18) Цепи Маркова. Переходные вероятности

Цепь Маркова — последовательность исп., в каждом из кот. наст. одно из соб. $A_1, \dots, A_k$, сост. полную группу. Причем $p_{ij}(s)$ того, что в исп. с номером S наступит A_j при усл., что в $S-1$ исп. наступило A_i зависит только от A_i и не зав. от предшеств. $S-1$ исп.

— пусть сист. наход. в одном из сост. $A_1, \dots, A_k$, образующих полную группу, причем состояние системы меняется. Тогда это п-ть исп., в кажд. из кот. сист. нах. в одном из сост. $A_1, \dots, A_k$, причем $p_{ij}(s)$ — в-ть того, что в исп. S сист. окажется в сост. A_j, если в $S-1$ она была в сост. A_i

- **Цепь Маркова с дискр. временем** — состояния меняются в фикс. моменты времени
- **Цепь Маркова с непрер. временем** — состояния сист. меняются в любые мом. времени
- **Однородная цепь Маркова** — вероятность $p_{ij}(S)$ не зависит от S

Пример: $M \in AB$, M в опр. время
с вер. p перемещ. вправо на 1
с вер. $1-p$ — влево на 1

Это случ. блуждение т. M вдоль OX — цепь М. с дискр. вр.

М-ца перехода системы — м-ца, содерж. все перех. в-ти p_{ij}

Зам. м-ца перехода одн. цепи Маркова с конечным числом сост. (k)

$$\begin{pmatrix} p_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & p_{kk} \end{pmatrix}$$ — квадратная порядка k

1) $\forall p_{ij} \geq 0$ 2) сумма в кажд. стр. равн. 1 (т.к. сост. полн. гр.)

(19) Равенство Маркова

Задана однородная цепь Маркова

$P(A) = p_{ij}(n)$ – вероятность, что сист. за n шагов перейдет из i в j

$P(H_i) = p_{ir}(m)$ – промежуточное сост. : $1 \leq r \leq k$

$P_{H_r}(A)$ – вер., что из i в j за n, при усл., что из i в r за m

$P_{H_r}(A) = P_{rj}(n-m)$

по ф-ле полн. в-ти : $P(A) = \sum_{r=1}^{k} p(H_r) \cdot P_{H_r}(A)$

Равенство Маркова : $p_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}(m) \cdot p_{rj}(n-m)$

(20) Случайная величина в дискр. вер. пр-ве

Пусть пр-во исходов эксп. конечно или счетно

Случайная величина в дискр пр-ве эл. исх. — всякая действ. ф-я $\xi = \xi(\omega)$, опр. на пр-ве эл. исходов. Причем $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(\xi(\omega) < x)$

Зам. пр-во дискр $\Rightarrow$ мн-во значений случ. вел. не более чем счетно

Дискр. случ. величина $\xi = \xi(\omega)$ — принимает отдельные изолированные значения, число кон. или счёт.

Закон распр. случ. величины — всякое соотв. между возм. знач. случ. величины и их вероятн.

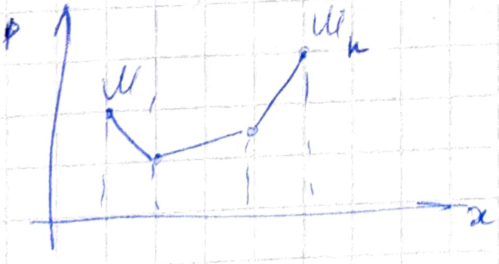
Ряд распределения случ. вел. — таблица, в кот. перечислены её возможные значения и указ. соотв. им вероятности

ξ	x_1	...	x_n	— возможные значения
p	p_1	...	p_n	— соотв. в-ти

$\sum_{k=1}^{n/\infty} p_k = 1$

Аналитическое задание зак. распр. дискр. случ. величины — ф-ла уст. связь между знач. и в-тями

Зам. чтобы задать графически ξ расп. в порядке возрастания и ук. соотв. в-ти



полученная ломаная $M_1(x_1, p_1), \dots$ — **многоугольник распределения**

(21) Ф-я распределения в-тей случ. величины

Ф-я распределения случ. вел. — ф-я $F_\xi(x)$, определенная $\forall x \in \mathbb{R}$, представляющ. собой в-ть того, что случ. величина ξ примет значение, лежащее на числовой оси левее x

$$F_\xi(x) = P(\xi < x)$$

Св-ва (интегральной) ф-и распределения

1) $0 \le F_\xi(x) \le 1$ огр. на $\mathbb{R}$
2) $F_\xi(x)$ — неубывающая $\forall x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \ge f(x_1)$

