

Математическое ожидание и ковариационная матрица случайного вектора. Портфели ценных бумаг

Задача 1. Пусть $r = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$ — вектор доходностей трех ценных бумаг. Математическое ожидание и ковариационная матрица вектора приведены ниже

$$\mathbb{E}[r] = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.10 \\ 0.15 \end{bmatrix}, \quad V(r) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

Рассматривается портфель, составленный из данных ценных бумаг с долями

$$w = [0.2 \ 0.3 \ 0.5]^T.$$

(a) Найдите математическое ожидание доходности этого портфеля.

(b) Найдите дисперсию доходности этого портфеля.

Ответы: (a) $\mathbb{E}[w^T r] = w^T \mathbb{E}[r] = 0.115$, (b) $V(w^T r) = w^T V(r) w = 0.509$.

Задача 2. Пусть $r = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$ — вектор доходностей трех ценных бумаг. Математическое ожидание и ковариационная матрица вектора приведены ниже

$$\mathbb{E}[r] = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.20 \\ 0.30 \end{bmatrix}, \quad V(r) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & -0.1 \\ 0.2 & 1.0 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

Рассматривается портфель, составленный из данных ценных бумаг с долями

$$w = [0.1 \ 0.4 \ 0.5]^T.$$

(a) Найдите математическое ожидание доходности этого портфеля.

(b) Найдите дисперсию доходности этого портфеля.

Ответы: (a) $\mathbb{E}[w^T r] = w^T \mathbb{E}[r] = 0.24$, (b) $V(w^T r) = w^T V(r) w = 0.506$.

Задача 3. Пусть $r = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$ — вектор доходностей трех ценных бумаг. Математическое ожидание и ковариационная матрица вектора приведены ниже

$$\mathbb{E}[r] = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.20 \\ 0.30 \end{bmatrix}, \quad V(r) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 1.0 & -0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

Рассматривается портфель, составленный из данных ценных бумаг с долями

$$w = [0.7 \ 0.2 \ 0.1]^T.$$

(a) Найдите математическое ожидание доходности этого портфеля.

(b) Найдите дисперсию доходности этого портфеля.

Ответы: (a) $\mathbb{E}[w^T r] = w^T \mathbb{E}[r] = 0.14$, (b) $V(w^T r) = w^T V(r) w = 0.366$.

Задача 4. Пусть $r = [r_1 \ \dots \ r_7]^T$ — вектор доходностей семи ценных бумаг. Математическое ожидание и ковариационная матрица вектора приведены ниже

$$\mathbb{E}[r] = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.10 \\ 0.15 \\ 0.20 \\ 0.25 \\ 0.30 \\ 0.35 \end{bmatrix}, \quad V(r) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.0 & -1.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 3.5 \end{bmatrix}.$$

Рассматривается портфель, составленный из данных ценных бумаг с долями

$$w = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T.$$

(a) Найдите математическое ожидание доходности этого портфеля.

(b) Найдите дисперсию доходности этого портфеля.

Ответы: (a) $\mathbb{E}[w^T r] = w^T \mathbb{E}[r] = 0.18$, (b) $V(w^T r) = w^T V(r) w = 0.308$.

Задача 5. Пусть $r = [r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \ r_5]^T$ — вектор доходностей 5-ти ценных бумаг,

$$\mathbb{E}[r] = [5 \ 10 \ 20 \ 30 \ 40]^T,$$

$$D r_1 = 0, \ D r_2 = 10, \ D r_3 = 20, \ D r_4 = 30, \ D r_5 = 40,$$

$$\text{corr}(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.3 & -0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 1 & 0.3 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.3 & 1 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & -0.2 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Найдите ковариационную матрицу вектора r .

Найдите ожидаемую доходность портфеля и его дисперсию, если вектор долей ценных бумаг в портфеле равен

(b) $w = [0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2]^T$,

(c) $w = [0.0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4]^T$,

(d) $w = [0.0 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]^T$.

