



Nicolaus Copernicus University

NCU1

Paweł Czarkowski, Łukasz Skabowski, Mateusz Sobkowiak

AMPPZ 2025 / CERC 2025 / EUC 2026 / World Finals 2026

2025-11-24

1 Headers**2 Wzorki****3 Matma****4 Struktury danych****5 Grafy****6 Flowy i matchingi****7 Geometria****8 Tekstówki****9 Optymalizacje****Headers (1)****headers** includes: <bits/stdc++.h> Główny nagłówek

```
using namespace std;
using LL=long long;
#define FOR(i,l,r)for(int i=(l);i<=(r);++i)
#define REP(i,n)FOR(i,0,(n)-1)
#define sszie(x)int(x.size())
#ifndef DEBUG
auto&operator<<(auto&o,pair<auto,auto>p){return o<<"("
    <<p.first<<","<<p.second<<")";}
auto operator<<(auto&o,auto x)>->decltype(x.end(),o){o
    <<"{";int i=0;for(auto e:x)o<<",";!i++<<e;return o<
    "");}
#define debug(X...)cerr<<"["#X": ",[],(auto...$){((
    cerr<<$<<"; "),...)<<endl;}(X)
#else
#define debug(...){}
#endif
int main() {
    cin.tie(0)->sync_with_stdio(0);
}
```

gen.cpp Dodatek do generatorki

```
mt19937 rng(random_device{}());
int rd(int l, int r) {
    return uniform_int_distribution<int>(l, r)(rng);
}
```

freopen.cpp Kod do IO z/do plików

```
#define PATH "fillme"
assert(strcmp(PATH, "fillme") != 0);
#ifndef LOCAL
    freopen(PATH ".in", "r", stdin);
    freopen(PATH ".out", "w", stdout);
#endif
```

Wzorki (2)**2.1 Równości**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ Wierzchołek paraboli} = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right),$$

$$ax + by = e \wedge cx + dy = f \Rightarrow x = \frac{ed - bf}{ad - bc} \wedge y = \frac{af - ec}{ad - bc}.$$

2.2 Pitagoras

Trójkąt (a, b, c) , takie że $a^2 + b^2 = c^2$: Jest $a = k \cdot (m^2 - n^2)$, $b = k \cdot (2mn)$, $c = k \cdot (m^2 + n^2)$, gdzie $m > n > 0$, $k > 0$, $m \perp n$, oraz albo m albo n jest parzyste.

2.3 Generowanie względnie pierwszych par

Dwa drzewa, zaczynając od $(2, 1)$ (parzysta-nieparzysta) oraz $(3, 1)$ (nieparzysta-nieparzysta), rozgałęzienia są do $(2m - n, m)$, $(2m + n, m)$ oraz $(m + 2n, n)$.

2.4 Liczby pierwsze

$p = 962592769$ to liczba na NTT, czyli $2^{21} \mid p - 1$. Do hashowania: 970592641 (31-bit), 31443539979727 (45-bit), 3006703054056749 (52-bit). Jest 78498 pierwszych ≤ 1000000 . Generatorów jest $\phi(\phi(p^a))$, czyli dla $p > 2$ zawsze istnieje.

2.5 Liczby antypierwsze

lim	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
n	60	840	7560	83160	720720	8648640	73513440
$d(n)$	12	32	64	128	240	448	768
lim	10^9	10^{12}	10^{15}				
n	735134400	963761198400	866421317361600				
$d(n)$	1344	6720	26880				
lim	10^{18}						
n	89761248786617600						
$d(n)$	103680						

2.6 Dzielniki

$$\sum_{d \mid n} d = O(n \log \log n)$$

2.7 Lemat Burnside'a

Liczba takich samych obiektów z dokładnością do symetrii wynosi $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$, gdzie G to zbiór symetrii (ruchów) oraz X^g to punkty (obiekty) stałe symetrii g .

2.8 Silnia

$n!$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800
n	11	12	13	14	15	16	17			
$n!$	4.0e7	4.8e8	6.2e9	8.7e10	1.3e12	2.1e13	3.6e14			
n	20	25	30	40	50	100	150	171		
$n!$	2e18	2e25	3e23	8e47	3e64	9e157	6e262	>DBL_MAX		

2.9 Symbol Newtona

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^k}{k!},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1},$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k},$$

$$(-1)^i \binom{x}{i} = \binom{i-1-x}{i}, \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k},$$

$$\binom{n}{k} \binom{k}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}.$$

2.10 Wzorki na pewne ciągi**2.10.1 Nieporządek**

Liczba takich permutacji, że $p_i \neq i$ (żadna liczba nie wraca na tą samą pozycję): $D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$

$$nD(n-1) + (-1)^n = \left[\frac{n!}{e} \right]$$

2.10.2 Liczba podzieliów

Liczba sposobów zapisania n jako sumę posortowanych liczb dodatnich: $p(0) = 1$, $p(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^{k+1} p(n - k(3k - 1)/2)$, szacujemy $p(n) \sim 0.145/n \cdot \exp(2.56\sqrt{n})$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	20	50	100
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	627	~2e5	~2e8	

2.10.3 Liczby Eulera pierwszego rzędu

Liczba permutacji $\pi \in S_n$ gdzie k elementów jest większych niż poprzedni: k razy $\pi(j) > \pi(j+1)$, $k+1$ razy $\pi(j) \geq j$, k razy $\pi(j) < j$. Zachodzi:

$$E(n, k) = (n-k)E(n-1, k-1) + (k+1)E(n-1, k),$$

$$E(n, 0) = E(n, n-1) = 1,$$

$$E(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n.$$
2.10.4 Stirling pierwszego rzędu

Liczba permutacji długości n mającej k cykli: $c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k)$, $c(0, 0) = 1$, $\sum_{k=0}^n c(n, k)x^k = x(x+1)\dots(x+n-1)$. Małe wartości: $c(8, k) = 8, 0, 5040, 13068, 13132, 6769, 1960, 322, 28, 1$, $c(n, 2) = 0, 0, 1, 3, 11, 50, 274, 1764, 13068, 109584, \dots$

2.10.5 Stirling drugiego rzędu

Liczba podziałów zbioru rozmiaru n na k bloków: $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$, $S(n, 1) = S(n, n) = 1$,

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$
2.10.6 Liczby Catalana

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)n!},$$

$$C_0 = 1, C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n, C_{n+1} = \sum C_i C_{n-i}, C_n = 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, \dots$$

Równoważne: ścieżki na planiszu $n \times n$, nawisowania po n (), liczba drzew binarnych z $n+1$ liściom (0 lub 2 syny), skierowanych drzew z $n+1$ wierzchołkami, triangulacje $n+2$ -kąta, permutacji $[n]$ bez 3-wyrazowego rosnącego podciągu?

2.10.7 Formuła Cayley'a

Liczba różnych drzew (z dokładnością do numerowania wierzchołków) wynosi n^{n-2} . Liczba sposobów by zespółnić k spójnych o rozmiarach s_1, s_2, \dots, s_k wynosi $s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_k \cdot n^{k-2}$.

2.10.8 Twierdzenie Kirchhoffa

Liczba różnych drzew rozpinających spójnego nieskierowanego grafu G bez pęatek (może być multikrawędzi) o n wierzchołkach jest równa det A_{n-1} , gdzie $A = D - M$, D to macierz diagonalna mająca na przekątnej stopnie wierzchołków w grafie G , M to macierz incydencji grafu G , a A_{n-1} to macierz A z usuniętym ostatnim wierszem oraz ostatnią kolumną.

2.11 Funkcje tworzące

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n \geq 0} \binom{k-1+n}{k-1} x^n, \exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

2.12 Funkcje multiplikatywne

$$\epsilon(n) = [n=1], id_k(n) = n^k, id = id_1, 1 = id_0,$$

$$\sigma_k(n) = \sum_{d \mid n} d^k, \sigma = \sigma_1, \tau = \sigma_0, \mu(p^k) = [k=0] - [k=1],$$

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}, (f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right),$$

$$f * g = f * f, f * (g * h) = (f * g) * h,$$

$$f * (g + h) = f * g + f * h, \text{ jak dwie z trzech funkcji } f * g = h \text{ są multiplikatywne, to trzecia też, } f * 1 \Rightarrow g * \mu = f, f * \epsilon = f, \mu * 1 = \epsilon, [n=1] = \sum_{d \mid n} \mu(d) = \sum_{d \mid n} \mu(d)[d \mid n], \varphi * 1 = id, id_k * 1 = \sigma_k, id * 1 = \sigma, 1 * 1 = \tau, s_f(n) = \sum_{i=1}^n f(i),$$

$$s_{f * g}(n) = \sum_{d \mid n} s_f\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

$$s_f(n) = \frac{f(n)}{n!}.$$

Fibonacci

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n,$$

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n, F_n | F_{nk},$$

$$NWD(F_m, F_n) = F_{NWD(m, n)},$$

2.14 Woodbury matrix identity

Dla $A \equiv n \times n$, $C \equiv k \times k$, $U \equiv n \times k$, $V \equiv k \times n$ jest $(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$, przy czym często $C = Id$. Używane gdy A^{-1} jest już policzone i chcemy policzyć odwrotność lekko zmienionego A poprzez $C^{-1} \cdot VA^{-1}U$. Często występuje w kombinacji z tożsamością

$$\frac{1}{1-A} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i.$$

2.15 Zasada włączeń i wyłączeń

X - uniwersum, A_1, \dots, A_n - podzbiory X zwane własnościami $S_j = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_j \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}|$ W szczególności $S_0 = |X|$. Niech $D(k)$ oznacza liczbę elementów X mających dokładnie k własności. $D(k) = \sum_{j \geq k} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} S_j$ W szczególności $D(0) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j S_j$

2.16 Karp's minimum mean-weight cycle algorithm

$G = (V, E)$ - directed graph with weight function $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ $n = |V|$ Assume that every vertex is reachable from $s \in V$. $\delta_k(s, v)$ shortest k -path from s to v (simple dp) Minimum mean-weight cycle is

$$\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s, v) - \delta_k(s, v)}{n - k}$$
Matma (3)

berlekamp-massey includes: simple-modulo $\mathcal{O}(n^2 \log k)$, BerlekampMassey<mod> $\text{bm}(x)$ zgaduje rekurencję ciągu x , $\text{bm.get}(k)$ zwraca k -ty wyraz ciągu x (index 0)

```
struct BerlekampMassey {
    int n;
    vector<int> x, C;
    BerlekampMassey(const vector<int> &x_) : x_(x_) {
        auto B = C = {1};
        int b = 1, m = 0;
        REP(i, sszie(x)) {
            m++; int d = x[i];
            FOR(j, 1, sszie(C) - 1)
                d = add(d, mul(C[j], x[i - j]));
            if(d == 0) continue;
            auto _B = C;
            C.resize(max(sszie(C), m + sszie(B)));
            int coef = mul(d, inv(b));
            FOR(j, m, m + sszie(B) - 1)
                C[j] = sub(C[j], mul(coef, B[j - m]));
            if(ssize(_B) < m + sszie(B)) { B = _B; b = d; m = 0; }
        }
        C.erase(C.begin());
        for(int &t : C) t = sub(0, t);
        n = sszie(C);
    }
    vector<int> combine(vector<int> a, vector<int> b) {
        vector<int> ret(n * 2 + 1);
        REP(i, n + 1) REP(j, n + 1)
            ret[i + j] = add(ret[i + j], mul(a[i], b[j]));
        for(int i = 2 * n; i > n; i--) REP(j, n)
            ret[i - j - 1] = add(ret[i - j - 1], mul(ret[i], C[j]));
        return ret;
    }
    int get(LL k) {
        if (!n) return 0;
        vector<int> r(n + 1), pw(n + 1);
        r[0] = pw[1] = 1;
        for(k++; k <= 2) {
            if(k % 2) r = combine(r, pw);
            pw = combine(pw, pw);
        }
        int ret = 0;
```

```

REP(i, n) ret = add(ret, mul(r[i + 1], x[i]));
return ret;
};

bignum Podstawa wynosi  $1e9$ . Mnożenie, dzielenie, nwd oraz modulo jest kwadratowe, wersje operatorX(Num, int) liniowe. Podstawę można zmieniać (ma zachodzić  $\text{base} == 10^{\text{digits\_per\_elem}}$ ).

struct Num {
    static constexpr int digits_per_elem = 9, base = int(1e9);
    int sign = 0;
    vector<int> x;
    Num& shorten() {
        while(ssize(x) and x.back() == 0)
            x.pop_back();
        for(int a : x)
            assert(0 <= a and a < base);
        if(x.empty())
            sign = 0;
        return *this;
    }
    Num(string s) {
        sign = ssize(s) and s[0] == '-' ? s.erase(s.begin(), -1 : 1;
        for(int i = ssize(s); i > 0; i -= digits_per_elem)
            if(i < digits_per_elem)
                x.emplace_back(stoi(s.substr(0, i)));
            else
                x.emplace_back(stoi(s.substr(i - digits_per_elem, digits_per_elem)));
        shorten();
    }
    Num() {}
    Num(LL s) : Num(to_string(s)) {}
    string to_string(const Num& n) {
        stringstream s;
        s << (n.sign == -1 ? "-" : "") << (ssize(n.x) ? n.x.back() : 0);
        for(int i = ssize(n.x) - 2; i >= 0; --i)
            s << setfill('0') << setw(n.digits_per_elem) << n.x[i];
        return s.str();
    }
    ostream& operator<<(ostream& o, const Num& n) {
        return o << to_string(n).c_str();
    }
    auto operator<=(const Num& a, const Num& b) {
        if(a.sign != b.sign or ssize(a.x) != ssize(b.x))
            return ssize(a.x) * a.sign <= ssize(b.x) * b.sign;
        ;
        for(int i = ssize(a.x) - 1; i >= 0; --i)
            if(a.x[i] != b.x[i])
                return a.x[i] * a.sign <= b.x[i] * b.sign;
        return strong_ordering::equal;
    }
    bool operator==(const Num& a, const Num& b) {
        return a.x == b.x and a.sign == b.sign;
    }
    Num abs(Num n) { n.sign &= 1; return n; }
    Num operator+(Num a, Num b) {
        int mode = a.sign * b.sign >= 0 ? a.sign |= b.sign,
        1 : abs(b) > abs(a) ? swap(a, b), -1 : -1, carry =
        0;
        for(int i = 0; i < max(ssize((mode == 1 ? a : b).x),
            ssize(b.x)) or carry; ++i) {
            if(mode == 1 and i == ssize(a.x))
                a.x.emplace_back(0);
            a.x[i] += mode * (carry + (i < ssize(b.x) ? b.x[i] :
            0));
            carry = a.x[i] >= a.base or a.x[i] < 0;
            a.x[i] -= mode * carry * a.base;
        }
        return a.shorten();
    }

```

bignum binsearch-stern-brocot crt determinant discrete-log discrete-root extended-gcd fft-mod

```

}
Num operator-(Num a) { a.sign *= -1; return a; }
Num operator-(Num a, Num b) { return a + -b; }
Num operator*(Num a, int b) {
    assert(abs(b) < a.base);
    int carry = 0;
    for(int i = 0; i < ssize(a.x) or carry; ++i) {
        if(i == ssize(a.x))
            a.x.emplace_back(0);
        LL cur = a.x[i] * LL(abs(b)) + carry;
        a.x[i] = int(cur % a.base);
        carry = int(cur / a.base);
    }
    if(b < 0)
        a.sign *= -1;
    return a.shorten();
}
Num operator*(const Num& a, const Num& b) {
    Num c;
    c.x.resize(ssize(a.x) + ssize(b.x));
    REP(i, ssize(a.x))
        for(int j = 0, carry = 0; j < ssize(b.x) or carry;
            ++j) {
            LL cur = c.x[i + j] + a.x[i] * LL(j < ssize(b.x) ?
            b.x[j] : 0) + carry;
            c.x[i + j] = int(cur % a.base);
            carry = int(cur / a.base);
        }
    c.sign = a.sign * b.sign;
    return c.shorten();
}
Num operator/(Num a, int b) {
    assert(b != 0 and abs(b) < a.base);
    int carry = 0;
    for(int i = ssize(a.x) - 1; i >= 0; --i) {
        LL cur = a.x[i] + carry * LL(a.base);
        a.x[i] = int(cur / abs(b));
        carry = int(cur % abs(b));
    }
    if(b < 0)
        a.sign *= -1;
    return a.shorten();
}
// zwraca  $a * \text{pow}(a, \text{base}, b)$ 
Num shift(Num a, int b) {
    vector<int> v(b, 0);
    a.x.insert(a.x.begin(), v.begin(), v.end());
    return a.shorten();
}
Num operator/(Num a, Num b) {
    assert(ssize(b.x));
    int s = a.sign * b.sign;
    Num c;
    a = abs(a);
    b = abs(b);
    for(int i = ssize(a.x) - ssize(b.x); i >= 0; --i) {
        if(a < shift(b, i)) continue;
        int l = 0, r = a.base - 1;
        while(l < r) {
            int m = (l + r + 1) / 2;
            if(shift(b * m, i) <= a)
                l = m;
            else
                r = m - 1;
        }
        c = c + shift(l, i);
        a = a - shift(b * l, i);
    }
    c.sign = s;
    return c.shorten();
}
template<typename T>
Num operator%(const Num& a, const T& b) { return a -
    ((a / b) * b); }
Num nwd(const Num& a, const Num& b) { return b == Num()
    ? a : nwd(b, a % b); }

```

binsearch-stern-brocot $\mathcal{O}(\log \max_{\text{val}})$, szuka największego a/b , że $\text{is_ok}(a/b)$ oraz $0 \leq a, b \leq \max_{\text{value}}$. Została, $\text{ze_is_ok}(0) == \text{true}$.

```

using Frac = pair<LL, LL>;
Frac my_max(Frac l, Frac r) {
    return l.first * __int128_t(r.second) > r.first *
    __int128_t(l.second) ? l : r;
}
Frac binsearch(LL max_value, function<bool>(Frac) is_ok) {
    assert(is_ok(pair(0, 1)) == true);
    Frac left = {0, 1}, right = {1, 0}, best_found = left;
    int current_dir = 0;
    while(max(left.first, left.second) <= max_value) {
        best_found = my_max(best_found, left);
        auto get_frac = [&](LL mul) {
            LL mull = current_dir ? 1 : mul;
            LL mulr = current_dir ? mul : 1;
            return pair(left.first * mull + right.first *
            mulr, left.second * mull + right.second * mulr);
        };
        auto is_good_mul = [&](LL mul) {
            Frac mid = get_frac(mul);
            return is_ok(mid) == current_dir and max(mid.
            first, mid.second) <= max_value;
        };
        LL power = 1;
        for(; is_good_mul(power); power *= 2) {}
        LL bl = power / 2 + 1, br = power;
        while(bl != br) {
            LL bm = (bl + br) / 2;
            if(not is_good_mul(bm))
                br = bm;
            else
                bl = bm + 1;
        }
        tie(left, right) = pair(get_frac(bl - 1), get_frac(
            bl));
        if(current_dir == 0)
            swap(left, right);
        current_dir ^= 1;
    }
    return best_found;
}

```

crt includes: extended-gcd $\mathcal{O}(\log n)$, crt(a, m, b, n) zwraca takie x, z że $x \mod m = a$ oraz $z \mod n = b, m$ oraz n nie muszą być względnie pierwsze, ale może nie być wtedy rozwiązania (assert wywali, ale można zmienić na return -1).

```

LL crt(LL a, LL m, LL b, LL n) {
    if(n > m) swap(a, b), swap(m, n);
    auto [d, x, y] = extended_gcd(m, n);
    assert((a - b) % d == 0);
    LL ret = (b - a) % n * x % n / d * m + a;
    return ret < 0 ? ret + m * n / d : ret;
}

```

determinant includes: matrix-header $\mathcal{O}(n^3)$, wyznacznik macierzy (modulo lub double)

```

T determinant(vector<vector<T>>& a) {
    int n = ssize(a);
    T res = 1;
    REP(i, n) {
        int b = i;
        FOR(j, i + 1, n - 1)
            if(abs(a[j][i]) > abs(a[b][i]))
                b = j;
        if(i != b)
            swap(a[i], a[b]), res = sub(0, res);
        res = mul(res, a[i][i]);
        if(equal(res, 0))
            return 0;
        FOR(j, i + 1, n - 1) {

```

```

            T v = divide(a[j][i], a[i][i]);
            if(not equal(v, 0))
                FOR(k, i + 1, n - 1)
                    a[j][k] = sub(a[j][k], mul(v, a[i][k]));
            }
        }
        return res;
    }
}

```

discrete-log includes: simple-modulo $\mathcal{O}(\sqrt{m} \log n)$ czasowo, $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ pamięciowo, dla liczb pierwszej mod oraz $a, b \nmid mod$ znajdzie e takie że $a^e \equiv b \pmod{mod}$. Jak zwróci -1 to nie istnieje.

```

int discrete_log(int a, int b) {
    int n = int(sqrt(mod)) + 1;
    int an = 1;
    REP(i, n)
        an = mul(an, a);
    unordered_map<int, int> vals;
    int cur = b;
    FOR(q, 0, n) {
        vals[cur] = q;
        cur = mul(cur, a);
    }
    cur = 1;
    FOR(p, 1, n) {
        cur = mul(cur, an);
        if(vals.count(cur)) {
            int ans = n * p - vals[cur];
            return ans;
        }
    }
    return -1;
}

```

discrete-root includes: primitive-root, discrete-log Dla pierwszego mod oraz $a \perp mod$, k znajduje b takie, że $b^k \equiv a$ (pierwiastek k -tego stopnia z a). Jak zwróci -1 to nie istnieje.

```

int discrete_root(int a, int k) {
    int g = primitive_root();
    int y = discrete_log(powi(g, k), a);
    if(y == -1)
        return -1;
    return powi(g, y);
}

```

extended-gcd $\mathcal{O}(\log(\min(a, b)))$, dla danego (a, b) znajduje takie $(\text{gcd}(a, b), x, y)$, że $ax + by = \text{gcd}(a, b)$. auto [gcd, x, y] = extended_gcd(a, b);

```

tuple<LL, LL, LL> extended_gcd(LL a, LL b) {
    if(a == 0)
        return {b, 0, 1};
    auto [gcd, x, y] = extended_gcd(b % a, a);
    return {gcd, y - x * (b / a), x};
}

```

fft-mod includes: fft $\mathcal{O}(n \log n)$, conv_mod(a, b) zwraca iloczyn wielomianów modulo, ma większą dokładność niż zwykły fft.

```

vector<int> conv_mod(vector<int> a, vector<int> b, int M) {
    if(a.empty() or b.empty()) return {};
    vector<int> res(ssize(a) + ssize(b) - 1);
    const int CUTOFF = 125;
    if(min(ssize(a), ssize(b)) <= CUTOFF) {
        if(ssize(a) > ssize(b))
            swap(a, b);
        REP(i, ssize(a))
            REP(j, ssize(b))
                res[i + j] = int((res[i + j] + LL(a[i]) * b[j]
                ) % M);
    }
    int B = 32 - __builtin_clz(ssize(res)), n = 1 << B;
}

```

```

int cut = int(sqrt(M));
vector<Complex> L(n), R(n), outl(n), outs(n);
REP(i, ssize(a)) L[i] = Complex((int) a[i] / cut, (int) b[i] % cut);
REP(i, ssize(b)) R[i] = Complex((int) b[i] / cut, (int) b[i] % cut);
fft(L), fft(R);
REP(i, n) {
    int j = -i & (n - 1);
    outl[j] = (L[i] + conj(L[j])) * R[i] / (2.0 * n);
    outs[j] = (L[i] - conj(L[j])) * R[i] / (2.0 * n) / 2;
}
fft(outl), fft(outs);
REP(i, ssize(res)) {
    LL av = LL(real(outl[i]) + 0.5), cv = LL(imag(outs[i]) + 0.5);
    LL bv = LL(imag(outl[i]) + 0.5) + LL(real(outs[i]) + 0.5);
    res[i] = int(((av % M * cut + bv) % M * cut + cv) % M);
}
return res;
}

```

fft $\mathcal{O}(n \log n)$, conv(a, b) to iloczyn wielomianów.

```

using Complex = complex<double>;
void fft(vector<Complex> &a) {
    int n = ssize(a), L = 31 - __builtin_clz(n);
    static vector<complex<long double>> R(2, 1);
    static vector<Complex> rt(2, 1);
    for (static int k = 2; k < n; k *= 2) {
        R.resize(n), rt.resize(n);
        auto x = polar(1.0L, acosl(-1) / k);
        FOR(i, k, 2 * k - 1)
            rt[i] = R[i] = i & 1 ? R[i / 2] * x : R[i / 2];
    }
    vector<int> rev(n);
    REP(i, n) rev[i] = (rev[i / 2] | (i & 1) << L) / 2;
    REP(i, n) if(rev[i] swap(a[i]), a[rev[i]]);
    for (int k = 1; k < n; k *= 2) {
        for (int i = 0; i < n; i += 2 * k) REP(j, k) {
            Complex z = rt[j + k] * a[i + j + k]; // mozna zoptymizowac rozpisujac
            a[i + j + k] = a[i + j] - z;
            a[i + j] += z;
        }
    }
    vector<double> conv(vector<double> &a, vector<double> &b) {
        if(a.empty() || b.empty()) return {};
        vector<double> res(ssize(a) + ssize(b) - 1);
        int L = 32 - __builtin_clz(ssize(res)), n = (1 << L);
        vector<Complex> in(n), out(n);
        copy(a.begin(), a.end(), in.begin());
        REP(i, ssize(b)) in[i].imag(b[i]);
        fft(in);
        for (auto &x : in) x *= x;
        REP(i, n) out[i] = in[-i & (n - 1)] - conj(in[i]);
        fft(out);
        REP(i, ssize(res)) res[i] = imag(out[i]) / (4 * n);
        return res;
    }
}