▶ $x_2 > x_1$

тогда $\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} \cup \{x_1 \le \xi < x_2\}$

по т. слож. $F_\xi(x_2) = F_\xi(x_1) + p\underbrace{\{x_1 \le \xi < x_2\}}_{\geq 0}$

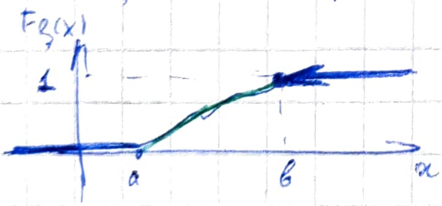
$F_\xi(x_2) \ge F_\xi(x_1)$

3) $p(x_1 \le \xi < x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$
4) $\xi \in [a; b]$

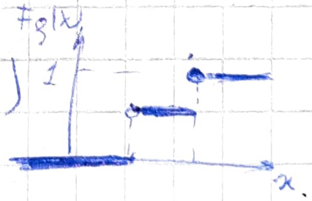
$F_\xi(x) = 0$ если $x \le a$ $\left(\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0\right)$

$F_\xi(x) = 1$ если $x > b$ $\left(\lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1\right)$

5) $F_\xi(x)$ — непрерывна слева



($x \ne b$, а $x \to b$!) если $F_\xi(x) \in C$



(22) Ф-я плотности распределения в-тей случ. вел.

Непрерывная случ. величина – если $\exists\ f_\xi(x) \geq 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$ ф-я распр. этой случ. велич. $F_\xi(x)$ представляется в виде $\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$

где $f_\xi(x)$ – плотность распределения (дифференц.) в-ти непр. случ. величины

Зам. Если $F_\xi(x) \in D$, то $F'_\xi(x) = f_\xi(x)$

Св-ва
1) $f_\xi(x) \geq 0$, т.к. $F_\xi(x)$ – неубывающ. $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$, т.к. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$

3) $P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_{-\infty}^{b} f_\xi(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f_\xi(t)\,dt$

$= \int_{a}^{b} f_\xi(t)\,dt$

4) $P(\xi = a) = 0$

$(\xi = a) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (a \leq \xi < a + \frac{1}{n})$

$P(\xi = a) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{a}^{a+\frac{1}{n}} f_\xi(t)\,dt = 0$

5) $P(a \leq \xi < b) = P(a < \xi < b) = P(a < \xi \leq b) = P(a \leq \xi \leq b)$

Зам. Площадь под граф. $f_\xi(x)$ от $-\infty$ до x_0 – $F_\xi(x_0)$

$P(\xi < x_0) = F_\xi(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_\xi(t)\,dt$

23 Случайный вектор в дискр. пр-ве

Пусть на пр-ве исходов заданы
$\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$,

Случайный вектор (n-мерная случ. величина) – упорядоченный набор этих случ. величин
$\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$

Закон распределения случайного вектора $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ – совокупность в-тей $p_{ij\dots\mu} = (\xi_1 = x_1^i, \xi_2 = x_2^j, \dots, \xi_n = x_n^\mu)$
причем $\sum_{i,j,\dots,\mu} p_{ij\dots\mu} = 1$

Зам для n=2 зад-ся таблицей

$\xi_1 \backslash \xi_2$	y_1	...	y_m
x_1	p_{11}	...	
...	...		
x_n			p_{nm}

Закон распр. составляющих $P(\xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)$

▶ $(\xi_1 = x_i) = (\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_1) + (\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_2) + \dots (\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_m)$
по т. слож. несовм. событий
$P(\xi_1 = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$

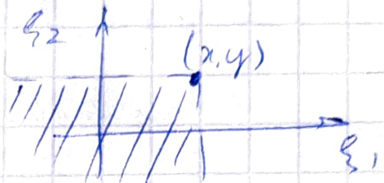
Независимы ξ_1 и ξ_2 – если их совм. зак. распр-ия равен произв. зак. распр. составляющих

$$P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = P(\xi_1 = x_i) \cdot P(\xi_2 = y_j) \qquad i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,m}$$

