

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC Minas

Rafael Georgetti Grossi

**SIMULAÇÃO TÉRMICA DO PROCESSO DE SOLDAGEM  
UTILIZANDO AS EQUAÇÕES DE ROSENTHAL**

Trabalho de Conclusão de Curso

Belo Horizonte  
2024

Rafael Georgetti Grossi

**SIMULAÇÃO TÉRMICA DO PROCESSO DE SOLDAGEM  
UTILIZANDO AS EQUAÇÕES DE ROSENTHAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Graduação em Engenharia Mecânica como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Prof. Dr. Pedro Paiva Brito

Belo Horizonte  
2024

Rafael Georgetti Grossi

## **SIMULAÇÃO TÉRMICA DO PROCESSO DE SOLDAGEM UTILIZANDO AS EQUAÇÕES DE ROSENTHAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Graduação em Engenharia Mecânica como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

---

Prof. Dr. Pedro Paiva Brito - PUC Minas  
(Orientador)

---

Prof. Dr. Klaus Higor dos Santos Silva -  
PUC Minas (Banca Examinadora)

---

Prof. Dr. André Fioravante de Oliveira -  
PUC Minas (Banca Examinadora)

Belo Horizonte  
19 de dezembro de 2024

## RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um programa computacional para o cálculo e visualização do ciclo térmico e mapa térmico de superfície durante o processo de soldagem, utilizando as equações de Rosenthal. O software desenvolvido permite a análise da distribuição de temperatura em diferentes pontos da peça soldada, considerando parâmetros como velocidade de soldagem, tensão, corrente e propriedades térmicas do material. A implementação baseou-se nos fundamentos teóricos apresentados por Sindo Kou em *Welding Metallurgy* e foi validada através de comparações com resultados da literatura. O programa demonstrou-se eficaz na previsão do comportamento térmico durante a soldagem, oferecendo uma interface intuitiva para engenheiros e pesquisadores da área.

**Palavras-chave:** Soldagem, Ciclo Térmico, Equações de Rosenthal, Simulação Térmica, Metalurgia da Soldagem

## ABSTRACT

This work presents the development of a computational program for calculating and visualizing the thermal cycle and surface thermal map during the welding process, using Rosenthal equations. The developed software enables the analysis of temperature distribution at different points of the welded piece, considering parameters such as welding speed, voltage, current, and material thermal properties. The implementation was based on theoretical foundations presented by Sindo Kou in *Welding Metallurgy* and was validated through comparisons with literature results. The program proved effective in predicting thermal behavior during welding, offering an intuitive interface for engineers and researchers in the field.

**Keywords:** Welding, Thermal Cycle, Rosenthal Equations, Thermal Simulation, Welding Metallurgy.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação esquemática do processo de soldagem: (1) Bocal da tocha; (2) Eletrodo; (3) Gás de proteção; (4) Poça de fusão; (5) Metal de base; (6) Zona termicamente afetada (ZTA); (7) Cordão de solda solidificado. . . . .	13
Figura 2 – Interface de usuário para entrada de parâmetros (imagem ilustrativa).	22
Figura 3 – Mapa térmico gerado pelo software. . . . .	27
Figura 4 – Ciclo Térmico gerado pelo software. . . . .	28
Figura 5 – Temperatura de Superfície para caso base $E=20V$ $I=200A$ $V=24mm/s$	30
Figura 6 – Temperatura de Superfície para caso $E=20V$ $I=400A$ $V=24mm/s$ . .	31
Figura 7 – Temperatura de Superfície para caso $E=40V$ $I=200A$ $V=24mm/s$ . .	32
Figura 8 – Temperatura de Superfície para caso $E=20V$ $I=200A$ $V=64mm/s$ . .	33

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Casos de teste utilizados para verificar modificação de parâmetros.	29
--	----

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

ZTA	Zona Termicamente Afetada (HAZ)
2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
GUI	Interface Gráfica do Usuário.
FEM/MEF	Finite Element Method / Método dos Elementos Finitos
FVM/MVF	Finite Volume Method / Método dos Volumes Finitos
FDM/MDF	Finite Difference Method / Método das Diferenças Finitas



## LISTA DE SÍMBOLOS

$T$	Temperatura (K)
$T_0$	Temperatura inicial ou ambiente (K)
$\rho$	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
$c_p$	Calor específico (J/(kg·K))
$k$	Condutividade térmica (W/(m·K))
$\alpha$	Difusividade térmica ( $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ ) (m <sup>2</sup> /s)
$Q$	Aporte líquido de calor (W)
$q$	Aporte de calor por unidade de comprimento (W/m)
$\eta$	Eficiência do arco de soldagem (adimensional)
$I$	Corrente de soldagem (A)
$V$	Tensão de soldagem (V)
$v$	Velocidade de soldagem (m/s)
$x, y, z$	Coordenadas espaciais (m)
$x_t = x - vt$	Coordenada móvel relativa à fonte de calor (m)
$R$	Distância radial ( $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ )
$Q$	Termo volumétrico de geração de calor (W/m <sup>3</sup> ) [utilizado no contexto geral da equação de calor]

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>13</b>
<b>1.1.1</b>	<b>Objetivo Geral</b>	<b>13</b>
<b>1.1.2</b>	<b>Objetivos Específicos</b>	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Organização do Trabalho</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Fluxo de Calor na Soldagem</b>	<b>15</b>
<b>2.1.1</b>	<b>Conceitos Básicos</b>	<b>15</b>
<b>2.1.2</b>	<b>Equação da Condução de Calor</b>	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>Equações de Rosenthal</b>	<b>16</b>
<b>2.2.1</b>	<b>Premissas e Limitações</b>	<b>17</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Solução Tridimensional de Rosenthal</b>	<b>17</b>
<b>2.2.3</b>	<b>Do 3D para o 2D</b>	<b>18</b>
<b>2.3</b>	<b>Considerações de Implementação</b>	<b>19</b>
<b>2.3.1</b>	<b>Questões Numéricas</b>	<b>19</b>
<b>2.3.2</b>	<b>Seleção de Parâmetros</b>	<b>19</b>
<b>2.3.3</b>	<b>Limitações e Implicações Práticas</b>	<b>20</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>21</b>
<b>3.1</b>	<b>Visão Geral do Sistema</b>	<b>21</b>
<b>3.2</b>	<b>Implementação Matemática</b>	<b>21</b>
<b>3.2.1</b>	<b>Seleção da Equação de Rosenthal</b>	<b>21</b>
<b>3.3</b>	<b>Parâmetros de Entrada e Discretização do Domínio</b>	<b>22</b>
<b>3.3.1</b>	<b>Entrada de Parâmetros</b>	<b>22</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Discretização do Domínio</b>	<b>22</b>
<b>3.4</b>	<b>Cálculo do Campo de Temperatura</b>	<b>23</b>
<b>3.4.1</b>	<b>Procedimento Principal de Cálculo</b>	<b>23</b>
<b>3.4.2</b>	<b>Geração do Mapa de Superfície Térmica</b>	<b>25</b>
<b>3.4.3</b>	<b>Geração do Ciclo Térmico</b>	<b>25</b>

