**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА и**

**ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ**

**при Президенте Российской Федерации»**

**ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**НАПРАВЛЕНИЕ 38.03.01 ЭКОНОМИКА**

Кафедра микроэкономики

Группа ЭО-15-01

**Допустить к защите**

Заведующий кафедрой микроэкономики

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ М.И. Левин

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2017 г.

**НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ, НАПРАВЛЕННЫХ НА ПРЕОДОЛЕНИЕ ДЕФИЦИТА ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ**

студент-бакалавр

Касьянова Ксения Алексеевна /\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/  
 (подпись) (дата)

научный руководитель научно-

исследовательской работы

д.э.н. Левин Марк Иосифович /\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/  
 (подпись) (дата)

**МОСКВА**

**2017 г.**

Аннотация

В основе данной работы лежит использование дифференциальных игр для изучения оптимального выбора управленческих фирм относительно объемов инновационной деятельности в процессе работы при ограниченности ресурсов. Теория игр - это теория соперничества и сотрудничества между рациональными агентами, принимающими решения. В этой работе рассматриваются главным образом инновационные процессы, которые уменьшают предельные издержки. Также с помощью принципа максимума Понтрягина будет продемонстрировано, как изменения разных параметров изменяют оптимальный путь фирмы и снижают или повышают стимулы для инноваций по уменьшению издержек. Наряду с этим мы делаем обзор нескольких экономических моделей, работающих на рынке ограниченных ресурсов и\или инвестирующими в инновационные процессы.

Оглавление

[Введение 4](#_Toc485049997)

[Обзор литературы 5](#_Toc485049998)

[1. Динамические игры 7](#_Toc485049999)

[1.1. Равновесие в динамических играх 7](#_Toc485050000)

[1.2. Динамическая оптимизация 8](#_Toc485050001)

[1.2.1. Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана 8](#_Toc485050002)

[1.2.2. Принцип максимума Понтрягина 9](#_Toc485050003)

[1.3. Линейно-квадратичная дифференциальная игра с добычей ресурсов 9](#_Toc485050004)

[2. Инновационные процессы 11](#_Toc485050005)

[2.1. Виды инновационной деятельности и ее этапы 11](#_Toc485050006)

[2.2. Стохастическая игра с борьбой за инновации 12](#_Toc485050007)

[2.3. Патентная гонка 13](#_Toc485050008)

[2.4. Коалиционные игры с инновациями 14](#_Toc485050009)

[3. Ресурсная экономика 16](#_Toc485050010)

[3.1. Стохастическая игра с борьбой за инновации и добычей ресурсов 16](#_Toc485050011)

[3.2. Игры с невозобновляемыми ресурсами 18](#_Toc485050012)

[3.2.1. Проблема «судного дня» 19](#_Toc485050013)

[3.2.2. Модель с полезностью, зависимой от запаса ресурса 19](#_Toc485050014)

[3.3. Игры с возобновляемыми ресурсами 20](#_Toc485050015)

[3.3.1. Игры с ресурсами общего пула 20](#_Toc485050016)

[3.3.2. Трагедия общин 21](#_Toc485050017)

[3.3.3. Биологические основы потребления возобновляемого ресурса 21](#_Toc485050018)

[3.4. Конкуренция за ограниченный ресурс и его распределение между игроками 23](#_Toc485050019)

[3.4.1 Распределение ресурса на аукционе 24](#_Toc485050020)

[3.4.2 Распределение ресурса через лотереи 24](#_Toc485050021)

[4. Формулировка модели: дифференциальная игра с процессными инновациями и возобновляемым природным ресурсом. 26](#_Toc485050022)

[Заключение 28](#_Toc485050023)

[Список литературы 29](#_Toc485050024)

# Введение

Теория игр - это теория соперничества и сотрудничества между рациональными агентами, принимающими решения. Она широко применяется при решении конфликтов в области экономики и науки управления, а также в других областях социальной науки. Дифференциальные игры - это динамические игровые модели, используемые для изучения систем, которые развиваются в предположении, что время непрерывно развивается, а динамика системы может быть описана набором обыкновенных дифференциальных уравнений. И поскольку многие проблемы характеризуются несколькими взаимозависимыми агентами, принимающими решения, действующими независимо или в сговоре, модели динамической оптимизации непрерывного времени этих агентов рассматриваются как дифференциальные игры.

Современная теория игр значительно изменилась с момента ее создания в 1920-х годах. Раздел теории игр, известный как динамические игры, зародился благодаря новаторской работе над дифференциальными играми Айзекса, Понтрягина и его школы, а также из оригинальных статей о стохастических играх Шепли. С тех пор теория динамических игр оказала значительное влияние на такие дисциплины, как прикладная математика, экономика, наука управления, инженерия, исследование операций, биология, экология и экологические науки. Важно то, что теория игр оказалась очень эффективной применительно к изучению олигополистического рынка.

Нами будет рассмотрена динамическая оптимизация моделей олигополистического рынка в непрерывном времени, которые работают в условиях дефицита природных ресурсов, а также несколько типов динамических игр, которые могут представлять этот рынок, и методов оптимизации, которые могут быть применены для получения оптимального результата. Мы также рассмотрим различные модели инновационных процессов, и, что более важно, различные модели ресурсных экономик.

Для начала, дефицит ресурсов - это фундаментальная экономическая проблема, состоящая в том, что у общества имеется недостаточный объем ресурсов для удовлетворения всех человеческих потребностей и потребностей. Сегодня при использовании коллективных природных ресурсов экономические агенты сталкиваются с растущими экологическими рисками, о чем сообщается в многочисленных научных исследованиях. Наиболее распространенным прогнозом является сокращение возобновляемости запасов природных ресурсов. Снижение запасов рыбы, снижение доступности воды, общее снижение урожайности сельскохозяйственных культур и снижение темпов роста тропических лесов - всего лишь несколько примеров, иллюстрирующих эту проблему.

Краткий план данной работы заключается в следующем. В Главе 1 рассматриваются различные модели динамических игр и методы оптимизации, обращая особое вниманием принципу максимума Понтрягина. В Главе 2 будет представлен ряд моделей с инновационными процессами, наглядно показывающих, какие стратегии могут использовать производители при управлении фирмой в условиях, требующих каких-либо разработок. Несколько моделей, иллюстрирующих поведение игроков касательно использования ограниченных ресурсов, будут рассмотрены в Главе 3. Наконец, в Главе 4 демонстрируется динамическая дуополия на рынке дефицитных ресурсов с инновациями по снижению издержек, которые инвестируются обеими фирмами, в основе которой лежат модели, рассмотренные в предыдущих главах моделях.

# Обзор литературы

Дифференциальные игры широко применимы к различным экономическим моделям. Они успешно используются в экономике, финансах, оптимизации и стохастическом контроле. Dockner, Jergensen, Van Long, Sorger (2000) рассматривали их применение для в науке управления. Nowak и Szajowski (2004) особенно внимательно исследуют динамические игры с чувствительным к риску равновесием Нэша в играх по добыче природных ресурсов.

Стохастические дифференциальные игр применительно к изучению оптимального выбора управленческих фирм относительно инновационной деятельности, направленной на продуктовые и процессные инновации и, в частности, моделей патентования и очередей были рассмотрен Келлером (Keller, 2007). Cellini и Lambertini (2007) исследуют сроки применения продуктовых и процессных инноваций, используя дифференциальную игру, в которой фирмы могут инвестировать в оба вида деятельности, а также в статье Lambertini и Mantovani (2005) изучается одновременная инновационная деятельность на дуополистическом рынке. Этот вопрос был также поднят в работе, написанной Utterback and Abernathy (1975), которые оценили динамическую модель продуктовых и процессных инноваций. Динамическая оптимизация и дифференциальные игры были рассмотрены у Itaya (1999): в своей работе он представил несколько методов для решения задач статической оптимизации с ограничениями, дифференциальных уравнений и краевых задач. Yeltekin, Cai and Judd (2015) представили метод, основанный на теории рекурсивных игр, и схему, которая обеспечивает точное приближение к истинному равновесию динамической игры для олигополии с эндогенно заданными производственными мощностями. В их работе отмечается, что, если мощность фирмы не изменяется на протяжении всей игры, то игра сводится к повторяющейся игре (а не к динамической). Если фирмы могут инвестировать в более высокие мощности, то динамическая игра на бесконечном интервале времени переходит в игру с конечным состоянием, которая может быть решена путем обратной индукции.

Fesselmeyer и Santugini (2012) рассматривают влияние экологического риска добычи коллективного природного ресурса, а также фокусируют внимание на трагедии общин. Regev, Gutierrez, Schreiber и Zilberman (1998) оценивают биологические основы эксплуатации возобновляемых ресурсов. Eso, Nocke и White (2007) демонстрируют конкурентный рынок дефицитных ресурсов, получая неожиданный результат: увеличение производственных мощностей может привести к сокращению общего выпуска.

Класс линейно-квадратичных дифференциальных игр был рассмотрен в работе Ling (2010), который рассматривает их применение в лотерейной модели для распределения государством общественных ресурсов. В то время как Amir (2000) описал их применение в ресурсной экономике, промышленной организации, макроэкономике, рыночных играх, экспериментальной и эмпирической экономике, основанной на парадигме стохастических игр.