(24) Совместная ф-я распр. случайного вектора

Совм. ф-я распр. случ. вел. ξ_1 и ξ_2 — ф-я двух переменных $F(x,y)$, опр. для $\forall x,y \in \mathbb{R}$, предст. собой в-ть совм. наступления соб. $\xi_1 < x, \xi_2 < y$

$$F(x,y) = P(\xi_1 < x, \xi_2 < y)$$



Аналог. опр-ся для n-мерного вектора

Св-ва: 1) $0 \le F(x,y) \le 1$

2) $F(x,y)$ неуб. по каждому из аргументов

$\Rightarrow x_2 > x_1$ $F(x_2, y) = P(\xi_1 < x_2, \xi_2 < y) = \underbrace{P(x_1 \le \xi_1 < x_2, \xi_2 < y)}_{\ge 0} + F(x_1,y)$

$F(x_1, y) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < y)$

$\Downarrow$

$F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$

3) $F(-\infty, y) = P(\xi_1 < -\infty, \xi_2 < y) = 0 = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty)$

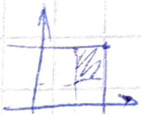
$F(+\infty, +\infty) = P(\xi_1 < \infty, \xi_2 < \infty) = 1$

4) $F(x,y)$ — непр. слева по кажд. аргументу

5) $F(x, \infty) = P(\xi_1 < x, \xi_2 < \infty) = P(\xi_1 < x) = F_{\xi_1}(x)$

$F(\infty, y) = F_{\xi_2}(y)$

6) $P(x_1 \le \xi_2 < x_2, \xi_2 < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y)$ — прирост по x



$P(x_1 \le \xi_2 < x_2, y_1 \le \xi_2 < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$

(25) совместная плотность распр. случ. вектора

Непрерывный случ. вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ — если $\exists$ неотриц. $f(x,y)$: $\forall x, y$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2$$

где $f(x,y)$ — совместная плотность распр. двумерн. случ. величины ξ_1, ξ_2 (случ. вектора)

Св-ва: 1) $f(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

2) $P((\xi_1, \xi_2) \in \Pi) = \iint\limits_{\Pi} f(x,y)\, dx dy$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx dy = 1$

4) $f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy$

$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx$

▶ $f_{\xi_1}(x) = F'_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t_2)\, dt_2 \left(= F'_{\xi_1}(x, \infty)\right)$

5) если $F(x,y) \in D^2$

$[F(x,y)'_x]'_y = f(x,y)$

6) если ξ_1, ξ_2 — независимы, то

1) $F(x,y) = F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(y)$ (верно и обратное)

2) $f(x,y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y)$

1 ▶ ξ_1, ξ_2 — нез. => нез. $\xi_1 < x$, $\xi_2 < y$

$F(x,y) = P(\xi_1 < x, \xi_2 < y) = P(\xi_1 < x) \cdot P(\xi_2 < y)$
$= F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(y)$

2 ▶ $F''_{xy} = F'_{\xi_1}(x) \cdot F'_{\xi_2}(y)$

$f(x,y) = f_{\xi_1}(x) \cdot f_{\xi_2}(y)$

26 Ф-я одного случайного аргумента

Случайная величина η функция от ξ – если $\forall \xi$ ставится соотв. $\eta = \varphi(\xi)$

Зам. помним закон распр по ξ

1) в дискр случае $p(y_i) = \sum\limits_{j:\, y_i = \varphi(x_j)} p(x_j)$

2) $y = \varphi(x)$ – монот. возр. на D

$\Rightarrow \exists\, x = \psi(y) \in D$

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(\xi < \psi(y)) = F_\xi(\psi(y))$$

$$\Rightarrow f_\eta(y) = f_\xi(\psi(y)) \cdot \psi'_y$$

3) $y = \varphi(x)$ – монот. уб. на D

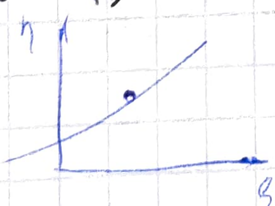
$\Rightarrow \exists\, x = \psi(y)$

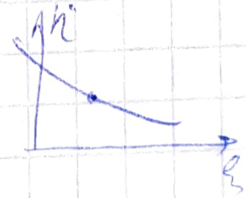
$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(\xi > \psi(y)) = 1 - P(\xi \le \psi(y))$$

$$= 1 - P(\xi < \psi(y)) = 1 - F_\xi(\psi(y))$$

$$\Rightarrow f_\eta(y) = -f_\xi(\psi(y)) \cdot \psi'_y$$

$$f_\eta(y) = f_\xi(\psi(y)) \cdot |\psi'_y|$$, где ψ – строго монот. и дифф.