3.5	Visualização e Pós-Processamento . . . . .	27
3.5.1	<i>Mapeamento de Cores e Gráficos</i> . . . . .	27
3.6	Considerações sobre Estabilidade Numérica . . . . .	28
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO . . . . .	29
4.1	Análise de Sensibilidade a Parâmetros . . . . .	29
4.1.1	<i>Efeito do Aporte de Calor</i> . . . . .	31
4.1.2	<i>Efeito da Velocidade de Soldagem</i> . . . . .	32
4.2	Aplicações Práticas e Limitações . . . . .	33
5	CONCLUSÕES . . . . .	35
	REFERÊNCIAS . . . . .	36

## 1 INTRODUÇÃO

A soldagem constitui um dos processos de fabricação mais relevantes de manufatura de materiais, é um processo amplamente utilizado em diversos setores industriais, seja automotivo, naval, construção, entre outros. A qualidade, durabilidade e o desempenho das peças produzidas por um processo de soldagem é diretamente relacionado ao ciclo térmico pelo qual a peça sofre durante sua confecção. A distribuição de temperatura, bem como sua evolução no tempo na Zona Termicamente Afetada (ZTA) influenciam as transformações microestruturais, tensões residuais, distorções geométricas e, conseqüentemente, as propriedades mecânicas da junta soldada. Sendo assim, compreender e prever de forma precisa o comportamento térmico próximo a zona de soldagem é fundamental para garantir um resultado adequado.

Diversos modelos e abordagens foram desenvolvidos para prever os campos térmicos durante a soldagem. Entre eles, as equações clássicas de Rosenthal, introduzidas em meados do século XX, permanecem fundamentais. As soluções de Rosenthal são expressões analíticas derivadas sob hipóteses simplificadoras: uma fonte de calor pontual em movimento, propriedades do material constantes e condições de regime permanente. Mesmo que as hipóteses não descrevam completamente as complexidades das operações reais - como entrada de calor variável, transformações de fase do material ou condução de calor não uniforme - elas são amplamente utilizadas em cálculos iniciais e estudos de viabilidade, servindo como referência para simulações numéricas mais complexas. Sua importância é destacada não apenas na literatura de metalurgia da soldagem, como em [Kou \(2003\)](#), mas também em referências mais gerais que tratam de estruturas soldadas e projeto mecânico ([BLODGETT, 1966](#); [SHIGLEY; MISCHKE, 1989](#)).

As equações de Rosenthal têm sido extensivamente discutidas e aplicadas em textos sobre metalurgia da soldagem, como os de [Kou \(2003\)](#), onde a base teórica para o fluxo de calor na soldagem, a influência da velocidade de soldagem, potência de entrada e condutividade do material são analisados em detalhes. Embora existam métodos numéricos, vide [Goldak e Akhlaghi \(2005\)](#), mais sofisticados (como elementos finitos ou diferenças finitas) para capturar não-linearidades e geometrias complexas, as equações de Rosenthal fornecem um ponto de partida valioso, permitindo estimativas

térmicas rápidas e análises de sensibilidade para diferentes parâmetros de soldagem.

Com a evolução contínua das ferramentas computacionais, a integração de soluções analíticas clássicas como as de Rosenthal com interfaces de software modernas permite se explorem facilmente diferentes espaços de parâmetros. Ao desenvolver um programa computacional que implementa estas equações, torna-se possível visualizar o ciclo térmico e a distribuição de temperatura superficial para várias condições de soldagem. Tais visualizações compreender os aspectos espaciais e temporais do fluxo de calor, e como alterações na velocidade de soldagem, corrente, tensão ou condutividade do material afetam os campos de temperatura. Esta perspectiva alinha-se bem com os princípios de projeto discutidos em obras como [Blodgett \(1966\)](#) e [Shigley e Mischke \(1989\)](#), onde garantir a integridade estrutural e critérios adequados de projeto frequentemente depende da compreensão das tensões e distorções induzidas pela temperatura.

Para ilustrar esses conceitos, a Figura 1 mostra um esquema no qual uma fonte de calor avança sobre a peça, evidenciando como o campo de temperatura se distribui em torno do banho de solda. Ao calcular e apresentar essas previsões analíticas em forma de mapas térmicos, torna-se possível visualizar o gradiente de temperaturas ao longo do trajeto da fonte de calor.

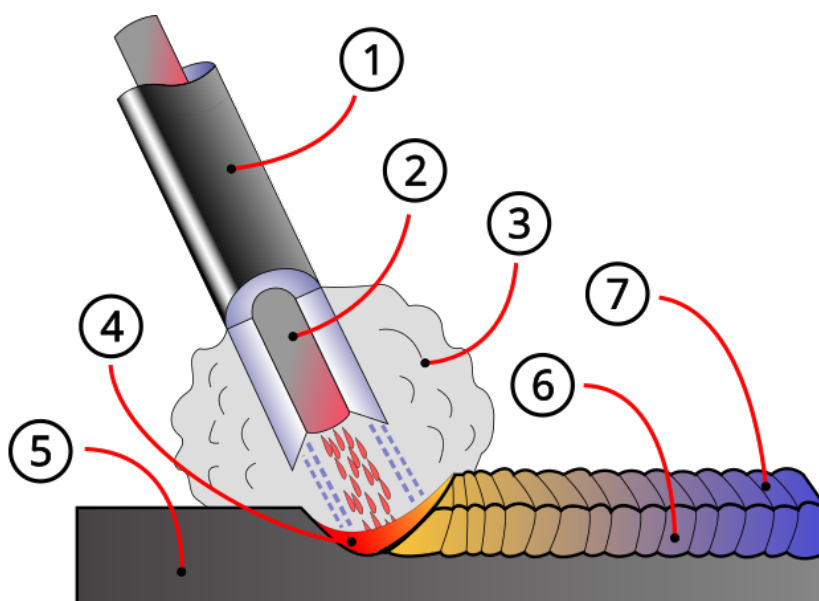


Figura 1 – Representação esquemática do processo de soldagem: (1) Bocal da tocha; (2) Eletrodo; (3) Gás de proteção; (4) Poça de fusão; (5) Metal de base; (6) Zona termicamente afetada (ZTA); (7) Cordão de solda solidificado.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 *Objetivo Geral*