Эта работа также во многом опирается на радел теоретической литературой, связанный с динамическими олигополиями. Kirman и Sobel (1974) рассматривают динамическую олигополию с запасами, а также дают оценку дифференциальной игре со стохастическим спросом. Goettler и Gordon (2008) представили модель олигополии на рынке товаров долговременного пользования с эндогенно заданными инновациями, используя марковское равновесие Нэша для получения результатов, а позже в своей другой работе (2012) продемонстрировали эффекты инноваций и конкуренции на динамическом олигополистическом рынке, где они представили динамическую модель, в которой фирмы эндогенно определяют стационарный уровень инноваций и использовали ее для оценки влияния на инновации трех переменных: затрат на вход, степени замещаемости продукта и скорости распространения инноваций. Benoit and Krishna (1987) исследовали, как гибкие уровни производственных мощностей изменяют рыночное равновесие в модели динамической дуополии, в которой фирмы определяют, как цены, так и количества. Chintagunta и Rao (1996) сформулировали дифференциальную игровую модель для динамического ценообразования на дуополистическом рынке, осветив вопрос предпочтений и выбора бренда. Их результаты показывают, что при равных предельных издержках фирм в устойчивом равновесии бренд с более высоким уровнем предпочтений взимает более высокую цену.

Кроме того, важным является ряд исследований в области инновационных процессов. Cai и Rajan (2004) рассмотрели связь инвестициям в инновации и сговоров, а также Levidow, Zaccaria и Maia (2014) привели обзор инновационных методов водоочистки. Ho, Savin и Terwiesch (2002) обсуждают распространение нового продукта при ограничении предложения, используя диффузную модель Френка Басса как хорошо известный параметрический подход к оценке траектории спроса нового продукта с течением времени. Эта статья рассматривает диффузную модель распространения инновация при наличии ограничения поставок. В результате ограничения потенциальные покупатели, которые не могут получить новый продукт, присоединяются к очереди ожидания, создают ситуацию недопоставок и могут изменить свое решение о покупке, что приведет к потере продаж.

Наконец, большое количество литературы содержит информацию о дефиците ресурсов и, в частности, дефиците продовольствия и воды. Биологический аспект проблемы дефицита воды был описан Райсберманом (Rijsberman, 2006). Wutich и Brewis (2014) провели антропологическое исследование дефицитных ресурсов, продемонстрировав социологический аспект проблемы нехватки воды и продовольствия. Lopes, Pereira and Fontes (2014) рассмотрели динамическую оптимизацию проблемы орошения. Podimata and Yannopoulos (2015) представили работу, в которой рассматривается потенциальный конфликт потребления воды и использования воды для орошения, используя теорию игр как платформу, дающую прогнозы о стратегиях заинтересованных сторон.

# Динамические игры

В этой главе рассматриваются теория и применение динамических дифференциальных игр. Теория динамических игр появилась в 1920-х годах с работами Джона фон Неймана и получила большой скачок в развитии в 1950-х годах благодаря Джону Нэшу. На центральные понятия теории игр повлияла теория принятия решений (теория полезности).

В динамичной дифференциальной игре лицо, принимающее решения, может действовать самостоятельно или в сговоре с целью достижения своих собственных интересов. В области дифференциальных игр теория сговора гораздо менее развита, чем обычная, и почти все экономические модели строятся в условиях отсутствия кооперации. Дифференциальные игры принадлежат подклассу динамических игр, называемых играми на пространстве состояний. В такой игре управленец вводит набор переменных состояния для описания динамической системы в любой момент времени во время игры. Гипотеза заключается в том, что влияние прошлых событий аккуратно суммируется в переменных состояния. Для примера, вектор состояния может состоять из текущих капитальных запасов *N* олигополистических фирм, и фирмы могут влиять на эти запасы путем выбора индивидуальных ставок инвестиций. Если игра на пространстве состояний задается как дифференциальная игра, то предполагается, что время непрерывно и изменения переменных состояния со временем может быть смоделировано с помощью набора дифференциальных уравнений. Дискретные модели включают в себя предположение, что между моментами времени, определяющими периоды, не принимаются никакие решения.

Применение дифференциальных игр ведется в следующих областях экономики: управление капиталом и инвестициями, научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы (Research & Development, далее НИОКР) и технологические инновации, олигополия Курно, ценовые и рекламные решения в маркетинге, добыча природных ресурсов, борьба с загрязнением и т. д.

## Равновесие в динамических играх

В этом разделе мы переходим к рассмотрению различных видов равновесий, которые можно получить в динамических играх. Начнем с того, что существуют две формы решений одной и той же динамической задачи: решение с прямое управление без всякой корректировки (open-loop solution, далее OL) и с использованием обратной связи (closed-loop, or feedback, or Markovian, solution; далее марковские).

OL-стратегия - это стратегия, которая обусловлена только текущим временем, а значит минимальным объемом информации. При рассмотрении OL-стратегии предполагается, что игроки оставляют всю информацию, кроме времени вне рассмотрения, иными словами они не могут наблюдать ничего, кроме своих собственных действий и времени. Использование OL-стратегий критикуются за то, что оно носит статический характер, не допуская подлинного стратегического взаимодействия между игроками во время игры. Касательно проблем, связанных с экономикой возобновляемых ресурсов и окружающей средой, OL-стратегии есть отражение дальновидности и интереса в сохранении ресурсов и окружающей среды. Кроме того, если интервал планирования небольшой, то OL-стратегия может использоваться как представление жесткой стратегии краткосрочного тактического планирования.

Существует несколько важных свойств OL-равновесия. В детерминистической динамической оптимизации для одного агента всегда существует оптимальная стратегия с открытым контуром. Этот факт, безусловно, интуитивен, как и его невыполнение при наличии стохастических переменных или переходов.

Альтернативный подход к управленческим стратегиям - это марковские стратегии, где на каждом этапе игроки используют только постоянные функции текущего состояния. В литературе теории системам и макроэкономике стратегии Маркова обычно называются стратегиями обратной связи (closed-loop). OL-равновесия, как правило, намного проще анализировать, чем равновесие Маркова.

Выбор марковских стратегий является естественным при задании игр на пространстве состояний, где история игры до момента времени t суммируется в значении вектора состояния. Выбор марковских стратегий также мотивируется их простотой: игроки реагируют только на факторы, которые имеют отношение к выигрышу и составляют межвременную связь в игре (а именно переменные состояния). Равновесие Нэша в игре с марковскими стратегиями называется марковским равновесием Нэша (Markovian Nash equilibrium, or feedback Nash equilibrium, далее MNE) и играет важную роль в теории оптимального управления. Также мы можем иметь дело с марковским равновесием Нэша, совершенном на подыграх (Markovian Perfect Nash equilibrium, далее MPNE), как например в разделе 3.1.

Еще один вид игровых равновесий - это равновесие, совершенное на подыграх (subgame-perfect equilibrium, далее SPE), которое используется в большинстве своем в повторяющихся играх, где для поиска равновесия определяется рекурсивный оператор, который отображает будущие SPE-выигрыши в текущем состоянии. Этот тип равновесий используется в работе Yeltekin, Cai and Judd [10]. SPE является более сильным понятием, чем равновесие по Нэшу. В играх с нетривиальной динамической структурой SPE усиливает равновесие Нэша, накладывая требование последовательной рациональности, чтобы поведение было оптимальным при любых обстоятельствах, как в равновесии (в соответствии с равновесием Нэша), так и в тех, которые возникают из равновесия.

В разделе 2.4. рассматривается двухступенчатая модель, в которой две фирмы решают вступать ли им в сговор при определении объемов инвестиций в НИОКР. Для нахождения равновесия используется решение Нэша для переговоров (Nash Bargaining Solution, далее NBS), удовлетворяющее аксиомам стандартной задачи о сделках, которая изучает, как два агента распределят между собой выгоды, которые они могут совместно создать.

Последним из рассматриваемых нами типов равновесия является равновесие по Нэшу, чувствительное к риску, используемое, например, в статических играх без сговора или в двухэтапных стохастических играх с добычей ресурсов. В играх с добычей ресурсов случайность связана с вероятностной функцией переработки. Равновесие Нэша, чувствительное к риску, существует тогда и только тогда, когда игра имеет равновесие Нэша.

## Динамическая оптимизация

Модели динамической оптимизации в непрерывном времени играют важную роль в анализе различных видов экономической деятельности, зависимых от времени. У каждого агента или игрока есть своя цель максимизации. Существует несколько известных подходов к решению динамических задач: обратная индукция, уравнение Беллмана, метод Лагранжа, метод Гамильтона. Мы сосредоточим внимание на уравнении Гамильтона-Якоби-Беллмана и на принципе максимума Понтрягина.

### Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (Hamilton-Jacobi-Bellman equation, далее HJB) является основой применения динамического программирования для решения к задачам оптимального управления. Этот подход основан на важных двух важных принципах вложения и рекурсии. Чтобы объяснить эти два принципа, обозначим задачу через Принцип вложения говорит о том, что мы должны решить не только задачу , но и все семейство задач . Здесь - задача, которая начинается в момент времени *t* при начальном состоянии *x* и может быть сформулирована следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

при условии: .

Принцип вложения вынуждает нас решать бесконечно много проблем вместо одного. Однако в сочетание с принципом рекурсии позволяет нам прийти к мощному уравнению HJB. Принцип рекурсии означает, что, начиная с «маленьких» задач всего семейства, мы можем перейти к «крупнейшим» задачам.