```

FLOOR-SUM $\mathcal{O}(\log a)$, liczy $\sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a \cdot i + b}{c} \right\rfloor$. Działa dla $0 \leq a, b < c$ oraz $1 \leq c, n \leq 10^6$. Dla innych n, a, b, c trzeba uwzględnić `_int128`.

```

LL floor_sum(LL n, LL a, LL b, LL c) {
    LL ans = 0;
    if (a >= c) {
        ans += (n - 1) * n * (a / c) / 2;
        a %= c;
    }
}

```

```

if (b >= c) {
    ans += n * (b / c);
    b %= c;
}
LL d = (a * (n - 1) + b) / c;
if (d == 0) return ans;
ans += d * (n - 1) - floor_sum(d, c, c - b - 1, a);
return ans;
}

```

fwht $\mathcal{O}(n \log n)$, musi być potęga dwójki, fwht_or(a)[i] = suma(j będące podmaską i) a[j], ifwht_or(fwht_or(a)) == a, convolution_or(a, b)[i] = suma(j | k == i) a[j] * b[k], fwht_and(a)[i] = suma(j będące nadmaską i) a[j], ifwht_and(fwht_and(a)) == a, convolution_and(a, b)[i] = suma(j & k == i) a[j] * b[k], fwht_xor(a)[i] = suma(j) oraz i mają parzyste wspólnie zapalone bitów a[j] - suma(j oraz i mają nieparzyste) a[j], ifwht_xor(fwht_xor(a)) == a, convolution_xor(a, b)[i] = suma(j k!>= i) a[j] * b[k].

```

vector<int> fwht_or(vector<int> a) {
    int n = ssize(a);
    assert((n & (n - 1)) == 0);
    for (int s = 1; 2 * s <= n; s *= 2)
        for (int l = 0; l < n; l += 2 * s)
            for (int i = l; i < l + s; ++i)
                a[i + s] += a[i];
    return a;
}

```

```

vector<int> ifwht_or(vector<int> a) {
    int n = ssize(a);
    assert((n & (n - 1)) == 0);
    for (int s = n / 2; s >= 1; s /= 2)
        for (int l = 0; l < n; l += 2 * s)
            for (int i = l; i < l + s; ++i)
                a[i + s] -= a[i];
    return a;
}

```

```

vector<int> convolution_or(vector<int> a, vector<int> b) {
    int n = ssize(a);
    assert((n & (n - 1)) == 0 and ssize(b) == n);
    a = fwht_or(a);
    b = fwht_or(b);
    REP(i, n)
        a[i] *= b[i];
    return ifwht_or(a);
}

```

```

vector<int> fwht_and(vector<int> a) {
    int n = ssize(a);
    assert((n & (n - 1)) == 0);
    for (int s = 1; 2 * s <= n; s *= 2)
        for (int l = 0; l < n; l += 2 * s)
            for (int i = l; i < l + s; ++i)
                a[i] += a[i + s];
    return a;
}

```

```

vector<int> ifwht_and(vector<int> a) {
    int n = ssize(a);
    assert((n & (n - 1)) == 0);
    for (int s = n / 2; s >= 1; s /= 2)
        for (int l = 0; l < n; l += 2 * s)
            for (int i = l; i < l + s; ++i)
                a[i] -= a[i + s];
    return a;
}

```

```

vector<int> convolution_and(vector<int> a, vector<int> b) {
    int n = ssize(a);
    assert((n & (n - 1)) == 0 and ssize(b) == n);
    a = fwht_and(a);
    b = fwht_and(b);
    REP(i, n)
        a[i] *= b[i];
    return ifwht_and(a);
}
vector<int> fwht_xor(vector<int> a) {

```

```

int n = ssize(a);
assert((n & (n - 1)) == 0);
for (int s = 1; 2 * s <= n; s *= 2)
    for (int l = 0; l < n; l += 2 * s)
        for (int i = l; i < l + s; ++i) {
            int t = a[i + s];
            a[i + s] = a[i] - t;
            a[i] += t;
        }
    return a;
}
vector<int> ifwht_xor(vector<int> a) {
    int n = ssize(a);
    assert((n & (n - 1)) == 0);
    for (int s = n / 2; s >= 1; s /= 2)
        for (int l = 0; l < n; l += 2 * s)
            for (int i = l; i < l + s; ++i) {
                int t = a[i + s];
                a[i + s] = (a[i] - t) / 2;
                a[i] = (a[i] + t) / 2;
            }
    return a;
}
vector<int> convolution_xor(vector<int> a, vector<int> b) {
    int n = ssize(a);
    assert((n & (n - 1)) == 0 and ssize(b) == n);
    a = fwht_xor(a);
    b = fwht_xor(b);
    REP(i, n)
        a[i] *= b[i];
    return ifwht_xor(a);
}

```

gauss includes: matrix-header $\mathcal{O}(nm(n+m))$, Wrzucam n wektorów ($wsp_x0, wsp_x1, \dots, wsp_xm - 1, suma$), gauss wtedy zwraca liczbę rozwiązań (0, 1 albo 2 (tzn. nieskończoność) oraz jedno poprawne rozwiązanie (o ile istnieje). Przykład gauss({2, -1, 1, 7}, {1, 1, 1, 1}, {0, 1, -1, 6.5}) zwraca {1, 6.75, 0.375, -6.125}).

```

pair<int, vector<T>> gauss(vector<vector<T>> a) {
    int n = ssize(a); // liczba wierszy
    int m = ssize(a[0]) - 1; // liczba zmiennej
    vector<int> where(n, -1); // w którym wierszu jest zdefiniowana i-ta zmieniona
    for (int col = 0, row = 0; col < m and row < n; ++col) {
        int sel = row;
        for (int y = row; y < n; ++y)
            if (abs(a[y][col]) > abs(a[sel][col]))
                sel = y;
        if (equal(a[sel][col], 0))
            continue;
        for (int x = col; x <= m; ++x)
            swap(a[sel][x], a[row][x]);
        // teraz sel jest nieaktualne
        where[col] = row;
        for (int y = 0; y < n; ++y)
            if (y != row) {
                T wspolczynnik = divide(a[y][col], a[row][col]);
                for (int x = col; x <= m; ++x)
                    a[y][x] = sub(a[y][x], mul(wspolczynnik, a[row][x]));
            }
        ++row;
    }
    vector<T> answer(m);
    for (int col = 0; col < m; ++col)
        if (where[col] != -1)
            answer[col] = divide(a[where[col]][m], a[where[col]][col]);
    for (int row = 0; row < n; ++row) {
        T got = 0;
        for (int col = 0; col < m; ++col)
            got = add(got, mul(answer[col], a[row][col]));
        if (not equal(got, a[row][m]))

```

```

            return {0, answer};
        }
        for (int col = 0; col < m; ++col)
            if (where[col] == -1)
                return {2, answer};
            return {1, answer};
    }
}

```

integral $\mathcal{O}(idk)$, zwraca całkę na $[l, r]$.

```

using D = long double;
D simpson(function<D (D)> f, D l, D r) {
    return (f(l) + 4 * f((l + r) / 2) + f(r)) * (r - l) / 6;
}
D integrate(function<D (D)> f, D l, D r, D s, D eps) {
    D m = (l + r) / 2;
    D sl = simpson(f, l, m), sr = simpson(f, m, r), s2 = sl + sr;
    if (abs(s2 - s) < 15 * eps or r - l < 1e-10)
        return s2 + (s2 - s) / 15;
    return integrate(f, l, m, sl, eps / 2) + integrate(f, m, r, sr, eps / 2);
}
D integrate(function<D (D)> f, D l, D r) {
    return integrate(f, l, r, simpson(f, l, r), 1e-8);
}

```

lagrange-consecutive includes: simple-modulo $\mathcal{O}(n)$, przyjmuje wartości wielomianu w punktach $0, 1, \dots, n-1$ i wylicza jego wartość w x : lagrange_consecutive({2, 3, 4}, 3) == 5

```

int lagrange_consecutive(vector<int> y, int x) {
    int n = ssize(y), fac = 1, pref = 1, suff = 1, ret = 0;
    FOR(i, 1, n) fac = mul(fac, i);
    fac = inv(fac);
    REP(i, n) {
        fac = mul(fac, n - i);
        y[i] = mul(y[i], mul(pref, fac));
        y[n - 1 - i] = mul(y[n - 1 - i], mul(suff, mul(i % 2 ? mod - 1 : 1, fac)));
        pref = mul(pref, sub(x, i));
        suff = mul(suff, sub(x, n - 1 - i));
    }
    REP(i, n) ret = add(ret, y[i]);
    return ret;
}

```

matrix-header Funkcje pomocnicze do algorytmów macierzyowych.

```

#endif
#ifndef CHANGABLE_MOD
int mod = 998'244'353;
#else
constexpr int mod = 998'244'353;
#endif
bool equal(int a, int b) {
    return a == b;
}
int mul(int a, int b) {
    return int(a * LL(b) % mod);
}
int add(int a, int b) {
    a += b;
    return a >= mod ? a - mod : a;
}
int powi(int a, int b) {
    for (int ret = 1; b /= 2) {
        if (b == 0)
            return ret;
        if (b & 1)
            ret = mul(ret, a);
        a = mul(a, a);
    }
}

```

```

} int inv(int x) {
    return powi(x, mod - 2);
}
int divide(int a, int b) {
    return mul(a, inv(b));
}
int sub(int a, int b) {
    return add(a, mod - b);
}
using T = int;
#else
constexpr double eps = 1e-9;
bool equal(double a, double b) {
    return abs(a - b) < eps;
}
#define OP(name, op) double name(double a, double b) {
    return a op b;
}
OP(mul, *)
OP(add, +)
OP(divide, /)
OP(sub, -)
using T = double;
#endif

matrix-inverse includes: matrix-header  $\mathcal{O}(n^3)$ , odwrotność macierzy (modulo lub double). Zwraca rząd macierzy. Dla odwarcalnych macierzy (rząd=n) w a znajdzie się jej odwrotność.



---


int inverse(vector<vector<T>>& a) {
    int n = ssize(a);
    vector<int> col(n);
    vector h(n, vector<T>(n));
    REP(i, n)
        h[i][i] = 1, col[i] = i;
    REP(i, n) {
        int r = i, c = i;
        FOR(j, i, n - 1) FOR(k, i, n - 1)
            if(abs(a[j][k]) > abs(a[r][c]))
                r = j, c = k;
        if (equal(a[r][c], 0))
            return i;
        a[i].swap(a[r]);
        h[i].swap(h[r]);
        REP(j, n)
            swap(a[j][i], a[j][c]), swap(h[j][i], h[j][c]);
        swap(col[i], col[c]);
        T v = a[i][i];
        FOR(j, i + 1, n - 1) {
            T f = divide(a[j][i], v);
            a[j][i] = 0;
            FOR(k, i + 1, n - 1)
                a[j][k] = sub(a[j][k], mul(f, a[i][k]));
            REP(k, n)
                h[j][k] = sub(h[j][k], mul(f, h[i][k]));
        }
        FOR(j, i + 1, n - 1)
            a[i][j] = divide(a[i][j], v);
        REP(k, n)
            h[i][j] = divide(h[i][j], v);
        a[i][i] = 1;
    }
    for(int i = n - 1; i > 0; --i) REP(j, i) {
        T v = a[j][i];
        REP(k, n)
            h[j][k] = sub(h[j][k], mul(v, h[i][k]));
    }
    REP(i, n)
        a[col[i]][col[j]] = h[i][j];
    return n;
}

miller-rabin  $\mathcal{O}(\log^2 n)$  test pierwszości Millera-Rabina, działa dla long longów.

```

```

LL llmul(LL a, LL b, LL m) {
    return LL(__int128_t(a) * b % m);
}
LL llpowi(LL a, LL n, LL m) {
    for (LL ret = 1; n /= 2) {
        if (n == 0)
            return ret;
        if (n % 2)
            ret = llmul(ret, a, m);
        a = llmul(a, a, m);
    }
}
bool miller_rabin(LL n) {
    if(n < 2) return false;
    int r = 0;
    LL d = n - 1;
    while(d % 2 == 0)
        d /= 2, r++;
    for(int a : {2, 325, 9375, 28178, 450775, 9780504,
                1795265022}) {
        if (a % n == 0) continue;
        LL x = llpowi(a, d, n);
        if(x == 1 || x == n - 1)
            continue;
        bool composite = true;
        REP(i, r - 1) {
            x = llmul(x, x, n);
            if(x == n - 1) {
                composite = false;
                break;
            }
        }
        if(composite) return false;
    }
    return true;
}

multiplicative includes: sieve  $\mathcal{O}(n)$ , mobius(n) oblicza funkcję Möbiusa na  $[0..n]$ , totient(n) oblicza funkcję Eulera na  $[0..n]$ , wartości w 0 niezdefiniowane.



---


vector<int> mobius(int n) {
    sieve(n);
    vector<int> ans(n + 1, 0);
    if (n) ans[1] = 1;
    FOR(i, 2, n) {
        int p = prime_div[i];
        if (i / p % p) ans[i] = -ans[i / p];
    }
    return ans;
}
vector<int> totient(int n) {
    sieve(n);
    vector<int> ans(n + 1, 1);
    FOR(i, 2, n) {
        int p = prime_div[i];
        ans[i] = ans[i / p] * (p - bool(i / p % p));
    }
    return ans;
}

ntt includes: simple-modulo  $\mathcal{O}(n \log n)$  mnożenie wielomianów mod 998244353.



---


using vi = vector<int>;
constexpr int root = 3;
void ntt(vi& a, int n, bool inverse = false) {
    assert((n & (n - 1)) == 0);
    a.resize(n);
    vi b(n);
    for(int w = n / 2; w; w /= 2, swap(a, b)) {
        int r = powi(root, (mod - 1) / n * w, m = 1);
        for(int i = 0; i < n; i += w * 2, m = mul(m, r))
            REP(j, w) {
                int u = a[i + j], v = mul(a[i + j + w], m);
                b[i / 2 + j] = add(u, v);
                b[i / 2 + j + n / 2] = sub(u, v);
            }
    }
}

pi  $\mathcal{O}\left(n^{\frac{3}{4}}\right)$ , liczba liczb pierwszych na przedziale  $[1, n]$ . Pi pi(n); pi.query(d); // musi zachodzić  $d \leq n$ 



---


struct Pi {
    vector<LL> w, dp;
    int id(LL v) {
        if (v <= w.back() / v)
            return int(v - 1);
        return ssize(w) - int(w.back() / v);
    }
    Pi(LL n) {
        for (LL i = 1; i * i <= n; ++i) {
            w.push_back(i);
            if (i / i != i)
                w.emplace_back(n / i);
        }
        sort(w.begin(), w.end());
        for (LL i : w)
            dp.emplace_back(i - 1);
        for (LL i = 1; (i + 1) * (i + 1) <= n; ++i) {
            if (dp[i] == dp[i - 1])
                continue;
            for (int j = ssize(w) - 1; w[j] >= (i + 1) * (i + 1); --j)
                dp[j] -= dp[id(w[j] / (i + 1))] - dp[i - 1];
        }
    }
    LL query(LL v) {
        assert(w.back() % v == 0);
        return dp[id(v)];
    }
};

polynomial includes: ntt Operacje na wielomianach mod 998244353, deriv, integr  $\mathcal{O}(n)$ , powi_deg  $\mathcal{O}(n \cdot \deg)$ , sqrt, inv, log, exp, powi, div  $\mathcal{O}(n \log n)$ , powi_slow, eval, inter  $\mathcal{O}(n \log^2 n)$  Ogólnie to przepisujemy co chcemy. deriv(a) zwraca  $a'$ , integr(a) zwraca  $\int a$ , powi_degSlow(a, k, n) zwraca  $a^k (\text{mod } n^k)$ , sqrt(a, n) zwraca  $a^{\frac{1}{2}} (\text{mod } n^k)$ , inv(a, n) zwraca  $a^{-1} (\text{mod } n^k)$ , log(a, n) zwraca  $\ln(a) (\text{mod } n^k)$ , exp(a, n) zwraca  $\exp(a) (\text{mod } n^k)$ , div(a, b) zwraca  $(q, r)$  takie, że  $a = qb + r$ , eval(a, x) zwraca  $y$  taki, że  $a(x_i) = y_i$ , inter(x, y) zwraca  $a$  taki, że  $a(x_i) = y_i$ .


---


vi mod_xn(const vi& a, int n) { // KONIECZNE
    return vi(a.begin(), a.begin() + min(n, ssize(a)));
}
void sub(vi& a, const vi& b) { // KONIECZNE
    a.resize(max(ssize(a), ssize(b)));
    REP(i, ssize(b)) a[i] = sub(a[i], b[i]);
}
vi deriv(vi a) {
    REP(i, ssize(a)) a[i] = mul(a[i], i);
    if(ssize(a)) a.erase(a.begin());
    return a;
}
vi integr(vi a) {
    int n = ssize(a);
    a.insert(a.begin(), 0);
    static vi f{1};
    FOR(i, ssize(f), n) f.emplace_back(mul(f[i - 1], i));
    ;
    int r = inv(f[n]);
    for(int i = n; i > 0; --i)
        a[i] = mul(a[i], mul(r, f[i - 1])), r = mul(r, i);
    return a;
}
vi powi_deg(const vi& a, int k, int n) {
    assert(ssize(a) and a[0] != 0);
    vi v(n), f(n, 1);
    v[0] = powi(a[0], k);
    REP(i, n - 1) f[i + 1] = mul(f[i], n - i);
    int r = inv(mul(f[n - 1], a[0]));
    FOR(i, 1, n - 1) {
        FOR(j, 1, min(ssize(a) - 1, i)) {
            v[i] = add(v[i], mul(a[j], mul(v[i - j], sub(mul
                (k, j), i - j)))));
        }
        v[i] = mul(v[i], mul(r, f[n - i]));
        r = mul(r, i);
    }
    return v;
}
vi powi_slow(const vi& a, int k, int n) {
    vi v{1}, b = mod_xn(a, n);
    int x = 1; while(x < n) x *= 2;
    while(k) {
        nt(b, 2 * x);
        if(k & 1) {
            nt(v, 2 * x);
            REP(i, 2 * x) v[i] = mul(v[i], b[i]);
            nt(v, 2 * x, true);
            v.resize(x);
        }
        REP(i, 2 * x) b[i] = mul(b[i], b[i]);
        nt(b, 2 * x, true);
        b.resize(x);
        k /= 2;
    }
    return mod_xn(v, n);
}
vi sqrt(const vi& a, int n) {

```

```

auto at = [&](int i) { if(i < ssize(a)) return a[i];
else return 0; };
assert(ssize(a) and a[0] == 1);
const int inv2 = inv(2);
vi v[1], f[1], g[1];
for(int x = 1; x < n; x *= 2) {
    vi z = v;
    ntt(z, x);
    vi b = g;
    REP(i, x) b[i] = mul(b[i], z[i]);
    ntt(b, x, true);
    REP(i, x / 2) b[i] = 0;
    ntt(b, x);
    REP(i, x) b[i] = mul(b[i], g[i]);
    ntt(b, x, true);
    REP(i, x / 2) f.emplace_back(sub(0, b[i] + x / 2));
}
REP(i, x) z[i] = mul(z[i], z[i]);
ntt(z, x, true);
vi c[2 * x];
REP(i, x) c[i + x] = sub(add(at(i), at(i + x)), z[i]);
ntt(c, 2 * x);
g = f;
ntt(g, 2 * x);
REP(i, 2 * x) c[i] = mul(c[i], g[i]);
ntt(c, 2 * x, true);
REP(i, x) v.emplace_back(mul(c[i + x], inv2));
}
return mod_xn(v, n);
}
vi inv(const vi& a, int n) {
    assert(ssize(a) and a[0] != 0);
    vi v[inv(a[0])];
    for(int x = 1; x < n; x *= 2) {
        vi f = mod_xn(a, 2 * x), g = v;
        ntt(g, 2 * x);
        REP(k, 2) {
            ntt(f, 2 * x);
            REP(i, 2 * x) f[i] = mul(f[i], g[i]);
            ntt(f, 2 * x, true);
            REP(i, x) f[i] = 0;
        }
        sub(v, f);
    }
    return mod_xn(v, n);
}
vi log(const vi& a, int n) { // WYMAGA deriv, integr,
    inv
    assert(ssize(a) and a[0] == 1);
    return integr(mod_xn(conv(deriv(mod_xn(a, n)), inv(a, n)), n - 1));
}
vi exp(const vi& a, int n) { // WYMAGA deriv, integr
    assert(a.empty() or a[0] == 0);
    vi v[1], f[1], g, h[0], s;
    for(int x = 1; x < n; x *= 2) {
        g = v;
        REP(k, 2) {
            ntt(g, (2 - k) * x);
            if(!k) s = g;
            REP(i, x) g[i] = mul(g[(2 - k) * i], h[i]);
            ntt(g, x, true);
            REP(i, x / 2) g[i] = 0;
        }
        sub(f, g);
        vi b = deriv(mod_xn(a, x));
        ntt(b, x);
        REP(i, x) b[i] = mul(s[2 * i], b[i]);
        ntt(b, x, true);
        vi c = deriv(v);
        sub(c, b);
        rotate(c.begin(), c.end() - 1, c.end());
        ntt(c, 2 * x);
        h = f;
        ntt(h, 2 * x);
        REP(i, 2 * x) c[i] = mul(c[i], h[i]);
    }
}

```

```

ntt(c, 2 * x, true);
c.resize(x);
vi t(x - 1);
c.insert(c.begin(), t.begin(), t.end());
vi d = mod_xn(a, 2 * x);
sub(d, integr(c));
d.erase(d.begin(), d.begin() + x);
ntt(d, 2 * x);
REP(i, 2 * x) d[i] = mul(d[i], s[i]);
ntt(d, 2 * x, true);
REP(i, x) v.emplace_back(d[i]);
}
return mod_xn(v, n);
}
vi powi(const vi& a, int k, int n) { // WYMAGA log,
    exp
    vi v = mod_xn(a, n);
    int cnt = 0;
    while(cnt < ssize(v) and !v[cnt])
        ++cnt;
    if(LL(cnt) * k >= n)
        return {};
    v.erase(v.begin(), v.begin() + cnt);
    if(v.empty())
        return k ? vi{} : vi{1};
    int powi0 = powi(v[0], k);
    int inv0 = inv(v[0]);
    for(int& e : v) e = mul(e, inv0);
    v = log(v, n - cnt * k);
    for(int& e : v) e = mul(e, k);
    v = exp(v, n - cnt * k);
    for(int& e : v) e = mul(e, powi0);
    vi t(cnt * k, 0);
    v.insert(v.begin(), t.begin(), t.end());
    return v;
}
pair<vi, vi> div_slow(vi a, const vi& b) {
    vi x;
    while(ssize(a) >= ssize(b)) {
        x.emplace_back(mul(a.back(), inv(b.back())));
        if(x.back() != 0)
            REP(i, ssize(b))
                a.end()[-i - 1] = sub(a.end()[-i - 1], mul(x.back(), b.end()[-i - 1]));
        a.pop_back();
    }
    reverse(x.begin(), x.end());
    return {x, a};
}
pair<vi, vi> div(vi a, const vi& b) { // WYMAGA inv,
    div_slow
    const int d = ssize(a) - ssize(b) + 1;
    if(d <= 0)
        return {{}, a};
    if(min(d, ssize(b)) < 250)
        return div_slow(a, b);
    vi x = mod_xn(conv(mod_xn({a.rbegin(), a.rend()}, d),
        , inv({b.rbegin(), b.rend()}, d)), d);
    reverse(x.begin(), x.end());
    sub(a, conv(x, b));
    return {x, mod_xn(a, ssize(b))};
}
vi build(vector<vi> &tree, int v, auto l, auto r) {
    if(r - l == 1) {
        return tree[v] = vi{sub(0, *l), 1};
    } else {
        auto M = l + (r - l) / 2;
        return tree[v] = conv(build(tree, 2 * v, l, M),
            build(tree, 2 * v + 1, M, r));
    }
}
int eval_single(const vi& a, int x) {
    int y = 0;
    for(int i = ssize(a) - 1; i >= 0; --i) {
        y = mul(y, x);
        y = add(y, a[i]);
    }
}

```

```

    return y;
}
vi eval_helper(const vi& a, vector<vi>& tree, int v,
    auto l, auto r) {
    if(r - l == 1) {
        return eval_single(a, *l);
    } else {
        auto m = l + (r - l) / 2;
        vi A = eval_helper(div(a, tree[2 * v]).second,
            tree, 2 * v, l, m);
        vi B = eval_helper(div(a, tree[2 * v + 1]).second,
            tree, 2 * v + 1, m, r);
        A.insert(A.end(), B.begin(), B.end());
        return A;
    }
}
vi eval(const vi& a, const vi& x) { // WYMAGA div,
    eval_single, build, eval_helper
    if(x.empty())
        return {};
    vector<vi> tree(4 * ssize(x));
    build(tree, 1, begin(x), end(x));
    return eval_helper(a, tree, 1, begin(x), end(x));
}
vi inter_helper(const vi& a, vector<vi>& tree, int v,
    auto l, auto r, auto ly, auto ry) {
    if(r - l == 1) {
        return {mul(*ly, inv(a[0]))};
    } else {
        auto m = l + (r - l) / 2;
        auto my = ly + (ry - ly) / 2;
        vi A = inter_helper(div(a, tree[2 * v]).second,
            tree, 2 * v, l, my, ly);
        vi B = inter_helper(div(a, tree[2 * v + 1]).second,
            tree, 2 * v + 1, m, ry, my);
        vi L = conv(A, tree[2 * v + 1]);
        vi R = conv(B, tree[2 * v]);
        REP(i, ssize(R))
            L[i] = add(L[i], R[i]);
        return L;
    }
}
vi inter(const vi& x, const vi& y) { // WYMAGA deriv,
    div, build, inter_helper
    assert(ssize(x) == ssize(y));
    if(x.empty())
        return {};
    vector<vi> tree(4 * ssize(x));
    return inter_helper(deriv(build(tree, 1, begin(x),
        end(x))), tree, 1, begin(x), end(x), begin(y), end(y));
}