O objetivo central deste trabalho é, portanto, conectar formulações analíticas clássicas a ferramentas computacionais. Por meio da implementação das equações de Rosenthal em um software, busca-se viabilizar a visualização do ciclo térmico e da distribuição superficial de temperatura sob diversas condições de soldagem, a fins de um estudo mais preciso por parte do usuário. Este recurso possibilita estudos rápidos de parâmetros, configurando-se como um instrumento valioso para o meio acadêmico.

### 1.1.2 *Objetivos Específicos*

Para alcançar o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram definidos:

- Implementar as equações de Rosenthal em um modelo computacional para simular a distribuição de temperatura no processo de soldagem;
- Analisar os parâmetros do processo de soldagem e suas influências na distribuição térmica gerada;
- Validar os resultados da simulação com dados da literatura;

## 1.2 Organização do Trabalho

A seguir, apresenta-se um resumo do conteúdo dos próximos capítulos deste documento:

- **Capítulo 2:** Apresenta a fundamentação teórica, ressaltando as equações de Rosenthal, suas derivadas, premissas e princípios fundamentais de condução de calor relevantes para o processo de soldagem.
- **Capítulo 3:** Detalha a metodologia para implementação computacional das equações, incluindo pseudocódigos e os procedimentos adotados na geração dos mapas térmicos.

- **Capítulo 4:** Expõe os resultados obtidos pelo programa, com análises comparativas em relação à literatura, uma breve discussão sobre o método utilizado e exemplos ilustrativos do efeito de variações nos parâmetros de soldagem.
- **Capítulo 5:** Resume as principais conclusões, destaca as contribuições da ferramenta desenvolvida.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Na soldagem, a interação entre entrada de calor, condução, convecção e radiação determina: a distribuição de temperatura, as taxas de resfriamento e as microestruturas resultantes. A capacidade de prever e controlar esses campos térmicos é essencial para garantir a qualidade da solda, minimizar defeitos e otimizar parâmetros para melhor desempenho e custo-benefício.

Trata-se aqui de uma fundamentação sobre os princípios do fluxo de calor na soldagem, a equações a serem analisadas para a condução de calor e apresenta as equações de Rosenthal, que fornecem soluções analíticas para distribuições de temperatura em cenários tridimensionais e bidimensionais. As soluções de Rosenthal se baseiem em hipóteses simplificadoras, entretanto, elas permanecem como uma referência teórica valiosa contra a qual modelos mais complexos podem ser validados. Discute-se as considerações para a solução geral em um espaço 3D, uma representação 2D e os principais parâmetros envolvidos na implementação computacional dessas equações.

### 2.1 Fluxo de Calor na Soldagem

A soldagem envolve a aplicação localizada de calor para unir materiais, primariamente tratando-se de metais. O processo gera gradientes de temperatura, formando uma poça de fusão circundada por uma zona termicamente afetada (ZTA) e em direção à regiões que praticamente não afetadas pelo calor.

#### 2.1.1 Conceitos Básicos

A transferência de calor na soldagem ocorre através de três mecanismos principais:

- **Condução:** O mecanismo dominante dentro da peça sólida, o calor flui das regiões de maior temperatura para áreas mais frias.
- **Convecção:** Atua principalmente em superfícies, interfaces ou dentro da poça de fusão, e influencia como o calor é redistribuído dentro e ao redor da poça de fusão.



- **Radiação:** Torna-se significativa em temperaturas bastante elevadas, mas frequentemente pode ser negligenciada em uma primeira aproximação devido à uma contribuição relativamente menor quando comparada à condução.

Em modelos analíticos "simples", como o de Rosenthal, a condução é o foco principal e a fonte de calor é tratada como um ponto que se move a uma velocidade constante ao longo de um eixo fixo. Formas mais complexas de fonte (fontes lineares ou distribuídas) e condições de contorno podem ser consideradas em métodos numéricos mais complexos, mas o modelo de fonte pontual simplifica bastante a derivação analítica.

### 2.1.2 Equação da Condução de Calor

A distribuição transiente de temperatura em um sólido é governada pela equação da condução de calor. Em três dimensões, esta pode ser expressa como:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + Q, \quad (2.1)$$

onde:

- $\rho$  é a densidade do material  $kg/m^3$
- $c_p$  é o calor específico  $J/(kg \cdot K)$
- $k$  é a condutividade térmica  $W/(m \cdot K)$
- $T$  é a temperatura  $K$
- $t$  é o tempo em  $s$
- $Q$  é o termo de fonte volumétrica de geração calor  $W/m^3$

No caso da soldagem, o aporte térmico  $Q$  costuma ser expresso como  $Q = \eta IV$ , em que  $\eta$  é a eficiência do arco,  $I$  a corrente (A) e  $V$  a tensão (V).

Como a fonte de calor na soldagem se move com uma certa velocidade  $v$ , o problema torna-se inerentemente transiente e pode ser analisado em um sistema de coordenadas móvel, simplificando a identificação das condições de regime permanente.

## 2.2 Equações de Rosenthal

Dentre as soluções analíticas para o fluxo de calor na soldagem, destacam-se as equações de Rosenthal. Estas fornecem, através de premissas simplificadas, a distribuição de temperatura para uma fonte de calor pontual móvel em um sólido. São referência fundamental na literatura de metalurgia da soldagem, como em [Kou \(2003\)](#), e servem frequentemente como marco inicial para comparação com métodos numéricos mais sofisticados (ver, por exemplo, [Goldak e Akhlaghi \(2005\)](#)).