2) 

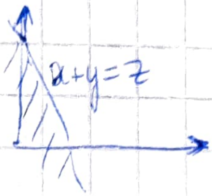
3) 

27 Композиция законов распределения

Ф-я двух случ. аргументов (част. случай) $\eta = \xi_1 + \xi_2$

$$F_\eta(z) = p(\xi_1 + \xi_2 < z) = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_R dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{z-x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\right)dy$$



$$F_\eta'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx = f_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,dy$$

Композиция законов распр. – зак. распр. суммы $2^{х}$ нез. величин

$$f(x,y) = f_{\xi_1}(x)\cdot f_{\xi_2}(y) \Rightarrow$$

$$f_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx \;; \quad f_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,dy$$

$$\left.\begin{aligned} f_{\xi_1+\xi_2}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x)\cdot f_{\xi_2}(z-x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(z-y)\cdot f_{\xi_2}(y)\,dy \end{aligned}\right\}$$ – ф-лы свертки для плотности распр.

Зам. если ξ_1, ξ_2 знач. только для (знач.) ≥ 0, то пределами инт. $f_\eta(z)$ будут 0 и z

Ф-ла свертки дискр. случ. величин ξ_1, ξ_2 (незав.)

$$p(\xi_1 + \xi_2 = z) = \sum_i p(\xi_1 = x_i)\cdot p(\xi_2 = z - x_i)$$

$\triangleright$ $p(\xi_1 = x_i),\ p(\xi_2 = y_i)$

$A_z = \{\xi_1 + \xi_2 = z\} = \{\xi_1 = x_i,\ \xi_2 = z - x_i\}$

$p(A_z) = p(\xi_1 = x_i)\cdot p(\xi_2 = z - x_i)$

$\quad \| \quad \sum_i p(\xi_1 = x_i)$

(28) Мат. ожидание дискр. случ. величины ξ

– сумма произведений её возм. знач. на соотв. вер.

ξ	x_1	...	x_n
p	p_1		p_n

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$ (если $n \to +\infty$, то $M(\xi)$ – ряд абсол. сход.) (иначе не $\exists$)

Мат. ожидание непр. случ. велич. ξ с плотностью распр. $f_\xi(x)$:

$$M_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx$$ – при усл., что нес. инт. сход.

Мат. ожидание случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$

$$M(\xi) = (M(\xi_1), M(\xi_2))$$

Опр. $\eta = \varphi(\xi)$, то $M(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i$ (д. с. в), $n \in N$

$$M(\eta) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_\xi(x)\,dx$$ (н. с. в)

при усл., что сход. абс.

Вероятностный смысл: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i \left(\dfrac{n_i}{n}\right)$, где $\dfrac{n_i}{n} = w_i$ отн. част. появл. x_i

при $n \to \infty$, $w_i \to p_i$, $\bar{x} \to M(\xi)$

<u>Св-ва</u>

1) $M(\xi)$ – неслучайная величина
2) $M(C) = C$

▶ $M(\xi) = C \cdot 1 = C$

ξ	c
p	1

3) ξ_1, ξ_2 : $\exists M(\xi_1), M(\xi_2) \Rightarrow \exists M(\xi_1 + \xi_2) = M(\xi_1) + M(\xi_2)$

▶ ξ_i – н. с. в.

$f(x,y)$ – совм. плотность распр. ξ_1, ξ_2

$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$; $f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$

$$M(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dx\right) dy$$

$$M(\xi_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x,y)\,dy\,dx$$

$$M(\xi_1 + \xi_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x+y) f(x,y)\,dx\,dy = M(\xi_1) + M(\xi_2)$$

4) ξ_1, ξ_2 – незав. $\Rightarrow M(\xi_1) \cdot M(\xi_2) = M(\xi_1 \cdot \xi_2)$

▶ $M(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j}^{n} \sum_{i}^{k} x_i y_i p_{ij} = \sum x_j p_j \cdot \sum y_i p_i = M(\xi_1) \cdot M(\xi_2)$

След. 1: $M(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum M(\xi_k)$ След. 2: $M(\alpha\xi) = \alpha M(\xi)$ След. 3: $M[\xi - M(\xi)] = 0$

▶ $M(\alpha\xi) = M(\alpha) \cdot M(\xi)$ ▶ $M(\xi) - M[M(\xi)] = M(\xi) - M(\xi)$

(29) Дисперсия $D(\xi) = M[(\xi - M(\xi))^2]$

1) д. с. в. $D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 p_i$ $n \in \overline{N}$ (ряд сходя)

2) н. с. в.