```

```

int power_binomial_sum(int a, int k, int n) {
    int p = powi(a, n), inva1 = inv(sub(a, 1)), binom =
        1, ans = 0;
    BinomCoeff bc(k + 1);
    REP(i, k + 1) {
        ans = sub(mul(p, binom), mul(ans, a));
        if(!i) ans = sub(ans, 1);
        ans = mul(ans, inva1);
        binom = mul(binom, mul(n - i, mul(bc.rev[i + 1],
            bc.fac[i])));
    }
    return ans;
}

```

primitive-root includes: simple-modulo, rho-pollard
 $\mathcal{O}(\log^2(\text{mod}))$, dla pierwszego mod znajduje generator modulo mod
(zbyć może sporząstała).

```

int primitive_root() {
    if(mod == 2)
        return 1;
    int q = mod - 1;
    vector<LL> v = factor(q);
    vector<int> fact;
    REP(i, ssize(v))
        if(!i or v[i] != v[i - 1])
            fact.emplace_back(v[i]);
    while(true) {
        int g = rd(2, q);
        auto is_good = [&] {
            for(auto &f : fact)
                if(powi(g, q / f) == 1)
                    return false;
            return true;
        };
        if(is_good())
            return g;
    }
}

```

pythagorean-triples Wyznacza wszystkie trójkę
 (a, b, c) takie, że $a^2 + b^2 = c^2$, $\gcd(a, b, c) = 1$ oraz $c \leq \text{limit}$.
Zwraca tylko jedną (a, b, c) oraz (b, a, c) .

```

vector<tuple<int, int, int>> pythagorean_triples(int
    limit) {
    vector<tuple<int, int, int>> ret;
    function<void(int, int, int)> gen = [&](int a, int b
        , int c) {
        if(c > limit)
            return;
        ret.emplace_back(a, b, c);
        REP(i, 3) {
            gen(a + 2 * b + 2 * c, 2 * a + b + 2 * c, 2 * a
                + 2 * b + 3 * c);
            a = -a;
            if(i) b = -b;
        }
    };
    gen(3, 4, 5);
    return ret;
}

```

rho-pollard includes: miller-rab $\mathcal{O}\left(n^{\frac{1}{4}}\right)$, factor(n)
zwraca vector dzielników pierwzych n , niekoniecznie posortowany,
get_pairs(n) zwraca posortowany vector par (dzielnik pierwzych,
krotność) dla liczb n , all_factors(n) zwraca vector wszystkich
dzielników n , niekoniecznie posortowany, factor(12) = {2, 2, 3},
factor(545423) = {53, 41, 251}; get_pairs(12) = {{2, 2}, {3, 1}},
all_factors(12) = {1, 3, 2, 6, 4, 12}.

```

LL rho_pollard(LL n) {
    if(n % 2 == 0) return 2;
    for(LL i = 1; i++ < n) {
        auto f = [i](LL x) { return (llmul(x, x, n) + i) %
            n; };
        LL x = 2, y = f(x), p;
    }
}

```

```

while((p = __gcd(n - x + y, n)) == 1)
    x = f(x), y = f(f(y));
if(p != n) return p;
}
vector<LL> factor(LL n) {
    if(n == 1) return {};
    if(miller_rabin(n)) return {n};
    LL x = rho_pollard(n);
    auto l = factor(x), r = factor(n / x);
    l.insert(l.end(), r.begin(), r.end());
    return l;
}
vector<pair<LL, int>> get_pairs(LL n) {
    auto v = factor(n);
    sort(v.begin(), v.end());
    vector<pair<LL, int>> ret;
    REP(i, ssize(v)) {
        int x = i + 1;
        while (x < ssize(v) and v[x] == v[i])
            ++x;
        ret.emplace_back(v[i], x - i);
        i = x - 1;
    }
    return ret;
}
vector<LL> all_factors(LL n) {
    auto v = get_pairs(n);
    vector<LL> ret;
    function<void(LL, int)> gen = [&](LL val, int p) {
        if (p == ssize(v)) {
            ret.emplace_back(val);
            return;
        }
        auto [x, cnt] = v[p];
        gen(val, p + 1);
        REP(i, cnt) {
            val *= x;
            gen(val, p + 1);
        }
    };
    gen(1, 0);
    return ret;
}

```

same-div $\mathcal{O}(\sqrt{n})$, wyznacza przedziały o takiej samej wartości $\lfloor n/x \rfloor$ lub $\lceil n/x \rceil$. `same_floor(8) = {(1, 1), (2, 2), (3, 4), (5, 8)}`, `same_ceil(8) = {(8, 8), (4, 7), (3, 3), (2, 2), (1, 1)}`, na koniec raczej chcemy przepisać tylko pętlę i od razu wykonywać obliczenia na parze (l, r) zamiast grupować wszystkie przedziały w vectorze. Dla n będącego intem można zmienić wszystkie LL na int, w celu zzbicia starej.

```

vector<pair<LL, LL>> same_floor(LL n) {
    vector<pair<LL, LL>> v;
    for (LL l = 1, r; l <= n; l = r + 1) {
        r = n / (n / l);
        v.emplace_back(l, r);
    }
    return v;
}
vector<pair<LL, LL>> same_ceil(LL n) {
    vector<pair<LL, LL>> v;
    for (LL r = n, l; r >= 1; r = l - 1) {
        l = (r + r - 1) / r;
        l = (n + l - 1) / l;
        v.emplace_back(l, r);
    }
    return v;
}

```

sieve $\mathcal{O}(n)$, `sieve(n)` przetwarza liczby do n włącznie, `comp[i]` oznacza czy i jest złożone, `primes` zawiera wszystkie liczby pierwsze $\leq n$, `prime_div[i]` zawiera najmniejszy dzielnik pierwszy i , na CF dla $n = 1e8$ działa w 1.2s.

```
vector<bool> comp;
```

same-div sieve simple-modulo simplex tonelli-shanks xor-base associative-queue

```

vector<int> primes, prime_div;
void sieve(int n) {
    primes.clear();
    comp.resize(n + 1);
    prime_div.resize(n + 1);
    FOR(i, 2, n) {
        if (!comp[i]) primes.emplace_back(i), prime_div[i] = i;
        for (int p : primes) {
            int x = i * p;
            if (x > n) break;
            comp[x] = true;
            prime_div[x] = p;
            if (i % p == 0) break;
        }
    }
}

```

simple-modulo podstawowe operacje na modulo, pamiętać o constexpr.

```

#ifndef CHANGABLE_MOD
int mod = 998'244'353;
#else
constexpr int mod = 998'244'353;
#endif
int add(int a, int b) {
    a += b;
    return a >= mod ? a - mod : a;
}
int sub(int a, int b) {
    return add(a, mod - b);
}
int mul(int a, int b) {
    return int(a * LL(b) % mod);
}
int powi(int a, int b) {
    for(int ret = 1;; b /= 2) {
        if(b == 0)
            return ret;
        if(b & 1)
            ret = mul(ret, a);
        a = mul(a, a);
    }
}
int inv(int x) {
    return powi(x, mod - 2);
}
struct BinomCoeff {
    vector<int> fac, rev;
    BinomCoeff(int n) {
        fac = rev = vector(n + 1, 1);
        FOR(i, 1, n) fac[i] = mul(fac[i - 1], i);
        rev[n] = inv(fac[n]);
        for(int i = n; i > 0; --i)
            rev[i - 1] = mul(rev[i], i);
    }
    int operator()(int n, int k) {
        return mul(fac[n], mul(rev[n - k], rev[k]));
    }
};

```

simplex $\mathcal{O}(szybko)$, Simplex(n, m) tworzy lpsolver z n zmiennymi oraz m ograniczeniami, rozwiązuje max $c x$ przy $A x \leq b$.

```

#define FIND(n, expr) [&] { REP(i, n) if(expr) return i; return -1; }()
struct Simplex {
    using T = double;
    const T eps = 1e-9, inf = 1/.0;
    int n, m;
    vector<int> N, B;
    vector<vector<T>> A;
    vector<T> b, c;
    T res = 0;
    Simplex(int vars, int eqs)

```

```

        : n(vars), m(eqs), N(n), B(m), A(m, vector<T>(n)),
        b(m), c(n) {
        REP(i, n) N[i] = i;
        REP(i, m) B[i] = n + i;
    }
    void pivot(int eq, int var) {
        T coef = 1 / A[eq][var], k;
        REP(i, n)
            if(abs(eq[i]) > eps) A[eq][i] *= coef;
        A[eq][var] *= coef, b[eq] *= coef;
        REP(r, m) if(r != eq && abs(A[r][var]) > eps) {
            k = -A[r][var], A[r][var] = 0;
            REP(i, n) A[r][i] += k * A[eq][i];
            b[r] += k * b[eq];
        }
        k = c[var], c[var] = 0;
        REP(i, n) c[i] -= k * A[eq][i];
        res += k * b[eq];
        swap(B[eq], N[var]);
    }
    bool solve() {
        int eq, var;
        while(true) {
            if((eq = FIND(n, b[i] < -eps)) == -1) break;
            if(var = FIND(n, A[eq][i] < -eps)) == -1 {
                res = -inf; // no solution
                return false;
            }
            pivot(eq, var);
        }
        while(true) {
            if((var = FIND(n, c[i] > eps)) == -1) break;
            eq = -1;
            REP(i, m) if(A[i][var] > eps
                && (eq == -1 || b[i] / A[i][var] < b[eq] / A[eq][var]))
                eq = i;
            if(eq == -1) {
                res = inf; // unbound
                return false;
            }
            pivot(eq, var);
        }
        return true;
    }
    vector<T> get_vars() {
        vector<T> vars(n);
        REP(i, m)
            if(B[i] < n) vars[B[i]] = b[i];
        return vars;
    }
};

```

tonelli-shanks $\mathcal{O}(\log^2(p))$, dla pierwszego p oraz $0 \leq a \leq p - 1$ znajduje takie x , że $x^2 \equiv a \pmod{p}$ lub -1 jeżeli takie x nie istnieje, można przepisać by działało dla LL

```

int mul(int a, int b, int p) {
    return int(a * LL(b) % p);
}
int powi(int a, int b, int p) {
    for (int ret = 1;; b /= 2) {
        if (!b) return ret;
        if (b & 1) ret = mul(ret, a, p);
        a = mul(a, a, p);
    }
}
int tonelli_shanks(int a, int p) {
    if (a == 0) return 0;
    if (p == 2) return 1;
    if (powi(a, p / 2, p) != 1) return -1;
    int q = p - 1, s = 0, z = 2;
    while (q % 2 == 0) q /= 2, ++s;
    while (powi(z, p / 2, p) == 1) ++z;
    int c = powi(z, q, p), t = powi(a, q, p);
    int r = powi(a, q / 2 + 1, p);
    while (t != 1) {

```

```

        int i = 0, x = t;
        while (x != 1) x = mul(x, x, p), ++i;
        c = powi(c, 1 << (s - i - 1), p); // 1ll dla LL
        r = mul(r, c, p), c = mul(c, c, p);
        t = mul(t, c, p), s = i;
    }
    return r;
}

xor-base  $\mathcal{O}(nB + B^2)$  dla  $B = bits$ , dla  $S$  wyznacza minimalny zbiór  $B$  taki, że każdy element  $S$  można zapisać jako xor jakiegoś podzbioru  $B$ .
int highest_bit(int ai) {
    return ai == 0 ? 0 : __lg(ai) + 1;
}
constexpr int bits = 30;
vector<int> xor_base(vector<int> elems) {
    vector<vector<int>> at_bit(bits + 1);
    for(int ai : elems)
        at_bit[highest_bit(ai)].emplace_back(ai);
    for(int b = bits; b >= 1; --b)
        while(ssize(at_bit[b]) > 1) {
            int ai = at_bit[b].back();
            at_bit[b].pop_back();
            ai ^= at_bit[b].back();
            at_bit[highest_bit(ai)].emplace_back(ai);
        }
    at_bit.erase(at_bit.begin());
    REP(b0, bits - 1)
        for(int a0 : at_bit[b0])
            for(int b1 : at_bit[b0])
                if((a0 >> b0) & 1)
                    a1 ^= a0;
    vector<int> ret;
    for(auto &v : at_bit) {
        assert(ssize(v) <= 1);
        for(int ai : v)
            ret.emplace_back(ai);
    }
    return ret;
}

```

Struktury danych (4)

associative-queue Kolejka wspierająca dowolną operację łączną, $\mathcal{O}(1)$ zamortyzowany. Konstruktor przyjmuje dwuargumentową funkcję oraz jej element neutralny. Dla minów jest `AssocQueue<int> q([](int a, int b){ return min(a, b); }, numeric_limits<int>::max());`

```

template<typename T>
struct AssocQueue {
    using fn = function<T(T, T)>;
    fn f;
    vector<pair<T, T>> s1, s2; // {x, f(pref)}
    AssocQueue(fn _f, T e = T()) : f(_f), s1({{e, e}}), s2({{e, e}}) {}
    void mv() {
        if (ssize(s2) == 1)
            while (ssize(s1) > 1) {
                s2.emplace_back(s1.back().first, f(s1.back().second));
                s1.pop_back();
            }
    }
    void emplace(T x) {
        s1.emplace_back(x, f(s1.back().second, x));
    }
    void pop() {
        mv();
        s2.pop_back();
    }
    T calc() {
        return f(s2.back().second, s1.back().second);
    }
};

```

```

} T front() {
    mv();
    return s2.back().first;
}
int size() {
    return ssize(s1) + ssize(s2) - 2;
}
void clear() {
    s1.resize(1);
    s2.resize(1);
}
};

fenwick-tree-2d includes: fenwick-tree  $\mathcal{O}(\log^2 n)$ , pamięć  $\mathcal{O}(n \log n)$ , 2D offline, wywołujemy preprocess(x, y) na pozycjach, które chcemy updateować, później init(). update(x, y, val) dodaje val do [x, y], query(x, y) zwraca sumę na prostokącie (0, 0) – (x, y).

```

```

struct Fenwick2d {
    vector<vector<int>> ys;
    vector<Fenwick> ft;
    Fenwick2d(int limx) : ys(limx) {}
    void preprocess(int x, int y) {
        for(; x < ssize(ys); x |= x + 1)
            ys[x].push_back(y);
    }
    void init() {
        for(auto &v : ys) {
            sort(v.begin(), v.end());
            ft.emplace_back(ssize(v));
        }
    }
    int ind(int x, int y) {
        auto it = lower_bound(ys[x].begin(), ys[x].end(),
                             y);
        return int(distance(ys[x].begin(), it));
    }
    void update(int x, int y, LL val) {
        for(; x < ssize(ys); x |= x + 1)
            ft[x].update(ind(x, y), val);
    }
    LL query(int x, int y) {
        LL sum = 0;
        for(x++; x > 0; x &= x - 1)
            sum += ft[x - 1].query(ind(x - 1, y + 1) - 1);
        return sum;
    }
};

fenwick-tree  $\mathcal{O}(\log n)$ , indeksowane od 0, update(pos, val) dodaje val do elementu pos, query(pos) zwraca sumę [0, pos].

```

```

struct Fenwick {
    vector<LL> s;
    Fenwick(int n) : s(n) {}
    void update(int pos, LL val) {
        for(; pos < ssize(s); pos |= pos + 1)
            s[pos] += val;
    }
    LL query(int pos) {
        LL ret = 0;
        for(pos++; pos > 0; pos &= pos - 1)
            ret += s[pos - 1];
        return ret;
    }
    LL query(int l, int r) {
        return query(r) - query(l - 1);
    }
};

find-union  $\mathcal{O}(\alpha(n))$ , mniejszy do wiekszego.

```

```

struct FindUnion {
    vector<int> rep;

```

fenwick-tree-2d fenwick-tree find-union hash-map lazy-segment-tree lichao-tree line-container link-cut

```

    int size(int x) { return -rep[find(x)]; }
    int find(int x) {
        return rep[x] < 0 ? x : rep[x] = find(rep[x]);
    }
    bool same_set(int a, int b) { return find(a) == find(b); }
    bool join(int a, int b) {
        a = find(a), b = find(b);
        if(a == b)
            return false;
        if(-rep[a] < -rep[b])
            swap(a, b);
        rep[a] += rep[b];
        rep[b] = a;
        return true;
    }
    FindUnion(int n) : rep(n, -1) {}

};

hash-map includes: <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>  $\mathcal{O}(1)$ , trzeba przed includem dać undef_GLIBCXX_DEBUG.

```

```

using namespace __gnu_pbds;
struct chash {
    const uint64_t C = LL(2e18 * acosl(-1)) + 69;
    const int RANDOM = mt19937(0)();
    size_t operator()(uint64_t x) const {
        return __builtin_bswap64((x^RANDOM) * C);
    }
}
template<class L, class R>
using hash_map = gp_hash_table<L, R, chash>;

```

lazy-segment-tree Drzewo przedział-przedział, w miarę abstrakcyjne. Wystarczy zmienić Node i funkcje na nim.

```

struct Node {
    LL sum = 0, lazy = 0;
    int sz = 1;
}
void push_to_sons(Node &n, Node &l, Node &r) {
    auto push_to.son = [&](Node &c) {
        c.sum += n.lazy * c.sz; // min/max bez c.sz
        c.lazy += n.lazy;
    };
    push_to.son(l);
    push_to.son(r);
    n.lazy = 0;
}
Node merge(Node l, Node r) {
    return Node{
        .sum = l.sum + r.sum, // tu min/max
        .lazy = 0,
        .sz = l.sz + r.sz
    };
}
void add_to_base(Node &n, int val) {
    n.sum += n.sz * LL(val); // min/max bez n.sz
    n.lazy += val;
}
struct Tree {
    vector<Node> tree;
    int sz = 1;
    Tree(int n) {
        while(sz < n)
            sz *= 2;
        tree.resize(size << 1);
    }
    LL get_min(int x) {
        int v = x + size;
        LL ans = inf;
        while(v) {
            ans = min(ans, tree[v](x));
            v >= 1;
        }
        return ans;
    }
    void add_func(Function new_func, int v, int l, int r
    ) {
        int m = (l + r) / 2;
        bool domin_l = tree[v](l) > new_func(l),
             domin_m = tree[v](m) > new_func(m);
        if(domin_m)
            swap(tree[v], new_func);
        if(l == r)
            return;
        else if(domin_l == domin_m)
            add_func(new_func, v << 1 | 1, m + 1, r);
        else
            add_func(new_func, v << 1, l, m);
    }
    Node get(int l, int r, int v = 1) {
        if(l == 0 and r == tree[v].sz - 1)
            return tree[v];
    }
};

find-union  $\mathcal{O}(\alpha(n))$ , mniejszy do wiekszego.

```

```

    push(v);
    int m = tree[v].sz / 2;
    if(r < m)
        return get(l, r, 2 * v);
    else if(m <= l)
        return get(l - m, r - m, 2 * v + 1);
    else
        return merge(get(l, m - 1, 2 * v), get(0, r - m,
                                                2 * v + 1));
}

void update(int l, int r, int val, int v = 1) {
    if(l == 0 && r == tree[v].sz - 1) {
        add_to_base(tree[v], val);
        return;
    }
    push(v);
    int m = tree[v].sz / 2;
    if(r < m)
        update(l, r, val, 2 * v);
    else if(m <= l)
        update(l - m, r - m, val, 2 * v + 1);
    else {
        update(l, m - 1, val, 2 * v);
        update(0, r - m, val, 2 * v + 1);
    }
    tree[v] = merge(tree[2 * v], tree[2 * v + 1]);
}

```

lichao-tree Dla funkcji, których pary przecinają się co najwyżej raz, oblicza minimum w punkcie x. Podany kod jest dla funkcji liniowych.

```

constexpr LL inf = LL(1e18);
struct Function {
    int a;
    LL b;
    LL operator()(int x) {
        return x * LL(a) + b;
    }
    Function(int p = 0, LL q = inf) : a(p), b(q) {}
}
ostream& operator<<(ostream &s, Function f) {
    return os << pair(f.a, f.b);
}
struct LiChaoTree {
    int size = 1;
    vector<Function> tree;
    LiChaoTree(int n) {
        while(size < n)
            size *= 2;
        tree.resize(size << 1);
    }
    LL get_min(int x) {
        int v = x + size;
        LL ans = inf;
        while(v) {
            ans = min(ans, tree[v](x));
            v >= 1;
        }
        return ans;
    }
    void add_func(Function new_func, int v, int l, int r
    ) {
        int m = (l + r) / 2;
        bool domin_l = tree[v](l) > new_func(l),
             domin_m = tree[v](m) > new_func(m);
        if(domin_m)
            swap(tree[v], new_func);
        if(l == r)
            return;
        else if(domin_l == domin_m)
            add_func(new_func, v << 1 | 1, m + 1, r);
        else
            add_func(new_func, v << 1, l, m);
    }
    Node get(int l, int r, int v = 1) {
        if(l == 0 and r == tree[v].sz - 1)
            return tree[v];
    }
};

find-union  $\mathcal{O}(\alpha(n))$ , mniejszy do wiekszego.

```

```

    add_func(new_func, 1, 0, size - 1);
}
};

line-container  $\mathcal{O}(\log n)$  set dla funkcji liniowych, add(a, b) dodaje funkcję  $y = ax + b$  query(x) zwraca największe y w punkcie x.

```

```

struct Line {
    mutable LL a, b, p;
    LL eval(LL x) const { return a * x + b; }
    bool operator<(const Line &o) const { return a < o.a; }
    bool operator<=(LL x) const { return p < x; }
}
struct LineContainer : multiset<Line, less<> {
    // jak double to inf = 1 / .0, div(a, b) = a / b
    const LL inf = LLONG_MAX;
    LL div(LL a, LL b) { return a / b - ((a ^ b) < 0 && a % b); }
    bool intersect(iterator x, iterator y) {
        if(y == end()) { x->p = inf; return false; }
        if(x->a == y->a) { x->p = x->b > y->b ? inf : -inf;
        } else x->p = div(y->b - x->b, x->a - y->a);
        return x->p >= y->p;
    }
    void add(LL a, LL b) {
        auto z = insert({a, b, 0}), y = z++, x = y;
        while(intersect(y, z)) z = erase(z);
        if(x != begin() && intersect(--x, y))
            intersect(x, erase(y));
        while((y = x) != begin() && (--x)->p >= y->p)
            intersect(x, erase(y));
    }
    LL query(LL x) {
        assert(!empty());
        return lower_bound(x)->eval(x);
    }
};

link-cut  $\mathcal{O}(q \log n)$  Link-Cut Tree z wyznaczaniem odległości między wierzchołkami, lca w zakorzenionym drzewie, dodawaniem na ścieżce, dodawaniem na poddrzewie, zwracaniem sumy na ścieżce, zwracaniem sumy na poddrzewie. Przepisać co się chce (logika lazy jest tylko w AdditionalInfo, można np. zostawić puste funkcje). Wywołać konstruktor, potem set_value na wierzchołkach (aby się ustawiło, że nie-nil to nie-nil) i potem jazda.