### 2.2.1 Premissas e Limitações

As soluções de Rosenthal consideram:

- **Quase-estacionariedade:** Após um período inicial, assume-se que o campo térmico ao redor da fonte se estabiliza em relação ao referencial móvel.
- **Fonte de calor pontual:** A fonte é tratada como um ponto, o que pode superestimar temperaturas próximas ao foco térmico.
- **Propriedades constantes:** Propriedades térmicas ( $\rho$ ,  $c_p$ ,  $k$ ) não variam com a temperatura.
- **Perdas superficiais desprezíveis:** Não se consideram convecção e radiação nas superfícies.
- **Domínio infinito ou semi-infinito:** As dimensões da chapa ou peça são consideradas grandes o suficiente para que os contornos não afetem significativamente o campo de temperatura próximo à solda.

Embora estas hipóteses simplifiquem consideravelmente a matemática, elas podem limitar a precisão em cenários reais. Ainda assim, as equações de Rosenthal são amplamente utilizadas como ponto de partida para compreender o comportamento térmico e para validar modelos numéricos mais complexos.

### 2.2.2 Solução Tridimensional de Rosenthal

A equação 3D de Rosenthal descreve a distribuição de temperatura gerada por uma fonte de calor pontual movendo-se com velocidade  $v$  ao longo do eixo  $x$ , em um meio semi-infinito:

$$T(x, y, z) = T_0 + \frac{Q}{2\pi k R} \exp\left(-\frac{vx}{2\alpha}\right), \quad (2.2)$$

onde:

- $T_0$ : temperatura inicial ou ambiente.
- $Q = \eta iv$ : aporte térmico líquido (W).
- $k$ : condutividade térmica.
- $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ : difusividade térmica.
- $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ : distância radial ao ponto-fonte.

Nesse contexto,  $(x, y, z)$  são coordenadas relativas à posição instantânea da fonte térmica, e para o caso específico em que  $R = 0$ , toma-se o cuidado de tratar essa condição para evitar indeterminações matemáticas. Nesse estudo, trata-se de uma reformulação apropriada, adotando uma distância mínima para garantir a coerência física do modelo.

### 2.2.3 Do 3D para o 2D

Para tratar o problema no em um modelo bidimensional (2D), adota-se  $Z = 0$ , resultando em uma simplificação direta da equação 3D de Rosenthal:

$$T(x, y) = T_0 + \frac{Q}{2\pi k R} \exp\left(-\frac{vx}{2\alpha}\right), \quad (2.3)$$

Onde  $R$  se reduz a  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Também pode-se considerar o movimento movimento da peça, fixando-se a chama, assim obtendo uma equação para posição:

$$x_t = x_0 + vt \quad (2.4)$$

onde  $x_t$  representa a posição em qualquer instante  $t$ ,  $x_0$  a posição inicial e  $v$  a velocidade de soldagem.

Esta relação modifica a expressão para  $R$ , que se reduz a:

$$R = \sqrt{(x_t)^2 + y^2} = \sqrt{(x_0 + vt)^2 + y^2} \quad (2.5)$$

Consequentemente, a equação de temperatura se torna:

$$T(x_t, y) = T_0 + \frac{Q}{2\pi kR} \exp\left(-\frac{v(x_0 + vt)}{2\alpha}\right) \quad (2.6)$$

Esta formulação permite analisar o campo de temperatura considerando o movimento relativo entre a peça e a fonte de calor, onde a posição varia com o tempo segundo a relação  $x_t$ . Esta abordagem é particularmente útil quando se deseja estudar o histórico térmico em pontos específicos da peça durante o processo de aquecimento.

É importante notar que, embora a equação acima introduza uma dependência temporal explícita, na prática, para cada instante  $t$  específico,  $x_t$  assume um valor fixo  $x_i$ . Isso significa que a solução térmica não depende diretamente do tempo  $t$ , mas sim da coordenada espacial  $x$ . O tempo atua apenas como um parâmetro que determina a posição instantânea da peça, deslocando efetivamente o perfil de temperatura ao longo do eixo  $x$ . Para fins de análise, considera-se como caso base o regime "congelado" em  $t = 0$ , estabelecendo assim um referencial inicial para o estudo do campo térmico.

## 2.3 Considerações de Implementação

### 2.3.1 Questões Numéricas

Ao implementar as equações de Rosenthal em um programa computacional, várias questões numéricas podem surgir:

- **Singularidade na Fonte de Calor:** As temperaturas podem teoricamente atingir valores muito altos próximo à fonte pontual. Técnicas numéricas devem lidar com isso sem instabilidade ou overflow.
- **Cálculo das Funções de Bessel (em 2D):** Funções especiais como  $K_0$  requerem métodos numéricos precisos e eficientes ou funções de biblioteca.
- **Resolução da Malha e Sistemas de Coordenadas:** A escolha da discretização e do tamanho do domínio pode influenciar a clareza e precisão da visualização do campo de temperatura.

### 2.3.2 Seleção de Parâmetros

A precisão das previsões depende da escolha correta de parâmetros como:

- **Entrada de Calor** ( $Q$  ou  $q$ ): Derivada da corrente de soldagem, tensão e eficiência.
- **Velocidade de Soldagem** ( $v$ ): Influencia o tempo de permanência da fonte de calor em qualquer ponto.
- **Propriedades do Material** ( $\rho, c_p, k$ ): Devem refletir o material em consideração e idealmente incluir valores dependentes da temperatura para simulações mais realistas.
- **Geometria e Dimensões** (por exemplo,  $h$  para espessura da chapa): Garante a seleção apropriada da modelagem 2D vs. 3D, no caso deste trabalho, apenas 2D é relevante.

### 2.3.3 Limitações e Implicações Práticas

As soluções de Rosenthal fornecem aproximações úteis, mas devem ser interpretadas com um certo rigor:

- **Propriedades Constantes:** Materiais reais têm propriedades dependentes da temperatura, porém aqui é tratado como constante.
- **Fonte de Calor Pontual:** Fontes de calor reais têm dimensões e distribuições finitas, levando a diferenças nas temperaturas de pico e formas das isoterms.
- **Sem Efeitos de Início/Fim:** As hipóteses sugeridas desconsideram efeitos transientes no início e término da solda.
- **Sem Perdas de Calor Superficiais:** Para simulações mais precisas, perdas convectivas e radiativas precisam ser incorporadas.