$D(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (x - M(\xi))^2 f_\xi(x)dx$, (инт. сход.)

Теор. $D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$

▶ $D(\xi) = M[(\xi - M(\xi))^2] = M(\xi^2) - 2M^2(\xi) + M^2(\xi)$

Св-ва 1) $D(\xi) \geq 0$, неотр. величина

2) $D(C) = 0$

3) $D(\alpha\xi) = \alpha^2 D(\xi)$, α - const

▶ $D(\alpha\xi) = M[(\alpha\xi - M(\alpha\xi))^2] = M[\alpha^2(\xi - M(\xi))^2] = \alpha^2 D(\xi)$

4) $D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2)$, ξ_1, ξ_2 - незав.

▶ $D(\xi_1 + \xi_2) = M[(\xi_1 + \xi_2)^2] - M^2(\xi_1 + \xi_2) =$

$= M(\xi_1^2) + \cancel{2M(\xi_1\xi_2)} + M(\xi_2^2) - M^2(\xi_1) - \cancel{2M(\xi_1)M(\xi_2)} - M^2(\xi_2) =$

След. $D(\xi_1 - \xi_2) = D(\xi_1 + (-1)\xi_2) = D(\xi_1) + (-1)^2 D(\xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2)$

След. $D(\xi + \alpha) = D(\xi)$, α - const

(30) Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}$$

<u>Св-ва</u>: 1) $\sigma(\alpha) = 0$, α - const

2) $\sigma(c \cdot \xi) = \sqrt{D(c \cdot \xi)} = \sqrt{c^2 D(\xi)} = |c| \cdot \sigma(\xi)$

3) $\sigma(\xi_1 + \xi_2) = \sqrt{D(\xi_1 + \xi_2)} = \sqrt{\sigma^2(\xi_1) + \sigma^2(\xi_2)}$, ξ_1, ξ_2 - незав.

4) $\xi_1, \dots, \xi_n$ - взаимонез. (в сов.)

$$\sigma\left(\frac{\xi_1 + \dots \xi_n}{n}\right) = \sqrt{D\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sqrt{\sigma^2(\xi_1) + \dots \sigma^2(\xi_n)} =$$

если $D(\xi_1) = \dots = D(\xi_n) = \sigma^2$

(31) Ковариация

1) $\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) = M[(\xi_1 - M(\xi_1))\cdot(\xi_2 - M(\xi_2))] =$

$= M(\xi_1\xi_2 - \xi_1 M(\xi_2) - \xi_2 M(\xi_1) + M(\xi_1)M(\xi_2))$

$= M(\xi_1\xi_2) + M(\xi_1)M(\xi_2) - M(\xi_1)M(\xi_2) - \cancel{M(\xi_2)}M(\xi_1)$

$= M(\xi_1\xi_2) - M(\xi_1)\cdot M(\xi_2)$

2) $\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \sum_i \sum_j (x_i - M(\xi_1))(y_j - M(\xi_2))\cdot p_{ij}$ д. с. в.

3) $\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - M(\xi_1))(y - M(\xi_2)) f(x,y)\,dx\,dy$

Св-ва: 1) $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_1)$

2) $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1) = D(\xi_1)$

3) $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0 \Leftarrow \xi_1, \xi_2$ – незав.

4) $D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + 2\operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2)$

▶ $D(\xi_1 + \xi_2) = M[(\xi_1 + \xi_2)^2] - M^2(\xi_1 + \xi_2) =$
$M(\xi_1^2) + 2M(\xi_1\xi_2) + M(\xi_2^2) - M^2(\xi_1) - 2M(\xi_1)M(\xi_2) - M^2(\xi_2)$
$= D(\xi_1) + D(\xi_2) + 2\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$

5) $\left.\begin{aligned} \eta_1 &= a_1\xi_1 + b_1 \\ \eta_2 &= a_2\xi_2 + b_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = a_1 a_2 \operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2)$