```

```

struct AdditionalInfo {
    using T = LL;
    static constexpr T neutral = 0; // Remember that
                                    // there is a nil vertex!
    T node_value = neutral, splay_value = neutral; // ,
                                                    // splay_value_reversed = neutral;
    T whole_subtree_value = neutral, virtual_value =
                                    neutral;
    T splay_lazy = neutral; // lazy propagation on paths
    T splay_size = 0; // 0 because of nil
    T whole_subtree_lazy = neutral, whole_subtree_cancel
                            = neutral; // lazy propagation on subtrees
    T whole_subtree_size = 0, virtual_size = 0; // 0
                                                // because of nil
    void set_value(T x) {
        node_value = splay_value = whole_subtree_value = x
        ;
        splay_size = 1;
        whole_subtree_size = 1;
    }
    void update_from_sons(AdditionalInfo &l,
                          AdditionalInfo &r) {
        splay_value = l.splay_value + node_value + r.
                                                    splay_value;
        splay_size = l.splay_size + 1 + r.splay_size;
        whole_subtree_value = l.whole_subtree_value +
                                node_value + virtual_value + r.
                                                    whole_subtree_value;
        whole_subtree_size = l.whole_subtree_size + 1 +

```

```

    virtual_size + r.whole_subtree_size;
}
void change_virtual(AdditionalInfo &virtual_son, int delta) {
    assert(delta == -1 or delta == 1);
    virtual_value += delta * virtual_son.whole_subtree_value;
    whole_subtree_value += delta * virtual_son.whole_subtree_value;
    virtual_size += delta * virtual_son.whole_subtree_size;
    whole_subtree_size += delta * virtual_son.whole_subtree_size;
}
void push_lazy(AdditionalInfo &l, AdditionalInfo &r, bool) {
    l.add_lazy_in_path(splay_lazy);
    r.add_lazy_in_path(splay_lazy);
    splay_lazy = 0;
}
void cancel_subtree_lazy_from_parent(AdditionalInfo &parent) {
    whole_subtree_cancel = parent.whole_subtree_lazy;
}
void pull_lazy_from_parent(AdditionalInfo &parent) {
    if(splay_size == 0) // nil
        return;
    add_lazy_in_subtree(parent.whole_subtree_lazy - whole_subtree_cancel);
    cancel_subtree_lazy_from_parent(parent);
}
T get_path_sum() {
    return splay_value;
}
T get_subtree_sum() {
    return whole_subtree_value;
}
void add_lazy_in_path(T x) {
    splay_lazy += x;
    node_value += x;
    splay_value += x * splay_size;
    whole_subtree_value += x * splay_size;
}
void add_lazy_in_subtree(T x) {
    whole_subtree_lazy += x;
    node_value += x;
    splay_value += x * splay_size;
    whole_subtree_value += x * whole_subtree_size;
    virtual_value += x * virtual_size;
}
};

struct Splay {
    struct Node {
        array<int, 2> child;
        int parent;
        int subsize_splay = 1;
        bool lazy_flip = false;
        AdditionalInfo info;
    };
    vector<Node> t;
    const int nil;
    Splay(int n)
    : t(n + 1), nil(n) {
        t[nil].subsize_splay = 0;
        for(Node &v : t)
            v.child[0] = v.child[1] = v.parent = nil;
    }
    void apply_lazy_and_push(int v) {
        auto &[l, r] = t[v].child;
        if(t[v].lazy_flip) {
            for(int c : {l, r})
                t[c].lazy_flip ^= 1;
            swap(l, r);
        }
        t[v].info.push_lazy(t[l].info, t[r].info, t[v].lazy_flip);
        for(int c : {l, r})
    }
};

```

```

    if(c != nil)
        t[c].info.pull_lazy_from_parent(t[v].info);
    t[v].lazy_flip = false;
}
void update_from_sons(int v) {
    // assumes that v's info is pushed
    auto [l, r] = t[v].child;
    t[v].subsize_splay = t[l].subsize_splay + 1 + t[r].subsize_splay;
    for(int c : {l, r})
        apply_lazy_and_push(c);
    t[v].info.update_from_sons(t[l].info, t[r].info);
}
// After that, v is pushed and updated
void splay(int v) {
    apply_lazy_and_push(v);
    auto set_child = [&](int x, int c, int d) {
        if(x != nil and d != -1)
            t[x].child[d] = c;
        if(c != nil) {
            t[c].parent = x;
            t[c].info.cancel_subtree_lazy_from_parent(t[x].info);
        }
    };
    auto get_dir = [&](int x) -> int {
        int p = t[x].parent;
        if(p == nil or (x != t[p].child[0] and x != t[p].child[1]))
            return -1;
        return t[p].child[1] == x;
    };
    auto rotate = [&](int x, int d) {
        int p = t[x].parent, c = t[x].child[d];
        assert(c != nil);
        set_child(p, c, get_dir(x));
        set_child(x, t[c].child[!d], d);
        set_child(c, x, !d);
        update_from_sons(x);
        update_from_sons(c);
    };
    while(get_dir(v) != -1) {
        int p = t[v].parent, pp = t[p].parent;
        array<path_up> path_up = {v, p, pp, t[pp].parent};
        for(int i = ssize(path_up) - 1; i >= 0; --i) {
            if(i < ssize(path_up) - 1)
                t[path_up[i].info].pull_lazy_from_parent(t[path_up[i + 1].info]);
            apply_lazy_and_push(path_up[i]);
        }
        int dp = get_dir(v), dpp = get_dir(p);
        if(dpp == -1)
            rotate(p, dp);
        else if(dp == dpp) {
            rotate(pp, dpp);
            rotate(p, dp);
        }
        else {
            rotate(p, dp);
            rotate(pp, dpp);
        }
    }
    struct LinkCut : Splay {
        LinkCut(int n) : Splay(n) {}
        // Cuts the path from x downward, creates path to root, splays x.
        int access(int x) {
            int v = x, cv = nil;
            for(; v != nil; cv = v, v = t[v].parent)
                splay(v);
            int &right = t[v].child[1];
            t[v].info.change_virtual(t[right].info, +1);
            right = cv;
            t[right].info.pull_lazy_from_parent(t[v].info);
            t[v].info.change_virtual(t[right].info, -1);
        }
    };
}
```

majorized-set ordered-set persistent-treap

```

        update_from_sons(v);
    }
    splay(x);
    return cv;
}
// Changes the root to v.
// Warning: Linking, cutting, getting the distance, etc, changes the root.
void reroot(int v) {
    access(v);
    t[v].lazy_flip ^= 1;
    apply_lazy_and_push(v);
}
// Returns the root of tree containing v.
int get_leader(int v) {
    access(v);
    while(apply_lazy_and_push(v), t[v].child[0] != nil)
        v = t[v].child[0];
    splay(v);
    return v;
}
bool is_in_same_tree(int v, int u) {
    return get_leader(v) == get_leader(u);
}
// Assumes that v and u aren't in same tree and v != u.
// Adds edge (v, u) to the forest.
void link(int v, int u) {
    reroot(v);
    access(u);
    t[u].info.change_virtual(t[v].info, +1);
    assert(t[v].parent == nil);
    t[v].parent = u;
    t[v].info.cancel_subtree_lazy_from_parent(t[u].info);
}
// Assumes that v and u are in same tree and v != u.
// Cuts edge going from v to the subtree where is u
// (in particular, if there is an edge (v, u), it deletes it).
// Returns the cut parent.
int cut(int v, int u) {
    reroot(u);
    access(v);
    int c = t[v].child[0];
    assert(t[c].parent == v);
    t[v].child[0] = nil;
    t[c].parent = nil;
    t[c].info.cancel_subtree_lazy_from_parent(t[nil].info);
    update_from_sons(v);
    while(apply_lazy_and_push(c), t[c].child[1] != nil)
        c = t[c].child[1];
    splay(c);
    return c;
}
// Assumes that v and u are in same tree.
// Returns their LCA after a reroot operation.
int lca(int root, int v, int u) {
    reroot(root);
    if(v == u)
        return v;
    access(v);
    return access(u);
}
// Assumes that v and u are in same tree.
// Returns their distance (in number of edges).
int dist(int v, int u) {
    reroot(v);
    access(u);
    return t[t[u].child[0]].subsize_splay;
}
// Assumes that v and u are in same tree.
// Returns the sum of values on the path from v to u.

```

```

auto get_path_sum(int v, int u) {
    reroot(v);
    access(u);
    return t[u].info.get_path_sum();
}
// Assumes that v and u are in same tree.
// Returns the sum of values on the subtree of v in which u isn't present.
auto get_subtree_sum(int v, int u) {
    u = cut(v, u);
    auto ret = t[v].info.get_subtree_sum();
    link(v, u);
    return ret;
}
// Applies function f on vertex v (useful for a single add/set operation)
void apply_on_vertex(int v, function<void (AdditionalInfo &)> f) {
    access(v);
    f(t[v].info);
}
// Assumes that v and u are in same tree.
// Adds val to each vertex in path from v to u.
void add_on_path(int v, int u, int val) {
    reroot(v);
    access(u);
    t[u].info.add_lazy_in_path(val);
}
// Assumes that v and u are in same tree.
// Adds val to each vertex in subtree of v that doesn't have u.
void add_on_subtree(int v, int u, int val) {
    u = cut(v, u);
    t[v].info.add_lazy_in_subtree(val);
    link(v, u);
}
};


```

majorized-set $\mathcal{O}(\log n)$, w której jest zmajoryzowany set, insert(p) wrzuca parę do setu, majoryzuje go (zamortyzowany czas) i zwraca, czy podany element został dodany.

```

template<typename A, typename B>
struct MajorizedSet {
    set<pair<A, B>> s;
    bool insert(pair<A, B> p) {
        auto x = s.lower_bound(p);
        if(x != s.end() && x->second >= p.second)
            return false;
        while(x != s.begin() && (--x)->second <= p.second)
            x = s.erase(x);
        s.emplace(p);
        return true;
    }
};


```

ordered-set includes: <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>, <ext/pb_ds/tree_policy.hpp> insert(x) dodaje element x (nie ma emplace), find_by_order(i) zwraca iterator do i-tego elementu, order_of_key(x) zwraca ile jest mniejszych elementów (x nie musi być w secie). Jeśli chcemy multisetą, używamy par (val, id).

```

using namespace __gnu_pbds;
template<class T> using ordered_set = tree<
    T,
    null_type,
    less<T>,
    rb_tree_tag,
    tree_order_statistics_node_update
>;

```

persistent-treap $\mathcal{O}(\log n)$ Implicit Persistent Treap, wszystko indeksowane od 0, insert(i, val) insertuje na pozycję i, kopowanie struktury działa w $\mathcal{O}(1)$, robimy sobie vector<Treap> żeby obsługiwać trwałość UPD. uwaga potencjalnie się kwadraci, spytać Bartka kiedy

```

mt19937 rng_i(0);
struct Treap {
    struct Node {
        int val, prio, sub = 1;
        Node *l = nullptr, *r = nullptr;
        Node(int _val) : val(_val), prio(int(rng_i())) {}
        ~Node() { delete l; delete r; }
    };
    using pNode = Node*;
    pNode root = nullptr;
    int get_sub(pNode n) { return n ? n->sub : 0; }
    void update(pNode n) {
        if(!n) return;
        n->sub = get_sub(n->l) + get_sub(n->r) + 1;
    }
    void split(pNode t, int i, pNode &l, pNode &r) {
        if(!t) l = r = nullptr;
        else {
            t = new Node(*t);
            if(i <= get_sub(t->l))
                split(t->l, i, l, t->l), r = t;
            else
                split(t->r, i - get_sub(t->l) - 1, t->r, r), l = t;
        }
        update(t);
    }
    void merge(pNode &t, pNode l, pNode r) {
        if(l || !r) t = (l ? l : r);
        else if(l->prio > r->prio) {
            l = new Node(*l);
            merge(l->r, l->r, r), t = l;
        } else {
            r = new Node(*r);
            merge(r->l, l, r->l), t = r;
        }
        update(t);
    }
    void insert(pNode &t, int i, pNode it) {
        if(!t) t = it;
        else if(it->prio > t->prio)
            split(t, i, it->l, it->r), t = it;
        else {
            t = new Node(*t);
            if(i <= get_sub(t->l))
                insert(t->l, i, it);
            else
                insert(t->r, i - get_sub(t->l) - 1, it);
        }
        update(t);
    }
    void insert(int i, int val) {
        insert(root, i, new Node(val));
    }
    void erase(pNode &t, int i) {
        if(get_sub(t->l) == i)
            merge(t, t->l, t->r);
        else {
            t = new Node(*t);
            if(i <= get_sub(t->l))
                erase(t->l, i);
            else
                erase(t->r, i - get_sub(t->l) - 1);
        }
        update(t);
    }
    void erase(int i) {
        assert(i < get_sub(root));
        erase(root, i);
    }
};

```

range-add includes: fenwick-tree $\mathcal{O}(\log n)$ drzewo przedział-punkt $(+, +)$, wszystko indexowane od 0, update(l, r, val) dodaje val na przedziale $[l, r]$, query(pos) zwraca wartość elementu

```

pos.

struct RangeAdd {
    Fenwick f;
    RangeAdd(int n) : f(n) {}
    void update(int l, int r, LL val) {
        f.update(l, val);
        f.update(r + 1, -val);
    }
    LL query(int pos) {
        return f.query(pos);
    }
};

RMQ  $\mathcal{O}(n \log n)$  czasowo i pamięciowo, Range Minimum Query z użyciem sparse table, zapytanie jest w  $\mathcal{O}(1)$ .

struct RMQ {
    vector<vector<int>> st;
    RMQ(const vector<int> &a) {
        int n = ssize(a), lg = 0;
        while((1 << lg) < n) lg++;
        st.resize(lg + 1, a);
        FOR(i, 1, lg) REP(j, n) {
            st[i][j] = st[i - 1][j];
            int q = j + (1 << (i - 1));
            if(q < n) st[i][j] = min(st[i][j], st[i - 1][q]);
        }
    }
    int query(int l, int r) {
        int q = __lg(r - l + 1), x = r - (1 << q) + 1;
        return min(st[q][l], st[q][x]);
    }
};

segment-tree Drzewa punkt-przedział. Pierwsze ustawia w punkcie i podaje max na przedziale. Drugie maxuje elementy na przedziale i podaje wartość w punkcie.

struct Tree_Get_Max {
    using T = int;
    T f(T a, T b) { return max(a, b); }
    const T zero = 0;
    vector<T> tree;
    int sz = 1;
    Tree_Get_Max(int n) {
        while(sz < n)
            sz *= 2;
        tree.resize(sz * 2, zero);
    }
    void update(int pos, T val) {
        tree[pos += sz] = val;
        while(pos /= 2)
            tree[pos] = f(tree[pos * 2], tree[pos * 2 + 1]);
    }
    T get(int l, int r) {
        l += sz, r += sz;
        if(l == r)
            return tree[l];
        T ret_l = tree[l], ret_r = tree[r];
        while(l + 1 < r) {
            if(l % 2 == 0)
                ret_l = f(ret_l, tree[l + 1]);
            if(r % 2 == 1)
                ret_r = f(tree[r - 1], ret_r);
            l /= 2, r /= 2;
        }
        return f(ret_l, ret_r);
    }
};

Tree_Update_Max_On_Interval
using T = int;
vector<T> tree;
int sz = 1;
Tree_Update_Max_On_Interval(int n) {
    while(sz < n)
        sz *= 2;
}

```

```

tree.resize(sz * 2);
}
T get(int pos) {
    T ret = tree[pos += sz];
    while(pos /= 2)
        ret = max(ret, tree[pos]);
    return ret;
}
void update(int l, int r, T val) {
    l += sz, r += sz;
    tree[l] = max(tree[l], val);
    if(l == r)
        return;
    tree[r] = max(tree[r], val);
    while(l + 1 < r) {
        if(l % 2 == 0)
            tree[l + 1] = max(tree[l + 1], val);
        if(r % 2 == 1)
            tree[r - 1] = max(tree[r - 1], val);
        l /= 2, r /= 2;
    }
}

treap  $\mathcal{O}(\log n)$  Implicit Treap, wszystko indexowane od 0, do Node dopisujemy jakie chcemy mieć trzymać dodatkowo dane. Jeśli chcemy robić lazy, to wykonania push należy wstawić tam gdzie oznaczono komentarzem.

namespace Treap {
    mt19937 rng_key(0);
    struct Node {
        int prio, cnt = 1;
        Node *l = nullptr, *r = nullptr;
        Node() : prio(int(rng_key())) {}
        ~Node() { delete l; delete r; }
    };
    using pNode = Node*;
    int get_cnt(pNode t) { return t ? t->cnt : 0; }
    void update(pNode t) {
        if (!t) return;
        // push(t);
        t->cnt = get_cnt(t->l) + get_cnt(t->r) + 1;
    }
    void split(pNode t, int i, pNode &l, pNode &r) {
        if (!t) {
            l = r = nullptr;
            return;
        }
        // push(t);
        if (i <= get_cnt(t->l))
            split(t->l, i, l, t->l), r = t;
        else
            split(t->r, i - get_cnt(t->l) - 1, t->r, r), l = t;
        update(t);
    }
    void merge(pNode &t, pNode l, pNode r) {
        if (!l or !r) t = l ?: r;
        else if (l->prio > r->prio) {
            // push(l);
            merge(l->r, l->r, r), t = l;
        } else {
            // push(r);
            merge(r->l, l, r->l), t = r;
        }
        update(t);
    }
    void apply_on_interval(pNode &root, int l, int r,
        function<void (pNode)> f) {
        pNode left, mid, right;
        split(root, r + 1, mid, right);
        split(mid, l, left, mid);
        assert(l <= r and mid);
        f(mid);
        merge(mid, left, mid);
    }
};

biconnected  $\mathcal{O}(n + m)$ , dwuspójne składowe, mosty oraz punkty artykulacji. po skonstruowaniu, bicon = zbiór list id krawędzi, bridges = lista id będących mostami, arti_points = lista wierzchołków będących punktami artykulacji. Tablice są nieposortowane. Wspiera multikrawędzie i wiele spójnych, ale nie pętle.

Low
vector<vector<int>> graph;

```

```

        merge(root, mid, right);
    }
}

Grafy (5)
2sat  $\mathcal{O}(n + m)$ , Zwraca poprawne przyporządkowanie zmiennym logicznym dla problemu 2-SAT, albo mówi, że takie nie istnieje. Konstruktor przyjmuje liczbę zmiennych, ~ oznacza negację zmiennej. Po wywołaniu solve(), values[0..n-1] zawiera wartości rozwiązania.

```

```

TwoSat {
    int n;
    vector<vector<int>> gr;
    vector<int> values;
    TwoSat(int _n = 0) : n(_n), gr(2 * n) {}
    void either(int f, int j) {
        f = max(2 * f, -1 - 2 * f);
        j = max(2 * j, -1 - 2 * j);
        gr[f].emplace_back(j ^ 1);
        gr[j].emplace_back(f ^ 1);
    }
    void set_value(int x) { either(x, x); }
    void implication(int f, int j) { either(~f, j); }
    int add_var() {
        gr.emplace_back();
        gr.emplace_back();
        return n++;
    }
    void at_most_one(vector<int>& li) {
        if(ssize(li) <= 1) return;
        int cur = ~li[0];
        FOR(i, 2, ssize(li) - 1) {
            int next = add_var();
            either(cur, ~li[i]);
            either(cur, next);
            either(~li[i], next);
            cur = ~next;
        }
        either(cur, ~li[1]);
    }
    vector<int> val, comp, z;
    int t = 0;
    int dfs(int i) {
        int low = val[i] = ++t, x;
        z.emplace_back(i);
        for(auto &e : gr[i]) if(!comp[e])
            low = min(low, val[e] ?: dfs(e));
        if(low == val[i]) do {
            x = z.back(); z.pop_back();
            comp[x] = low;
            if(values[x >> 1] == -1)
                values[x >> 1] = x & 1;
        } while (x != i);
        return val[i] = low;
    }
    bool solve() {
        values.assign(n, -1);
        val.assign(2 * n, 0);
        comp = val;
        REP(i, 2 * n) if(!comp[i]) dfs(i);
        REP(i, n) if(comp[2 * i] == comp[2 * i + 1])
            return 0;
        return 1;
    }
};

biconnected  $\mathcal{O}(n + m)$ , dwuspójne składowe, mosty oraz punkty artykulacji. po skonstruowaniu, bicon = zbiór list id krawędzi, bridges = lista id będących mostami, arti_points = lista wierzchołków będących punktami artykulacji. Tablice są nieposortowane. Wspiera multikrawędzie i wiele spójnych, ale nie pętle.

Low
vector<vector<int>> graph;

```

```

vector<int> low, pre;
vector<pair<int, int>> edges;
vector<vector<int>> bicon;
vector<int> bicon_stack, arti_points, bridges;
int gtime = 0;
void dfs(int v, int p) {
    low[v] = pre[v] = gtime++;
    bool considered_parent = false;
    int son_count = 0;
    bool is_arti = false;
    for(int e : graph[v]) {
        int u = edges[e].first ^ edges[e].second ^ v;
        if(u == p and not considered_parent)
            considered_parent = true;
        else if(pre[u] == -1) {
            bicon_stack.emplace_back(e);
            dfs(u, v);
            low[v] = min(low[v], low[u]);
            if(low[u] >= pre[v])
                bicon_stack.emplace_back();
            do {
                bicon.back().emplace_back(bicon_stack.back());
            } while(bicon.back().back() != e);
            ++son_count;
            if(p != -1 and low[u] >= pre[v])
                is_arti = true;
            if(low[u] > pre[v])
                bridges.emplace_back(e);
        }
    }
    else if(pre[v] > pre[u]) {
        low[v] = min(low[v], pre[u]);
        bicon_stack.emplace_back(e);
    }
}
if(p == -1 and son_count > 1)
    is_arti = true;
if(is_arti)
    arti_points.emplace_back(v);
}

Low(int n, vector<pair<int, int>> _edges) : graph(n)
{
    low(n), pre(n, -1), edges(_edges);
    REP(i, ssze(edges)) {
        auto [v, u] = edges[i];
#ifdef LOCAL
        assert(v != u);
#endif
        graph[v].emplace_back(i);
        graph[u].emplace_back(i);
    }
    REP(v, n)
        if(pre[v] == -1)
            dfs(v, -1);
}

```

cactus-cycles $\mathcal{O}(n)$, wyznaczanie cykli w grafie. Zakłada że jest nieskierowany graf bez pętelek i multikrawędzi, każda krawędź leży na co najwyżej jednym cyklu prostym (silniejsze założenie, niż o wierzchołkach). cactus_cycles(graph) zwraca taką listę cykli, że istnieje krawędź między i -tym, a $(i+1)$ -modsize(cycle)-tym wierzchołkiem.

```

vector<vector<int>> cactus_cycles(vector<vector<int>> graph) {
    vector<int> state(ssze(graph), 0), stack;
    vector<vector<int>> ret;
    function<void (int, int)> dfs = [&](int v, int p) {
        if(state[v] == 2) {
            ret.emplace_back(stack.rbegin(), find(stack.rbegin(), stack.rend(), v) + 1);
            return;
        }
        stack.emplace_back(v);
        state[v] = 2;
        for(int u : graph[v]) // tu
            if(!is_vis(u)) {
                u = centro(u);
                par[u] = v;
                odwi[u] = INF;
                // Opcjonalnie tutaj przekazujemy info synowi w drzewie CD.
                decomp(u);
            }
    };
    CentroDecomp(int n, vector<vector<int>> &grph) // tu
        : graph(grph), par(n, -1), pods(n), odwi(n) {
            root = centro(0);
        }
    };
}

```

```

for(int u : graph[v])
    if(u != p and state[u] != 1)
        dfs(u, v);
    state[v] = 1;
    stack.pop_back();
};

REP(i, ssize(graph))
    if (!state[i])
        dfs(i, -1);
return ret;
}

```

centro-decomp

$\mathcal{O}(n \log n)$, template do Centroid Decomposition. Nie używamy podsz, odwi, ani odwi_cnt Konstruktor przyjmuje liczbę wierzchołków i drzewo. Jeśli chcemy mieć rozbudowane krawędzie, to zmień tam gdzie zaznaczone. Mamy tablicę odwiedzonych z refreshem w $\mathcal{O}(1)$ (używając bez skrópowania). visit(v) zwraca 4-kolorowanie grafu, jeżeli w każdym momencie procesu usuwania wierzchołka o najmniejszym stopniu jego stopień jest nie większy niż 4

```

odwi[root] = INF;
decomp(root);
}

coloring  $\mathcal{O}(nm)$ , wyznacza kolorowanie grafu planarnego. coloring(graph) zwraca 5-kolorowanie grafu coloring(graph, 4) zwraca 4-kolorowanie grafu, jeżeli w każdym momencie procesu usuwania wierzchołka o najmniejszym stopniu jego stopień jest nie większy niż 4

vector<int> coloring(const vector<vector<int>> &graph,
    const int limit = 5) {
    const int n = ssize(graph);
    if (!n) return {};
    function<vector<int>(vector<bool>) solve = [&]{
        const vector<bool>& active {
            if (not *max_element(active.begin(), active.end()))
                return vector<n, -1>;
            pair<int, int> best = {n, -1};
            REP(i, n) {
                if (not active[i])
                    continue;
                int cnt = 0;
                for (int e : graph[i])
                    cnt += active[e];
                best = min(best, {cnt, i});
            }
        }
        const int id = best.second;
        auto cp = active;
        cp[id] = false;
        auto col = solve(cp);
        vector<bool> used(limit);
        for (int e : graph[id])
            if (active[e])
                used[col[e]] = true;
        REP(i, limit)
            if (not used[i]) {
                col[id] = i;
                return col;
            }
        for (int e0 : graph[id]) {
            for (int e1 : graph[e0]) {
                if (e0 >= e1)
                    continue;
                vector<bool> vis(n);
                function<void(int, int, int)> dfs = [&](int v,
                    int c0, int c1) {
                    vis[v] = true;
                    for (int e : graph[v])
                        if (not vis[e] and (col[e] == c0 or col[e]
                            == c1))
                            dfs(e, c0, c1);
                };
                const int c0 = col[e0], c1 = col[e1];
                dfs(e0, c0, c1);
                if (vis[e1])
                    col[e1] = col[e0] == c0 ? c1 : c0;
                col[id] = c0;
                return col;
            }
        }
        assert(false);
    };
    return solve(vector<n, true>);
}

```

de-brujin includes: eulerian-path $\mathcal{O}(k^n)$, ciąg/cykł de Bruijna słów długości n nad alfabetem $\{0, 1, \dots, k-1\}$. Jeżeli is_path to zwraca ciąg, wpp. zwraca cykl.

```

vector<int> de_brujin(int k, int n, bool is_path) {
    if (n == 1) {

```

```

        vector<int> v(k);
        iota(v.begin(), v.end(), 0);
        return v;
    }
    if (k == 1)
        return vector<n, 0>;
    int N = 1;
    REP(i, n - 1)
        N *= k;
    vector<pair<int, int>> edges;
    REP(i, N)
        REP(j, k)
            edges.emplace_back(i, i * k % N + j);
    vector<int> path = get<2>(eulerian_path(N, edges,
        true));
    path.pop_back();
    for(auto& e : path)
        e = e % k;
    if (is_path)
        REP(i, n - 1)
            path.emplace_back(path[i]);
    return path;
}

directed-mst  $\mathcal{O}(m \log n)$ , dla korzenia i listy krawędzi skierowanych ważonych zwraca największy podzbiór  $n - 1$  krawędzi taki, że z korzenia istnieje ścieżka do każdego innego wierzchołka, lub  $-1$  gdy nie ma. Zwraca (koszt, ojciec każdego wierzchołka w zwróconym drzewie).

struct RollbackUF {
    vector<int> e; vector<pair<int, int>> st;
    RollbackUF(int n) : e(n, -1) {}
    int size(int x) { return -e[x].find(x); }
    int find(int x) { return e[x] < 0 ? x : find(e[x]); }
    int time() { return ssize(st); }
    void rollback(int t) {
        for(int i = time(); i --> t;)
            e[st[i].first] = st[i].second;
        st.resize(t);
    }
    bool join(int a, int b) {
        a = find(a), b = find(b);
        if(a == b) return false;
        if(e[a] > e[b]) swap(a, b);
        st.push_back({a, e[a]});
        st.push_back({b, e[b]});
        e[a] += e[b]; e[b] = a;
        return true;
    }
}
struct Edge { int a, b; LL w; };
struct Node {
    Edge key;
    Node *l, *r = 0;
    LL delta = 0;
    void prop() {
        key.w += delta;
        if(l) l->delta += delta;
        if(r) r->delta += delta;
        delta = 0;
    }
};
Node* merge(Node *a, Node *b) {
    if(!a || !b) return a ?: b;
    a->prop(), b->prop();
    if(a->key.w > b->key.w) swap(a, b);
    swap(a->l, (a->r = merge(b, a->r)));
    return a;
}
pair<LL, vector<int>> directed_mst(int n, int r,
    vector<Edge> &g) {
    RollbackUF uf(n);
    vector<Node*> heap(n);
    vector<Node*> pool(ssze(g));
    REP(i, ssze(g)) {

