

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА и  
ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ  
при Президенте Российской Федерации»**

**ИНСТИТУТ ЭМИТ  
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
ЭКОНОМИКА И ФИНАНСЫ**

**Оценка моделей ценообразования  
финансовых активов**

студент-бакалавр  
Касьянова Ксения Алексеевна  
Группа ЭО-15-01

**МОСКВА  
2018 г.**

## Оглавление

Введение . . . . .	3
1 CAPM. . . . .	4
1.1 Сбор и первичная обработка данных . . . . .	4
1.2 Обоснование выбора безрискового актива, рыночного портфеля . . . . .	6
1.3 Построение модели . . . . .	6
1.4 Оценка модели . . . . .	6
1.5 Проверка качества модели . . . . .	8
1.6 Выводы . . . . .	8
2 АРТ. . . . .	9
2.1 Обоснование выбора факторов для многофакторной модели . . . . .	9
2.2 Оценка моделей. . . . .	10
2.3 Проверка качества модели . . . . .	10
2.4 Выводы . . . . .	11
Заключение . . . . .	12
Список литературы . . . . .	12

## Введение

Существуют разные подходы к моделированию ценообразования рискованных финансовых активов. В данной работе нас интересуют CAPM (Capital Asset Pricing Model) и APT (Arbitrage Pricing Theory) модели. В основе этих моделей лежит портфельная теория и идея диверсификации рисков.

Целью данной работы является оценка доходности финансового актива при помощи моделей CAPM и APT.

Задачи:

- 1) Сбор, первичная обработка, визуализация данных
- 2) Теоретическое обоснование частоты разбивки данных и периода исследования.
- 3) Обоснование выбора безрискового актива, рыночного портфеля, а также факторов для APT модели
- 4) Непосредственная оценка моделей, проверка качества и стабильности полученных моделей

# 1 CAPM

Напомним ключевые моменты CAPM. Рациональные инвесторы должны выбирать портфель, находящийся на эффективной границе. Диверсификация снижает риск, что означает, что чем больше число акций в нашем портфеле, тем ближе мы можем приблизиться к эффективной границе.

Если портфель включает в себя также безрисковый актив, то точка, где capital market line (CML) касается границы портфелей с минимальной дисперсией доходности, определяет портфель, где компромисс между риском и доходностью самый выгодный (т.е. коэффициент  $\beta$  для SML максимальный).

$$E(R_p) = R_f + \frac{\sigma_p}{\sigma_m}(E(R_m) - R_f) \quad (1.1)$$

где  $\frac{\sigma_p}{\sigma_m}$  - отношение риска портфеля к рыночному риску.

CAPM позволяет обобщить это соотношение для любой акции или портфеля акций, построив security market line (SML), также имеющую линейную зависимость риска и доходности:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_m) - R_f) \quad (1.2)$$

где  $\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$  - показатель, измеряющий соотношение между риском и доходностью,  $E(R_i)$  - ожидаемая доходность от портфеля или акции при фиксированной  $\beta_i$ .

## 1.1 Сбор и первичная обработка данных

Данные, на основе которых будут построены наши модели - ежедневные цены закрытия обыкновенных акций компании General Electric, торгуемых на Нью-Йоркской фондовой бирже за 2000-2017 гг. Эти данные были взяты из базы данных Yahoo [6]. Ежедневные данные лучше отражают динамику волатильного актива. При выборе периода исследования надо понимать, что компания, находящаяся на рынке уже 126 лет, сейчас сильно отличается от самой себя 20-30 лет назад. Это означает, что выбор слишком длинного периода исследования приведет к нестационарности рядов. Напротив, выбор слишком короткого периода приводит к ошибкам, вызванным использованием недостаточного числа данных.

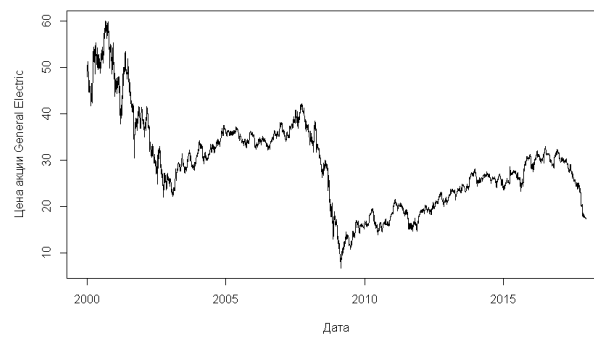


Рисунок 1.1 — Цены закрытия обыкновенных акций за 2000-2017 гг.