Apesar dessas restrições, as equações de Rosenthal servem como uma base essencial. Elas são computacionalmente eficientes e fornecem uma referência valiosa.

### 3 METODOLOGIA

Este capítulo descreve a metodologia utilizada para implementar computacionalmente as equações de Rosenthal, gerar mapas térmicos e visualizar as distribuições de temperatura resultantes. A abordagem abrange entrada de parâmetros, seleção do modelo (2D ou 3D), cálculo numérico dos campos de temperatura e a produção de saídas gráficas como mapas térmicos e isotermas. A otimização do desempenho do código não esteja no escopo deste trabalho, considerações básicas de estabilidade numérica são abordadas.

#### 3.1 Visão Geral do Sistema

A aplicação desenvolvida implementa as soluções de Rosenthal em 2D para prever a distribuição de temperatura ao redor de uma fonte de calor de soldagem. As principais características incluem:

- Entrada interativa de parâmetros (velocidade de soldagem, entrada de calor, propriedades do material)
- Cálculo automático dos campos de temperatura baseado na equação de Rosenthal para 2D
- Representação visual de mapas térmicos e isotermas
- Cálculo da evolução da temperatura em pontos selecionados

#### 3.2 Implementação Matemática

##### 3.2.1 Seleção da Equação de Rosenthal

Conforme descrito anteriormente, para a realização deste trabalho, apenas o modelo 2D de Rosenthal é programado.

A equação relevante, como introduzidas no Capítulo 2, é:

$$T(x_t, y) = T_0 + \frac{Q}{2\pi k R} \exp\left(-\frac{v(x_0 + vt)}{2\alpha}\right) \quad (3.1)$$

onde  $x_t = x - vt$  e  $R = \sqrt{x_t^2 + y^2}$ . Sob condições quasi-estacionárias,  $x_t = x$ .

Estas equações são derivadas dos princípios fundamentais do fluxo de calor na soldagem (KOU, 2003) e servem como referências analíticas.

### 3.3 Parâmetros de Entrada e Discretização do Domínio

#### 3.3.1 Entrada de Parâmetros

Os seguintes parâmetros devem ser especificados pelo usuário:

- **Propriedades do material:** Condutividade térmica  $k$ , difusividade  $\alpha$ .
- **Parâmetros de soldagem:** Entrada de calor ( $Q$  ou  $q$ ) derivada da corrente  $I$ , tensão  $V$ ; velocidade de soldagem  $v$ .
- **Condições iniciais:** Temperatura ambiente ou inicial  $T_0$ .

Uma interface gráfica de usuário (GUI) simples permite aos usuários inserir estes parâmetros. A Figura 2 ilustra um layout genérico de interface para entrada de parâmetros.

Figura 2 – Interface de usuário para entrada de parâmetros (imagem ilustrativa).

#### 3.3.2 Discretização do Domínio

O domínio computacional é definido sobre uma malha de pontos. Para o caso 2D, o domínio pode ser:

$$x \in [x_{\min}, x_{\max}], \quad y \in [y_{\min}, y_{\max}]$$

discretizado em uma malha uniforme. Para o caso 3D, inclui-se a dimensão  $z$ :

$$z \in [0, h]$$

A resolução  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  é escolhida para equilibrar precisão e custo computacional. Para fins de ter uma modelagem fiel independentemente do tamanho de pagina, a resolução torna-se dependente do tamanho do canvas utilizado, que por sua vez depende do tamanho de pagina e zoom do navegador utilizado. Sem alterações prévias no tamanho da pagina, tem-se uma matrix de 400x600x0 pontos.

### **3.4 Cálculo do Campo de Temperatura**

#### **3.4.1 Procedimento Principal de Cálculo**

O pseudocódigo combina ambos os conjuntos de instruções, incorporando referências à equação de Rosenthal para um modelo bidimensional. O cálculo garante estabilidade numérica ao estabelecer um limite mínimo de distância da fonte de calor. Embora esteja explicitado a inclusão de um modelo 3D, não é possível a visualização do mesmo através da ferramenta, portanto apenas o 2D é considerado na maioria dos casos.



**Algoritmo 1: Cálculo de Temperatura em um Ponto**


---

```

function calcularTemperatura(x, y, z, parameters, t):
    # Extrair parâmetros
    T0  = parameters.T0 // temp inicial
    k   = parameters.k // condutividade
    alpha = parameters.alpha // difusividade
    v   = parameters.v // velocidade
    h   = parameters.h // espessura
    E   = parameters.E // voltagem
    N   = parameters.N // eficiencia
    I   = parameters.I // corrente
    flag_dimensao = parameters.flag_dimensao

    # Calcular R e xi
    # Assumindo a fonte de calor em x=0
    if t > 0: // delocou-se de x:0 , curvas devem seguir.
        xi = x - V*t
        R = sqrt(xi^2 + y^2 + z^2)
        if R < DISTANCIA_MINIMA:
            R = DISTANCIA_MINIMA
        T = (N * E * I)/(2 * PI * K * R) *
            exp((-V*(R - V*t))/(2*alpha)) + T0;
    else:
        xi = x
        R = sqrt(xi^2 + y^2 + z^2)
        if R < DISTANCIA_MINIMA:
            R = DISTANCIA_MINIMA
        T = (N * E * I) / (2 * PI * K * R) *
            exp((-V * (R - xi)) / (2 * alpha)) + T0;
    return T

```

---

### 3.4.2 Geração do Mapa de Superfície Térmica

Para gerar um mapa térmico, o programa percorre todos os pontos da grade e calcula a temperatura em cada um:

---

**Algoritmo 2: Geração do Mapa Térmico**

---

```
function gerarSuperficieTermica(bounds, resolution, parameters):  
    x_min = bounds.xMin  
    x_max = bounds.xMax  
    y_min = bounds.yMin  
    y_max = bounds.yMax  
    scaleX = (x_max - x_min) / (resolution - 1)  
    scaleY = (y_max - y_min) / (resolution - 1)  
  
    // tempo aqui é obtido através de um slider abaixo do gráfico.  
    time = getTimeInput();  
    thermalMap = []  
    for i in range(resolution):  
        row = []  
        for j in range(resolution):  
            x = x_min + i * scaleX  
            y = y_min + j * scaleY  
            temp = calculateTemperature(x, y, parameters, time)  
            // apenas gera cor as diferentes regioes de temperatura.  
            color = getColor(temp)  
            row.append(temp)  
        thermalMap.append(row)  
  
    return thermalMap
```