```

```

Edge e = g[i];
heap[e.b] = merge(heap[e.b], &(pool[i] = Node{e}));
}
LL res = 0;
vector<int> seen(n, -1), path(n), par(n);
seen[r] = r;
vector<Edge> Q(n), in(n, {-1, -1, 0}), comp;
deque<tuple<int, int, vector<Edge>>> cycs;
REP(s, n) {
    int u = s, qi = 0, w;
    while(seen[u] < 0) {
        Node *hu = heap[u];
        if(!hu) return {-1, {}};
        hu->prop();
        Edge e = hu->key;
        hu->delta -= e.w; hu->prop(); hu = merge(hu->l,
            hu->r);
        Q[qi] = e, path[qi++] = u, seen[u] = s;
        res += e.w, u = uf.find(e.a);
        if(seen[u] == s) {
            Node *c = 0;
            int end = qi, time = uf.time();
            do c = merge(c, heap[w = path[--qi]]);
            while(uf.join(u, w));
            u = uf.find(u), heap[w] = c, seen[u] = -1;
            cycs.push_front({u, time, {&Q[qi], &Q[qi]}});
        }
    }
    REP(i, qi) in[uf.find(Q[i].b)] = Q[i];
}
for(auto [u, t, c] : cycs) { // restore sol (optional)
    uf.rollback(t);
    Edge inu = in[u];
    for(auto e : c) in[uf.find(e.b)] = e;
    in[uf.find(inu.b)] = inu;
}
REP(i, n) par[i] = in[i].a;
return {res, par};
}

```

dominator-tree $\mathcal{O}(m \alpha(n))$, dla spójnego DAGu o jednym korzeniu root wyznacza listę synów w dominator tree (które jest drzewem, gdzie ojciec wierzchołka to najbliższy wierzchołek, którego usunięcie powoduje, że już nie ma ścieżki od korzenia do v). dominator_tree({{1,2},{3},{4},{5},{6}},0) == {{1,4,2},{3},{},{5},{}}}

```

vector<vector<int>> dominator_tree(vector<vector<int>>
    dag, int root) {
    int n = ssize(dag);
    vector<vector<int>> t(n), rg(n), bucket(n);
    vector<int> id(n, -1), sdom = id, par = id, idom = id, dsu = id, label = id, rev = id;
    function<int (int, int)> find = [&](int v, int x) {
        if(v == dsu[v]) return x ? -1 : v;
        int u = find(dsu[v], x + 1);
        if(u < 0) return v;
        if(sdom[label[dsu[v]]] < sdom[label[v]]) label[v] = label[dsu[v]];
        dsu[v] = u;
        return x ? u : label[v];
    };
    int gtime = 0;
    function<void (int)> dfs = [&](int u) {
        rev[gtime] = u;
        label[gtime] = sdom[gtime] = dsu[gtime] = id[u] = gtime;
        gtime++;
        for(int w : dag[u]) {
            if(id[w] == -1) dfs(w), par[id[w]] = id[u];
            rg[id[w]].emplace_back(id[u]);
        }
    };
    dfs(root);
    for(int i = n - 1; i >= 0; i--) {

```

```

        for(int u : rg[i]) sdom[i] = min(sdom[i], sdom[find(u, 0)]);
        if(i > 0) bucket[sdom[i]].push_back(i);
        for(int w : bucket[i]) {
            int v = find(w, 0);
            idom[w] = (sdom[v] == sdom[w] ? sdom[w] : v);
        }
        if(i > 0) dsu[i] = par[i];
    }
    FOR(i, 1, n - 1) {
        if(idom[i] != sdom[i]) idom[i] = idom[idom[i]];
        t[rev[idom[i]]].emplace_back(rev[i]);
    }
    return t;
}

```

dynamic-connectivity $\mathcal{O}(q \log^2 n)$ offline, zaczyna z pustym grafem, dla danego zapytania stwierdza czy wierzchołki sa w jednej spójnej. Multikrawędzie oraz pętelki działają.

```

enum Event_type { Add, Remove, Query };
vector<bool> dynamic_connectivity(int n, vector<tuple<int, int, Event_type>> events) {
    vector<pair<int, int>> queries;
    for(auto &[v, u, t] : events) {
        if(v > u)
            swap(v, u);
        if(t == Query)
            queries.emplace_back(v, u);
    }
    int leaves = 1;
    while(leaves < ssize(queries))
        leaves *= 2;
    vector<vector<pair<int, int>>> edges_to_add(2 * leaves);
    map<pair<int, int>, deque<int>> edge_longevity;
    int query_i = 0;
    auto add = [&](int l, int r, pair<int, int> e) {
        if(l > r)
            return;
        debug(l, r, e);
        l += leaves;
        r += leaves;
        while(l <= r) {
            if(l % 2 == 1)
                edges_to_add[l++].emplace_back(e);
            if(r % 2 == 0)
                edges_to_add[r--].emplace_back(e);
            l /= 2;
            r /= 2;
        }
    };
}
```

```

    for(const auto &[v, u, t] : events) {
        auto &que = edge_longevity[pair(v, u)];
        if(t == Add)
            que.emplace_back(query_i);
        else if(t == Remove) {
            if(que.empty())
                continue;
            if(ssize(que) == 1)
                add(que.back(), query_i - 1, pair(v, u));
            que.pop_back();
        }
        else
            ++query_i;
    }
    for(const auto &[e, que] : edge_longevity)
        if(not que.empty())
            add(que.front(), query_i - 1, e);
    vector<b> ret(ssize(queries));
    vector<int> lead(n), leadsz(n, 1);
    iota(lead.begin(), lead.end(), 0);
    function<int (int)> find = [&](int i) {
        return i == lead[i] ? i : find(lead[i]);
    };
    function<void (int)> dfs = [&](int v) {
        while(ssize(adj[v])) {
            int id = adj[v].back(), u = v ^ edges[id].first
                ^ edges[id].second;
            adj[v].pop_back();
            if(used[id]) continue;
            used[id] = true;
            dfs(u);
            leadsz[id] += leadsz[v];
        }
    };
    function<void (int)> dfs = [&](int v) {
        vector<tuple<int, int, int>> rollback;

```

```

        for(auto [e0, e1] : edges_to_add[v]) {
            e0 = find(e0);
            e1 = find(e1);
            if(e0 == e1)
                continue;
            if(leadsz[e0] > leadsz[e1])
                swap(e0, e1);
            rollback.emplace_back(e0, lead[e0], e1, leadsz[e1]);
            leadsz[e1] += leadsz[e0];
            lead[e0] = e1;
        }
        if(v >= leaves) {
            int i = v - leaves;
            assert(i < leaves);
            if(i < ssize(queries))
                ret[i] = find(queries[i].first) == find(queries[i].second);
        }
        else {
            dfs(2 * v);
            dfs(2 * v + 1);
        }
    }
    reverse(rollback.begin(), rollback.end());
    for(auto [i, val, j, sz] : rollback) {
        lead[i] = val;
        leadsz[j] = sz;
    }
    dfs(1);
    return ret;
}

```

eulerian-path $\mathcal{O}(n + m)$, ścieżka eulera. Zwraca tupla (exists, ids, vertices). W exists jest informacja czy jest ścieżka/cykl eulera, ids zawiera id kolejnych krawędzi, vertices zawiera listę wierzchołków na tej ścieżce. Dla cyklu, vertices[0] == vertices[m].

```

tuple<bool, vector<int>, vector<int>> eulerian_path(
    int n, const vector<pair<int, int>> &edges, bool directed) {
    vector<int> in(n);
    vector<vector<int>> adj(n);
    int start = 0;
    REP(i, ssize(edges)) {
        auto [a, b] = edges[i];
        start = a;
        ++in[b];
        adj[a].emplace_back(i);
        if(not directed)
            adj[b].emplace_back(i);
    }
    int cnt_in = 0, cnt_out = 0;
    REP(i, n) {
        if(directed) {
            if(abs(ssize(adj[i]) - in[i]) > 1)
                return {};
            if(in[i] < ssize(adj[i]))
                start = i, ++cnt_in;
            else
                cnt_out += in[i] > ssize(adj[i]);
        }
        else if(ssize(adj[i]) % 2)
            start = i, ++cnt_in;
    }
    vector<int> ids, vertices;
    vector<b> used(ssize(edges));
    function<void (int)> dfs = [&](int v) {
        while(ssize(adj[v])) {
            int id = adj[v].back(), u = v ^ edges[id].first
                ^ edges[id].second;
            adj[v].pop_back();
            if(used[id]) continue;
            used[id] = true;
            dfs(u);
            ids.emplace_back(id);
        }
    };
    int get_vertex(int v) { return pre[v]; }
    vector<pair<int, int>> get_path(int v, int u, bool add_lca = true) {
        int w = lca(v, u);
        auto ret = path_up(v, w);
        auto path_u = path_up(u, w);
        if(add_lca) ret.emplace_back(pre[w], pre[w]);
        ret.insert(ret.end(), path_u.begin(), path_u.end());
        return ret;
    };
    void set_paths(int v) {
        pre[v] = t++;
        for(int &u : adj[v]) if(u != par[v]) {
            nxt[u] = (u == adj[v][0] ? nxt[v] : u);
            set_paths(u);
        }
        pos[v] = t;
    };
    HLD(int n, vector<vector<int>> &adj) {
        : adj(_adj), sz(n), pre(n), pos(n), nxt(n), par(n)
        {
            init(0), set_paths(0);
        }
        int lca(int v, int u) {
            while(nxt[v] != nxt[u]) {
                if(pre[v] < pre[u])
                    swap(v, u);
                v = par[nxt[v]];
            }
            return (pre[v] < pre[u] ? v : u);
        }
        vector<pair<int, int>> path_up(int v, int u) {
            vector<pair<int, int>> ret;
            while(nxt[v] != nxt[u]) {
                ret.emplace_back(pre[nxt[v]], pre[v]);
                v = par[nxt[v]];
            }
            if(pre[u] != pre[v]) ret.emplace_back(pre[u] + 1, pre[v]);
            return ret;
        }
        int get_vertex(int v) { return pre[v]; }
        vector<pair<int, int>> get_path(int v, int u, bool add_lca = true) {
            int w = lca(v, u);
            auto ret = path_up(v, w);
            auto path_u = path_up(u, w);
            if(add_lca) ret.emplace_back(pre[w], pre[w]);
            ret.insert(ret.end(), path_u.begin(), path_u.end());
            return ret;
        };
    };
}

```

```

    }
    dfs(start);
    if(cnt_in + cnt_out > 2 || not all_of(used.begin(),
        used.end(), identity{}))
        return {};
    reverse(ids.begin(), ids.end());
    if(ssize(ids))
        vertices.emplace_back(vertices.back() ^ edges[id].second);
    for(int id : ids)
        vertices.emplace_back(vertices.back() ^ edges[id].second);
    return {true, ids, vertices};
}

```

hld $\mathcal{O}(q \log n)$ Heavy-Light Decomposition. get_vertex(v) zwraca pozycję odpowiadającą wierzchołkowi. get_path(v, u) zwraca przedział do obsługiwanego drzewem przedziałowym. get_path(v, u) jeśli robiś operację na wierzchołkach. get_path(v, u, false) jeśli na krawędziach (nie zawiera lca). get_subtree(v) zwraca przedział preorderów odpowiadający podzemu.

```

struct HLD {
    vector<vector<int>> &adj;
    vector<int> sz, pre, pos, nxt, par;
    int t = 0;
    void init(int v, int p = -1) {
        par[v] = p;
        sz[v] = 1;
        if(ssize(adj[v]) > 1 && adj[v][0] == p)
            swap(adj[v][0], adj[v][1]);
        for(int &u : adj[v]) if(u != par[v]) {
            init(u, v);
            sz[v] += sz[u];
            if(sz[u] > sz[adj[v][0]])
                swap(u, adj[v][0]);
        }
    }
    void set_paths(int v) {
        pre[v] = t++;
        for(int &u : adj[v]) if(u != par[v]) {
            nxt[u] = (u == adj[v][0] ? nxt[v] : u);
            set_paths(u);
        }
        pos[v] = t;
    }
    HLD(int n, vector<vector<int>> &adj) {
        : adj(_adj), sz(n), pre(n), pos(n), nxt(n), par(n)
        {
            init(0), set_paths(0);
        }
        int lca(int v, int u) {
            while(nxt[v] != nxt[u]) {
                if(pre[v] < pre[u])
                    swap(v, u);
                v = par[nxt[v]];
            }
            return (pre[v] < pre[u] ? v : u);
        }
        vector<pair<int, int>> path_up(int v, int u) {
            vector<pair<int, int>> ret;
            while(nxt[v] != nxt[u]) {
                ret.emplace_back(pre[nxt[v]], pre[v]);
                v = par[nxt[v]];
            }
            if(pre[u] != pre[v]) ret.emplace_back(pre[u] + 1, pre[v]);
            return ret;
        }
        int get_vertex(int v) { return pre[v]; }
        vector<pair<int, int>> get_path(int v, int u, bool add_lca = true) {
            int w = lca(v, u);
            auto ret = path_up(v, w);
            auto path_u = path_up(u, w);
            if(add_lca) ret.emplace_back(pre[w], pre[w]);
            ret.insert(ret.end(), path_u.begin(), path_u.end());
            return ret;
        };
    };
}

```

```

    );
    return ret;
}
pair<int, int> get_subtree(int v) { return {pre[v], pos[v] - 1}; }
};

hld-online-bottom-up includes: hld  $\mathcal{O}(q \log n)$ , rozwiąza zadania, gdzie wynik to dp bottom-up na drzewie i zmienia się wartość wierzchołka/krawędzi. To zakłada, że da się tak uogólnić tego bottom-up'a, że da się trzymać fragmenty drzewa z "dwoma dziurami" i doczepiać jak LEGO dwa takie fragmenty do siebie.

```

```

// Information about a single vertex (e.g. color).
// A component contains answers for vertices, not edges.
using Value_v = int;
// Probably you want: some information about the up vertex, the down vertex,
// answer for whole component, answer containing up,
// answer containing down,
// answer containing both up and down.
struct DpTwoEnds;
// Merge two disjoint-vertex paths. Assume that there is an edge
// between "up" vertex of d and "down" vertex od u.
DpTwoEnds merge(DpTwoEnds u, DpTwoEnds d);
// DpOneEnd Contains information about a component after forgetting the "down" vertex.
// Probably you want: answer for whole component, informations about top vertices.
// It needs a default constructor.
struct DpOneEnd;
// Merge two parallel components. They are vertex-disjoint. They do not contain the parent (it will be included in the next function).
DpOneEnd merge(DpOneEnd a, DpOneEnd b);
// Assuming that DpOneEnd contain all components of the light sons of the parent,
// merge those components once with the parent. It has to support passing the default/neutral value of DpOneEnd -- it means that the vertex doesn't have light sons.
DpTwoEnds merge(DpOneEnd sons, Value_v value_parent);
// From a path that remembers "up" and "down" vertices, forget the "down" one.
DpOneEnd two_to_one(DpTwoEnds two);
template<class T> struct Tree {
    int leaves = 1;
    vector<T> tree;
    Tree(int n = 0) {
        while(leaves < n)
            leaves *= 2;
        tree.resize(2 * leaves);
    }
    void set(int i, T t) {
        tree[i += leaves] = t;
        while(i /= 2)
            tree[i] = merge(tree[2 * i], tree[2 * i + 1]);
    }
    T get() { return tree[1]; }
};
struct DpDynamicBottomUp {
    int n;
    HLD hld;
    vector<Tree<DpOneEnd>> tree_sons;
    vector<Tree<DpTwoEnds>> tree_path;
    vector<Value_v> current_values;
    vector<int> which_on_path, which_light_son;
    DpDynamicBottomUp(vector<vector<int>> graph, vector<Value_v> initial_values)
        : n(ssize(graph)), hld(n, graph), tree_sons(n),
        tree_path(n), current_values(initial_values),
        which_on_path(n, -1), which_light_son(n, -1) {
        function<void (int, int*)> dfs = [&](int v, int *on_heavy_cnt) {
            int light_sons_cnt = 0, tmp = 0;

```

hld-online-bottom-up jump-ptr max-clique negative-cycle planar-graph-faces

```

        which_on_path[v] = (*on_heavy_cnt =
            on_heavy_cnt ?: &tmp)++;
        for(int u : hld.adj[v])
            if(u != hld.par[v])
                dfs(u, hld.nxt[u] == u ? which_light_son[u]
                    = light_sons_cnt++, nullptr : on_heavy_cnt);
        tree_sons[v] = Tree<DpOneEnd>(light_sons_cnt);
        tree_path[v] = Tree<DpTwoEnds>(tmp);
    };
    dfs(0, 0);
    REP(v, n)
        set(v, initial_values[v]);
}
void set(int v, int value_vertex) {
    current_values[v] = value_vertex;
    while(true) {
        tree_path[hld.nxt[v]].set(which_on_path[v],
            merge(tree_sons[v].get(), current_values[v]));
        v = hld.nxt[v];
        if(hld.par[v] == -1)
            break;
        tree_sons[hld.par[v]].set(which_light_son[v],
            two_to_one(tree_path[hld.nxt[v]].get()));
        v = hld.par[v];
    }
    DpTwoEnds get() { return tree_path[0].get(); }
};

jump-ptr  $\mathcal{O}((n+q)\log n)$ , jump_up(v, k) zwraca wierzchołek o k krawędzi wyżej niż v lub -1. OperationJumpPtr może otrzymać wynik na ścieżce. Wynik na ścieżce do góry wymaga łączności, wynik dowolnej ścieżki jest poprawny, gdy jest odwrotność wyniku lub przemienne.

```

```

struct SimpleJumpPtr {
    int bits;
    vector<vector<int>> graph, jmp;
    vector<int> par, dep;
    void par_dfs(int v) {
        for(int u : graph[v])
            if(u != par[v]) {
                par[u] = v;
                dep[u] = dep[v] + 1;
                par_dfs(u);
            }
    }
    SimpleJumpPtr(vector<vector<int>> g = {}, int root = 0) : graph(g) {
        int n = ssize(graph);
        bits = __lg(max(1, n)) + 1;
        dep.resize(n);
        par.resize(n, -1);
        if(n > 0)
            par_dfs(root);
        jmp.resize(bits, vector<int>(n, -1));
        jmp[0] = par;
        FOR(b, 1, bits - 1)
            REP(v, n)
                if(jmp[b - 1][v] != -1 and jmp[b - 1][ptr.jmp[b - 1][v]] != -1)
                    jmp[b][v] = merge(jmp[b - 1][v], jmp[b - 1][ptr.jmp[b - 1][v]]);
    }
    PathAns path_ans_up(int v, int h) {
        PathAns ret = PathAns();
        for(int b = ptr.bits - 1; b >= 0; b--)
            if(h > b) & 1) {
                ret = merge(ret, ans_jmp[b][v]);
                v = ptr.jmp[b][v];
            }
        return ret;
    }
    PathAns path_ans(int v, int u) { // discards order of edges on path
        int l = ptr.lca(v, u);
        return merge(
            path_ans_up(v, ptr.dep[v] - ptr.dep[l]),
            path_ans_up(u, ptr.dep[u] - ptr.dep[l])
        );
    }
};

max-clique  $\mathcal{O}(idk)$ , działa 1s dla n=155 na najgorszych przypadkach (losowe grafy p=90). Działa szybciej dla grafów rzadkich. Zwraca listę wierzchołków w jakiejś max klicie. Pętelki niedozwolone.

```

```

constexpr int max_n = 500;
vector<int> get_max_clique(vector<bitset<max_n>> e) {
    double limit = 0.025, pk = 0;
    vector<pair<int, int>> V;
    vector<vector<int>> C(ssize(e) + 1);
    vector<int> qmax, q, S(ssize(C)), old(S);
    REP(i, ssize(e)) V.emplace_back(0, i);
    auto init = [&](vector<pair<int, int>& r) {
        for (auto& v : r) for (auto j : r) v.first += e[v.second][j.second];
        sort(r.rbegin(), r.rend());
        int mxD = r[0].first;
        REP(i, ssize(r)) r[i].first = min(i, mxD) + 1;
    };
    function<void (vector<pair<int, int>&, int)> expand

```

```

        = [&](vector<pair<int, int>& R, int lev) {
            S[lev] += S[lev - 1] - old[lev];
            old[lev] = S[lev - 1];
            while (ssize(R)) {
                if (ssize(q) + R.back().second <= ssize(qmax))
                    return;
                q.emplace_back(R.back().second);
                vector<pair<int, int>> T;
                for (auto [_, v] : R) if (e[R.back().second][v])
                    T.emplace_back(0, v);
                if (ssize(T)) {
                    if (S[lev]++ / ++pk < limit) init(T);
                    int j = 0, mxk = 1, mnk = max(ssize(qmax) -
                        ssize(q) + 1, 1);
                    C[1] = C[2] = {};
                    for (auto [_, v] : T) {
                        int k = 1;
                        while (any_of(C[k].begin(), C[k].end(), [&](int i) { return e[v][i]; })) k++;
                        if (k > mxk) C[(mxk = k) + 1] = {};
                        if (k < mnk) T[j++].second = v;
                        C[k].emplace_back(v);
                    }
                    if (j > 0) T[j - 1].first = 0;
                    FOR(k, mxk, mxk) for (int i : C[k]) T[j++] = {k, i};
                    expand(T, lev + 1);
                } else if (ssize(q) > ssize(qmax)) qmax = q;
                q.pop_back(), R.pop_back();
            }
        };
        init(V), expand(V, 1); return qmax;
    }
};

negative-cycle  $\mathcal{O}(nm)$  stwierdzanie istnienia i wyznaczanie ujemnego cyklu. cycle spełnia cycle[i] > cycle[i+1] & ssize(cycle[i]). Żeby wyznaczyć krawędzie na cyklu, wystarczy wybierać najwyższą krawędź między wierzchołkami.

```

```

template<class I>
pair<bool, vector<int>> negative_cycle(vector<vector<pair<int, I>>> graph) {
    int n = ssize(graph);
    vector<I> dist(n);
    vector<int> from(n, -1);
    int v_on_cycle = -1;
    REP(iter, n) {
        v_on_cycle = -1;
        REP(v, n)
            for(auto [u, w] : graph[v])
                if(dist[u] > dist[v] + w) {
                    dist[u] = dist[v] + w;
                    from[u] = v;
                    v_on_cycle = u;
                }
        if(v_on_cycle == -1)
            return {false, {}};
        REP(iter, n)
            v_on_cycle = from[v_on_cycle];
        vector<int> cycle = {v_on_cycle};
        for(int v = from[v_on_cycle]; v != v_on_cycle; v =
            from[v])
            cycle.emplace_back(v);
        reverse(cycle.begin(), cycle.end());
        return {true, cycle};
    }
}

planar-graph-faces  $\mathcal{O}(m \log m)$ , zakłada, że każdy punkt ma podane współrzędne, punkty są parami różne oraz krawędzie są nieprzecinającymi się odcinkami. Zwraca wszystkie ściany (wewnętrzne posortowane clockwise, zewnętrzne cc). WAŻNE czasem trzeba łączyć wszystkie ściany zewnętrzne (której może być kilka, gdy jest wiele spójnych) w jedną ścianą. Zewnętrzne ściany mogą wyglądać jak kaktusy, a wewnętrzne zawsze są niezdegenerowanym wielokątem.