Для нашей модели нам требуется рассчитать доходность акции (портфеля из одной акции) по формуле:

$$R_p = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad (1.3)$$

где  $P$  - цена закрытия,  $t$  - день торгов.

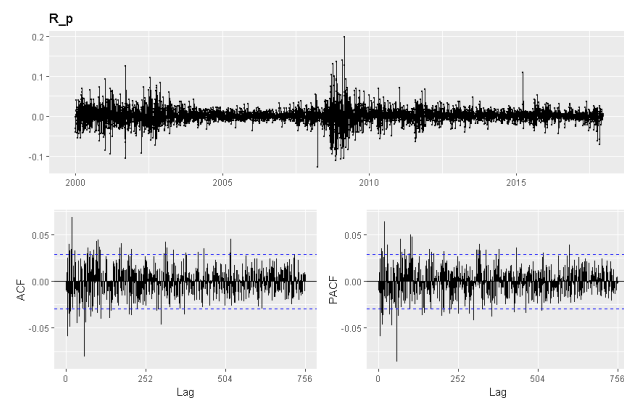


Рисунок 1.2 — Доходность акций General Electric за 2000-2017 гг.

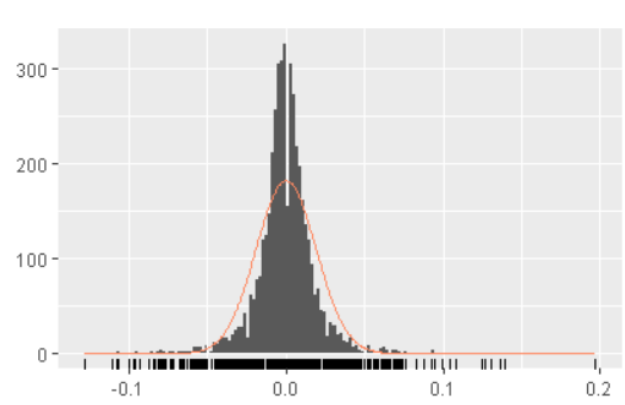


Рисунок 1.3 — Распределение остатков по временному ряду доходностей General Electric за 2000-2017 гг.

## 1.2 Обоснование выбора безрискового актива, рыночного портфеля

Доходность рынка получена с помощью индекса S&P 500 по аналогичной формуле. Акции General Electric используются при расчете таких фондовых индексов, как DJIA (Dow Jones Industrial Average), S&P 100, S&P 500.

Согласно теории, эффективный портфель не привязан только к американскому фондовому рынку, поэтому вместо S&P 500 или Russel 2000, стоит выбирать MSCI или EAFE, то есть индексы, которые учитывают все активы в мире, взвешенные относительно рыночной капитализации и валюты. Но использование таких индексов предполагает, интеграцию рынка во всем мире и отсутствия торговых барьеров, т.е. возможность свободно торговать любыми акциями в любой части планеты. В реальности это не так, что означает, что использование в CAPM совокупных индексов по странам может привести даже к более точным результатам, нежели использование "всемирных" индексов.

Индекс фондового рынка S&P 500 строится на основе данных по 500 крупными компаниям, торгуемых на американских биржах, и покрывает около 80 процентов американского рынка. Индекс взвешен по рыночной капитализации, поэтому компании, занимающие большую долю рынка, сильнее влияют на сам индекс, поэтому использование S&P 500 оправдано.

Временные ряды избыточной доходности рынка и ценной бумаги вычисляются с учетом доходности однолетних векселей Казначейства США [6]. Поскольку мы используем ежедневные данные, то мы должны так же пересчитать ежедневные безрисковые ставки, используя формулу 1.4

$$R_f^d = \sqrt[252]{1 + R_f^a} - 1 \quad (1.4)$$

где  $R_f^d$  - ежедневная доходность,  $R_f^a$  - аннулированная доходность,  $t = 252$  - число наблюдений в году (будние дни).

В среднем значение ежедневной доходности по безрисковому активу в нашем случае равняется 0.006

## 1.3 Построение модели

### 1.4 Оценка модели

Для оценки доходности акции с помощью CAPM необходимо оценить SML1.2, то есть оценить один неизвестный параметр  $\beta_i$  с помощью линейной регрессии:

$$R_i = R_f + \beta_i(R_m - R_f) + \varepsilon \quad (1.5)$$

где  $\varepsilon \sim N(0; \sigma)$

Здесь в уравнении регрессии мы имеем фактическую доходность от безрискового актива, бету, умноженную на разность доходности рынка за вычетом безрисковой ставки, и ошибку, отвечающую за идиосинкратический риск.