Функция оптимального значения *V* удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными, которое называется уравнением Гамильтона-Якоби-Беллмана:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

где - скалярное произведение двух n-мерных векторов.

### Принцип максимума Понтрягина

Принцип максимума Понтрягина довольно часто используется для решения задач динамической оптимизации. Принцип гласит, что решения должны удовлетворять краевым дифференциальным уравнениям. Условие первого порядка для гладких задач сравнимо с условием, что вектор градиента функции должен исчезать на локальном максимуме *g*, что выполняется при локальных минимумах и других критических точках. Если у нас есть дополнительная информация о выпуклости *g*, мы можем определить является ли *x* максимумом. Аналогично, в случае задачи оптимального управления даже если путь *u* удовлетворяет принципу максимума, он может не быть оптимальным путем.

Функция *H -* функция Гамильтона или гамильтониан (Hamiltonian) – играет существенную роль в принципе максимума Понтрягина.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Переменная *λ* называется сопряженной переменной состояния (current-value costate variable), связанной с переменной состояния *x* (current-value state variable). Тогда максимизированная функция Гамильтона :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Рассматривая задачу оптимального управления и максимизирую гамильтонову функцию , предположим, что пространство состояний *X* является выпуклым множеством и функция *S* непрерывно дифференцируема и вогнута. Пусть *u* - допустимый путь управления с соответствующей траекторией состояния *x*. Если существует абсолютно непрерывная функция такая, что выполняются условие максимума ; сопряженное уравнение и условие трансверсальности , причем функция *x* является вогнутой и непрерывно дифференцируемой, то *u* является оптимальным путем.

## Линейно-квадратичная дифференциальная игра с добычей ресурсов

Класс линейно-квадратичных дифференциальных игр широко применяется в макроэкономике, вопросах регулировании загрязнения и добычи природных ресурсов. Этот класс позволяет свести динамическую систему к паре дифференциальных уравнений, и, следовательно, применить стандартный метод фазовых диаграмм (диаграмм состояния) для изучения равновесия модели.

Рассмотрим простую линейно-квадратичную модель игры с добычей природных ресурсов с двумя игроками, одной переменной состояния и одной переменной управления для каждого игрока, показанной в работе Линга [Ling, 11]. Игра задается парой проблем с оптимальным управлением:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |
|  | (6) |

при условии

Например, можно использовать такую модель при рассмотрении проблемы борьбы с загрязнением, если предположить, что есть естественная скорость истощения, а все остальные параметры положительны. Таким образом, *x(t)* является неотрицательным уровнем загрязнения в момент времени *t*, каждая страна *i* пытается минимизировать текущую дисконтированную стоимость ущерба от загрязнения и деятельности по борьбе с загрязнением страны *u(t).*

Линейно-квадратичная структура позволяет прийти к следующим важным результатам. В частности, сопряженная переменная состояния меньше теневого значения (shadow value) начального состояния, поскольку стратегический эффект деятельности по борьбе с загрязнениями при заданных параметрах *k* и *l*. Следовательно, сопряженная переменная состояния переоценивает скорость приращения минимальных затрат. Этот результат имеет важное значение для политики агента. Например, в моделях добычи ресурсов, если управленец каким-то образом хочет сберечь запас ресурсов, регулируя уровни добычи фирм, он рискует переоценить запас ресурса, если он подходит к трактовке сопряженной переменной состояния как к теневому значению обычным способом. Поэтому управленец будет чрезмерно регулировать уровни добычи ресурса, тем самым уменьшая благосостояние экономики.

# Инновационные процессы

Эта глава рассматривает поведения экономического агента касательно исследований и разработок. Деятельность в области НИОКР направлена на разработку новых технологий, в том числе процессных и продуктовых. Теоретический подход к НИОКР рассматривает разрабатываемые инновации не изолированно, а в конкурентной среде. Можно рассматривать инновационную деятельность конкурирующих фирм как о гонку за то, чтобы первым достичь технологического прорыва. Динамические игровые R & D модели часто опираются на следующие три предположения. Во-первых, ни одна фирма не знает заранее, сколько она должна потратить на разработку инноваций. Во-вторых, существует несколько возможных путей успешного развития инноваций. В-третьих, деятельность в области НИОКР является дорогостоящей, но приводит к накоплению ноу-хау, имея положительный внешний эффект.

## Виды инновационной деятельности и ее этапы

Согласно модели, описанной у Utterback и Abernathy [19], каждая фирма может выбрать одну из трех стратегий: максимизацию производительности, максимизацию продаж или минимизацию затрат. Таким образом, фирма может попытаться первой внедрить передовые инновации (максимизация производительности), посмотреть на инновационную деятельность конкурентов и быть готовой быстро адаптировать новые технологии (максимизация продаж) или выйти на рынок на более позднем этапе жизненного цикле продукта, используя упрощенные и менее дорогостоящие технологии производства (минимизация затрат). Utterback и Abernathy [19] описывают три разных этапа инновационной деятельности: некоординируемый, сегментационный и системный.

Этап I: некоординируемый процесс, стратегия максимизации производительности продукта. На этом этапе можно ожидать, что фирма с максимальной эффективностью может будет подчеркивать уникальность производимого продукта и технологии ее производства, часто в ожидании того, что передовая технология позволит захватить большую долю рынка.

Этап II: сегментационный процесс, стратегия максимизации продаж. По мере развития отрасли ценовая конкуренция становится более интенсивной. Поэтому производство требует механизации и дальнейшего повышения эффективности. Идет процесс специализации и формализации контроля производства. Предполагается, что технологии, повышающие производитель, не будут внедрены до тех пор, пока фирма не будет уверена, что покупатель сможет сполна оценить нововведение и отличить новый продукт от конкурентных продуктов. С введением каждой новой инновации становится все труднее улучшать производительность, поэтому фирмы устремляют свою деятельность на повышение лояльности к бренду.

Этап III: системный процесс, стратегия минимизации затрат. По мере развития технологий и увеличения объемов инвестиции улучшение каких-то отдельных элементов процесса создания продукции становится все более сложным. Процесс становится настолько хорошо интегрированным, что даже незначительные изменения могут потребовать изменений в других элементах процесса и в самом продукте, а это ведет к тому, что изменения становятся очень дорогостоящими. Развитие технологий на этом этапе идут медленнее, но они могут быть стимулированы либо развитием новой технологии, либо резким сдвигом спроса.

Стоит отметить несколько важных особенностей этих этапов развития. Во-первых, большинство оригинальных нововведений, будет введено на первом этапе, а адаптированных – на третьем этапе. Во-вторых, инновации, внедренные на первом этапе, потребуют малозаметных изменений в технологии процесса, при этом инновации, внедренные на втором этапе, потребуют намного больших изменений, в то время как на третьем этапе производятся только дополнительные корректировки или адаптация уже используемых другими фирмами нововведений. В-третьих, затраты на инновации на первом этапе будут больше, чем на втором, и самыми низкими на третьем этапе. Также отметим, что на первом этапе большинство фирм будут относительно небольшими, в отличие от двух других.

## Стохастическая игра с борьбой за инновации

В теории игр стохастическая игра, динамичная игра с вероятностными переходами, в которой участвуют один или несколько игроков, была представлена Ллойдом Шепли в начале 1950-х годов. Он широко применяется в определении сроков разработки новых технологий. Неопределенность присуща процессу технологических инноваций: расходы на НИОКР ведутся в неопределенности и могут привести к инновациям после случайного интервала времени. Неопределенности обычно влияют на дисконтированные функции прибыли, дифференциальные уравнения состояния системы, начальные состояния, т.е. на основные составляющие стандартной детерминистической дифференциальной игры. Ключевыми преимуществами применения стохастических игр являются прогностическая сила моделей и простота.

Рассмотрим интересную модель, представленную в статье Келлера [Keller, 4], которая может быть полезна при последующей работе над темой данной исследования. В этой игре у *N* фирм есть конкурирующие проекты в области НИОКР. Стохастическая игра предполагает, что: ни одна фирма не может точно определить размеры инвестиций в НИОКР заранее. Деятельность в области НИОКР является дорогостоящей, но способствует более быстрому накоплению общего ноу-хау, а также имеет положительные внешние эффекты (экстерналии). Успешное внедрение инноваций может быть достигнуто разными путями. Как только фирма выиграла в борьбе за инновацию, она приобретает монополистическую позицию.

Время , затраченное на завершение проекта является случайной величиной с функцией распределения . Случайные переменные стохастически независимы, так как фирмы не сотрудничают и не делятся друг с другом знаниями. , где дата инновации. Пусть – инновационная деятельность фирмы *i*. Функция распределения пропорциональна объемам инновационной деятельности:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

где – функция выживания и – функция риска[[1]](#footnote-1).

Предположим, что и игра играется на бесконечном интервале времени. Эта стохастическая игра принадлежит классу кусочно-заданных детерминистических игр. Расходы на инновационную деятельность являются квадратичной функцией по уровню инвестиций. Функциональной целью (objective functional) фирмы является ее ожидаемая дисконтированная прибыль:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

Это выражение состоит из трех членов. Первый отражает то, что чистая прибыль фирмы *i* (в текущих условиях) равна , если этой фирме удастся стать новатором. Второй член показывает, что чистая прибыль фирмы *i* (в текущих стоимостных условиях) равна , если эта фирма проигрывает в инновационной гонке. Третий член представляет собой стоимость затрат на НИОКР в момент времени *t.* Предполагается, что вся деятельность в области НИОКР в рамках проекта прекратится в тот момент, когда инновация становится успешной. Все три компонента взвешены по их соответствующим вероятностям.