```

```

struct Edge {
    int e, from, to;
    // face is on the right of "from -> to"
};

ostream& operator<<(ostream &o, Edge e) {
    return o << vector{e.e, e.from, e.to};
}

struct Face {
    bool is_outside;
    vector<Edge> sorted_edges;
    // edges are sorted clockwise for inside and cc for
    // outside faces
};

ostream& operator<<(ostream &o, Face f) {
    return o << pair(f.is_outside, f.sorted_edges);
}

vector<Face> split_planar_to_faces(vector<pair<int,
int> coord, vector<pair<int, int> edges) {
    int n = ssize(coord);
    int E = ssize(edges);
    vector<vector<int> graph(n);
    REP(e, E) {
        auto [v, u] = edges[e];
        graph[v].emplace_back(e);
        graph[u].emplace_back(e);
    }
    vector<int> lead(2 * E);
    iota(lead.begin(), lead.end(), 0);
    function<int (int)> find = [&](int v) {
        return lead[v] == v ? v : lead[v] = find(lead[v]);
    };
    auto side_of_edge = [&](int e, int v, bool outward) {
        return 2 * e + ((v != min(edges[e].first, edges[e].second)) ^ outward);
    };
    REP(v, n) {
        vector<pair<int, int> sorted;
        for (int e : graph[v]) {
            auto p = coord[edges[e].first ^ edges[e].second
                ^ v];
            auto center = coord[v];
            sorted.emplace_back(pair(p.first - center.first,
                p.second - center.second), e);
        }
        sort(sorted.begin(), sorted.end(), [&](pair<pair<int,
            int>, int> l0, pair<pair<int, int>, int> r0
        ) {
            auto l = l0.first;
            auto r = r0.first;
            bool half_l = l > pair(0, 0);
            bool half_r = r > pair(0, 0);
            if(half_l != half_r)
                return half_l;
            return l.first * LL(r.second) - l.second * LL(r
                .first) > 0;
        });
        REP(i, ssize(sorted)) {
            int e0 = sorted[i].second;
            int e1 = sorted[(i + 1) % ssize(sorted)].second;
            int side_e0 = side_of_edge(e0, v, true);
            int side_e1 = side_of_edge(e1, v, false);
            lead[find(side_e0)] = find(side_e1);
        }
    }
    vector<vector<int> comps(2 * E);
    REP(i, 2 * E)
        comps[find(i)].emplace_back(i);
    vector<Face> polygons;
    vector<vector<pair<int, int>> outgoing_for_face(n);
    REP(leader, 2 * E)
        if(ssize(comps[leader])) {
            for (int id : comps[leader]) {
                int v = edges[id / 2].first;
                int u = edges[id / 2].second;
                if(v > u)
                    swap(v, u);
            }
        }
    }
}

```

```

if(id % 2 == 1)
    swap(v, u);
outgoing_for_face[v].emplace_back(u, id / 2);
}

vector<Edge> sorted_edges;
function<void (int)> dfs = [&](int v) {
    while(ssize(outgoing_for_face[v])) {
        auto [u, e] = outgoing_for_face[v].back();
        outgoing_for_face[v].pop_back();
        dfs(u);
        sorted_edges.emplace_back(e, v, u);
    }
}
dfs(edges[comps[leader].front() / 2].first);
reverse(sorted_edges.begin(), sorted_edges.end());
LL area = 0;
for(auto edge : sorted_edges) {
    auto l = coord[edge.from];
    auto r = coord[edge.to];
    area += l.first * LL(r.second) - l.second * LL
        (r.first);
}
polygons.emplace_back(area >= 0, sorted_edges);
}

// Remember that there can be multiple outside faces
.
.
.
return polygons;
}

```

planarity-check $\mathcal{O}(szybko)$ ale istnieją przykłady $\mathcal{O}(n^2)$, przyjmując graf nieskierowany bez pętelek i multikrawędzi.

```

bool is_planar(vector<vector<int> graph) {
    int n = ssize(graph), m = 0;
    REP(v, n)
        m += ssize(graph[v]);
    m /= 2;
    if(n <= 3) return true;
    if(m > 3 * n - 6) return false;
    vector<vector<int> up(n), dn(n);
    vector<int> low(n, -1), pre(n);
    REP(start, n)
        if(low[start] == -1) {
            vector<pair<int, int> e_up;
            int tm = 0;
            function<void (int, int)> dfs_low = [&](int v,
                int p) {
                low[v] = pre[v] = tm++;
                for(int u : graph[v])
                    if(u != p and low[u] == -1) {
                        dn[v].emplace_back(u);
                        dfs_low(u, v);
                        low[v] = min(low[v], low[u]);
                    }
                else if(u == p and pre[u] < pre[v]) {
                    up[v].emplace_back(ssize(e_up));
                    e_up.emplace_back(v, u);
                    low[v] = min(low[v], pre[u]);
                }
            };
            dfs_low(start, -1);
            vector<pair<int, bool> dsu(ssize(e_up));
            REP(v, ssize(dsu)) dsu[v].first = v;
            function<pair<int, bool> (int)> find = [&](int v
            ) {
                if(dsu[v].first == v)
                    return pair(v, false);
                auto [u, ub] = find(dsu[v].first);
                return dsu[v] = pair(u, ub ^ dsu[v].second);
            };
            auto onion = [&](int x, int y, bool flip) {
                auto [v, vb] = find(x);
                auto [u, ub] = find(y);
                if(v == u)
                    return not (vb ^ ub ^ flip);
            }
        }
    }
}

```

planarity-check scc toposort

```

dsu[v] = {u, vb ^ ub ^ flip};
return true;
}
auto interlace = [&](const vector<int> &ids, int
    lo) {
    vector<int> ans;
    for(int e : ids) {
        if(pre[e_up[e].second] > lo)
            ans.emplace_back(e);
    }
    return ans;
};
auto add_fu = [&](const vector<int> &a, const
    vector<int> &b) {
    FOR(k, 1, ssize(a) - 1)
        if(not onion(a[k - 1], a[k], 0))
            return false;
    FOR(k, 1, ssize(b) - 1)
        if(not onion(b[k - 1], b[k], 0))
            return false;
    return a.empty() or b.empty() or onion(a[0], b
        [0], 1);
};
function<bool (int, int)> dfs_planar = [&](int v
    , int p) {
    for(int u : dn[v])
        if(not dfs_planar(u, v))
            return false;
    REP(i, ssize(dn[v])) {
        FOR(j, i + 1, ssize(dn[v]) - 1)
            if(not add_fu(interlace(up[dn[v][i]], low[
                dn[v][j]]),
                interlace(up[dn[v][j]], low[dn[v][i]])))
                return false;
        for(int j : up[v]) {
            if(e_up[j].first != v)
                continue;
            if(not add_fu(interlace(up[dn[v][i]], pre[
                e_up[j].second]),
                interlace({j}, low[dn[v][i]])))
                return false;
        }
    }
    for(int u : dn[v]) {
        for(int idx : up[u])
            if(pre[e_up[idx].second] < pre[p])
                up[v].emplace_back(idx);
        exchange(up[u], {});
    }
    return true;
};
if(not dfs_planar(start, -1))
    return false;
}
return true;
}

```

SCC konstruktor $\mathcal{O}(n \log n)$. **group[v]** to numer silnie spójnej wierzchołka v , **order** to toposort, w którym krawędzie idą w lewo (z lewej są liście), **get_compressed()** zwraca graf silnie spójnych, **get_compressed(false)** nie usuwa multikrawędzi.

```

struct SCC {
    int n;
    vector<vector<int> &graph;
    int group_cnt = 0;
    vector<int> group;
    vector<vector<int> rev_graph;
    vector<int> order;
    void order_dfs(int v) {
        group[v] = 1;
        for(int u : rev_graph[v])
            if(group[u] == 0)
                order_dfs(u);
        order.emplace_back(v);
    }
    void group_dfs(int v, int color) {

```

```

group[v] = color;
for(int u : graph[v])
    if(group[u] == -1)
        group_dfs(u, color);
}
SCC(vector<vector<int> &graph) : graph(_graph) {
    n = ssize(graph);
    rev_graph.resize(n);
    REP(v, n)
        for(int u : graph[v])
            rev_graph[u].emplace_back(v);
    group.resize(n);
    REP(v, n)
        if(group[v] == 0)
            order_dfs(v);
    reverse(order.begin(), order.end());
    debug(order);
    group.assign(n, -1);
    for(int v : order)
        if(group[v] == -1)
            group_dfs(v, group_cnt++);
}
vector<vector<int> get_compressed(bool delete_same
    = true) {
    vector<vector<int> ans(group_cnt);
    REP(v, n)
        for(int u : graph[v])
            if(group[v] != group[u])
                ans[group[v]].emplace_back(group[u]);
    if(not delete_same)
        return ans;
    REP(v, group_cnt) {
        sort(ans[v].begin(), ans[v].end());
        ans[v].erase(unique(ans[v].begin(), ans[v].end()
            ), ans[v].end());
    }
    return ans;
}

```

toposort $\mathcal{O}(n)$, **get_toposort_order(g)** zwraca listę wierzchołków takich, że krawędzie są od wierzchołków wcześniejszych w liście do późniejszych. **get_new_vertex_id_from_order(order)** zwraca odwrotność tej permutacji, tzn. dla każdego wierzchołka trzyma jego nowy numer, aby po przenumerowaniu grafu istniały krawędzie tylko do wierzchołków o większych numerach. **permute(elems, new_id)** zwraca przepermutowaną tablicę elems według nowych numerów wierzchołków (przydatne jak się trzyma informacje o wierzchołkach, a chce się zrobić przenumerowanie topologiczne). **reenumerate_vertices(...)** zwraca nowy graf, w którym wierzchołki są przenumerowane. Nowy graf: **reenumerate_vertices(graph, get_new_vertex_id_from_order(get_toposort_order(graph)))**.

```

vector<int> get_toposort_order(vector<vector<int>
    graph) {
    int n = ssize(graph);
    vector<int> indeg(n);
    REP(v, n)
        for(int u : graph[v])
            ++indeg[u];
    vector<int> que;
    vector<int> ret;
    while(not que.empty()) {
        int v = que.back();
        que.pop_back();
        ret.emplace_back(v);
        for(int u : graph[v])
            if(--indeg[u] == 0)
                que.emplace_back(u);
    }
    return ret;
}
vector<int> get_new_vertex_id_from_order(vector<int>

```

```

order) {
vector<int> ret(ssize(order), -1);
REP(v, ssize(order))
    ret[order[v]] = v;
return ret;
}
template<class T>
vector<T> permute(vector<T> elems, vector<int> new_id)
{
    vector<T> ret(ssize(elems));
    REP(v, ssize(elems))
        ret[new_id[v]] = elems[v];
    return ret;
}
vector<vector<int>> reenumerate_vertices(vector<vector<int>> graph, vector<int> new_id) {
    int n = ssize(graph);
    vector<vector<int>> ret(n);
    REP(v, n)
        for(int u : graph[v])
            ret[new_id[v]].emplace_back(new_id[u]);
    REP(v, n)
        for(int u : ret[v])
            assert(v < u);
    return ret;
}

```

triangles $\mathcal{O}(m\sqrt{m})$, liczenie możliwych kształtów podzbiorów trzy- i czterokrawędziowych. Suma zmiennych *3 daje liczbę spójnych 3-elementowych podzbiorów krawędzi, analogicznie suma zmiennych *4.

```

struct Triangles {
    int triangles3 = 0;
    LL stars3 = 0, paths3 = 0;
    LL ps4 = 0, rectangles4 = 0, paths4 = 0;
    __int128_t ys4 = 0, stars4 = 0;
    Triangles(vector<vector<int>> &graph) {
        int n = ssize(graph);
        vector<pair<int, int>> sorted_deg(n);
        REP(i, n)
            sorted_deg[i] = {ssize(graph[i]), i};
        sort(sorted_deg.begin(), sorted_deg.end());
        vector<int> id(n);
        REP(i, n)
            id[sorted_deg[i].second] = i;
        vector<int> cnt(n);
        REP(v, n)
            for(int u : graph[v]) if(id[v] > id[u])
                cnt[u] = 1;
        for(int u : graph[v]) if(id[v] > id[u]) for(int w : graph[u]) if(id[w] > id[u] and cnt[w] == 1)
            ++triangles3;
        for(int x : {v, u, w})
            ps4 += ssize(graph[x]) - 2;
    }
    for(int u : graph[v]) if(id[v] > id[u])
        cnt[u] = 0;
    for(int u : graph[v]) if(id[v] > id[u]) for(int w : graph[u]) if(id[w] > id[v])
        rectangles4 += cnt[w]++;
    for(int u : graph[v]) if(id[v] > id[u]) for(int w : graph[u])
        cnt[w] = 0;
    paths3 = -3 * triangles3;
    REP(v, n) for(int u : graph[v]) if(v < u)
        paths3 += (ssize(graph[v]) - 1) * LL(ssize(graph[u]) - 1);
    ys4 = -2 * ps4;
    auto choose2 = [&](int x) { return x * LL(x - 1) / 2; };
    REP(v, n) for(int u : graph[v])
        ys4 += (ssize(graph[v]) - 1) * choose2(ssize(graph[u]) - 1);
    paths4 = -(4 * rectangles4 + 2 * ps4 + 3 * triangles3);
}

```

```

REP(v, n) {
    int x = 0;
    for(int u : graph[v]) {
        x += ssize(graph[u]) - 1;
        paths4 -= choose2(ssize(graph[u]) - 1);
    }
    paths4 += choose2(x);
}
REP(v, n) {
    int s = ssize(graph[v]);
    stars3 += s * LL(s - 1) * LL(s - 2);
    stars4 += s * LL(s - 1) * LL(s - 2) * __int128_t
        (s - 3);
}
stars3 /= 6;
stars4 /= 24;
}

```

Flowy i matchingi (6)

blossom Jeden rabin powie $\mathcal{O}(nm)$, drugi rabin powie, że to nawet nie jest $\mathcal{O}(n^3)$. W grafie nie może być pętelek. Funkcja zwraca $\text{match}[a, \text{tzn } \text{match}[v] == -1]$ albo z kim jest sparowany v . Rozmiar matchingu to $\frac{1}{2} \sum_v \text{int}(\text{match}[v] != -1)$.

```

vector<int> blossom(vector<vector<int>> graph) {
    int n = ssize(graph), timer = -1;
    REP(v, n)
        for(int u : graph[v])
            assert(v != u);
    vector<int> match(n, -1), label(n), parent(n), orig(n),
        aux(n, -1), q;
    auto lca = [&](int x, int y) {
        for(;; swap(x, y)) {
            if(x == -1)
                continue;
            if(aux[x] == timer)
                return x;
            aux[x] = timer;
            x = (match[x] == -1 ? -1 : orig[parent[match[x]]]);
        }
    };
    auto blossom = [&](int v, int w, int a) {
        while(orig[v] != a) {
            parent[v] = w;
            w = match[v];
            if(label[w] == 1) {
                label[w] = 0;
                q.emplace_back(w);
            }
            orig[v] = orig[w] = a;
            v = parent[w];
        }
    };
    auto augment = [&](int v) {
        while(v != -1) {
            int pv = parent[v], nv = match[pv];
            match[v] = pv;
            match[pv] = v;
            v = nv;
        }
    };
    auto bfs = [&](int root) {
        fill(label.begin(), label.end(), -1);
        iota(orig.begin(), orig.end(), 0);
        label[root] = 0;
        q = {root};
        REP(i, ssize(q))
            if(label[q[i]] == 0) {
                int v = q[i];
                for(int x : graph[v])
                    if(label[x] == -1) {
                        label[x] = 1;
                        parent[x] = v;
                        if(match[x] == -1) {
                            int v = q[i];
                            for(int x : graph[v])
                                if(label[x] == -1) {
                                    label[x] = 1;
                                    parent[x] = v;
                                    if(match[x] == -1) {

```

```

                                        augment(x);
                                        return 1;
                                    }
                                    label[match[x]] = 0;
                                    q.emplace_back(match[x]);
                                }
                            else if(label[x] == 0 and orig[v] != orig[x]) {
                                int a = lca(orig[v], orig[x]);
                                blossom(x, v, a);
                                blossom(v, x, a);
                            }
                        }
                    }
                }
            }
        }
        return 0;
    };
    REP(i, n)
        if(match[i] == -1)
            bfs(i);
    return match;
}

```

dinic $\mathcal{O}(V^2E)$ Dinic bez skalowania. Funkcja `get_flow()` zwraca dla każdej oryginalnej krawędzi ile przez nią leci.

```

struct Dinic {
    using T = int;
    struct Edge {
        int v, u;
        T flow, cap;
    };
    int n;
    vector<vector<int>> graph;
    vector<Edge> edges;
    Dinic(int N) : n(N), graph(n) {}
    void add_edge(int v, int u, T cap) {
        debug(v, u, cap);
        int e = ssize(edges);
        graph[v].emplace_back(e);
        graph[u].emplace_back(e + 1);
        edges.emplace_back(v, u, 0, cap);
        edges.emplace_back(u, v, 0, 0);
    }
    vector<int> dist;
    bool bfs(int source, int sink) {
        dist.assign(n, 0);
        dist[source] = 1;
        deque<int> que = {source};
        while(ssize(que) and dist[sink] == 0) {
            int v = que.front();
            que.pop_front();
            for(int e : graph[v])
                if(edges[e].flow != edges[e].cap and dist[edges[e].u] == 0) {
                    int v = que.front();
                    que.pop_front();
                    for(int e : graph[v])
                        if(edges[e].flow != edges[e].cap and dist[edges[e].u] == 0) {
                            edges[e].u = v;
                            dist[edges[e].u] = dist[v] + 1;
                            que.emplace_back(edges[e].u);
                        }
                }
            return dist[sink] != 0;
        }
    }
    vector<int> ended_at;
    T dfs(int v, int sink, T flow = numeric_limits<T>::max()) {
        if(flow == 0 or v == sink)
            return flow;
        for(; ended_at[v] != ssize(graph[v]); ++ended_at[v])
            Edge &e = edges[graph[v][ended_at[v]]];
        if(dist[v] + 1 == dist[e.u]) {
            if(T pushed = dfs(e.u, sink, min(flow, e.cap -
                e.flow))) {
                e.flow += pushed;
                edges[graph[v][ended_at[v]] ^ 1].flow -=
                    pushed;
                return pushed;
            }
        }
        return 0;
    }
}

```

```

    }
    T operator()(int source, int sink) {
        T answer = 0;
        while(bfs(source, sink)) {
            ended_at.assign(n, 0);
            while(T pushed = dfs(source, sink))
                answer += pushed;
        }
        return answer;
    }
    map<pair<int, int>, T> get_flow() {
        map<pair<int, int>, T> ret;
        REP(v, n)
            for(int i : graph[v]) {
                if(i % 2) // considering only original edges
                    continue;
                Edge &e = edges[i];
                ret[{pair(v, e.u)}] += e.flow;
            }
        return ret;
    }
}

```

gomory-hu includes: **dinic** $\mathcal{O}(n^2 + n \cdot \text{dinic}(n, m))$, zwraca różnicę między każdą parą wierzchołków w nieskierowanym ważonym grafie o nieujemnych wagach. `gomory_hu(n, edges)[s][t] == min cut (s, t)`

```

pair<Dinic::T, vector<bool>> get_min_cut(Dinic &dinic,
    int s, int t) {
    for(Dinic::Edge &e : dinic.edges)
        e.flow = 0;
    Dinic::T flow = dinic(s, t);
    vector<bool> cut(dinic.n);
    REP(v, dinic.n)
        cut[v] = bool(dinic.dist[v]);
    return {flow, cut};
}
vector<vector<Dinic::T>> get_gomory_hu(int n, vector<
    tuple<int, int, Dinic::T>> edges) {
    Dinic dinic(n);
    for(auto [v, u, cap] : edges) {
        dinic.add_edge(v, u, cap);
        dinic.add_edge(u, v, cap);
    }
    using T = Dinic::T;
    vector<vector<pair<int, T>> tree(n);
    vector<int> par(n, 0);
    FOR(v, 1, n - 1) {
        auto [flow, cut] = get_min_cut(dinic, v, par[v]);
        FOR(u, v + 1, n - 1)
            if(cut[u] == cut[v] and par[u] == par[v])
                par[u] = v;
        tree[v].emplace_back(par[v], flow);
        tree[par[v]].emplace_back(v, flow);
    }
    T inf = numeric_limits<T>::max();
    vector ret(n, vector(n, inf));
    REP(source, n) {
        function<void (int, int, T)> dfs = [&](int v, int
            p, T mn) {
            ret[source][v] = mn;
            for(auto [u, flow] : tree[v])
                if(u != p)
                    dfs(u, v, min(mn, flow));
        };
        dfs(source, -1, inf);
    }
    return ret;
}

```

hopcroft-karp $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$ Hopcroft-Karp do liczenia matchingu. Przydaje się głównie w aproksymacji, ponieważ po k iteracjach gwarantuje matching o rozmiarze przynajmniej $k/(k+1)$ -best matching. Wierzchołki grafu muszą być podzielone na warstwy $[0, n0)$ oraz $[n0, n0 + n1)$. Zwraca rozmiar matchingu oraz przypisanie (lub -1, gdy nie jest zmatchowane).

```

pair<int, vector<int>> hopcroft_karp(vector<vector<int>> graph, int n0, int n1) {
    assert(n0 + n1 == ssize(graph));
    REP(v, n0 + n1)
        for(int u : graph[v])
            assert((v < n0) != (u < n0));
    vector<int> matched_with(n0 + n1, -1), dist(n0 + 1);
    constexpr int inf = int(1e9);
    vector<bool> manual_que(n0 + 1);
    auto bfs = [&] {
        int head = 0, tail = -1;
        fill(dist.begin(), dist.end(), inf);
        REP(v, n0)
            if(matched_with[v] == -1) {
                dist[1 + v] = 0;
                manual_que[+tail] = v;
            }
        while(head <= tail) {
            int v = manual_que[head++];
            if(dist[1 + v] < dist[0])
                for(int u : graph[v])
                    if(dist[1 + matched_with[u]] == inf) {
                        dist[1 + matched_with[u]] = dist[1 + v] + 1;
                        manual_que[+tail] = matched_with[u];
                    }
            return dist[0] != inf;
        }
        function<bool (int)> dfs = [&](int v) {
            if(v == -1)
                return true;
            for(auto u : graph[v])
                if(dist[1 + matched_with[u]] == dist[1 + v] + 1) {
                    if(dfs(matched_with[u])) {
                        matched_with[v] = u;
                        matched_with[u] = v;
                        return true;
                    }
                }
            dist[1 + v] = inf;
            return false;
        };
        int answer = 0;
        for(int iter = 0; bfs(); ++iter)
            REP(v, n0)
                if(matched_with[v] == -1 and dfs(v))
                    ++answer;
        return {answer, matched_with};
    };
}

hungarian  $\mathcal{O}(n_0^2 \cdot n_1)$ , dla macierzy wag (moga byc ujemne) między dwoma warstwami o rozmiarach  $n_0$  oraz  $n_1$  ( $n_0 <= n_1$ ) wyznacza minimalna sumę wag skojarzenia pełnego. Zwraca sumę wag oraz matching.

```

```

pair<LL, vector<int>> hungarian(vector<vector<int>> a) {
    if(a.empty())
        return {0, {}};
    int n0 = ssize(a) + 1, n1 = ssize(a[0]) + 1;
    assert(n0 <= n1);
    vector<int> p(n1), ans(n0 - 1);
    vector<LL> u(n0), v(n1);
    FOR(i, 1, n0 - 1) {
        p[0] = i;
        int j0 = 0;
        vector<LL> dist(n1, numeric_limits<LL>::max());
        vector<int> pre(n1, -1);
        vector<bool> done(n1 + 1);
        do {
            done[j0] = true;
            int i0 = p[j0], j1 = -1;
            LL delta = numeric_limits<LL>::max();
            FOR(j, 1, n1 - 1)
                if(!done[j]) {

```

```

                    auto cur = a[i0 - 1][j - 1] - u[i0] - v[j];
                    if(cur < dist[j])
                        dist[j] = cur, pre[j] = j0;
                    if(dist[j] < delta)
                        delta = dist[j], j1 = j;
                }
            REP(j, n1) {
                if(done[j])
                    u[p[j]] += delta, v[j] -= delta;
                else
                    dist[j] -= delta;
            }
            j0 = j1;
        } while(p[j0]);
        while(j0) {
            int j1 = pre[j0];
            p[j0] = p[j1], j0 = j1;
        }
    }
    FOR(j, 1, n1 - 1)
        if(p[j])
            ans[p[j] - 1] = j - 1;
    return {-v[0], ans};
}

```

konig-theorem includes: matching
 $\mathcal{O}(n + matching(n, m))$ wyznaczanie w grafie dwudzielnym kolejno minimalnego pokrycia krawędziowego (PK), maksymalnego zbioru niezależnych wierzchołków (NW), minimalnego pokrycia wierzchołkowego (PW) korzystając z maksymalnego zbiuru niezależnych krawędzi (NK) (tak zwany matching). Z tw. Koniga zachodzi $|NK|=n-|PK|=n-|NW|=|PW|$.

```

pair<pair<int, int>, get_min_edge_cover(vector<vector<int>> graph) {
    vector<int> match = Matching(graph)().second;
    vector<pair<int, int>> ret;
    REP(v, ssize(match))
        if(match[v] != -1 and v < match[v])
            ret.emplace_back(v, match[v]);
        else if(match[v] == -1 and not graph[v].empty())
            ret.emplace_back(v, graph[v].front());
    return ret;
}
array<vector<int>, 2> get_coloring(vector<vector<int>> graph) {
    int n = ssize(graph);
    vector<int> match = Matching(graph)().second;
    vector<int> color(n, -1);
    function<void (int)> dfs = [&](int v) {
        color[v] = 0;
        for(int u : graph[v])
            if(color[u] == -1) {
                color[u] = true;
                dfs(match[u]);
            }
    };
    REP(v, n)
        if(match[v] == -1)
            dfs(v);
    REP(v, n)
        if(color[v] == -1)
            dfs(v);
    array<vector<int>, 2> groups;
    REP(v, n)
        groups[color[v]].emplace_back(v);
    return groups;
}
vector<int> get_max_independent_set(vector<vector<int>> graph) {
    return get_coloring(graph)[0];
}
vector<int> get_min_vertex_cover(vector<vector<int>> graph) {
    return get_coloring(graph)[1];
}

```

hungarian konig-theorem matching mcmf-dijkstra mcmf-spfa

matching Średnio okolo $\mathcal{O}(n \log n)$, najgorzej $\mathcal{O}(n^2)$. Wierzchołki grafu nie muszą być ładnie podzielone na dwia przedziały, musi być po prostu dwudzielnny. Na przykład auto [match_size, match] = Matching(graph)();

```

struct Matching {
    vector<vector<int>> &adj;
    vector<int> mat, vis;
    int t = 0, ans = 0;
    bool mat_dfs(int v) {
        vis[v] = t;
        for(int u : adj[v])
            if(mat[u] == -1) {
                mat[u] = v;
                mat[v] = u;
                return true;
            }
        for(int u : adj[v])
            if(vis[mat[u]] != t && mat_dfs(mat[u])) {
                mat[u] = v;
                mat[v] = u;
                return true;
            }
        return false;
    }
    Matching(vector<vector<int>> &adj) : adj(_adj) {
        mat = vis = vector<int>(ssize(adj), -1);
    }
}
pair<int, vector<int>> operator()() {
    int d = -1;
    while(d != 0) {
        d = 0, ++t;
        REP(v, ssize(adj))
            if(mat[v] == -1)
                d += mat_dfs(v);
        ans += d;
    }
    return {ans, mat};
}

```

mcmf-dijkstra $\mathcal{O}(VE + |flow|E \log V)$, Min-cost max-flow. Można przepisać funkcję get_flow() z Dinic'a. Kiedy wie się coś więcej o początkowym grafie np. że jest DAG-iem lub że ma tylko nieujemne wagie krawędzi, można napisać własne calc_init_dist by użyując VE ze złożoności. Jeżeli $E = \mathcal{O}(V^2)$, to może być lepiej napisać samemu kwadratową dijkstrę.

```

struct MCMF {
    struct Edge {
        int v, u, flow, cap;
        LL cost;
        friend ostream& operator<<(ostream &os, Edge &e) {
            return os << vector<LL>{e.v, e.u, e.flow, e.cap, e.cost};
        }
    };
    int n;
    const LL inf_LL = 1e18;
    const int inf_int = 1e9;
    vector<vector<int>> graph;
    vector<Edge> edges;
    vector<LL> init_dist;
    MCMF(int N) : n(N), graph(n), init_dist(n) {}
    void add_edge(int v, int u, int cap, LL cost) {
        int e = ssize(edges);
        graph[v].emplace_back(e);
        graph[u].emplace_back(e + 1);
        edges.emplace_back(v, u, 0, cap, cost);
        edges.emplace_back(u, v, 0, 0, -cost);
    }
    void calc_init_dist(int source) {
        fill(init_dist.begin(), init_dist.end(), inf_LL);
        vector<bool> inside(n);
        inside[source] = true;
        deque<int> que = {source};
        init_dist[source] = 0;
        while(ssize(que)) {