▶ $\operatorname{Cov}(\eta_1, \eta_2) = M[(a_1\xi_1 + b_1 - a_1 M(\xi_1) - b_1)(a_2\xi_2 + b_2 - a_2 M(\xi_2) - b_2)]$
$= a_1 a_2\, M[(\xi_1 - M(\xi_1))(\xi_2 - M(\xi_2))] = a_1 a_2 \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$

След. $\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \eta\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{cov}(\xi_i, \eta)$

6) $-\sqrt{D(\xi_1)D(\xi_2)} \le \operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) \le \sqrt{D(\xi_1, \xi_2)}$

▶ $\eta_x = x\xi_1 + \xi_2$

$D(\eta_x) = x^2 D(\xi_1) + 2x\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) + D(\xi_2) \ge 0$

$D = 4\operatorname{cov}^2(\xi_1, \xi_2) - 4D(\xi_1)\cdot D(\xi_2) \ge 0$

$-\sqrt{D(\xi_1)D(\xi_2)} \le \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) \le \sqrt{D(\xi_1, \xi_2)}$

Если $D = 0$, то $\exists\, x_0 : \eta_{x_0} = x_0\xi_1 + \xi_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$ – связ. лин. зав. $\operatorname{Cov} = \pm\sqrt{\ }$

32 Коэффициент корреляции

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{Cov(\xi_1, \xi_2)}{\sigma(\xi_1) \cdot \sigma(\xi_2)}$$

Св-ва: 1. $\rho(\xi_1, \xi_1) = 1$

2. ξ_1, ξ_2 — нез.; $D(\xi_1), D(\xi_2) \neq 0$

$\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$

3) $\left.\begin{array}{l} \eta_1 = a_1 \xi_1 + b_1 \\ \eta_2 = a_2 \xi_2 + b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(\eta_1, \eta_2) = \frac{a_1 a_2 Cov(\xi_1 \xi_2)}{\sqrt{a_1^2 D(\xi_1) a_2^2 D(\xi_2)}} =$

$= sign(a_1 \cdot a_2) \cdot \rho(\xi_1, \xi_2)$

4) $\rho(\xi_1, \xi_2) \in [-1; 1]$

5) $\rho(\xi_1, \xi_2) = \pm 1$, если ξ_1, ξ_2 — лин. зав.

$= 0$, если ξ_1, ξ_2 — незав.

33 Начальные и центральные моменты

Нач. момент порядка k $\alpha_k = M(\xi^k)$ – мат. ож. $k^{ой}$ степени от ξ

Центр. момент порядка k $\mu_k = M[(\xi - M(\xi))^k]$ – мат. ож. $k^{ой}$ ст. отклонения ξ от $M(\xi)$

Коэф. ассиметрии $A_\xi = \mu_3 / \sigma^3$
– хар-ка смещенности отн. мат. ожидания.

Зам. для сим. распр. $A_\xi = 0$

если длин. часть кривой распр. справа от мат. ожид., то $A_\xi > 0$, и наоборот

Коэф. эксцесса $\gamma_\xi = \mu_4 / \sigma^4 - 3$
– показывает отклонение графика от кривой норм. распр.

$\gamma_\xi > 0$ – кривая более острая
< 0 – " – плоская

34 Биномиальное распределение

Бин. распр. дискр. случ. вел. ξ с пар. n и p — если величина принимает знач. $0, 1, 2 \ldots n$ с вер.

$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$

ξ_1	0	1	...	n
p	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$		p^n

$\hookrightarrow (q^n + \ldots + p^n) = 1$

$M(\xi) = M(\sum^n \xi_i) = \sum^n M(\xi_i) = \sum_{i=1}^n p = n \cdot p$

$M(\xi_i) = p$

$D(\xi) = D(\sum^n \xi_i) = \sum^n D(\xi_i) = npq$

исп. нез. => ξ_i нез.