В данной игре игроки будут определять свои стратегии при помощи переменной состояния , которая представляет совокупный запас ноу-хау. Уравнение состояния задается:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (9) |

Мы ищем OLNE (см. 1.1) и используем принцип максимума Понтрягина. Определяя функцию Гамильтона, имеем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (10) |

в которой представляют собой сопряженные переменные состояния. Предполагая, что равновесные уровни инновационной деятельности являются строго положительными, из необходимых условий для максимизации гамильтониана получаем стратегии фирмы *i*:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (11) |

где мы отмечаем, что объемы инновационной деятельности игрока зависят только от сопряженных переменных состояния , а не от самой переменной состояния *y*. Сопряженные переменные состояния должны удовлетворять дифференциальным уравнениям:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (12) |

Предполагая, что эти все агенты действуют симметрично, каждый агент имеет следующую стратегию по определению объемов инновационной деятельности:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (13) |

в которой .

## Патентная гонка

В этом разделе мы рассмотрим еще одну модель, представленную в статье Келлера [Keller, 4], где *N* фирмами уже оперирующими на рынке (incumbents) и одним новым участником (entrant), входящим на рынок. Все участники стремятся изобрести новый продукт и запатентовать их инновации, как можно скорее. Аналогично предыдущей модели Келлера в этой модели так же предполагаются стохастические отношения между объемами инвестиций и временем завершения инноваций.

Считая функцией опасности, получим вероятность того, что фирма *i* преуспеет раньше или к времени t,  . Условная вероятность того, что фирма *i* преуспеет в данный момент, учитывая, что она еще не успела этого сделать записывается, как . Этим обусловлено no-memory свойство экспоненциального распределения. Тогда, если представляет собой дату, когда фирма первая вводит инновацию, то

Наконец введем постоянные недисконтированные прибыли агентов: прибыль действующей фирмы *i* до того, как появится инновация, прибыль действующей фирмы *i*, если она выиграет патентную гонку, – прибыль действующей фирмы *i*, если он проиграет патентную гонку новой фирме (lose to entrant), а – другой действующей фирме (lose to incumbent), а – прибылью новой фирмы, когда она выигрывает патентную гонку.

Тогда ожидаемая прибыль действующих фирм *i* вычисляется, как

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

ожидаемая прибыль новой фирма, как

|  |  |
| --- | --- |
|  | (15) |

и, объединяя (14) и (15), имеем систему для R & D подыгры:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (16) |

Лучшая функция ответа (best response function, далее BRF-функция) действующей фирмы (*N*=1) в случае симметричности, задается, как:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (17) |

Из системы (16) получаем, что BRF-функция действующей фирмы *i* имеет положительный наклон, так же, как и для новой фирмы.

Из условий оптимальности получаем, что функция реакции действующей фирмы менее эластична, чем функции реакции новой фирмы. При этом, функции реакции равны только тогда, когда равны объемы инвестиций фирм. Также наблюдается, что равновесные расходов на НИОКР действующей фирмы должно быть меньше, чем у новой фирмы.

## Коалиционные игры с инновациями

В динамичной дифференциальной игре лицо, принимающее решения, может действовать самостоятельно или в сговоре с целью достижения своих собственных интересов. Как уже отмечалось ранее, в области дифференциальных игр теория сговора гораздо менее развита, чем обычная, и почти все экономические модели строятся в условиях отсутствия кооперации. В любом случае стоит сделать несколько важных замечаний имеющих место в играх со сговором.

Динамические игры с тайным сговором, где игроки используют угрозу наказания в качестве средства поддержания сговора, зависят от истории совершенных действий. Сговор с целью обеспечения монопольной прибыли практически повсеместно является незаконным, но в истории наблюдается чрезвычайно большое количество таких соглашений (относительно цен, характеристик продукта, рекламы, ограничений на вход, дележа рынка). Общая структура проблемы тайного сговора заключается в следующем. Всем игрокам было бы лучше, если бы каждый придерживался своих сговорных стратегий, но для каждого игрока лучше, если он будет в одностороннем порядке максимизировать его выигрыш (т.е. нарушать соглашение), при том, что все остальные игроки будут придерживаться договорных стратегий. Но поскольку действия наблюдаемы, игроки, узнав об обмане, либо расторгают соглашения, снижая выгоды для всех его участников, либо используют некие меры наказания, снижая прибыли нарушителя.

В своей статье Cai and Rajan [16] рассматривают двухступенчатую модель, в которой две фирмы сначала инвестируют в НИОКР, чтобы снизить предельные издержки производства, а затем либо конкурируют, либо вступают в сговор. Они заключают картельное соглашение о разделении сговорной прибыли. Если соглашение расторгается, то они возвращаются к дуополистической конкуренции. В данной модели показывается, что фирмы инвестируют больше в НИОКР на первом этапе при сговоре, чем в условиях конкуренции. Следовательно, социальное благосостояние может быть больше при сговоре, чем при конкуренции.

Итак, на первом этапе обе фирмы одновременно и без сотрудничества производят инвестиции с уменьшением затрат, на втором этапе они выбирают, вступать ли им в сговор. Инвестиции определяют предельные издержки, которые становятся общеизвестными в конце первого этапа. Примем предельные издержки производства обеих фирм за постоянные. Фиксированные издержки фирмы зависят от объемов инвестиций , при этом с ростом инвестиций снижаются предельные издержки () при уменьшающейся отдача от инвестиций .

Также считаем, что фирмы имеют одинаковую технологию по снижению затрат, поэтому . Инвестируя , фирма *i* берет на себя стоимость инвестиционного проекта при . Полагаем, что фирмы выбирают предельные издержки в соответствии с инвестиционными затратами , где .

Монопольная прибыль выше суммы прибыли двух фирм, действующих независимо друг от друга. Следовательно, у фирм есть стимулы к сговору о монопольном результате, зависящие от того, как фирмы делят чистую прибыль от сговора. При этом, ни одна фирма не должна получать меньше прибыли в условиях конкуренции, чем при сговоре. Для определения стратегий игроков используется NBS (см. 1.1) как результат дележа избыточной прибыли, где конкурентный результат является точка несогласия.

В случае сговора, уменьшение предельных издержек имеет два эффекта. Во-первых, это повышает монопольную прибыль. Во-вторых, это приводит к чрезмерному инвестированию в снижение издержек, поскольку каждая фирма пытается сдвинуть точку несогласия и захватить тем самым большую долю монопольной прибыли.

В заключение, сговор может обеспечить дополнительные стимулы для инвестиций в снижение затрат. Если стратегический эффект от переговоров будет достаточно большим, то, вполне возможно, общественное благосостояние будет больше при сговоре. Этот анализ еще раз подтверждает тот факт, что правительство должно быть осторожным в применении общепринятой антимонопольной стратегии к определенных отраслям, имеющим высокие эффекты от стратегических переговоров. Такие отрасли, вероятно, будут иметь следующие особенности: инвестиции в инновации имеют важную роль и трудноуправляемы; предельные издержки на инвестиции растут не очень быстро; спрос достаточно неэластичен.

# Ресурсная экономика

В этой главе будет представлен ряд моделей в области ресурсной экономики и экономики окружающей среды, в которых экономические агенты (фирмы или страны) используют природные ресурсы, принимая во внимание стратегии других агентов. Эти модели априори задаются дифференциальными играми. Естественным источником стратегической динамической конкуренции в таких моделях может является технический прогресс.

В современной экономической литературе о росте утверждается, что с учетом технологического прогресса производство продовольствия будет продолжать опережать спрос на несколько столетий, игнорируя ограниченность природных ресурсов. Оптимистические взгляды на роль технологии в преодолении дефицита ресурсов и ухудшения состояния окружающей среды, может, и позволят преодолеть проблему недопроизводства продовольствия, но в других отраслях производства прогнозы не столь радужны. Чтобы разобраться в вопросе подробнее, рассмотрим несколько моделей ресурсной экономики.

## Стохастическая игра с борьбой за инновации и добычей ресурсов

В этом разделе мы исследуем игру, обращающуюся к проблеме определения объемов инновационной деятельности в экономике, занимающейся добычей исчерпаемого природного ресурса, согласно модели, описанной у в Dockner, Jergensen, Van Long и Sorger [1].

В разделах 2.1 и 2.3 мы рассмотрели модели динамических игр, где дата успешного завершения инновации одним из олигополистов является случайной величиной с известной функцией распределения, которая зависит от объемов инновационной деятельности олигополистов. В этой модификации импортер невозобновляемого ресурса стремится разработать новую технологию, которая позволит заменить импортируемый ресурс. В этой инновационной игре мы ищем MNE (см. 1.1). Применяя принцип максимума Понтрягина, интерпретируем переменные состояния как соответствующие запасы ноу-хау фирм, которые были получены благодаря их деятельности в области НИОКР.