```

```

            int v = que.front();
            que.pop_front();
            inside[v] = false;
            for(int i : graph[v]) {
                Edge &e = edges[i];
                if(e.flow < e.cap and init_dist[v] + e.cost < init_dist[e.u]) {
                    init_dist[e.u] = init_dist[v] + e.cost;
                    if(not inside[e.u]) {
                        inside[e.u] = true;
                        que.emplace_back(e.u);
                    }
                }
            }
        }
        pair<int, LL> augment(int source, int sink) {
            vector<bool> vis(n);
            vector<int> from(n, -1);
            vector<LL> dist(n, inf_LL);
            priority_queue<pair<LL, int>, vector<pair<LL, int>>, greater<> que;
            que.emplace(0, source);
            dist[source] = 0;
            while(ssize(que)) {
                auto [d, v] = que.top();
                que.pop();
                if(vis[v]) continue;
                vis[v] = true;
                for(int i : graph[v]) {
                    Edge &e = edges[i];
                    LL new_dist = d + e.cost + init_dist[v];
                    if(not vis[e.u] and e.flow != e.cap and new_dist < dist[e.u]) {
                        dist[e.u] = new_dist;
                        from[e.u] = i;
                        que.emplace(new_dist - init_dist[e.u], e.u);
                    }
                }
            }
            if(not vis[sink])
                return {0, 0};
            int flow = inf_int, e = from[sink];
            while(e != -1) {
                flow = min(flow, edges[e].cap - edges[e].flow);
                e = from[edges[e].v];
            }
            e = from[sink];
            while(e != -1) {
                edges[e].flow += flow;
                edges[e ^ 1].flow -= flow;
                e = from[edges[e].v];
            }
            init_dist.swap(dist);
            return {flow, flow * init_dist[sink]};
        }
        pair<int, LL> operator()(int source, int sink) {
            calc_init_dist(source);
            int flow = 0;
            LL cost = 0;
            pair<int, LL> got;
            do {
                got = augment(source, sink);
                flow += got.first;
                cost += got.second;
            } while(got.first);
            return {flow, cost};
        }
    };
}
```

MCMF-spfa $\mathcal{O}(idk)$, Min-cost max-flow z SPFA. Można przepisać funkcję get_flow() z Dinic'a.

```

struct MCMF {
    struct Edge {
        int v, u, flow, cap;
        LL cost;
    };

```

```

friend ostream& operator<<(ostream &os, Edge &e) {
    return os << vector<LL>{e.v, e.u, e.flow, e.cap,
        e.cost};
}
int n;
const LL inf_LL = 1e18;
const int inf_int = 1e9;
vector<vector<int>> graph;
vector<Edge> edges;
MCMF(int N) : n(N), graph(n) {}
void add_edge(int v, int u, int cap, LL cost) {
    int e = ssize(edges);
    graph[v].emplace_back(e);
    graph[u].emplace_back(e + 1);
    edges.emplace_back(v, u, 0, cap, cost);
    edges.emplace_back(u, v, 0, 0, -cost);
}
pair<int, LL> augment(int source, int sink) {
    vector<LL> dist(n, inf_LL);
    vector<int> from(n, -1);
    dist[source] = 0;
    deque<int> que = {source};
    vector<bool> inside(n);
    inside[source] = true;
    while(ssize(que)) {
        int v = que.front();
        inside[v] = false;
        que.pop_front();
        for(int i : graph[v]) {
            Edge &e = edges[i];
            if(e.flow != e.cap and dist[e.u] > dist[v] + e
                .cost) {
                dist[e.u] = dist[v] + e.cost;
                from[e.u] = i;
                if(not inside[e.u]) {
                    inside[e.u] = true;
                    que.emplace_back(e.u);
                }
            }
        }
    }
    if(from[sink] == -1)
        return {0, 0};
    int flow = inf_int, e = from[sink];
    while(e != -1) {
        flow = min(flow, edges[e].cap - edges[e].flow);
        e = from[edges[e].v];
    }
    e = from[sink];
    while(e != -1) {
        edges[e].flow += flow;
        edges[e ^ 1].flow -= flow;
        e = from[edges[e].v];
    }
    return {flow, flow * dist[sink]};
}
pair<int, LL> operator()(int source, int sink) {
    int flow = 0;
    LL cost = 0;
    pair<int, LL> got;
    do {
        got = augment(source, sink);
        flow += got.first;
        cost += got.second;
    } while(got.first);
    return {flow, cost};
}
};


```

weighted-blossom $\mathcal{O}(N^3)$ (but fast in practice) Taken from: <https://judge.yosupo.jp/submission/218005> pdfcompile, weighted_matching::init(n), weighted_matching::add_edge(a, b, c) vector<pii> temp, weighted_matching::solve(temp).first

```
#define pii pair<int, int>
namespace weighted_matching{
```

weighted-blossom 3-points-circle

```

const int INF = (int)1e9 + 7;
const int MAXN = 1050; //double of possible N
struct E {
    int x, y, w;
};
int n, m;
E G[MAXN][MAXN];
int lab[MAXN], match[MAXN], slack[MAXN], st[MAXN], pa[
    MAXN], flo_from[MAXN][MAXN], S[MAXN], vis[MAXN];
vector<int> Q;
void init(int _n) {
    n = _n;
    for(int x = 1; x <= n; ++x)
        for(int y = 1; y <= n; ++y)
            G[x][y] = E{x, y, 0};
}
void add_edge(int x, int y, int w) {
    G[x][y].w = G[y][x].w = w;
}
int e_delta(E e) {
    return lab[e.x] + lab[e.y] - G[e.x][e.y].w * 2;
}
void update_slack(int u, int x) {
    if(!slack[x] || e_delta(G[u][x]) < e_delta(G[slack[x]
        ][x]))
        slack[x] = u;
}
void set_slack(int x) {
    slack[x] = 0;
    for(int u = 1; u <= n; ++u)
        if(G[u][x].w > 0 && st[u] != x && S[st[u]] == 0)
            update_slack(u, x);
}
void q_push(int x) {
    if(x <= n) Q.push(x);
    else for(int i = 0; i < (int)flo[x].size(); ++i)
        q_push(flo[x][i]);
}
void set_st(int x, int b) {
    st[x] = b;
    if(x > n) for(int i = 0; i < (int)flo[x].size(); ++i)
        set_st(flo[x][i], b);
}
int get_pr(int b, int xr) {
    int pr = find(flo[b].begin(), flo[b].end(), xr) -
        flo[b].begin();
    if(pr & 1) {
        reverse(flo[b].begin() + 1, flo[b].end());
        return (int)flo[b].size() - pr;
    }
    else return pr;
}
void set_match(int x, int y) {
    match[x] = G[x][y].y;
    if(x <= n) return;
    E e = G[x][y];
    int xr = flo_from[x][e.x], pr = get_pr(x, xr);
    for(int i = 0; i < pr; i < xr) set_match(flo[x][i], flo[
        x][i ^ 1]);
    set_match(xr, y);
    rotate(flo[x].begin(), flo[x].begin() + pr, flo[x].
        end());
}
void augment(int x, int y) {
    while(1) {
        int ny = st[match[x]];
        set_match(x, y);
        if(!ny) return;
        set_match(ny, st[pa[ny]]);
        x = st[pa[ny]], y = ny;
    }
}
int get_lca(int x, int y) {
    static int t = 0;
    for(;;t++) x || y; swap(x, y));
}


```

```

if(x == 0) continue;
if(vis[x] == t) return x;
vis[x] = t;
x = st[match[x]];
if(x == st[pa[x]])
    return 0;
void add_blossom(int x, int l, int y) {
    int b = n + 1;
    while(b <= m && st[b]) ++b;
    if(b > m) ++m;
    lab[b] = 0, S[b] = 0;
    match[b] = match[l];
    flo[b].clear();
    flo[b].push_back(l);
    for(int u = x, v; u != l; u = st[pa[v]])
        flo[b].push_back(u), flo[b].push_back(v = st[match
            [u]]), q.push(v);
    reverse(flo[b].begin() + 1, flo[b].end());
    for(int u = y, v; u != l; u = st[pa[v]])
        flo[b].push_back(u), flo[b].push_back(v = st[match
            [u]]), q.push(v);
    set_st(b, b);
    for(int i = 1; i <= m; ++i) G[b][i].w = G[i][b].w =
        0;
    for(int i = 1; i <= n; ++i) flo_from[b][i] = 0;
    for(int i = 0; i < (int)flo[b].size(); ++i) {
        int us = flo[b][i];
        for(int u = 1; u <= m; ++u)
            if(G[b][u].w == 0 || e_delta(G[us][u]) < e_delta(
                [b][u]))
                G[b][u] = G[us][u], G[u][b] = G[u][us];
        for(int u = 1; u <= n; ++u)
            if(flo_from[us][u])
                flo_from[b][u] = us;
    }
    set_slack(b);
}
void expand_blossom(int b) {
    for(int i = 0; i < (int)flo[b].size(); ++i)
        set_st(flo[b][i], flo[b][i]);
    int xr = flo_from[b][G[b][pa[b]].x], pr = get_pr(b,
        xr);
    for(int i = 0; i < pr; i += 2) {
        int xs = flo[b][i], xns = flo[b][i + 1];
        pa[xs] = G[xns][xs].x;
        S[xs] = 1, S[xns] = 0;
        slack[xs] = 0, set_slack(xns);
        q.push(xns);
    }
    S[xr] = 1, pa[xr] = pa[b];
    for(int i = pr + 1; i < (int)flo[b].size(); ++i) {
        int xs = flo[b][i];
        S[xs] = -1, set_slack(xs);
    }
    st[b] = 0;
}
bool on_found_edge(E e) {
    int x = st[e.x], y = st[e.y];
    if(S[y] == -1) {
        pa[y] = e.x, S[y] = 1;
        int ny = st[match[y]];
        slack[y] = slack[ny] = 0;
        S[ny] = 0, q.push(ny);
    }
    else if(S[y] == 0) {
        int l = get_lca(x, y);
        if(!l) return augment(x, y), augment(y, x), true;
        else add_blossom(x, l, y);
    }
    return false;
}
bool matching() {
    fill(S + 1, S + m + 1, -1);
    fill(slack + 1, slack + m + 1, 0);
    Q = queue<int>();
}

for(int x = 1; x <= m; ++x)
    if(st[x] == x && !match[x]) pa[x] = 0, S[x] = 0,
        q.push(x);
if(Q.empty()) return false;
while(1) {
    while(Q.size()) {
        int x = Q.front(); Q.pop();
        if(S[st[x]] == 1) continue;
        for(int y = 1; y <= n; ++y) {
            if(G[x][y].w > 0 && st[y] != st[x]) {
                if(e_delta(G[x][y]) == 0) {
                    if(on_found_edge(G[x][y])) return true;
                }
                else update_slack(x, st[y]);
            }
        }
    }
    int d = INF;
    for(int b = n + 1; b <= m; ++b)
        if(st[b] == b && S[b] == 1) d = min(d, lab[b] /
            2);
    for(int x = 1; x <= m; ++x)
        if(st[x] == x && slack[x]) {
            if(S[x] == -1) d = min(d, e_delta(G[slack[x]][
                x]));
            else if(S[x] == 0) d = min(d, e_delta(G[slack[
                    x]][x]) / 2);
        }
    for(int x = 1; x <= n; ++x) {
        if(S[st[x]] == 0) {
            if(lab[x] <= d) return 0;
            lab[x] -= d;
        }
        else if(S[st[x]] == 1) lab[x] += d;
    }
    for(int b = n + 1; b <= m; ++b)
        if(st[b] == b) {
            if(S[st[b]] == 0) lab[b] += d * 2;
            else if(S[st[b]] == 1) lab[b] -= d * 2;
        }
    Q = queue<int>();
    for(int x = 1; x <= m; ++x)
        if(st[x] == x && slack[x] && st[slack[x]] != x
            && e_delta(G[slack[x]][x]) == 0)
                if(on_found_edge(G[slack[x]][x])) return true;
    for(int b = n + 1; b <= m; ++b)
        if(st[b] == b && S[b] == 1 && lab[b] == 0)
            expand_blossom(b);
    }
    return false;
}
pair<ll, int> solve(vector<pii> &ans) {
    fill(match + 1, match + n + 1, 0);
    m = n;
    int cnt = 0; LL sum = 0;
    for(int u = 0; u <= n; ++u) st[u] = u, flo[u].clear
        ();
    int mx = 0;
    for(int x = 1; x <= n; ++x)
        for(int y = 1; y <= n; ++y)
            flo_from[x][y] = (x == y ? x : 0);
            mx = max(mx, G[x][y].w);
    for(int x = 1; x <= n; ++x) lab[x] = mx;
    while(matching()) ++cnt;
    for(int x = 1; x <= n; ++x)
        if(match[x] && match[x] < x) {
            sum += G[x][match[x]].w;
            ans.push_back({x, G[x][match[x]].y});
        }
    return {sum, cnt};
}

```

3-points-circle Środek okręgu przez 3 punkty

```
x = 0.5*((x2*x2*y3 + y2*y2*y3 - x1*x1*y3 + x1*x1*y2 - y1*y1*y3 + y1*y1*y2 + y1*x3*x3 + y1*y3*y3 - y1*x2*x2 - y1*y2*y2 - y2*x3*x3 - y2*y3*y3) / (y1*x3 - y1*x2 - y2*x3 - x3*x1 + y3*x2 + y2*x1));
y = 0.5*((-x1*x3*x3 - x1*x3*y3 + x1*x2*x2 + x1*y2*y2 + x2*x3*x3 + x2*y3*y3 - x2*x2*x3 - y2*y2*x3 + x1*x1*x3 - x1*x1*x2 + y1*y1*x3 - y1*y1*x2) / (y1*x3 - y1*x2 - y2*x3 - y3*x1 + y3*x2 + y2*x1));
```

advanced-complex includes: point Większość nie działa dla intów.

```
constexpr D pi = acosl(-1);
// nachylenie k-> y = kx + m
D slope(P a, P b) { return tan(arg(b - a)); }
// rzut p na ab
P project(P p, P a, P b) {
    return a + (b - a) * dot(p - a, b - a) / norm(a - b);
}
// odbicie p względem ab
P reflect(P p, P a, P b) {
    return a + conj((p - a) / (b - a)) * (b - a);
}
// obrót a względem p o theta radianów
P rotate(P a, P p, D theta) {
    return (a - p) * polar(1.0L, theta) + p;
}
// kat ABC, w radianach z przedziału [0..pi]
D angle(P a, P b, P c) {
    return abs(remainder(arg(a - b) - arg(c - b), 2.0 * pi));
}
// szybkie przeciecie prostych, nie działa dla rownoległych
P intersection(P a, P b, P p, P q) {
    D c1 = cross(p - a, b - a), c2 = cross(q - a, b - a);
    ;
    return (c1 * q - c2 * p) / (c1 - c2);
}
```

```
// check czy sa rownolegle
bool is_parallel(P a, P b, P p, P q) {
    P c = (a - b) / (p - q); return equal(c, conj(c));
}
// check czy sa prostopadle
bool is_perpendicular(P a, P b, P p, P q) {
    P c = (a - b) / (p - q); return equal(c, -conj(c));
}
```

```
// zwraca takie q, ze (p, q) jest rownolegle do (a, b)
P parallel(P a, P b, P p) {
    return p + a - b;
}
```

```
// zwraca takie q, ze (p, q) jest prostopadle do (a, b)
P perpendicular(P a, P b, P p) {
    return reflect(p, a, b);
}
```

```
// przeciecie srodkowych trojkata
P centro(P a, P b, P c) {
    return (a + b + c) / 3.0L;
```

angle-sort includes: point $\mathcal{O}(n \log n)$, zwraca wektory P posortowane kątowo zgodnie z ruchem wskazówek zegara od najbliższego kątowo do wektora (0, 1) włącznie. Aby posortować po argumentie (kącie) swapujemy x, y, używamy angle-sort i ponownie swapujemy x, y. Zakłada że nie ma punktu (0, 0) na wejściu.

```
vector<P> angle_sort(vector<P> t) {
    for(P p : t) assert(not equal(p, P(0, 0)));
    auto it = partition(t.begin(), t.end(), [](P a) {
        return P(0, 0) < a; });
    auto cmp = [&](P a, P b) {
        return sign(cross(a, b)) == -1;
    };
    sort(t.begin(), it, cmp);
```

```
sort(it, t.end(), cmp);
return t;
```

angle180-intervals includes: angle-sort $\mathcal{O}(n)$, ZAKŁADA że punkty są posortowane kątowo. Zwraca n par $[i, r]$, gdzie r jest maksymalnym cyklicznym indeksem, że wszystkie punkty w tym cyklicznym przedziale sąścią „po prawej” stronie wektora $(0, 0) - in[i]$, albo są na tej półprostej.

```
vector<pair<int, int>> angle180_intervals(vector<P> in) {
    // in must be sorted by angle
    int n = ssize(in);
    vector<int> nxt(n);
    iota(nxt.begin(), nxt.end(), 1);
    int r = nxt[n - 1] = 0;
    vector<pair<int, int>> ret(n);
    REP(l, n) {
        if(nxt[r] == l) r = nxt[r];
        auto good = [&](int i) {
            auto c = cross(in[l], in[i]);
            if(not equal(c, 0)) return c < 0;
            if((P(0, 0) < in[l]) != (P(0, 0) < in[i]))
                return false;
            return l < i;
        };
        while(nxt[r] != l and good(nxt[r]))
            r = nxt[r];
        ret[l] = {l, r};
    }
    return ret;
}
```

area includes: point Pole wielokąta, niekoniecznie wypukiego. W vectorze muszą być wierzchołki zgodnie z kierunkiem ruchu zegara. Jeśli D jest intem to może się psuć $\frac{1}{2} \cdot \text{area}(a, b, c)$ zwraca pole trójkąta o takich długościach boku.

```
D area(vector<P> pts) {
    int n = ssize(pts);
    D ans = 0;
    REP(i, n) ans += cross(pts[i], pts[(i + 1) % n]);
    return fabsl(ans / 2);
}
D area(D a, D b, D c) {
    D p = (a + b + c) / 2;
    return sqrtl(p * (p - a) * (p - b) * (p - c));
}
```

circle-intersection includes: point Przecięcia okręgu oraz prostej $ax + by + c = 0$ oraz przecięcia okręgu oraz okręgu. Gdy $\text{ssize(circle_circle(...))} = 3$ to jest nieskończoność wiele rozwiązań.

```
vector<P> circle_line(D r, D a, D b, D c) {
    D len_ab = a * a + b * b,
        x0 = -a * c / len_ab,
        y0 = -b * c / len_ab,
        d = r * r - c * c / len_ab,
        mult = sqrt(d / len_ab);
    if(sign(d) < 0)
        return {};
    else if(sign(d) == 0)
        return {{x0, y0}};
    return {
        {x0 + b * mult, y0 - a * mult},
        {x0 - b * mult, y0 + a * mult}
    };
}
vector<P> circle_line(D x, D y, D r, D a, D b, D c) {
    return circle_line(r, a, b, c + (a * x + b * y));
}
vector<P> circle_circle(D x1, D y1, D r1, D x2, D y2, D r2) {
    x2 -= x1;
    y2 -= y1;
    // now x1 = y1 = 0;
```

```
if(sign(x2) == 0 and sign(y2) == 0) {
    if(equal(r1, r2))
        return {{0, 0}, {0, 0}, {0, 0}}; // inf points
    else
        return {};
}
auto vec = circle_line(r1, -2 * x2, -2 * y2,
    x2 * x2 + y2 * y2 + r1 * r1 - r2 * r2);
for(P &p : vec)
    p += P(x1, y1);
return vec;
}
```

circle-tangents includes: point $\mathcal{O}(1)$, dla dwóch okręgów zwraca dwie styczne (wewnętrzne lub zewnętrzne, zależnie od wartości inner). Zwraca 1 + sign(dist(p0, p1) - inside ? r0 + r1 : abs(r0 - r1)) rozwiązań, albo 0 gdy p1 = p2. Działa gdy jakiś promień jest 0 – przydatne do policzenia stycznej punktu do okręgu.

```
vector<pair<P, P>> circle_tangents(P p1, D r1, P p2, D r2, bool inner) {
    if(inner) r2 *= -1;
    P d = p2 - p1;
    D dr = r1 - r2, d2 = dot(d, d), h2 = d2 - dr * dr;
    if(equal(dr, 0) or sign(h2) < 0)
        return {};
    vector<pair<P, P>> ret;
    for(D sign : {-1, 1}) {
        P v = (d * dr + P(-d.y(), d.x()) * sqrt(max(D(0),
            h2)) * sign) / d2;
        ret.emplace_back(p1 + v * r1, p2 + v * r2);
    }
    ret.resize(1 + (sign(h2) > 0));
    return ret;
}
```

closest-pair includes: point $\mathcal{O}(n \log n)$, zakłada ssize(in) > 1.

```
pair<P, P> closest_pair(vector<P> in) {
    set<P> s;
    sort(in.begin(), in.end(), [](P a, P b) { return a.y() < b.y(); });
    pair<D, pair<P, P>> ret(1e18, {P(), P()});
    int j = 0;
    for(P p : in) {
        P d(1 + sqrt(ret.first), 0);
        while(in[j].y() <= p.y() - d.x()) s.erase(in[j++]);
        auto lo = s.lower_bound(p - d), hi = s.upper_bound(p + d);
        for(; lo != hi; ++lo)
            ret = min(ret, {pow(dist(*lo, p), 2), {*lo, p}});
        s.insert(p);
    }
    return ret.second;
}
```

convex-gen includes: point, angle-sort, headers/gen Generatorka wielokątów wypukłych. Zwraca wielokąt z co najmniej $n - 3$ PROC punktami w zakresie $[-\text{range}, \text{range}]$. Jeśli n ($n > 2$) jest około $\text{range}^{\frac{2}{3}}$, to powinno chodzić $\mathcal{O}(n \log n)$. Dla większych n może nie dać rady. Ostatni punkt jest zawsze w $(0, 0)$ - można dodać przesunięcie o wektor dla pełnej losowości.

```
vector<int> num_split(int value, int n) {
    vector<int> v(n, value);
    REP(i, n - 1)
        v[i] = rd(0, value);
    sort(v.begin(), v.end());
    adjacent_difference(v.begin(), v.end(), v.begin());
    return v;
}
vector<int> capped_zero_split(int cap, int n) {
    int m = rd(1, n - 1);
    auto lf = num_split(cap, m);
    auto rg = num_split(cap, n - m);
```

```
for (int i : rg)
    lf.emplace_back(-i);
return lf;
}
vector<P> gen_convex_polygon(int n, int range, bool strictly_convex = false) {
    assert(n > 2);
    vector<P> t;
    const double PROC = 0.9;
    do {
        t.clear();
        auto dx = capped_zero_split(range, n);
        auto dy = capped_zero_split(range, n);
        shuffle(dx.begin(), dx.end(), rng);
        REP(i, n)
            if (dx[i] || dy[i])
                t.emplace_back(dx[i], dy[i]);
        t = angle_sort(t);
        if (strictly_convex) {
            vector<P> nt(1, t[0]);
            FOR(i, 1, ssize(t) - 1) {
                if (!sign(cross(t[i], nt.back())))
                    nt.back() += t[i];
                else
                    nt.emplace_back(t[i]);
            }
            while (!nt.empty() && !sign(cross(nt.back(), nt[0]))) {
                nt[0] += nt.back();
                nt.pop_back();
            }
            t = nt;
        }
    } while (ssize(t) < n * PROC);
    partial_sum(t.begin(), t.end(), t.begin());
    return t;
}
```

convex-hull-online $\mathcal{O}(\log n)$ na każdą operację dodania, Wyznacza górną otoczkę wypukłą online.

```
using P = pair<int, int>;
LL operator*(P l, P r) {
    return l.first * LL(r.second) - l.second * LL(r.first);
}
P operator-(P l, P r) {
    return {l.first - r.first, l.second - r.second};
}
int sign(LL x) {
    return x > 0 ? 1 : x < 0 ? -1 : 0;
}
int dir(P a, P b, P c) {
    return sign((b - a) * (c - b));
}
struct UpperConvexHull {
    set<P> hull;
    void add_point(P p) {
        if(hull.empty()) {
            hull = {p};
            return;
        }
        auto it = hull.lower_bound(p);
        if(hull.begin() < p and p < *prev(hull.end())) {
            assert(it != hull.end() and it != hull.begin());
            if(dir(*prev(it), p, *it) >= 0)
                return;
        }
        it = hull.emplace(p).first;
        auto have_to_rm = [&](auto iter) {
            if(iter == hull.end() or next(iter) == hull.end())
                () or iter == hull.begin()
            return false;
        }
        return dir(*prev(iter), *iter, *next(iter)) >= 0;
    }
    while(have_to_rm(next(it)))
```

```

it = prev(hull.erase(next(it)));
while(it != hull.begin() and have_to_rm(prev(it)))
    it = hull.erase(prev(it));
}

convex-hull includes: point  $\mathcal{O}(n \log n)$ , top_bot_hull
zwraca osobno górną i dół, hull zwraca punkty na otocze clockwise gdzie
pierwszy jest najbardziej lewy.

array<vector<P>, 2> top_bot_hull(vector<P> in) {
    sort(in.begin(), in.end());
    array<vector<P>, 2> ret;
    REP(d, 2) {
        for(auto p : in) {
            while(ssize(ret[d]) > 1 and dir(ret[d].end()[-2], ret[d].back(), p) >= 0)
                ret[d].pop_back();
            ret[d].emplace_back(p);
        }
        reverse(in.begin(), in.end());
    }
    return ret;
}

vector<P> hull(vector<P> in) {
    if(ssize(in) <= 1) return in;
    auto ret = top_bot_hull(in);
    REP(d, 2) ret[d].pop_back();
    ret[0].insert(ret[0].end(), ret[1].begin(), ret[1].end());
    return ret[0];
}