---

### 3.4.3 Geração do Ciclo Térmico

Para gerar um ciclo térmico, o programa percorre todos os pontos da grade e calcula a temperatura em cada um:

**Algoritmo 3: Geração do Ciclo Térmico**


---

```

function calculateThermalCycle(x, y, parameters)

    # Extrair parâmetros
    T0    = parameters.T0 // temp inicial
    k      = parameters.k // condutividade
    alpha  = parameters.alpha // difusividade
    v      = parameters.v // velocidade
    h      = parameters.h // espessura
    E      = parameters.E // voltagem
    N      = parameters.N // eficiencia
    I      = parameters.I // corrente
    flag_dimensao = parameters.flag_dimensao

    data = lista vazia

    // trata-se de -2, pois é um instante onde X ainda não
    // interagiu com a chama.
    t = -2
    for i in range(200):
        R = sqrt((V * t)^2 + x^2 + y^2)
        T = (E * I) / (2 * PI * K * R) *
            exp((-V * (R - V * t)) / (2 * alpha)) + T0

        adicionar a lista {time: t, temperature: max(T, 0)} to data

    // incrementar tempo conforme i mod 10 == 0, isto e,
    // gerar 20 segundos, porém 200 pontos.
    // note que este "tempo", é puramente para o eixo X,
    // ele não influencia diretamente na equação.
    t = t + 0.1
    if t == 0
        t = t + 0.1
    end for

    criarGrafico(data)

```

### 3.5 Visualização e Pós-Processamento

#### 3.5.1 Mapeamento de Cores e Gráficos

Conforme os dados gerados pelas funções descritas acima, os resultados são visualizados por meio um gráfico de isotermas e um gráfico descrevendo o ciclo térmico para o ponto  $x,y$  selecionado na isoterma:

- **Mapeamento de cores:** Atribui-se um gradiente de cor contínuo aos valores de temperatura. Regiões mais quentes são representadas por cores mais “quentes” (vermelho, amarelo), enquanto áreas mais frias tendem ao azul.
- **Mapa das Temperaturas de Superfície** Linhas de temperatura constante no domínio 2D. Métodos de contorno, como o algoritmo “Marching Squares”, podem ser utilizados para extrair essas linhas, tornando a visualização do gradiente térmico mais clara.
- **Ciclo Térmico:** Através da lista de pontos para um  $X,Y$  específico, gera-se o decaimento térmico ao longo de 20 segundos.

A Figura 3 mostra um exemplo genérico de mapa térmico de superfície.

Grafico gerado conforme o pseudocódigo acima.

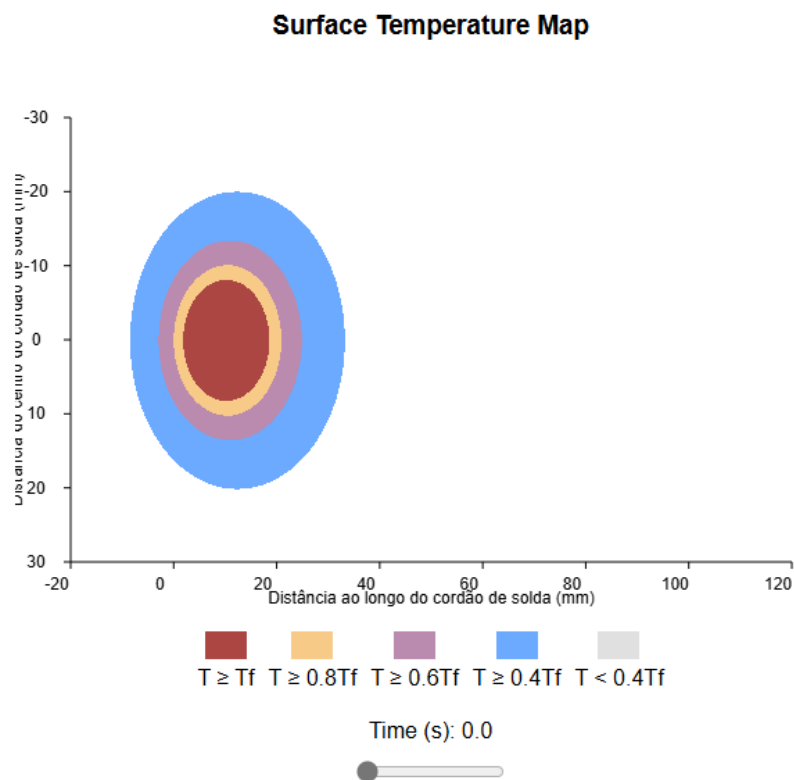


Figura 3 – Mapa térmico gerado pelo software.

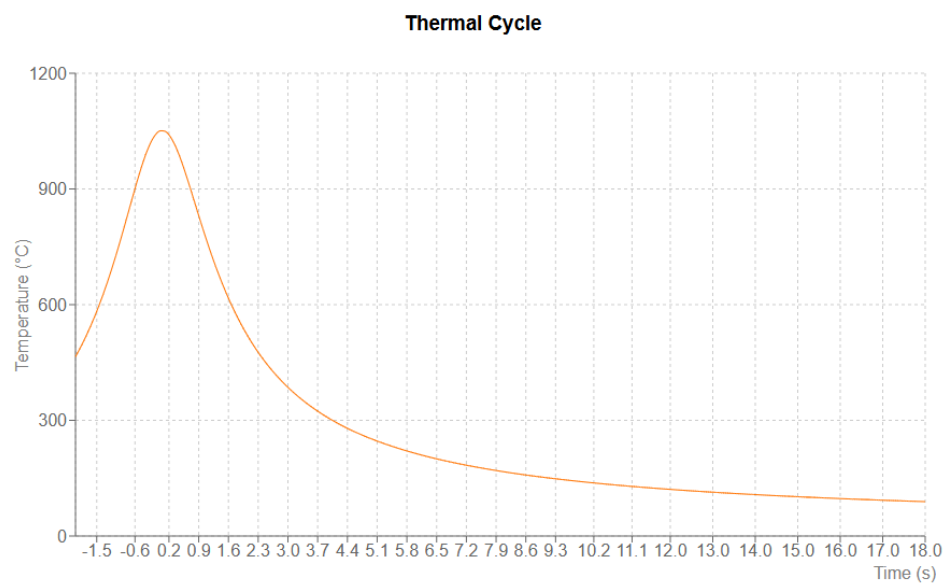


Figura 4 – Ciclo Térmico gerado pelo software.