Дифференциальная игра ведется между страной-экспортером и импортером невозобновляемого природного ресурса. Последний, в свою очередь, стремится изобрести технологию, позволяющую стать менее зависимой от импортируемого ресурса. Ключевой проблемой в этой задаче является то, что экспортер должен учитывать стимулы импортера, чтобы попытаться разработать back-stop технологию[[2]](#footnote-2), которая позволит заменить истощающиеся импортируемы ресурсы. Добытчик ресурсов является монопольным поставщиком ресурса. Стратегическая взаимозависимость между двумя странами заключается в том, что стратегии относительно добычи ресурса производителем влияют на инновационную деятельность импортера и наоборот.

Обозначим страну, добывающую ресурсы, *P* и страну (или группу стран-импортеров) импортирующую их – *C*. Если *C* не имеет возможности внедрения технологии замещения, оптимальная политика добычи ресурса страной *P* будет вестись согласно модели Хотеллинга[[3]](#footnote-3), которую мы рассмотрим подробнее далее. По правилу Хотеллинга предельный доход должен со временем расти со скоростью, равной норме замещения, до тех пор, пока запасы не будут исчерпаны.

Страны *P* и *C* стремятся максимизировать свои функции национального благосостояния. Стоимость добычи единицы ресурса в стране *P* постоянна и равна *c >*0. Функция *p(q)* обратного спроса страны *C* на ресурс не изменяется со временем. Пусть темп добычи ресурса , где – верхняя граница нормы добычи *P*; остаточные запасы развиваются в соответствии с дифференциальным уравнением

|  |  |
| --- | --- |
|  | (18) |

Страна *C* пытается изобрести технологию, которая была бы идеальной заменой импортируемому ресурсу. Затраты на производство *b* одной единицы альтернативной продукции являются постоянной величиной, причем *b ≤ c*, что означает, что при использовании back-stop технологии спроса на ресурс со стороны страны *C* не будет. Обозначим через *u (t)* норму инновационной деятельности страны *C*.

Функциональная цель страны *P* – ее ожидается прибыль:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (19) |

где страна *P* при *t* > *τ* получает нулевую прибыль (поскольку спрос исчезнет). Предположим, что недисконтированная функция прибыли строго вогнута при . Функциональная цель страны *C* – ее благосостояние

|  |  |
| --- | --- |
|  | (20) |

в котором есть излишек потребителя страной *С* (при импорте *q*). Функция представляет собой расходы страны *C* на НИОКР. Предыдущие предположения позволяют ограничить наш интерес к стратегии *u* внутренними решениям.

Эта дифференциальная игра принадлежит классу кусочно-заданных детерминистических игр. Игра имеет только два режима: режим 0 активен до введения инновации страной *C*, и режим 1 – после. За время игры режим переключается не более одного раза. Время переключения - случайная величина *τ* с функцией распределения F (см. уравнение 7). Время переключения (hazard rate) определяется как . В игре имеется только одна переменная состояния s, динамика которой дается формулой 18.

Мы ищем стационарное MPNE. Построив пару ограниченных и непрерывно-дифференцируемых, удовлетворяющих уравнениям HJB, функций, получим стационарное MPNE, в котором для режима 0 имеем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (21) |
|  | (22) |

где представляет собой текущее значение постоянного потока потребительского излишка страны *С,* а – теневая цена для страны *P.* Прибегнув к количественному анализу в пространстве выигрышей, то есть в плоскости (, получаем следующие результаты. Изоклина V имеет положительный наклон при и становится вертикальной прямой при . Изоклина также имеет положительный наклон при , становится горизонтальной при и обращается в нуль при .



Рисунок 1: Фазовая диаграмма игры с борьбой за инновации и добычей ресурсов

Обе функции и являются строго возрастающими функциями оставшегося запаса. Равновесный путь ресурса находится из уравнения 18. Равновесный уровень деятельности двух стран уменьшает запас ресурса. Равновесный уровень добычи ресурса страной *P* удовлетворяет условиям и . Наконец, существует конечный момент времени, когда страна C преуспела в создании инновации (и остался некоторый запас ресурса), либо ресурс полностью израсходован.

## Игры с невозобновляемыми ресурсами

Начнем с простой модели эксплуатации невозобновляемого ресурса, такого как нефть, представленной Dockner, Jergensen, Van Long и Sorger [1]. В OL-версии такой игры характер решения зависит от того, как мы ограничиваем набор возможных стратегий, доступных каждому агенту. Этот вопрос важен при моделировании стратегий пользования общественных ресурсов, поскольку подчеркивается взаимозависимость агентов не только с точки зрения их выигрышей, но и с точки зрения того, что может сделать каждый агент с учетом действий остальных игроков.

Пусть и обозначают соответственно запас ресурса и объемы добычи ресурса представительным игроком в момент времени *t*. Предположим, если , то единственно возможный объем добываемого ресурса .

Каждый игрок имеет строго вогнутую и возрастающую функцию полезности *u*. Функциональная цель всех *N* игроков – их суммарная дисконтированная полезность с постоянным коэффициентом дисконтирования *r >* 0. Тогда задача оптимального управления состоит в максимизации:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (23) |

при условии:

С помощью функция Гамильтона и условий оптимальности: получаем оптимальный допустимый путь , удовлетворяющий условию трансверсальности , где - любой допустимый путь.

Для оптимального пути объемы добычи ресурса положительны и растут с ростом коэффициента дисконтирования. По правилу Хотеллинга предельная полезность также растет скоростью r. Заметим, что допустимый путь, исчерпывает запас, будет доминировать над путем, запасы неисчерпывающим, что приведет к увеличению потребления на некотором интервале времени.

Обратимся теперь к конкурентному решению. Равновесие в этом случае в решающей степени зависит от значений функций полезности *u* и количества игроков *N*, а также от набор доступных стратегий. В рамках модели свободного доступа к ресурсу у каждого игрока может быть стимул полностью исчерпать запас ресурсов за конечное время, поскольку каждый будет пытается захватить большую долю от общего запаса. Происходит это или нет, зависит от того, насколько сильно мы ограничиваем каждого игрока в выборе.

Интуитивно получаем, что при MPNE каждый игрок знает, что то, что он попытается потреблять меньше, чтобы защитить ресурс от исчезновения, побудит других игроков потреблять больше. Поэтому стимула охранять ресурс нет. Напротив, при OLNE учитываются пути других игроков, поэтому усилия игрока по защите ресурса не побуждают других извлекать больше.

Рассмотрим некоторые вариации базовой модели невозобновляемых ресурсов: так называемую проблему конца света и модель, в которой полезность напрямую зависит от запаса ресурса.

### Проблема «судного дня»

Рассмотрим игру, в которой каждый игрок может выбрать дату, когда для него игра заканчивается. Такую модель иногда называют проблемой конца света (doomsday problem). Название модели предполагает мрачную картину человека или сообщества, которое решает, что после какой-то даты ничего больше не имеет значения. Но есть иная интерпретация – случай, когда фирма разоряется и объявляет о завершении бизнес-деятельности.

В предыдущем разделе мы предположили, что временной интервал бесконечен, поэтому если запас ресурс был бы исчерпан в какое-то конечное время *T*, то после этого поток полезности каждого игрока стал бы равен *u(0)* и общий выигрыш каждого игрока был бы равен: . Но предположив, что каждый игрок может выбрать дату окончания игры , общий выигрыш становится равен .

В соответствии с только что изложенными предположениями, оптимальное решение должно быть в точке минимума средних издержек, а не в точке, где предельные издержки равны цене. Для компании, добывающей ресурсы, дополнительная добываемая единица ресурса сегодня означает, что в будущем он сможет добыть на одну единицу меньше. Если *r >* 0, то добыча ресурса падает до оптимального уровня с приближением к *T*.

### Модель с полезностью, зависимой от запаса ресурса

Во многих моделях добычи ресурсов функция полезности каждого игрока зависят не только от объемов добычи, но и от оставшегося запаса ресурса. Например, объем оставшегося ресурса может влиять на рекреационную стоимости ресурса или оказывать прямое влияние на прибыль фирмы (например, издержки по ловле рыбы могут зависеть от количества рыбы в водоеме).

В частном случае дисконтируемая прибыль *N* фирм записывается, как где – текущая прибыль фирмы при параметре , причем *x* обозначает эффективность использования ресурса и *a* – объемы использования. Уравнение состояния системы: , где эффективность использования ресурса зависит от объемов его использования, при положительном параметре *b.*

Так же, как и в большинстве моделей некооперативной эксплуатации ресурса, получаем, что скорость снижения эффективности ресурса при конкурентном MPNE выше, чем при кооперативном решении.

## Игры с возобновляемыми ресурсами

Возобновляемые ресурсы, такие как рыбные запасы и леса, рассматриваются в модели Dockner, Jergensen, Van Long и Sorger [1].

Пусть обозначает запас ресурса в момент времени *t* и – объемы добычи возобновляемого ресурса представительной страной. Переменная состояния системы в отличие от модели, представленной в разделе 3.2. зависит от – функции естественного роста –удовлетворяющей свойствам для некоторого – максимального уровня устойчивой добычи:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (24) |

Предположим, что , что означает, что потребители не слишком нетерпеливы и гарантирует, что равновесие сходится к строго положительному уровню добычи. При задании игры системой, аналогичной формуле 23 легко показать, что из кооперативного равновесного решения следует, что запас ресурса сходится к стационарному уровню , являющимся единственным решением уравнения .