Одним из способов, чтобы убедиться, что CAPM работает, является проверка, оцениваются ли ценные бумаги в соответствии с уравнением 1.2. Для этого получим еще один способ записать уравнение 1.5. Если мы, и вычитаем безрисковую ставку с обеих сторон, чтобы иметь все в избыточных доходах,

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_i(R_m - R_f) + \varepsilon \quad (1.6)$$

Альфа - измеряет отклонение фактической доходности акции от  $E(R_p)$ , что показывает, насколько мы далеки от эффективности. Если альфа показывает отклонения реальных данных от CAPM, то проверка самой CAPM сводится к проверке гипотезы о том, что альфа равна нулю:  $H_0 : \alpha = 0$  с помощью t-теста.

Стоит отметить, что с помощью ADF-теста на уровне значимости 1% мы можем утверждать, что обе переменные из модели линейной регрессии являются стационарными рядами.

С помощью модели линейной регрессии получаем, что вы получите для General Electric  $\hat{\beta} = 1.116800$ ,  $\hat{\alpha} = 0.0004$ , при стандартном отклонении  $\hat{\sigma}_{\alpha} = 0.0002$ . Т-статистика о значимости альфа  $t = 2.0$  и  $p - value = 0.0455$ , что означает, что при 5% уровне значимости гипотеза о равенстве коэффициента нулю не отвергается, а сам параметр альфа принадлежит доверительному интервалу  $\{0.0004 - 0.00039; 0.0004 + 0.00039\}$ .

Построим линию регрессии по найденным параметрам:

$$R_i = R_f + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i(R_m - R_f) = R_f * (1 - \hat{\beta}_i) + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i R_m = -0.00025298 + 1.1116800 * R_m \quad (1.7)$$

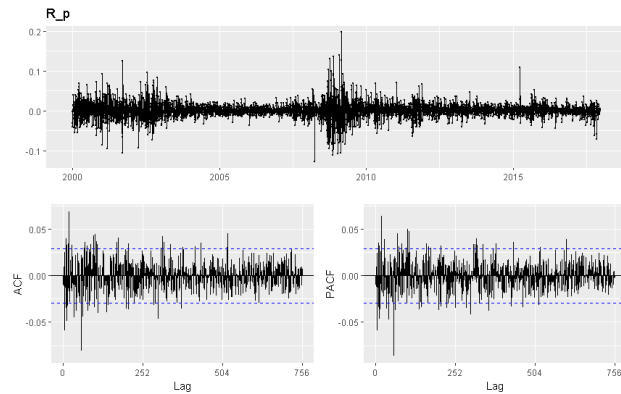


Рисунок 1.4 — Линейная регрессия  $R_i$  на  $R_m$

## 1.5 Проверка качества модели

В нашей модели  $R^2 = 0.6062$ , что говорит о достаточном качестве подгонки, поэтому, учитывая, что финансовые данные в принципе очень шумные и сложно предсказать более 90% колебаний в любых финансовых временных рядах, этот показатель достаточно хорош.  $SER = 0.01293$  как показатель качества подгонки дает позволяет нам прийти к тому же выводу.

Значения в тестовых статистиках Голдфелда-Квандта  $GQ = 0.79153$  и Бройша-Пагана  $BP = 18.694$  говорят об отсутствии гетероскедастичности (гипотеза не отвергается). Тест Харке-Бера, для которого значение статистики  $\chi^2 = 75322$ , говорит о нормальности остатков в модели  $p - value < 0.01$ .

Проверим параметров регрессионной модели на стабильность с помощью теста Чоу. Значение F-статистики  $F = 2.3154$  и  $p - value < 0.01$  говорит об отсутствии структурных сдвигов в выборке.

Значение статистике в тесте Дарбина-Уотсона  $DW = 1.9635$  близко к 2, поэтому гипотеза об отсутствии автокоррелированности остатков не отвергается.

Принудительное задание параметра  $\alpha = 0$  (исследование модели без константы) не дает значительной разницы по сравнению с обычной моделью. При новом  $\hat{\beta}^* = 1.10135$ , отличающимся от  $\beta$  из модели с константой на  $\approx 0.01$ . Мы получаем новые значения  $R^{2*} = 0.6398$ , чуть лучше предыдущего результата,  $SER^* = 0.01294$  практически на том же уровне. Даже разница в критерии Акаике незначительна  $AIC - AIC^* = -26520.74 + 26518.74 = -2$ .