Ответы:

(a) $V(r) \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.00 & 4.24 & -3.46 & 2.00 \\ 0 & 4.24 & 20.00 & 7.34 & -5.65 \\ 0 & -3.46 & 7.34 & 30.00 & 10.39 \\ 0 & 2.00 & -5.65 & 10.39 & 40.00 \end{bmatrix},$

(b) $\mathbb{E}[w^T r] = 21$, $D(w^T r) \approx 5.18$,

(c) $\mathbb{E}[w^T r] = 30$, $D(w^T r) \approx 12.59$,

(d) $\mathbb{E}[w^T r] = 20$, $D(w^T r) \approx 6.58$.

Задача 6. Пусть r_1 , r_2 и r_3 — годовые доходности трех рисковых финансовых инструментов. Пусть w_1 , w_2 и w_3 — доли, с которыми данные инструменты входят в

портфель инвестора. Считаем, что $\sum_{i=1}^3 w_i = 1$ и $w_i \geq 0$ для всех $i = 1, 2, 3$. Пусть

$r = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$, $\mathbb{E}[r] = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$, $V(r) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$. Параметры $\{a_i\}$ и $\{c_{ij}\}$ известны.

- Чему равна годовая доходность портфеля?
- Найдите математическое ожидание годовой доходности портфеля.
- Докажите, что дисперсия доходности портфеля равна $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i c_{ij} w_j$.
- Для случая $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.5$, $w_3 = 0.4$, $\mathbb{E}[r] = [0.10 \ 0.06 \ 0.05]^T$,

$V(r) = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & -0.005 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ -0.005 & 0 & 0.0025 \end{bmatrix}$ найдите математическое ожидание и дисперсию доходности портфеля.

Задача 7. Пусть $r = [r_1 \ r_2 \ r_3]^T$ — вектор доходностей трех ценных бумаг, математическое ожидание и ковариационная матрица которого приведены ниже:

$$\mathbb{E}[r] = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.20 \\ 0.30 \end{bmatrix}, \quad V(r) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 1.0 & -0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

- Найдите математическое ожидание и дисперсию портфеля, составленного из этих ценных бумаг с долями $w = [0.6, 0.3, 0.1]^T$.
- Найдите математическое ожидание и дисперсию портфеля, составленного из этих ценных бумаг с долями $w = [0.7, 0.1, 0.2]^T$.
- Сравните портфели из пунктов (а) и (б) с точки зрения их ожидаемой доходности и дисперсии (риска портфеля). Какой из портфелей (а) или (б) является более предпочтительным с точки зрения инвестора?
- Постройте портфель с той же доходностью, что и портфели (а) и (б), имеющий наименьшую возможную дисперсию (риск портфеля).

Ответы: (а) $\mathbb{E}[w^T r] = 0.15$, $D(w^T r) = 0.3630$,

(б) $\mathbb{E}[w^T r] = 0.15$, $D(w^T r) = 0.3670$,

(с) Портфель (а) предпочтительнее портфеля (б), так как портфель (а) имеет меньший риск.

(д) $w_{\text{opt}} = [0.6466, 0.2069, 0.1466]^T$, $\mathbb{E}[w_{\text{opt}}^T r] = 0.15$, $D(w_{\text{opt}}^T r) = 0.3504$.

Код программы в системе MATLAB для решения пункта (д):

```
function [w_opt_port, D_opt_port] = get_opt_port(E, V, E_port)
n = length(E);

% Начальная точка в процессе оптимизации.
w0 = (1/n) * ones(n,1);

%
% Параметры для функции fmincon.
fun = @(w) get_port_var(w, V);
x0 = w0;
A = [];
b = [];
```

```
Aeq = [ones(1,n);
      E'];
beq = [1; E_port];
lb = zeros(n,1);
ub = ones(n,1);
nonlcon = [];
options = optimset('Algorithm', 'interior-point', 'Display', 'off');

%
% Минимизация дисперсии портфеля при помощи функции
% fmincon.
[w_opt_port, D_opt_port] = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options);
%

function [D] = get_port_var(w, V)
D = w' * V * w;
```

Применение функции `get_opt_port` для решения пункта (d):

```
E = [0.1, 0.2, 0.3]';
V = [0.5, 0.2, 0.1; 0.2, 1.0, -0.1; 0.1, -0.1, 1.5];
[w_opt_port, D_opt_port] = get_opt_port(E, V, 0.15)
```

`w_opt_port` =

```
0.6466
0.2069
0.1466
```

`D_opt_port` =

```
0.3504
```