Предположив, что , где получаем, что ни одна страна не имеет стимулов для того, чтобы полностью истратить ресурс. Из этого факта и из того факта, что в интеграле функциональной цели не фигурирует переменная запаса, кооперативное решение достигается с помощью OLNE, которое не является совершенным на подыграх. При конкурентной игре каждый будет пытаться захватить больше, потому что каждый знает, что уменьшение уровней добычи ресурса приведет к увеличению запаса ресурса *x* в будущем, что позволит конкурентам потреблять больше.

Если же предположить, что функция полезности линейна и что ни одна страна не может добыть ресурса больше максимального , то при выборе одним игроком уровня добычи , независимо от того, что делает другой игрок, запас ресурса опустится до нуля за конечный промежуток времени. Другими словами, второй игрок не может достичь устойчивого состояния с положительным запасом ресурса, если первый игрок является «жадным».

### Игры с ресурсами общего пула

Классическая модель извлечения ресурсов общего пула[[4]](#footnote-4) (далее CP), рассмотренная Лингом [Ling, 11], задается следующей системой:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (25) |

при условии , где – начальный запас.

Для установившееся OLNE, лежащего в области , сравнительная статика стационарного состояния относительно коэффициента дисконтирования: , откуда получаем, что с ростом коэффициента дисконтирования снижается добыча ресурса и его запас. Такое предположение может показаться нелогичным, но рост коэффициента дисконтирования увеличивает симметричные объемы добычи ресурса в текущем состояния и тем самым уменьшает запас ресурса.

Схожий результат мы видим в модели Амира [Amir, 12], рассматривающей двух агентов, конкурентно эксплуатирующих природный ресурс. Применяя метод стандартной индукции, в этой модели находится MNE, не являющееся оптимальным по Парето, что приводят к чрезмерному потреблению ресурса, поэтому равновесный запас ресурса сходится к глобально-устойчивому стационарному уровню.

### Трагедия общин

Рассмотрим модель Fesselmeyer и Santugini [5], изучающую экологические риски при добыче общественного ресурса, в частности, вопрос об усугублении трагедии общин. В этой модели агент не может снизить вероятность возникновения экологического риска, поэтому в отличие от предыдущей модели вместо функции естественного роста берется экзогенно заданный параметр доступности ресурса : .

Ожидание снижения возобновляемости ресурса и его качества имеет два эффекта на текущий уровень добычи ресурса и трагедию общин. С одной стороны, риск снижения возобновляемости заставляет агентов добывать меньше в настоящем. С другой стороны, риск ухудшения качества ресурса побуждает агентов добывать больше в настоящем. В частности, когда снижение возобновляемости важнее, чем риск ухудшения качества (риск вызывает сохранение), наблюдается значительное сокращение текущего уровня добычи ресурса и трагедия общин усугубляется. Причем сокращение добычи больше при социальном планировании, чем в конкурентных играх. В отличие от социального планировщика, хотя агенты и предпочитают добывать меньше ресурса, они не берут в расчет риск переэксплуатации ресурса другими агентами, и, таким образом, недостаточно снижают собственные уровни добычи. Это несоответствие и приводит к обострению трагедии общин.

### Биологические основы потребления возобновляемого ресурса

Рассмотрим модель динамики возобновляемых ресурсов, описанной Regev, Gutierrez, Schreiber и Zilberman [6], которая подчеркивает взаимосвязь между экономическим ростом и способностью общества поддерживать окружающую среду на устойчивом уровне. В основе модели лежит аналогия между добычей ресурса и развитием живых организмов в природе:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (26) |

где *M* - масса трофического уровня *i*, *h(s)* – доля требуемого спроса, *ν(D)* – цена использования единицы массы, зависящая от потенциального максимального уровня добычи на единицу *D*, *θ* - эффективность перехода с одного трофического уровня на другой.

Взяв за основу уравнение состояния трофического уровня 26 запишем систему переменных состояния, где *y* продукт и *x* ресурс, из которого он производится.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |

где *D* – уровень добычи, *С* – объем потребления. Первый член уравнения состояния представляет собой *yDh(s)* совокупная добыча ресурса всеми фирма при коэффициент потерь *θ*, и уровне добычи на душу населения *Dh(s)*,второй*𝜈Dy* – издержки производства *y* единиц, третий *Cy* – потребление. Уровень добычи ресурса можно представить в виде где α параметр технологии определяет, какая доля ресурса может быть использована.

Функциональной целью будет, максимизация потока выгод от потребления аналогично уравнению 25: .

Используя метод максимума Понтрягина найдем оптимальный уровень устойчивого состояния ресурса . Запишем функцию Гамильтона:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |

при условии , ; .

Построим фазовую диаграмму *(x, )* для проведения сравнительной динамики, где – уровень исчезновения ресурса, – неиспользованные мощности, – скорость регенерации равная коэффициенту дисконтирования, – конкурентное решение.



Рисунок 2: Фазовая диаграмма био-экономической модели потребления ресурса

Из сравнительной динамики получаем следующие результаты

(1) Вопреки общепринятому мнению о том, что инновации являются движущей силой роста доходов и запасов ресурса, технический прогресс, наоборот, может усугубить проблему сохранения ресурсов: в общем случае, если α достаточно мал по сравнению с максимально возможной *g*, ресурс не исчерпается при любом уровне добычи и спроса. Улучшение технологии сбора α может привести к исчезновению ресурса (это также зависит от коэффициента дисконтирования).

(2) Катастрофический эффект высоких коэффициентов дисконтирования: снижение числа фирм уравновешивается увеличением коэффициентом дисконтирования, что повышает уровень использования ресурсов человеком.

(3) Повышение эффективности использования урожая *θ* способствует увеличению уровней использования ресурса и для конкурентного решения может быстро привести к исчезновению ресурса.

(4) Увеличение издержек производства *ν* уменьшает использование ресурса. С точки зрения политики, можно считать, что рост издержек производства произошел из-за увеличения налоговой ставки, введенной для сохранения запаса ресурсов.

(5) Деградация окружающей среды имеет очевидный эффект на динамику потребления и ресурсов. Ресурсная база часто разрушается из-за неконтролируемых действий потребителей ресурса, что ведет к увеличению вероятности исчезновения ресурса.

Также, согласно этой модели, конкурентоспособные рынки не могут обеспечить эффективный механизм ценообразования ресурсов со свободным доступом, что ведет к переэксплуатации ресурсов по причине того, что агенты пренебрегают теневыми издержками потребления ресурсов. Эта модель указывает на необходимость одновременного управления технологией и ставкой дисконтирования. Регулирование добычи ресурса может быть достигнуто с помощью налога Пигу. Очевиден конфликт экологии и экономики: приходится выбирать между устойчивым управлением возобновляемыми ресурсами или переэксплуатацией ресурсов.

## Конкуренция за ограниченный ресурс и его распределение между игроками

Рассмотрим модель Eso, Nocke и White [8], в которой фирмы конкурируют за ограниченный природный ресурс. Равновесие на этом рынке находится по Курно при ограниченных производственных мощностях. Пусть – общая доступная мощность, причем мощности фирм определяются на аукционе.

*P (Q) –* обратная функция спроса, где *Q* – общий уровень производства всех фирм. Издержки фирмы *i* по созданию *q ≤ k* единиц равны *c(q)*, причем *c(q)=*∞ при *q > k*. Прибыль фирмы *i* при производстве *q ≤ k* единиц ресурса и общем объеме производстве остальных фирм записывается, как .

В этой модели доказывается, что эффективное распределение производственных мощностей может превратить конкурирующую отрасль в отрасль с несовершенной конкуренцией. Распределение ресурса между фирмами будет симметричным, только если *K* будет достаточно мало (это наиболее социально-эффективная точка). В противном случае оно будет асимметричным, с одной крупной фирмой, имеющей большую мощность и *N-1* небольшими фирмами. Неожиданно, но увеличение доступной мощности *K*, может привести к сокращению общего объема производства и излишка потребителя.

С ростом спроса выше порога *K* производственных мощностей растут цены на продукцию, но отрасль остается симметричной (). Напротив, сокращение спроса приводит к тому, что все фирмы, кроме одной, сокращают свою продукцию (), а оставшаяся фирма поглощает избыточную мощность . Общее производство в таком случае ниже, чем при равновесии по Курно, поэтому социальный планировщик должен ограничивать количество *K*, продаваемое на аукционе.

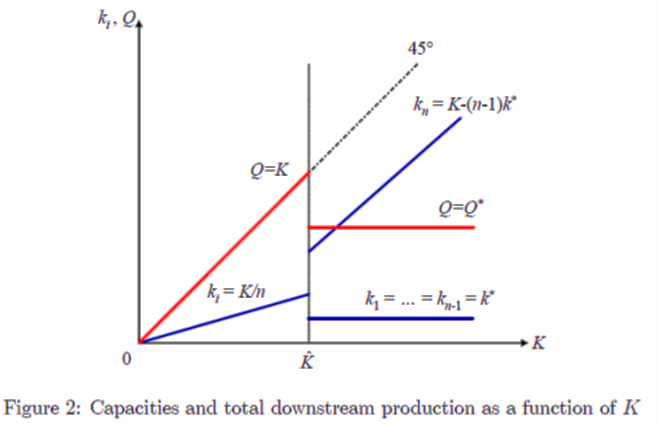


Рисунок 3: Объемы производства на конкурентном рынке ресурсов, зависящие от производственных мощностей

Попытка увеличить доступность производственных мощностей может стать ошибочной политикой на таких рынках, поскольку может привести к сокращению объема выпуска и изменению структуры отрасли. В частности, даже небольшой спад спроса может привести к относительно большому падению объемов производства и к тому, что отрасль станет более асимметричной. Вместо того, чтобы поощрять вход новых фирм на рынок, было бы эффективнее изменить метод распределения ресурса, что подводит нас к следующему пункту этого раздела.