## 1.6 Выводы

При построении линейной регрессии мы получили значение  $\alpha = 0.0004$ . И хоть это значение находится достаточно близко к 0 (т.е. CAPM практически полностью объясняет доходность актива), стоит понимать, что CAPM позволяет измерить только риск эффективного портфеля или бета-риск. Нас же интересует, связано ли  $alpha$  с другими факторами, которые мы не измеряем.

Рассмотреть влияние других факторов можно с помощью АРТ модели. Например, необходимо учитывать риск ликвидности, валютный риск, товарный риск и т.д. Например, рассматривая портфель, состоящий из единственной акции мы должны обязательно учитывать ликвидность актива.

Так же стоит понимать, что любой портфель можно считать неполным, приняв во внимание такие инвестиционные возможности, как иностранные активы, недвижимость и т.д., что сложно учесть в стандартной модели.



## 2 АРТ

Современные исследования показывают, что, хотя CAPM-бета и оказывает определенное влияние на объяснение ожидаемых доходностей активов, существуют другие факторы объясняющие эту переменную. На доходности активов влияют кредитный риск, риск ликвидности, бизнес-цикл и прочее. Проверим это утверждение оценив доходность акций General Electric с помощью АРТ, оценив линейную регрессию доходности актива на набор факторов  $F_j$ :

$$R_i = \alpha_i + \beta_1 F_1 + \dots + \beta_k F_k + \varepsilon \quad (2.1)$$

### 2.1 Обоснование выбора факторов для многофакторной модели

Для начала скажем, что для простоты предположим, что факторы в нашей модели должны иметь нулевое среднее  $E(F_h) = 0$ .

В качестве факторов в модели АРТ можно использовать, как макроэкономические переменные, убедившись, что их среднее равно 0, так и искусственно созданные факторы, которые наилучшим образом объясняют наблюдаемые колебания котировок акций.

Факторы АРТ:

- 1) Инфляции: изменение цен в стране должно влиять на предпочтения ликвидности. Данные по инфляции (месячные) получены из базы данных Bloomberg[1], пересчитанные в ежедневные приросты по формуле, аналогичной 1.4. Также интересно бы было создать показатель, учитывающий разницу между инфляцией и ожидаемой инфляцией (ведь неожиданные изменения уровня цен изменяет реальную стоимость контрактов), но к сожалению, данные по ожидаемой инфляции на период исследования найти не удалось
- 2) Изменения цен на нефть[4]: General Electric's огромная компания, занимающаяся производством широкого спектра продукции (техника, энергетические установки и пр.). Цены на нефть могут влиять на переменные издержки компании
- 3) Изменения темпов роста ВВП США[1]. Показатель отражает будущий спрос на выпуск. К тому же такая крупная компания, как General Electric, являющаяся исполнителем госконтрактов, может сильно зависеть от экономической ситуации в стране
- 4) Объемы торговли на рынке[6]. Финансовый показатель компании, пересчитывался аналогично в темпах прироста.
- 5) Small Minus Big (SMB) - один из показателей трехфакторной модели Фамы-Френча[2] - разница средних доходностей портфеля, состоящего из небольших акций, и портфеля из больших акций.

- 6) High Minus Low (HML) - один из показателей трехфакторной модели Фамы-Френча[2] - разность средних доходностей диверсифицированного портфеля из акций с низким book-to-market соотношением (value stocks) и высоким book-to-market соотношением (growth stocks). Эмпирический факт: акции компаний с меньшей капитализацией в диверсифицированном портфеле могут приносить даже большую доходность, чем акции компаний с большей капитализацией. Такая интерпретация не означает, что инвесторы получают компенсацию за хранение акций с малой капитализацией или низкой рыночной стоимостью, а скорее то, что акции с малой капитализацией подвергаются определенному риску, поэтому инвестор получит компенсацию за держание таких акций.