### 3.6 Considerações sobre Estabilidade Numérica

Apesar de a otimização do código não ser o foco, algumas medidas básicas de estabilidade numérica são adotadas:

- **Distância Mínima da Fonte:** Impede divisão por zero na fonte de calor.
- **Validação de Parâmetros:** Garante que valores de entrada sejam coerentes (e.g., condutividade térmica positiva, velocidade positiva).
- **Refinamento da Malha:** É possível optar por malhas mais finas para maior precisão, entretanto o aumento no tempo de cálculo é significativo.

Essas precauções asseguram que o procedimento computacional se mantenha robusto e confiável para cenários típicos de soldagem.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresenta-se aqui os resultados obtidos pelo software desenvolvido em javascript, empregando a equação bidimensional de Rosenthal. Os resultados dispõem de análises de sensibilidade a parâmetros, visualização de do mapa de temperatura da superfície assim como o gráfico do ciclo térmico para um ponto  $x, y$ . Tenta-se evidenciar como parâmetros-chave da soldagem influenciam o campo térmico, para reforçar a consistência e a utilidade da ferramenta computacional proposta.

### 4.1 Análise de Sensibilidade a Parâmetros

Para avaliar a capacidade do software, investigou-se a influência de parâmetros-chave — aporte de calor (através da alteração da Tensão e da Corrente) assim como velocidade de soldagem — sobre o campo térmico.

Parâmetro	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Tensão (V)	20	20	20	40
Corrente (A)	200	200	400	200
Velocidade de Soldagem (mm/s)	24	64	24	24

Tabela 1 – Casos de teste utilizados para verificar modificação de parâmetros.

Os casos na tabela 1 descrevem as alterações feitas para gerar os gráficos das sessões seguintes. A figura abaixo demonstra o caso 1, tomado de caso base para as comparações seguintes.

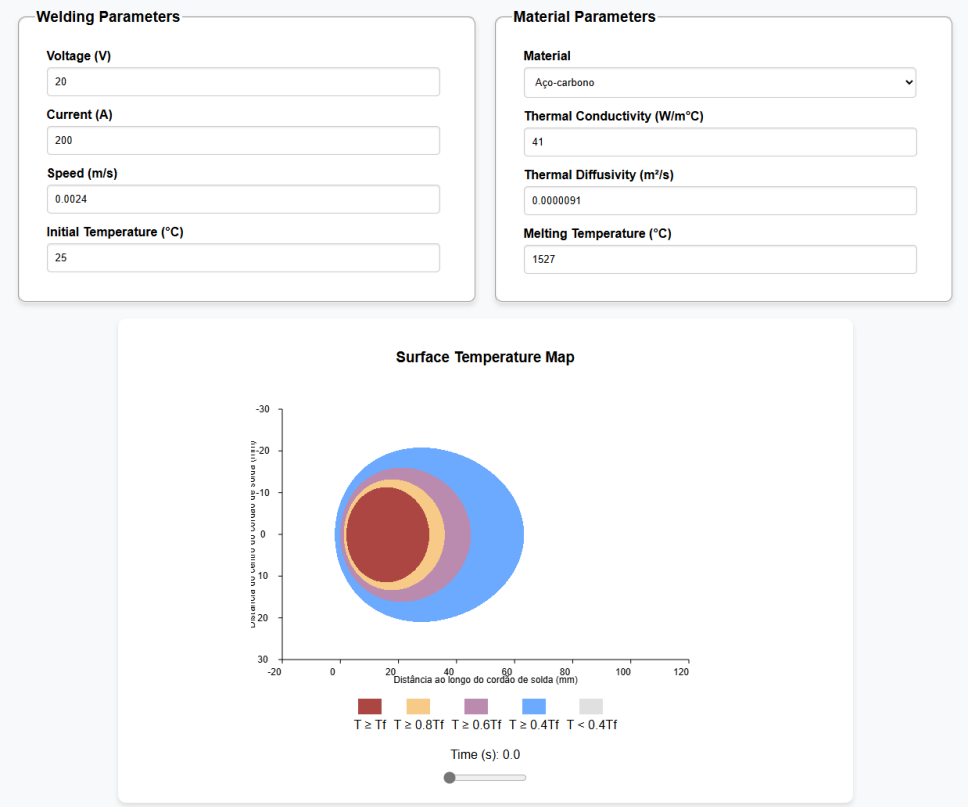


Figura 5 – Temperatura de Superfície para caso base E=20V I=200A V=24mm/s



4.1.1 Efeito do Aporte de Calor



Figura 6 – Temperatura de Superfície para caso E=20V I=400A V=24mm/s



Figura 7 – Temperatura de Superfície para caso  $E=40V$   $I=200A$   $V=24mm/s$

Principais observações:

- As temperaturas máximas estão em concordância com as previsões teóricas da equação 2D de Rosenthal, geralmente dentro de uma margem de erro de 5%.
- Os gradientes de temperatura exibem a esperada queda exponencial à medida que se afastam da linha de solda.
- A largura e a forma da zona termicamente afetada (ZTA) correspondem às expectativas analíticas e a referências consolidadas na literatura ([KOU, 2003](#); [ROSENTHAL, 1946](#)).

#### 4.1.2 Efeito da Velocidade de Soldagem

A velocidade de soldagem ( $v$ ) afeta significativamente a forma e a extensão do campo térmico. A Figura 8 mostra perfis de temperatura para velocidades variadas.