### Распределение ресурса на аукционе

На практике, когда ресурсы распределяются между производителями (например, посредством аукциона или торга между фирмами) интересы потребителей не представлены.

В контексте модели, представленной в этом разделе, может использоваться аукцион Викри-Кларка-Гровса (VCG)[[5]](#footnote-5). В этом случае, после того, как аукционист выбирает распределение, которое максимизирует суммарную оценку покупателей, каждый из них оплачивает разницу между общей оценкой других покупателей в гипотетическом случае, когда товары были распределены между ними эффективно (исключая самого участника) и оценкой в фактически выбранном аукционистом случае.

Существуют и другие формы аукциона, которые также дают эффективное распределение мощностей в контексте данной модели. В частности, одним из таких механизмов является аукцион единой цены[[6]](#footnote-6) (впервые проанализированный Уилсоном (1979)). Еще одним подходящим механизмом являются динамические аукционы, где каждая единица мощности продается с аукциона отдельно. В каждый момент времени одна единица мощности продается на аукционе без дисконтирования между периодами. Этот механизм дает эффективный результат отличный от других аукционов. На самом деле, если *K* достаточно велико и существует постоянная отдача от масштаба, то результат будет даже более желательным, чем полученный другими механизмами. Если при постоянной отдаче от масштаба VCG аукцион будет распределять всю имеющуюся емкость одной фирме, то чтобы получить тот же результат на динамическом аукционе, одной фирме пришлось бы перебивать цену всех остальные фирм для приобретения каждой единицы мощности. Поскольку предельная прибыль от каждой дополнительной единицы мощности уменьшается, то крупной фирме будет невыгодно приобретать ту же мощность, и монополия не будет поддерживаться.

### Распределение ресурса через лотереи

Распределение ресурсов через лотереи довольно распространено на государственных уровнях, отчасти оттого, что оно считается справедливым, поскольку каждый участник может равновероятно получить единицу мощности. Лотереи, изучение их оптимальных стратегий ценообразования может иметь большие политические последствия. Общим предположением является то, что цена участия в лотерее равна нулю, несмотря на то, что согласно эмпирическим наблюдениям агентства обычно взимают положительные цены при управлении лотереями. Решение игрока участвовать в лотерее основано на теореме об ожидаемой полезности, и оно будет сделано только, если ожидаемый выигрыш неотрицателен.

Существует класс лотерей, называемый регулярными лотереями, в которых каждый агент имеет такую же вероятность быть награжденным единицей мощности, а платежи анонимны, то есть зависят только от реализации лотереи, а не от информации известной участникам. Ожидаемый доход и ожидаемый потребительский излишек зависят от количества участников лотереи. Очевидно, что в таком случае ожидаемые доход для всех агентов одинаков. Поэтому регулярная лотерея служит эталоном для оценки альтернативных дискриминирующих механизмов.

Согласно модели, представленной в работе Линга [Ling, 11] существует два типа лотерей, позволяющих определить оптимальную цену: UP-лотереи AP-лотереи. Лотерея UP (user-pay) характеризуется тарифом *P*, который выплачивают исключительно участники, получившие ненулевые мощности, в то время как лотерея AP (all-pay) характеризуется невозмещаемым тарифом *T*, который оплачивается всеми без исключения. Оптимальные цены в AP лотереях увеличиваются по мере увеличения количества товара. Хотя на первый взгляд это может показаться противоречивым, есть прямое объяснение: когда увеличится доступное количество товара, больше людей готовы войти в лотерею в лотерею AP, и агентство может повысить цену, чтобы отобразить участников с более низкими стимулами получения единицы мощности для поддержания эффективности. Очевидно, что разные форматы лотереи могут иметь существенные различия в распределении: так, например, неудачливые участники AP лотереи потерпят убытки, в то время в UP лотерее как никто не пострадает.

# Формулировка модели: дифференциальная игра с процессными инновациями и возобновляемым природным ресурсом.

Разобрав достаточно большое количество различных моделей, мы можем перейти к формулировке и решению задачи оптимального управления в интересующей нас динамической модели.

Пусть на рынке возобновляемых ресурсов (см.3.3) оперируют *N* растущих фирм, которые имеют потенциал для еще большего роста, но не могут его реализовать из-за ограничений по количеству доступного им ресурса. Все фирмы производят один стандартизованный товар – обработанный ресурс. Для упрощения подсчетов будем считать, что *N*=2 и фирмы не принимают решения о входе/выходе с рынка.

Наш анализ будет проводиться в предположении, что поведение фирм строго конкурентно, т. е. исключается любая форма сотрудничества в области НИОКР, поэтому наши интересы будут сосредоточены исключительно на взаимосвязи между структурой рынка и результатами инноваций.

Обе фирмы могут инвестировать в процессные инновации, направленные на снижение издержек производства единицы ресурса. Фирма может, как использовать собственные инновации, так и адаптировать инновации конкурентов. Фирма, лидирующая в гонке за инновации, после окончания каждого периода решает, продолжать инвестировать в инновации или остановиться. Обобщим эти предположения, задав переменную перетока технологической информации (positive technological spillover).

Мы рассматриваем дифференциальную игру на непрерывном интервале времени *t* ∈ [0; ∞). В каждый момент времени фирма выбирает объемы производства и инвестиций в процессные инновации. Дуополистическое равновесие находим аналогично Курно.

Спрос на ресурс задается линейной функцией ,

Если текущая стоимость инвестирования в процессные инновации задается как , текущая прибыль определяется, как

|  |  |
| --- | --- |
|  | (29) |

где *c* - стоимость производства *q* единиц ресурса фирмой, *k* указывает на деятельность фирмы *i,* направленной на снижение себестоимости продукции, а *β* - положительный параметр, который является обратной мерой инноваций процесса, поскольку инвестирование в любые виды НИОКР подразумевает снижение отдачи от инновационной деятельности.

Скорость изменения предельных издержек *i* во времени линейна, коэффициент амортизации, одинаковый для обеих фирм:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (30) |

Функциональная цель каждой фирмы – максимизация прибыли:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (31) |

Запишем уравнения состояния системы, где s – запас ресурса, причем возобновляемого, т.е. *g* аналогично моделям, представленным в главе 3 представляет собой функцию роста и имеет те же свойства (т.е. ). Причем начальные условия означают цену до введения инноваций в каждый момент времени и начальный запас ресурса.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (32) |
|  | (33) |

при условии трансверсальности:

Соответствующая функция Гамильтона в таком случае будет равна:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (34) |

Запишем условия первого порядка фирмы *i*

|  |  |
| --- | --- |
|  | (35) |
|  | (36) |

Откуда выводим значения переменных оптимального контроля

|  |  |
| --- | --- |
|  | (37) |
|  | (38) |

Сопряженные уравнения состояния, отражающие эффект обратной связи:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (39) |
|  | (40) |
|  | (41) |

В этой игры с фирмами, инвестирующими только в инновационные процессы, можно найти OL- равновесие Нэша, которое также будет совершенным на подыграх, чтобы упростить вычисления используем принцип симметричности, который позволяет найти OL-решение с управлением независящим от истории.

|  |  |
| --- | --- |
|  | (42) |
|  | (43) |
|  | (44) |
|  | (45) |

Это позволит нам записать уравнения (31), (32), (33) в виде

|  |  |
| --- | --- |
|  | (46) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (47) |

|  |  |
| --- | --- |
|  | (48) |

Подставим (44) в уравнение состояния (47):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (49) |

Тогда функция Гамильтона будет выглядеть следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (50) |

Таким образом, мы сформулировали экономическую модель, принятия решений на рынке с ограниченным возобновляемым ресурсом и динамические процессы, в ней происходящие, которая позволит нам определить взаимосвязь между запасом ресурса и стимулами экономических агентов инвестировать в инновации.

Ни одна страна не должна иметь стимулов для того, чтобы полностью истратить ресурс. Но при конкурентной игре каждый будет пытаться произвести больше, чтобы не позволить конкурентам потреблять больше в настоящем, что приведет к истончению запасов ресурса.

При дальнейшей работе с моделью мы сможем проверить гипотезу, предложенную Dockner, Jergensen, Van Long и Sorger [1] о том, что с ростом коэффициента дисконтирования снижается добыча ресурса и его запас. Такая гипотеза было сделано в предположении, что агенты максимизируют полезность, в нашей же модели фирмы максимизируют прибыль, поэтому вопрос об устойчивом уровне добычи ресурса остается открытым.

# Заключение

Подводя итог, кратко опишем достигнутые результаты. Разобрав теоретические основы динамической оптимизации и дифференциальных игр, мы перешли к детальному разбору различных моделей со специфическими особенностями, что позволило нам создать модель дуополии на рынке ограниченных природных ресурсов, которая может быть задана системой дифференциальных уравнений.