## 2.2 Оценка моделей.

Опишем данные, используемые нами при построении регрессии 2.1

Таблица 2.1 — Описательные характеристики факторов

	$R_p$	$R_m$	$DTV$	$CPI$	$P_{oil}$	$GDP$	$SMB$	$HML$
Min	-0.001	-0.09	-0.81	-0.005	-0.152	-0.009	-5.08	-4.22
Max	<0.001	0.0002	7.24	0.0022	0.178	0.008	3.83	4.83
Mean	0	0.116	0.058	0.0003	0.001	0.003	0.011	0.017
ADF	-16.8	-16.3	-19.0	-11.3	-15.8	-5.8	-15.5	-14.1
$\hat{\beta}$		1.1483680	-0.0005	0.35	-0.008	-0.015	-0.001	0.002
$\hat{\sigma}$		0.015	0.0004	0.246	0.007	0.065	0.0003	0.0002
$p - value$		< 0.0001	0.281	0.154	0.307	0.809	< 0.0001	< 0.0001

Все переменные имеют среднее близкое к нулю, по тесту Дикки-Фуллера стационарны. Значимыми оказались переменные  $R_m$ ,  $SMB$ ,  $HML$ . Оценка константы  $\hat{\alpha} = -0.0003$  с  $p - value = 0.266$ , то есть с 5% вероятностью она не значима (в отличие от CAPM).

## 2.3 Проверка качества модели

Коэффициент детерминации в нашей модели  $R^2 = 0.5589$ , что на 0.05 хуже, чем для CAPM, а стандартная ошибка ненамного лучше, чем для CAPM  $SEr = 0.01293$  (разница в 0.002). Критерий Акаике  $AIC = -26681.31$  и Шварца  $BIC = -26623.54$ , что очень хорошо для моделей с таким числом регрессоров.

Значения в тестовых статистиках Голдфелда-Квандта  $GQ = 0.76242$  и Бройша-Пагана  $BP = 391.32$  говорят о том, что гипотеза об отсутствии гетероскедастичности не отвергается. Значение статистике в тесте Дарбина-Уотсона  $DW = 1.9953$  близко к 2, поэтому гипотеза об отсутствии автокоррелированности остатков не отвергается.

Значение F-статистики для теста Чоу  $F = 2.2598$  и  $p - value < 0.01$  говорит об отсутствии структурных сдвигов в выборке.

Тест Харке-Бера, для которого значение статистики  $\chi^2 = 75779$  и  $p - value < 0.01$ , говорит о нормальности остатков в модели.

## 2.4 Выводы

По модели линейно регрессии мы узнали, что доходность акции зависит от доходности рынка и показателей  $SMB$ ,  $HML$ , предложенных Фама и Френчем.

Вопрос заключался в том, действительно ли факторы, которые полезны для CAPM всегда должны быть связаны с финансовыми показателями или, например, можно использовать любой макроэкономический показатель, такой как безработица. В качестве вывода стоит отметить, что существует большая разница между экономически значимыми факторами и финансовыми факторами. Соответственно, первые вполне могут объяснять доходность некоторых ценных бумаг, но причина в том, что мы не фокусируемся на таких факторах при принятии финансовых решений. И хоть такие показатели и могут идентифицировать интересные экономические взаимоотношения, по сути это никак не помогает инвестору в принятии решения, поскольку, нельзя торговать той же самой безработицей, а пока инвестор не может произвести "обмен он не может увеличить свою прибыль. Возможно поэтому в большинстве факторных моделей используются именно финансовые показатели, потому что тогда модели применимы с практической перспективы.

## Заключение

В заключение стоит отметить, что даже если CAPM не всегда выполняется в стандартной форме, стоит отметить ее значимость. В любом случае с помощью этой модели удастся объяснить большую часть изменения ожидаемой доходности в зависимости от рискованности актива. Но в отличие от CAPM, АРТ модель не требует, чтобы все инвесторы только заботились только о среднем значении и дисперсии доходности.

Существует множество источников общего риска. Таким образом, в АРТ модели мы рассматривает не только рыночный риск, который, безусловно, наибольший, но также и риск ликвидности, валютный риск, структурный риск, и целый ряд других рисков, которые не могут быть диверсифицированы с помощью портфеля, состоящего даже из очень большого числа активов разных видов.

## Список литературы

1. Bloomberg. — URL: <http://www.bloomberg.com/>.
2. CAPM and French-Fama models choice. — URL: <http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/index.html>.
3. Fama E. F., French K. R. The capital asset pricing model: Theory and evidence // Journal of economic perspectives. — 2004. — Т. 18, № 3. — С. 25—46.
4. Historical Data. — URL: <http://www.investing.com/>.
5. Roll R., Ross S. A. An empirical investigation of the arbitrage pricing theory // The Journal of Finance. — 1980. — Т. 35, № 5. — С. 1073—1103.
6. Yahoo Finance. — URL: <http://finance.yahoo.com/>.