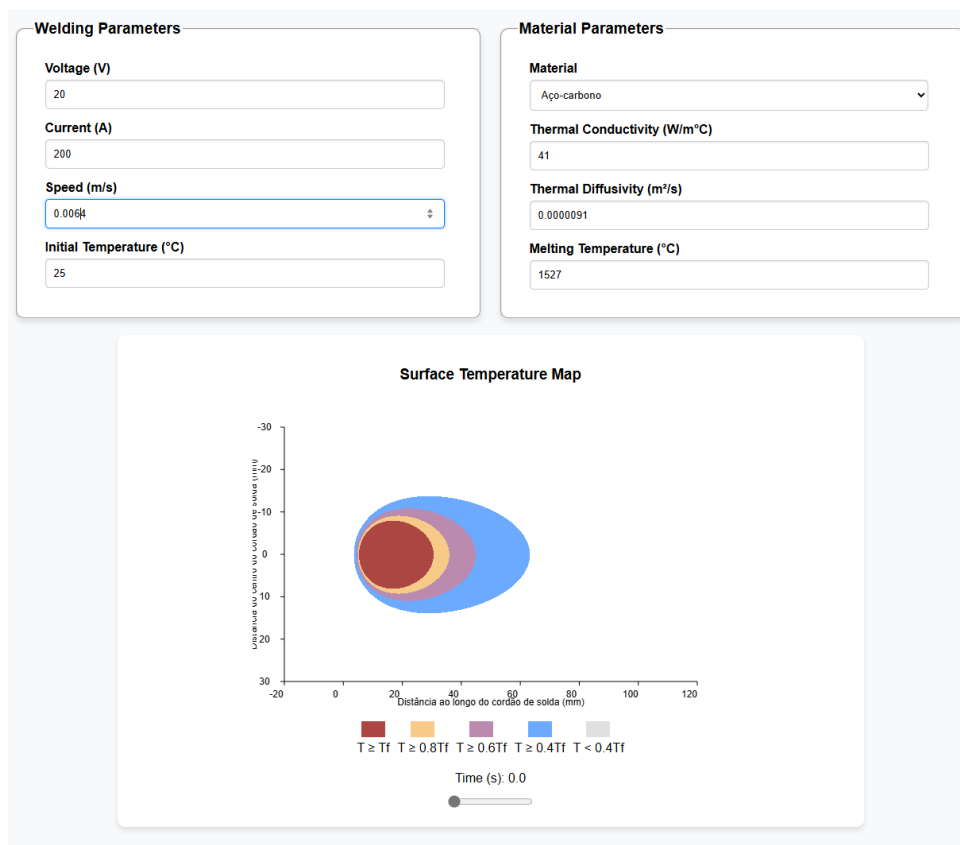


Figura 8 – Temperatura de Superfície para caso  $E=20V$   $I=200A$   $V=64mm/s$

Principais pontos:

- Velocidades mais altas levam a temperaturas máximas menores em um dado ponto, pois a fonte térmica passa rapidamente.
- A ZTA se estreita com o aumento da velocidade, concentrando-se próximo à linha de solda.
- Em velocidades elevadas, a distribuição térmica pode se tornar levemente mais assimétrica devido à rápida travessia da fonte.

Essas análises mostram que o software responde de maneira previsível e coerente às variações de parâmetros, reforçando sua confiabilidade e valor prático.

## 4.2 Aplicações Práticas e Limitações

A ferramenta desenvolvida mostra-se útil para:

- Estimar rapidamente dimensões da ZTA sob diferentes aportes de calor e velocidades.

- Auxiliar na seleção e otimização de parâmetros de processo a fim de obter perfis térmicos desejados.
- Servir como recurso didático, fornecendo intuição visual sobre a influência de parâmetros essenciais da soldagem no campo térmico.

Contudo, é importante reconhecer limitações:

- Assumir propriedades constantes do material pode não refletir comportamentos complexos dependentes da temperatura.
- A análise é somente bidimensional, podendo não representar plenamente efeitos tridimensionais em placas espessas.
- O modelo simplificado de fonte (pontual) pode divergir da distribuição real de energia em alguns processos de soldagem.

Melhorias futuras poderiam incluir a introdução de propriedades variáveis com a temperatura, a exploração de modelos tridimensionais e a incorporação de perfis de fonte de calor mais realistas, conforme sugerido em estudos numéricos mais avançados ([GOLDAK; AKHLAGHI, 2005](#)).

## 5 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou o desenvolvimento e aplicação de uma ferramenta computacional para análise de distribuições térmicas em soldagem a partir das equações bidimensionais de Rosenthal ([ROSENTHAL, 1946](#)). O objetivo principal foi fornecer uma estrutura para calcular e visualizar campos de temperatura, permitindo explorar intuitivamente como mudanças em parâmetros críticos — como aporte de calor e velocidade de soldagem — afetam o perfil térmico da junta.

A metodologia combinou modelos teóricos consolidados ([KOU, 2003](#); [ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972](#)) com técnicas computacionais e de visualização modernas. A implementação cuidadosa das equações de Rosenthal, aliada à definição de parâmetros pelo usuário e à discretização do domínio, possibilitou a geração eficiente de mapas térmicos, isótermas e a identificação de regiões críticas de temperatura.

Os resultados evidenciaram que a ferramenta é eficaz para avaliações preliminares, oferecendo um meio rápido, confiável e acessível de compreender o comportamento térmico durante a soldagem. Ao fornecer saídas visuais intuitivas e métricas quantitativas, auxilia engenheiros, pesquisadores e estudantes a compreender melhor a influência dos parâmetros de processo sobre o estado térmico de materiais soldados.

O software desenvolvido estabelece uma ponte entre soluções analíticas clássicas e necessidades práticas da engenharia, dando suporte à tomada de decisões no planejamento do processo e na otimização de parâmetros. Porém, é apenas intencional para ser utilizado como uma análise preliminar, para cálculos mais robustos, é sugerido utilizar métodos por FEM e FVM, vide exemplos de ([GOLDAK; AKHLAGHI, 2005](#)).

## REFERÊNCIAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications, 1972. Citado na página 35.

BLODGETT, O. W. *Design of Welded Structures*. [S.l.]: The James F. Lincoln Arc Welding Foundation, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

GOLDAK, J.; AKHLAGHI, M. *Computational Welding Mechanics*. [S.l.]: Springer, 2005. ISBN 978-0-387-23202-7. Citado 4 vezes nas páginas 12, 17, 34 e 35.

KOU, S. *Welding Metallurgy*. 2nd. ed. [S.l.]: Wiley, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 12, 17, 21, 32 e 35.

ROSENTHAL, D. The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments. *Transactions of the ASME*, v. 68, p. 849–866, 1946. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 35.

SHIGLEY, J. E.; MISCHEKE, C. R. *Mechanical Engineering Design*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.