Лабораторная работа №2. Моделирование дискретных псевдослучайных величин.
(<u>Срок сдачи 14.10.2022</u>)

Основное задание (4 балла)

1) Осуществить моделирование n = 1000 реализаций случайных величиниз заданных дискретных распределений.Для этого можно использовать любой генератор БСВ (как реализованный в 1-ой лабораторной работе, так и встроенный в язык программирования). Вывести несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии, сравнить их с истинными значениями.Генерацию можно осуществить либо универсальным методом для дискретного закона распределения, либо на основе содержательного смысла заданного распределения (см. учебное пособие или википедию), либо любым другим способом. Дать обоснование, почему используемый вами метод генерации работает.

Вариант:
1)Бернулли –$\mathrm{Bi}(1,p)$, p = 0.7;Биномиальное – $\mathrm{Bi}(m,p)$, m = 5, p = 0.25.
2)Геометрическое – $G(p)$, p = 0.7;Пуассона – $\Pi(\lambda)$, λ = 2;
3)Бернулли –$\mathrm{Bi}(1,p)$, p = 0.5;Обратное биномиальное – $\overline{\mathrm{Bi}}(r,m)$, r = 5, p = 0.25.
4) Геометрическое – $G(p)$, p = 0.3;Биномиальное – $\mathrm{Bi}(m,p)$, m = 4, p = 0.2.
5)Бернулли –$\mathrm{Bi}(1,p)$, p = 0.7;Пуассона – $\Pi(\lambda)$, λ = 0.5;
6)Геометрическое – $G(p)$, p = 0.1;Обратное биномиальное – $\overline{\mathrm{Bi}}(r,m)$, r = 4, p = 0.2.
7) Бернулли –$\mathrm{Bi}(1,p)$, p = 0.2;Биномиальное – $\mathrm{Bi}(m,p)$, m = 6, p = 0.75.
8)Геометрическое – $G(p)$, p = 0.9;Пуассона – $\Pi(\lambda)$, λ = 0.7;
9)Бернулли –$\mathrm{Bi}(1,p)$, p = 0.3;Обратное биномиальное – $\overline{\mathrm{Bi}}(r,m)$, r = 6, p = 0.25.
10)Геометрическое – $G(p)$, p = 0.2;Биномиальное – $\mathrm{Bi}(m,p)$, m = 5, p = 0.6.
11)Бернулли –$\mathrm{Bi}(1,p)$, p = 0.75;Пуассона – $\Pi(\lambda)$, λ = 3;
12)Геометрическое – $G(p)$, p = 0.25;Обратное биномиальное – $\overline{\mathrm{Bi}}(r,m)$, r = 5, p = 0.6.
13)Бернулли –$\mathrm{Bi}(1,p)$, p = 0.2013;Биномиальное – $\mathrm{Bi}(m,p)$, m = 8, p = 0.5.
14)Геометрическое – $G(p)$, p = 0.17;Пуассона – $\Pi(\lambda)$, λ = 1;
15)Бернулли –$\mathrm{Bi}(1,p)$, p = 0.3333333;Обратное биномиальное – $\overline{\mathrm{Bi}}(r,m)$, r = 8, p = 0.5.
16)Геометрическое – $G(p)$, p = 0.5;Биномиальное – $\mathrm{Bi}(m,p)$, m = 6, p = 0.3333333.

Дополнительные задания

1) (1 балл) Провести генерацию реализации требуемой случайной величины способом, отличным от того, который был использован в основном задании. (Засчитывается только для одного распределения)

2) (**1 балл**) Вычислить несмещенные оценки коэффициентов эксцесса и асимметрии и сравнить с истинными значениями. Что характеризуют данные параметры? Дайте содержательную интерпретацию полученных результатов.

3а) (**1 балл**) Для одной из сгенерированных выборок построить 2 гистограммы: Кол-во столбцов равно количеству различных значений, которое принимает сгенерированная СВ, высота столбцов пропорциональна 1) теоретическим вероятностям; 2) частотам встречаемости (эмпирическим вероятностям).Замечание: Крайне желательно изобразить на одном рисунке, чтобы можно было сравнить эти две гистограммы.

3б) (1 балл)Сравнить, как «сближаются» гистограммы из пункта 3а, при n = 100, n = 1000 иn = 10000.

4) (**1 балл**) Построить график эмпирической функции распределения и сравнить с графиком теоретической функции распределения.

5а) (**2 балла**) <u>Реализовать</u> критерий хи-квадрат Пирсона проверки статистической гипотезы о принадлежности смоделированной последовательности к заданному распределению. Дайте содержательную интерпретацию полученных результатов.

5б) (1 балл) Использовать готовую реализацию критерия хи-квадрат Пирсона. Дайте содержательную интерпретацию полученных результатов.

6) (1 балл за каждый критерий) Реализовать любой другой критерий согласия о принадлежности смоделированной последовательности к заданному распределению.

7) (2 балла) Смоделировать реализацию однородной цепи Маркова первого порядка с пространством состояний S = {0, 1, 2} длительности $T = 10000$. Параметры цепи Маркова: 1) начальное распределение вероятностей $\pi_i = \mathbf{P}\{x_1 = i\}, i \in S$; 2) матрица вероятностей одношаговых переходов: $P = \left(p_{i,j}\right)_{i,j \in S}$; $p_{i,j} = \mathbf{P}\{x_{t+1} = j | x_t = i\}$; $\sum_{j \in S} p_{i,j} = 1, i \in S$. Вывести долю нулей, единиц и двоек в смоделированной последовательности. (Лучше начинать вычислять доли где-то с 100 или даже 1000 наблюдения, в этом случае они будут ближе к стационарному распределению (см. задание 8), начальные реализации могут иметь распределение отличное от стационарного).

Вариант:

1) $\pi = \begin{pmatrix} 0.33333 \\ 0.33333 \\ 0.33334 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$. 2) $\pi = \begin{pmatrix} 0.33333 \\ 0.33333 \\ 0.33334 \end{pmatrix}$.

3) $\pi = \begin{pmatrix} 0.33333 \\ 0.33333 \\ 0.33334 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$. 4) $\pi = \begin{pmatrix} 0.33333 \\ 0.33333 \\ 0.33334 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$.

5) $\pi = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$. 6) $\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$.

7) $\pi = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$. 8) $\pi = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$.

9) $\pi = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$. 10) $\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$.

11) $\pi = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$. 12) $\pi = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$.

13) $\pi = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$. 14) $\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & 0.25 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$.

15) $\pi = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$. 16) $\pi = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$.

8) (1 балл) Известно, что распределение состояний однородной цепи Маркова должно сходиться к стационарному распределению. Для своего варианта найти стационарное распределение и сравнить с полученными средними долями нулей, единиц и двоек. (Литература: например, Харин, Зуев, Жук Теория вероятностей математическая и прикладная статистика).