$D(\xi_i) = pq$

35 Распр. Пуассона

Случ. вел. с распр. Пуассона ξ – прин. знач. 0, 1 … n

и $p(\xi = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{=e^{\lambda}} = \lambda$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$$

$$M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)+1]\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

След. ξ_1, ξ_2 – нез., имеют распр. Пуассона с пар. λ_1, λ_2,

то $(\xi_1 + \xi_2)$ имеет распр. Пуассона с $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

▷ по ф-ле свертки

Опр. Закон распр. **устойчивый**, если сумма 2х нез. величин подчиняется дан. закону распр., тоже подч. ему

(36) Геометрическое распределение

– число исп. по схеме Бернулли до первого появл. с

ξ	1	2	3
p	p	pq	pq^2

$$p + pq + \dots pq^n = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' \Leftarrow \frac{q}{1-q}$$

$$= \frac{p\,[(1-q)+q]}{p^2} = \frac{p^2+pq}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= pq \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)+1]\, k\, q^{k-2} - \frac{1}{p^2} =$$

$$= pq \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) k\, q^{k-2} + p \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\, q^{k-1} - \frac{1}{p^2}$$

$$= pq \left(\sum_{k=2}^{\infty} q^k \right)'' + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

(37) Равномерное распределение на $[a; b]$

– если $f_\xi(x) = \begin{cases} c, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$

1) $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$

$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$

2) $M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx =$

$= \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$

3) $D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 =$

$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} =$

$= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$

38) Показательное распределение, $\lambda > 0$

– если $f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

1) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -\int_0^x e^{-\lambda t} d(-\lambda t) = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$

2) $M(\xi) = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty - \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = \frac{1}{\lambda}$

3) $D(\xi) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

(39) Нормальное распределение с пар. a и δ^2

— если $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

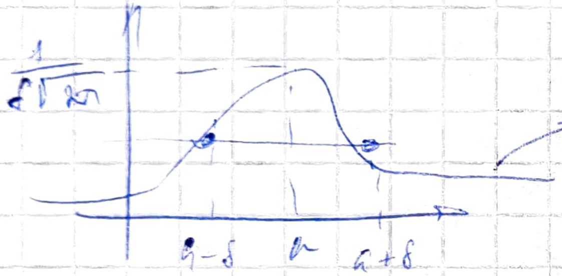
$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}} dx = \left\{ \begin{matrix} t = \frac{x-a}{\delta} & dx = \delta dt \\ x = t\delta + a & \end{matrix} \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t\delta + a)}{\cancel{\delta}\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \cancel{\delta} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta t}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt}_{\text{нечет.} = 0} + a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = a$$

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a)^2}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}} \cdot dx = \left\{ \begin{matrix} \frac{x-a}{\delta} = t \\ dx = \delta dt \end{matrix} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta^2 t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt =$$

$$= \frac{\delta^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = \frac{\delta^2}{\sqrt{2\pi}} \Big[-te^{-t^2/2} \Big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2} dt$$

$$- t e^{-t^2/2} \Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \Big] = \delta^2$$



норм. кривая
(Кривая Гаусса)

(40) Вероятность попадания норм. распр. случ. вел. в заданный интервал

Пусть $\xi \in N(a, \delta^2)$, $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$

$$P(\xi \in (\alpha, \beta)) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x-a}{\delta} \\ dx = \delta dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\delta}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\delta}}^{\frac{\beta-a}{\delta}} e^{-t^2} dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\delta}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\delta}\right)$$

(41) Вер-ть заданного откл. норм. распр. случ. велич.

Пусть $\xi \in N(a, \sigma^2)$, $\varepsilon > 0$

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$\triangleright$ $|\xi - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < \xi < a + \varepsilon$

Правило $3-\sigma$

$\varepsilon = 3\sigma$

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 0{,}9973$$

<u>След.</u> $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то почти достоверно, что $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ покрывает все её возм. значения (99,73%)

(42) Линейные преобразования нормальной случ. велич.

Пусть $\xi \in N(a, \sigma^2)$, $\eta = A \cdot \xi + B$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$y = Ax + B$ — мон. возр. при $A > 0$, убывает при $A < 0$ $\Big\} \Rightarrow \in D^1$

$$x = \frac{y - B}{A} = \psi(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\psi'_y = \frac{1}{A}$$

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-B}{A} - a\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left|\frac{1}{A}\right| = \frac{1}{|A|\,\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-(B+aA))^2}{2A^2\sigma^2}}$$

$$\eta \in N\left(B + aA, (|A| \cdot \sigma)^2\right)$$

Устойчивый зак. распр. — сумма χ нез. вел., подч. зак., подч. ему

Пусть $\xi_1 \in N(a_1, \sigma_1^2)$, $\xi_2 \in N(a_2, \sigma_2^2)$ — независимы

по ф-ле свертки $(\xi_1 + \xi_2) \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$\Rightarrow$ норм. зак. — устойчив.