Модели, которые мы рассмотрели можно разделить на два типа: модели описывающие инновационную деятельность фирм и модели ресурсной экономики. Так к моделям первого типа отнесем стохастическую модель конкуренции за инновации (в т. ч. и с добычей ресурсов), модель патентной гонки, коалиционную модель. Ко второму типу отнесем линейно-квадратичная дифференциальная игра с добычей ресурсов, игры с возобновляемыми и невозобновляемыми ресурсами, в частности, модель с полезностью, зависимой от запаса ресурса, а также модель конкуренции за ограниченный ресурс и его механизмы его распределения через лотерею или аукцион. Отдельно отметим, что нами были рассмотрены биологические основы потребления возобновляемого ресурса и трагедия общин.

Дальнейшие исследования в этой области позволят мне расширить созданную модель дуополии, например, увеличив количество игроков, разрешив сговор, введя инновации, зависящие от случайных величин или позволив фирме инвестировать не только в технологии, снижающие издержки, но и, например, в создание альтернативного ресурса, который позволит уменьшить зависимость от ограниченного ресурса. Также можно изучить возможные оптимальные пути для социального планировщика, изменив функциональную цель экономического агента на максимизацию полезности производителя или общественного благосостояния, а не прибыль фирмы.

Наконец, мы собираемся применить дополненную модель к рынку возобновляемого ресурса, отличающегося от других – воды. Этот ресурс имеет такие особенности, как, например, высокие социальные издержки недопроизводства и зависимость от территории и инфраструктуры. Часто рынок воды в большой степени контролируется государством. Это приводит нас к вопросу, всегда ли государство эффективно управляет рынком воды.

Нехватка продовольствия и воды - две глобальные проблемы, с которыми столкнулось человечество. Сегодня на сельское хозяйство приходится более 70% забора воды и этот показатель достигает 95% в развивающихся странах [25]. Часто инвестиции в инновации приводят к более высоким ценам на воду, однако, при этом не достигается весь потенциал эффективности этого ресурса. Экономические агенты (фермеры) могли бы эффективнее использовать уже установленные технологические системы, внедрить последние инновации, повысить собственную профессиональную квалификацию и т. д. Все вышесказанное еще раз подтверждает, что перед нами множество альтернативных вариантов исследования.

# Список литературы

1. Dockner E. J.; Jergensen S.; Van Long N.; Sorger G. (2000) Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge University Press
2. Nowak A. S.; Szajowski K. (2004) Advances in Dynamic Games: Applications to Economics, Finance, Optimization, and Stochastic Control Annals of the International Society of Dynamic Games
3. Cellini R.; Lambertini L. (2007) Product and process innovations in differential games with managerial firms
4. Keller A. A. (2007) Stochastic Differential Games and Queueing Models to Innovation and Patenting, Contributions to Game Theory and Management 1, 245–269
5. Fesselmeyer E.; Santugini M. (2012) Strategic Exploitation of a Common Resource under Environmental Risk
6. Regev U.; Gutierrez A.P., Schreiber S.J., Zilberman D. (1998) Biological and economic foundations of renewable resource exploitation Ecological Economics 26 (1998) 227–242
7. Lambertini L.; Mantovani A. (2005) Process and Product Innovation: A Differential Game Approach to Product Life Cycle
8. Eso P.; Nocke V.; White L. (2007). Competition for Scarce Resources. RAND Journal of Economics 41, no. 3, p. 1–28.
9. Itaya Y. (1999); Dynamic optimization and differential games with applications to economics. Journal of Economic Theory 137, p. 1-16
10. Yeltekin S.; Cai Y.; Judd K. L. (2015) Computing Equilibria of Dynamic Games Applied Mathematics and Computation 269, p. 1-31
11. Ling C. (2010) Three essays on differential games and resource economics International Economic Review 4, p. 2-99.
12. Amir R. (2000) Stochastic Games in Economics and Related Fields: An Overview
13. Kirman A. P.; Sobel M. J. (1974) Dynamic Oligopoly with Inventories. Econometrica 42, no. 2, p. 279-287
14. Ho T.-H.; Savin S.; Terwiesch C. (2002) Managing Demand and Sales Dynamics in New Product Diffusion under Supply Constraint. Management Science 48, no. 2, p. 187-206
15. Goettler R. L.; Gordon B. R. (2012) Competition and Product Innovation in Dynamic Oligopoly. Quantitative Marketing and Economics
16. Cai H.; Rajan U. (2004) Incentive Compatible Collusion and Investment
17. Chintagunta P. K.; Rao V. R. (1996) Pricing Strategies in a Dynamic Duopoly: A Differential Game Model. Management Science 42, no. 11, p. 1501-1514
18. Goettler R.; Gordon B. (2008) Durable Goods Oligopoly with Innovation: Theory and Empirics
19. Utterback J. M.; Abernathy W. J. (1975) A Dynamic Model of Process and Product Innovation. OMEGA The Int. Journal of Management Science 3, no. 6, p. 639-656
20. Benoit J. P.; Krishna V. (1987) Dynamic Duopoly: Prices and Quantities. Review of Economic Studies LIV, p.23-35
21. Wutich A.; Brewis A. (2014) Food, Water, and Scarcity: Toward a Broader Anthropology of Resource Insecurity. Current Anthropology 55, no. 4, p. 444-468
22. Levidow L.; Zaccaria D.; Maia R.; Vivas E.; Todorovic M.; Scardigno A. (2014) Improving water-efficient irrigation: Prospects and difficulties of innovative practices. Agricultural Water Management 146, p. 84–94
23. Rijsberman F. R. (2006) Water scarcity: Fact or fiction? Agricultural Water Mgmt. 80, p. 5–22
24. Lopes S. O.; Pereira R. M. S.; Fontes F. A. C. C., de Pinho M. d. R.; Machado G. J. (2014) Optimal Control of the Irrigation Problem: Characterization of the Solution. Procedia Technology 17, p. 699 – 704
25. Podimata M. V.; Yannopoulos P. C. (2015) Evolution of Game Theory Application in Irrigation Systems. P. C. Agriculture and Agricultural Science Procedia 4, p. 271 – 281

1. Оба термина относятся к классу статистических моделей, позволяющих оценить вероятность наступления события, называемому анализом выживаемости. Если считать, что обозначает момент «смерти» (покидания объектом совокупности), и означает вероятность «смерти» в заданном временном интервале, то есть функция выживаемости, описывающая вероятность «смерти» некоторое время спустя после момента *t*. Функция риска (или интенсивности отказов) – это вероятность того, что элемент, оставшийся в совокупности к началу соответствующего интервала, покинет совокупность («умрёт») в течение этого интервала. [↑](#footnote-ref-1)
2. Back-stop технология означает, что по мере того, как ограниченный ресурс, подвергаемый слишком высоким уровням использования, становится дорогим, альтернативные ресурсы становятся сравнительно дешевыми. В долгосрочной перспективе эта теория основывается на вере в то, что технический прогресс позволит резервным (back-stop) ресурсам быть практически неограниченными (теория природы как «рога изобилия»), откуда следует, что развитие новых технологий будет нужно, чтобы сделать отрасль затрато-эффективной. Эту идею поддерживал Р. Солоу, который утверждал, что 4/5 экономического роста в США можно отнести к технологическому развитию (1/5 относится к расширению рабочей силы и капитала). [↑](#footnote-ref-2)
3. Модель Хотеллинга (линейного города) — модель пространственной дифференциации рынка с монополистической конкуренцией, описывающая потребительские предпочтения и границы раздела рынка, предложенная впервые Гарольдом Хотеллингом в 1929 году. [↑](#footnote-ref-3)
4. Ресурс с общим пулом (common-pool resource) представляет собой тип ресурсную систему (например, оросительная система или рыболовные угодья), размер или характеристики которой делают ее дорогостоящей, но не невозможной для исключения из потребления потенциальными бенефициарами. В отличие от чистых общественных благ, CP-ресурсы (например, вода или рыба) имеют проблему перегруженности или чрезмерного использования, поскольку они ограничены. CP-ресурсы состоят из ключевого ресурса (core resource), который должен охраняться, чтобы обеспечить пользование ресурса в будущем, и периферийного ресурса (extractable fringe units), который может добываться или потребляться. [↑](#footnote-ref-4)
5. Аукцион Викри-Кларка-Гровса (Vickrey-Clarke-Groves) является аукционом закрытой формы. Участники делают ставки в соответствии со своими оценками товара, не зная о ставках других игроков. Такая система социально-оптимальна, поскольку она налагает на каждого участника цену ущерба, причиняемого другим участникам торгов, тем самым дает игрокам стимул предлагать свои истинные оценки позиций, обеспечивая оптимальную стратегию для каждого участника торгов. [↑](#footnote-ref-5)
6. Аукцион единой цены представляет собой аукцион, в котором фиксированное количество одинаковых единиц однородного товара продается по той же цене. Каждый участник торгов может подавать заявки, обозначая как количество желаемых единиц, так и цену, которую он готов заплатить за единицу. Затем аукционист обслуживает участника с самой высокой ценой за единицу продукции, затем со второй самой высокой ценой и т. д. до тех пор, пока распределяемый товар не будет исчерпан. После этого все участники торгов платят за единицу по самой низкой выигрышной ставке (по которой покупатель получает не меньше одной единицы товара) независимо от их фактической ставки. [↑](#footnote-ref-6)