(43) Неравенство Маркова

Теор. $\xi \geq 0,\ \varepsilon > 0 \Rightarrow p(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{M(\xi)}{\varepsilon}$

▶ для д.с.в.

(11)

$$p(\xi \geq \varepsilon) = \sum_{i:\,x_i \geq \varepsilon} p_i \leq \sum_{i:\,x_i \geq \varepsilon} p_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) + \sum_{i:\,x_i < \varepsilon} p_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\sum_i x_i p_i = \frac{M(\xi)}{\varepsilon}$$

След. $p(\xi \geq \varepsilon) = p(\xi^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{M(\xi^2)}{\varepsilon^2}$

(44) Неравенство Чебышева

Теор. $P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$,

если ξ имеет $D(\xi)$

$\blacktriangleright$ $P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{M[(\xi - M(\xi))^2]}{\varepsilon^2} = \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$

$P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon) = 1 - P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon)$

$\Rightarrow P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$

След. на практике дает примитивную оценку

45 Теорема Чебышева

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимы ; $D(\xi_i) \le C, \forall i$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in N : p(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i)| < \varepsilon) \to 1$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p(|\frac{1}{n}\sum \xi_i - \frac{1}{n}\sum M(\xi_i)| < \varepsilon) = 1$

▶ $\eta = \frac{1}{n}\sum \xi_i$: по нер-ву Чебышева

$p(|\frac{1}{n}\sum^{n} \xi_i - M(\frac{1}{n}\sum^{n} \xi_i)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(\eta)}{\varepsilon^2} \ge$

$\ge \frac{D(\eta)}{\varepsilon^2} = D(\frac{1}{n}\sum^{n} \xi_i) = \frac{1}{n^2}\sum^{n} D(\xi_i) \le \frac{C}{n}$

$\ge 1 - \frac{C}{n}, \ n \to \infty$

$\lim_{n\to\infty} p(|\frac{1}{n}\sum^{n} \xi_i - \frac{1}{n}\sum^{n} M(\xi_i)| < \varepsilon) = 1$

Сл-д $\xi_1, \dots, \xi_n$ — нез

$M(\xi_i) = a, \forall i ; D(\xi_i) \le C, \forall i$

$\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} p(|\frac{1}{n}\sum^{n} \xi_i - a| < \varepsilon) = 1$

48 Теорема Бернулли

n независим. исп., где A появл. с вер. p, и m число наступлений m

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} p\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$

▶ $\xi = \sum\limits^{n} \xi_i$, где $\xi_i : \{0, 1\}$ - число наст. соб. в i исп.

$M(\xi_i) = p \quad \forall i$

$D(\xi_i) = pq \quad \forall i$

$p + q = 1 \Rightarrow D(\xi_i) \leq \frac{1}{4}$

$\lim\limits_{n \to \infty} p\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$

Зам. в отл. от мат. ан. $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$ при $n \to \infty$ может не вып.

Теорема Пуассона

n незав. испытаний в кажд. A появл. с вер. p_i $(i = \overline{1, n})$ m раз

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left(p\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \cdot p_i\right| < \varepsilon\right) = 1\right.$

(част. случай т. Чебышева)

(47) Центральная предельная теорема

Зам. при дост. б. кол. усл. закон распр.

большого числа случ. вел. $\to$ станд. норм. закону

Теор. 1 $\xi_1, \dots \xi_n$ – нез., одинак. распр.

$M(\xi_i) = a$
$D(\xi_i) = \sigma^2$

$\Rightarrow$ закон расп. $\eta = \dfrac{\frac{1}{n} \cdot \sum\limits^{n} \xi_i - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$

при $n \to \infty$ $\to \in N(0;1)$

$$F_\eta(x) = P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum \xi_i - a}{\sigma}\sqrt{n} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt, \quad n \to \infty$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Теор. 2 $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независимы

$M(\xi_i) = a_i$
$D(\xi_i) = \sigma_i^2$

если $\exists\, \delta > 0$: $\dfrac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum\limits^{n} M\left[|\xi_k - a_k|^{2+\delta}\right] \to 0$, $n \to \infty$

где $B_n^2 = \sum\limits^{n} \sigma_n^2$

$$P\left(\frac{\xi_1 + \dots \xi_n - A_n}{B_n} < x\right) \underset{x \in (-\infty;\infty)}{\rightrightarrows} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

где $A_n = \sum\limits^{n} a_n$