```

delaunay-triangulation $\mathcal{O}(n \log n)$, zwraca zbiór trójkątów sumujący się do otoczkę wypukłej, gdzie każdy trójkąt nie zawiera żadnego innego punktu wewnątrz okręgu opisanego (czyli maksymalizuje minimalny kąt trójkątów). Zakłada brak identycznych punktów. W przypadku współliniowości wszystkich punktów zwraca pusty vector. Zwraca vector rozmiaru 3X, gdzie wartości 3i, 3i+1, 3i+2 tworzą counter-clockwise trójkąt. Wśród sąsiadów zawsze jest najbliższy wierzchołek. Euclidean min. spanning tree to podzbiór krawędzi.

```

using PI = pair<int, int>;
typedef struct Quad* Q;
PI distinct(INT_MAX, INT_MAX);
LL dist2(PI p) {
    return p.first * LL(p.first)
        + p.second * LL(p.second);
}
LL operator*(PI a, PI b) {
    return a.first * LL(b.second)
        - a.second * LL(b.first);
}
PI operator-(PI a, PI b) {
    return {a.first - b.first,
        a.second - b.second};
}
LL cross(PI a, PI b, PI c) { return (a - b) * (b - c); }

struct Quad {
    Q rot, o = nullptr;
    PI p = distinct;
    bool mark = false;
    Quad(Q _rot) : rot(_rot) {}
    PI& F() { return r()>p; }
    Q& r() { return rot->rot; }
    Q prev() { return rot->o->rot; }
    Q next() { return r()>prev(); }
} __attribute__((__aligned__(16)));
// it's safe to use in multithreads
vector<Q> to_dealloc;
bool is_p_inside_circle(PI p, PI a, PI b, PI c) {
    __int128_t p2 = dist2(p), A = dist2(a)-p2,
    B = dist2(b)-p2, C = dist2(c)-p2;
    return cross(p,a)*B + cross(p,b,c)*A + cross(p,c,a)*B > 0;
}

```

convex-hull delaunay-triangulation furthest-pair geo3d

```

Q makeEdge(PI orig, PI dest) {
    Q r = H;
    if (r) {
        r = new Quad(new Quad(new Quad(new Quad(0))));
        Q del = r;
        REP(i, 4) {
            to_dealloc.emplace_back(del);
            del = del->rot;
        }
        H = r->o; r->r()->r() = r;
        REP(i, 4) {
            r = r->rot, r->p = distinct;
            r->o = i & 1 ? r : r->r();
        }
        r->p = orig; r->F() = dest;
        return r;
    }
    void splice(Q a, Q b) {
        swap(a->o->rot->o, b->o->rot->o);
        swap(a->o, b->o);
    }
    Q connect(Q a, Q b) {
        Q q = makeEdge(a->F(), b->p);
        splice(q, a->next());
        splice(q->r(), b);
        return q;
    }
    pair<Q, Q> rec(const vector<PI>& s) {
        if (ssize(s) <= 3) {
            Q a = makeEdge(s[0], s[1]);
            Q b = makeEdge(s[1], s.back());
            if (ssize(s) == 2) return {a, a->r()};
            splice(a->r(), b);
            auto side = cross(s[0], s[1], s[2]);
            Q c = side ? connect(b, a) : 0;
            return {side < 0 ? c->r() : a,
                    side < 0 ? c : b->r()};
        }
        auto valid = [&](Q e, Q base) {
            return cross(e->F(), base->F(), base->p) > 0;
        };
        int half = ssize(s) / 2;
        auto [ra, A] = rec({s.begin(), s.end() - half});
        auto [rb, rb] = rec({s.size() - half + s.begin(), s.end()});
        while ((cross(B->p, A->F(), A->p) < 0
                and (A = A->next()))
               or (cross(A->p, B->F(), B->p) > 0
                   and (B = B->r()>o))) {}
        Q base = connect(B->r(), A);
        if (A->p == ra->p) ra = base->r();
        if (B->p == rb->p) rb = base;
        auto del = [&](Q init, function<Q(Q)> dir) {
            Q e = dir(init);
            if (valid(e, base))
                while (is_p_inside_circle(dir(e)->F(), base->F(),
                                           base->p, e->F())) {
                    Q t = dir(e);
                    splice(e, e->prev());
                    splice(e->r(), e->r()->prev());
                    e->o = H; H = e; e = t;
                }
            return e;
        };
        while(true) {
            Q LC = del(base->r()), [&](Q q) { return q->o; };
            Q RC = del(base, [&](Q q) { return q->prev(); });
            if (!valid(LC, base) and !valid(RC, base)) break;
            if (!valid(LC, base) or (valid(RC, base)
                                    and is_p_inside_circle(RC->F(), RC->p, LC->F(),
                                                               LC->p)))
                base = connect(RC, base->r());
            else
                base = connect(base->r(), LC->r());
        }
        return {ra, rb};
    }
}

```

```

Point &operator[](int a) { return p[a]; }
};

struct P3 {
    LD x, y, z;
    P3 operator+(P3 a) { P3 p{x + a.x, y + a.y, z + a.z}; return p; }
    P3 operator-(P3 a) { P3 p{x - a.x, y - a.y, z - a.z}; return p; }
    P3 operator*(LD a) { P3 p{x * a, y * a, z * a}; return p; }
    P3 operator/(LD a) { assert(a > kEps); P3 p{x / a, y / a, z / a}; return p; }
    P3 &operator+=(P3 a) { x += a.x; y += a.y; z += a.z; return *this; }
    P3 &operator-=(P3 a) { x -= a.x; y -= a.y; z -= a.z; return *this; }
    P3 &operator*=(LD a) { x *= a; y *= a; z *= a; return *this; }
    P3 &operator/=(LD a) { assert(a > kEps); x /= a; y /= a; z /= a; return *this; }
    LD &operator[](int a) {
        if (a == 0) return x;
        if (a == 1) return y;
        return z;
    }
    bool IsZero() { return abs(x) < kEps && abs(y) < kEps && abs(z) < kEps; }
    LD DotProd(P3 a) { return x * a.x + y * a.y + z * a.z; }
    LD Norm() { return sqrt(x * x + y * y + z * z); }
    LD SqNorm() { return x * x + y * y + z * z; }
    void NormalizeSelf() { *this /= Norm(); }
    P3 Normalize() {
        P3 res(*this); res.NormalizeSelf();
        return res;
    }
    LD Dis(P3 a) { return (*this - a).Norm(); }
    pair<LD, LD> SphericalAngles() {
        return {atan2(z, sqrt(x * x + y * y)), atan2(y, x)};
    }
    LD Area(P3 p) { return Norm() * p.Norm() * sin(Angle(p)) / 2; }
    LD Angle(P3 p) {
        LD a = Norm();
        LD b = p.Norm();
        LD c = Dis(p);
        return acos((a * a + b * b - c * c) / (2 * a * b));
    }
    LD Angle(P3 p, P3 q) { return p.Angle(q); }
    P3 CrossProd(P3 p) {
        P3 q(*this);
        return {q[1] * p[2] - q[2] * p[1], q[2] * p[0] - q[0] * p[2],
                q[0] * p[1] - q[1] * p[0]};
    }
    bool LexCmp(P3 &a, const P3 &b) {
        if (abs(a.x - b.x) > kEps) return a.x < b.x;
        if (abs(a.y - b.y) > kEps) return a.y < b.y;
        return a.z < b.z;
    }
    struct Line3 {
        P3 p[2];
        P3 &operator[](int a) { return p[a]; }
        friend ostream &operator<<(ostream &out, Line3 m);
    };
    struct Plane {
        P3 p[3];
        P3 &operator[](int a) { return p[a]; }
        P3 GetNormal() {
            P3 cross = (p[1] - p[0]).CrossProd(p[2] - p[0]);
            return cross.Normalize();
        }
        void GetPlaneEq(LD &A, LD &B, LD &C, LD &D) {
            P3 normal = GetNormal();

```

```

A = normal[0];
B = normal[1];
C = normal[2];
D = normal.DotProd(p[0]);
assert(abs(D - normal.DotProd(p[1])) < kEps);
assert(abs(D - normal.DotProd(p[2])) < kEps);
}
vector<P3> GetOrthonormalBase() {
    P3 normal = GetNormal();
    P3 cand = {-normal.y, normal.x, 0};
    if (abs(cand.x) < kEps && abs(cand.y) < kEps) {
        cand = {0, -normal.z, normal.y};
    }
    cand.NormalizeSelf();
    P3 third = Plane{P3{0, 0, 0}, normal, cand}.GetNormal();
    assert(abs(normal.DotProd(cand)) < kEps &&
           abs(normal.DotProd(third)) < kEps &&
           abs(cand.DotProd(third)) < kEps);
    return {normal, cand, third};
}
struct Circle3 {
    Plane pl; P3 o; LD r;
};
struct Sphere {
    P3 o;
    LD r;
};
// angle PQR
LD Angle(P3 P, P3 Q, P3 R) { return (P - Q).Angle(R - Q); }
P3 ProjPtToLine3(P3 p, Line3 l) { // ok
    P3 diff = l[1] - l[0];
    diff.NormalizeSelf();
    return l[0] + diff * (p - l[0]).DotProd(diff);
}
LD DisPtLine3(P3 p, Line3 l) { // ok
    // LD area = Area(p, l[0], l[1]); LD dis1 = 2 * area / l[0].Dis([1]);
    LD dis2 = p.Dis(ProjPtToLine3(p, l)); // assert(abs(dis1 - dis2) < kEps);
    return dis2;
}
LD DisPtPlane(P3 p, Plane pl) {
    P3 normal = pl.GetNormal();
    return abs(normal.DotProd(p - pl[0]));
}
P3 ProjPtToPlane(P3 p, Plane pl) {
    P3 normal = pl.GetNormal();
    return p - normal * normal.DotProd(p - pl[0]);
}
bool PtBelongToLine3(P3 p, Line3 l) { return
    DisPtLine3(p, l) < kEps; }
bool Lines3Equal(Line3 p, Line3 l) {
    return PtBelongToLine3(p[0], l) && PtBelongToLine3(p[1], l);
}
bool PtBelongToPlane(P3 p, Plane pl) { return
    DisPtPlane(p, pl) < kEps; }
Point PlanePtTo2D(Plane pl, P3 p) { // ok
    assert(PtBelongToPlane(p, pl));
    vector<P3> base = pl.GetOrthonormalBase();
    P3 control{0, 0, 0};
    REP(tr, 3) { control += base[tr] * p.DotProd(base[tr]); }
    assert(PtBelongToPlane(pl[0] + base[1], pl));
    assert(PtBelongToPlane(pl[0] + base[2], pl));
    assert((p - control).IsZero());
    return {p.DotProd(base[1]), p.DotProd(base[2])};
}
Line PlaneLineTo2D(Plane pl, Line3 l) {
    return {PlanePtTo2D(pl, l[0]), PlanePtTo2D(pl, l[1])};
}
P3 PlanePtTo3D(Plane pl, Point p) { // ok
    vector<P3> base = pl.GetOrthonormalBase();
    return base[0] * base[0].DotProd(pl[0]) + base[1] *
           p.x + base[2] * p.y;
}
Line3 PlaneLineTo3D(Plane pl, Line l) {
    return {PlanePtTo3D(pl, l[0]), PlanePtTo3D(pl, l[1])};
}
Line3 ProjLineToPlane(Line3 l, Plane pl) { // ok
    return {ProjPtToPlane(l[0], pl), ProjPtToPlane(l[1], pl)};
}
bool Line3BelongToPlane(Line3 l, Plane pl) {
    return PtBelongToPlane(l[0], pl) && PtBelongToPlane(
        l[1], pl);
}
LD Det(P3 a, P3 b, P3 d) { // ok
    P3 pts[3] = {a, b, d};
    LD res = 0;
    for (int sign : {-1, 1}) {
        REP(st_col, 3) {
            int c = st_col;
            LD prod = 1;
            REP(r, 3) {
                prod *= pts[r][c];
                c = (c + sign + 3) % 3;
            }
            res += sign * prod;
        }
    }
    return res;
}
LD Area(P3 p, P3 q, P3 r) {
    q -= p; r -= p;
    return q.Area(r);
}
vector<Point> InterLineLine(Line a, Line b) { //
    working fine
    Point vec_a = a[1] - a[0];
    Point vec_b1 = b[1] - a[0];
    Point vec_b0 = b[0] - a[0];
    LD tr_area = vec_b1.CrossProd(vec_b0);
    LD quad_area = vec_b1.CrossProd(vec_a) + vec_a.
        CrossProd(vec_b0);
    if (abs(quad_area) < kEps) { // parallel or
        coinciding
        if (abs(b[0].CrossProd(b[1], a[0])) < kEps) {
            return {a[0], a[1]};
        } else return {};
    }
    return {a[0] + vec_a * (tr_area / quad_area)};
}
vector<P3> InterLineLine(Line3 k, Line3 l) {
    if (Lines3Equal(k, l)) return {k[0], k[1]};
    if (PtBelongToLine3(l[0], k)) return {l[0]};
    Plane pl{l[0], k[0], k[1]};
    if (!PtBelongToPlane(l[1], pl)) return {};
    Line k2 = PlaneLineTo2D(pl, k);
    Line l2 = PlaneLineTo2D(pl, l);
    vector<Point> inter = InterLineLine(k2, l2);
    vector<P3> res;
    for (auto P : inter) res.push_back(PlanePtTo3D(pl, P));
    return res;
}
LD DisLineLine(Line3 l, Line3 k) { // ok
    Plane together{l[0], l[1], l[0] + k[1] - k[0]}; //
    parallel FIXME
    Line3 proj = ProjLineToPlane(k, together);
    P3 inter = (InterLineLine(l, proj))[0];
    P3 on_k_inter = k[0] + inter - proj[0];
    return inter.Dis(on_k_inter);
}
Plane ParallelPlane(Plane pl, P3 A) { // plane
    parallel to pl going through A
    LD diff = A - ProjPtToPlane(A, pl);
    return {pl[0] + diff, pl[1] + diff, pl[2] + diff};
}

```

halfplane-intersection

}

halfplane-intersection

includes: point $\mathcal{O}(n \log n)$ wyznaczanie punktów na brzegu/otocze przecięcia podanych półpłaszczyzn. Halfplane(a, b) tworzy półpłaszczyznę wzdłuż prostej $a - b$ z obszarem po lewej stronie wektora $a - b$. Jeżeli zostało zwróconych mniej, niż trzy punkty, to pole przecięcia jest puste. Na przykład halfplane_intersection([Halfplane(P(2, 1), P(4, 2)), Halfplane(P(6, 3), P(2, 4)), Halfplane(P(-4, 7), P(4, 2))) == [{4, 2}, (6, 3), (0, 4.5)]. Pole przecięcia jest zawsze ograniczone, ponieważ w kodzie są dodawane cztery półpłaszczyzny o wspólnych w/+-inf, ale nie należy na tym polegać przez eps oraz blędę precyzyjną (najlepiej jest zmniejszyć inf tyle, ile się da).

```

struct Halfplane {
    P p, pq;
    D angle;
    Halfplane() {}
    Halfplane(P a, P b) : p(a), pq(b - a) {
        angle = atan2l(pq.imag(), pq.real());
    }
    ostream& operator<<(ostream& h, Halfplane h) {
        return o << '(' << h.p << ", " << h.pq << ", " << h.
            angle << ')';
    }
    bool is_outside(Halfplane hi, P p) {
        return sign(cross(hi.pq, p - hi.p)) == -1;
    }
    P inter(Halfplane s, Halfplane t) {
        D alpha = cross(t.p - s.p, t.pq) / cross(s.pq, t.pq)
        ;
        return s.p + s.pq * alpha;
    }
    vector<P> halfplane_intersection(vector<Halfplane> h)
    {
        for(int i = 0; i < 4; ++i) {
            constexpr D inf = 1e9;
            array box = {{P(-inf, -inf), P(inf, -inf)}, P(inf,
                inf), P(-inf, inf)};;
            h.emplace_back(box[i], box[(i + 1) % 4]);
        }
        sort(h.begin(), h.end(), [&](Halfplane l, Halfplane
            r) {
            return l.angle < r.angle;
        });
        deque<Halfplane> dq;
        for(auto &hi : h) {
            while(ssize(dq) >= 2 and is_outside(hi, inter(dq.
                end()[-1], dq.end()[-2])))
                dq.pop_back();
            while(ssize(dq) >= 2 and is_outside(hi, inter(dq
                [0], dq[1])))
                dq.pop_front();
            if(ssize(dq) and sign(cross(hi.pq, dq.back().pq))
                == 0) {
                if(sign(dot(hi.pq, dq.back().pq)) < 0)
                    return {};
                if(is_outside(hi, dq.back().p))
                    dq.pop_back();
                else
                    continue;
            }
            dq.emplace_back(hi);
        }
        while(ssize(dq) >= 3 and is_outside(dq[0], inter(dq.
            end()[-1], dq.end()[-2])))
            dq.pop_back();
        while(ssize(dq) >= 3 and is_outside(dq.end()[-1],
            inter(dq[0], dq[1])))
            dq.pop_front();
        vector<P> ret;
        REP(i, ssize(dq))
            ret.emplace_back(inter(dq[i], dq[(i + 1) % ssize(
                dq)]));
        ret.erase(unique(ret.begin(), ret.end(), [&](P l, P
            r) { return equal(l, r); }), ret.end());
    }
}
```

```

if(ssize(ret) >= 2 and equal(ret.front(), ret.back()))
    ret.pop_back();
for(Halfplane hi : h)
    if(ssize(ret) <= 2 and is_outside(hi, ret[0]))
        return {};
return ret;
}

```

intersect-lines includes: point $\mathcal{O}(1)$ ale intersect_segments ma sporą stałą (ale działa na wszystkich edge-case'ach). Jeżeli intersect_segments zwróci dwa punkty to wszystkie inf rozwiązań są pomiędzy.

```

P intersect_lines(P a, P b, P c, P d) {
    D c1 = cross(c - a, b - a), c2 = cross(d - a, b - a)
    ;
    // c1 == c2 => równolegle
    return (c1 * d - c2 * c) / (c1 - c2);
}

```

```

bool on_segment(P a, P b, P p) {
    return equal(cross(a - p, b - p), 0) and sign(dot(a - p, b - p)) <= 0;
}
bool is_intersection_segment(P a, P b, P c, P d) {
    auto aux = [&] (D q, D w, D e, D r) {
        return sign(max(q, w) - min(e, r)) >= 0;
    };
    return aux(c.x(), d.x(), a.x(), b.x()) and aux(a.x(), b.x(), c.x(), d.x())
        and aux(c.y(), d.y(), a.y(), b.y()) and aux(a.y(), b.y(), c.y(), d.y())
        and dir(a, d, c) * dir(b, d, c) != 1
        and dir(d, b, a) * dir(c, b, a) != 1;
}

```

```

vector<P> intersect_segments(P a, P b, P c, P d) {
    D acd = cross(c - a, d - c), bcd = cross(c - b, d - c),
    cab = cross(a - c, b - a), dab = cross(a - d, b - a);
    if(sign(acd) * sign(bcd) < 0 and sign(cab) * sign(dab) < 0)
        return {(a * bcd - b * acd) / (bcd - acd)};
    set<P> s;
    if(on_segment(c, d, a)) s.emplace(a);
    if(on_segment(c, d, b)) s.emplace(b);
    if(on_segment(a, b, c)) s.emplace(c);
    if(on_segment(a, b, d)) s.emplace(d);
    return {s.begin(), s.end()};
}

```

is-in-hull includes: intersect-lines $\mathcal{O}(\log n)$, zwraca czy punkt jest wewnętrz otoczką h. Zakłada że punkty są clockwise oraz nie ma trzech wspólniowych (działa na convex-hull).

```

bool is_in_hull(vector<P> h, P p, bool can_on_edge) {
    if(ssize(h) < 3) return can_on_edge and on_segment(h[0], h.back(), p);
    int l = 1, r = ssize(h) - 1;
    if(dir(h[0], h[l], p) >= can_on_edge or dir(h[0], h[r], p) <= -can_on_edge)
        return false;
    while(r - l > 1) {
        int m = (l + r) / 2;
        (dir(h[0], h[m], p) < 0 ? l : r) = m;
    }
    return dir(h[l], h[r], p) < can_on_edge;
}

```

line includes: point Konwersja różnych postaci prostej.

```

struct Line {
    D A, B, C;
    // postać ogólna Ax + By + C = 0
    Line(D a, D b, D c) : A(a), B(b), C(c) {}
    tuple<D, D> get_tuple() { return {A, B, C}; }
    // postać kierunkowa ax + b = y
}

```

intersect-lines is-in-hull line point polygon-gen polygon-print voronoi-diagram aho-corasick

```

Line(D a, D b) : A(a), B(-1), C(b) {}
pair<D, D> get_dir() { return {-A / B, -C / B}; }
// prostą pq
Line(P p, P q) {
    assert(not equal(p, q));
    if(not equal(p.x(), q.x())) {
        A = (q.y() - p.y()) / (p.x() - q.x());
        B = 1, C = -(A * p.x() + B * p.y());
    }
    else A = 1, B = 0, C = -p.x();
}
pair<P, P> get_pts() {
    if(!equal(B, 0)) return {P(0, -C / B), P(1, -(A + C) / B)};
    return {P(-C / A, 0), P(-C / A, 1)};
}
D directed_dist(P p) {
    return (A * p.x() + B * p.y() + C) / sqrt(A * A + B * B);
}
D dist(P p) {
    return abs(directed_dist(p));
}
};


```

point Wrapper na std::complex, definiuje trzeba dać nad bitsami, wtedy istnieje p.x() oraz p.y(). abs długość, arg kąt $(-\pi, \pi]$ gdzie $(0, 1)$ daje $\frac{\pi}{2}$, polar(len, angle) tworzy P. Istnieją atan2, asin, sinh.

```

// Before include bits:
// #define real x
// #define imag y
using D = long double;
using P = complex<D>;
constexpr D eps = 1e-9;
bool equal(D a, D b) { return abs(a - b) < eps; }
bool equal(P a, P b) { return equal(a.x(), b.x()) and equal(a.y(), b.y()); }
int sign(D a) { return equal(a, 0) ? 0 : a > 0 ? 1 : -1; }
namespace std { bool operator<(P a, P b) { return sign(a.x() - b.x()) == 0 ? sign(a.y() - b.y()) < 0 : a.x() < b.x(); } }
// cross({1, 0}, {0, 1}) = 1
D cross(P a, P b) { return a.x() * b.y() - a.y() * b.x(); }
D dot(P a, P b) { return a.x() * b.x() + a.y() * b.y(); }
D dist(P a, P b) { return abs(a - b); }
int dir(P a, P b, P c) { return sign(cross(b - a, c - b)); }

```

Polygon-gen includes: point, intersect-lines, headers/gen Generatorka wielokątów niekoniecznie-wypukłych. Zwraca wielokąt o n punktach w zakresie $[-r, r]$, który nie zawiera jakiegokolwiek trójkąt wspólniowych punktów. Ciągnie do ~80. Dla $n < 3$ zwraca zdegenerowane.

```

vector<P> gen_polygon(int n, int r) {
    vector<P> t;
    while(ssize(t) < n) {
        P p(rd(-r, r), rd(-r, r));
        if([&] () {
            REP(i, ssize(t))
            REP(j, i)
                if(dir(t[i], t[j], p) == 0)
                    return false;
            return find(t.begin(), t.end(), p) == t.end();
        }())
            t.emplace_back(p);
    }
    bool go = true;
    while(go) {
        go = false;
        REP(i, n)
            REP(j, i - 1)

```

```

        if((i + 1) % n != j && ssize(intersect_segments(t[i], t[(i + 1) % n], t[j], t[j + 1]))) {
            swap(t[(i + rd(0, 1)) % n], t[(j + rd(0, 1)) % n]);
            go = true;
        }
    }
    return t;
}

```

Polygon-print includes: point Należy przekierować stdout do pliku i utworzyć go np. w przeglądarce. zmniejsza obrazek, d zmniejsza rozmiar napisów/wierzchołków.

```

void polygon_print(vector<P> v, int r = 10) {
    int m = 350 / r, d = 50;
    auto ori = v;
    for(auto &p : v)
        p = P((p.x() + r * 1.1) * m, (p.y() + r * 1.1) * m);
    r = int(r * m * 2.5);
    printf("<svg height='%d' width='%d'><rect width='100%' height='100%' fill='white' />", r, r);
    int n = ssize(v);
    REP(i, n) {
        printf("<line x1='%Lf' y1='%Lf' x2='%Lf' y2='%Lf' style='stroke:black' />", v[i].x(), v[i].y(), v[(i + 1) % n].x(), v[(i + 1) % n].y());
        printf("<circle cx='%Lf' cy='%Lf' r='%f' fill='red' />", v[i].x(), v[i].y(), r / d / 10.0);
        printf("<text x='%Lf' y='%Lf' font-size='%d' fill='violet'%s(%f, %f, %f)</text>", v[i].x() + 5, v[i].y() - 5, r / d, i + 1, ori[i].x(), ori[i].y()));
    }
    printf("</svg>\n");
}

```

Voronoi-diagram includes: delaunay-triangulatio, convex-hull $\mathcal{O}(\log n)$, dla każdego punktu zwraca odpowiadającą mu ścianę będącą otoczką wypukłą. Suma otoczek w całości zawsze kwadrat $(-mx, mx) - (mx, mx)$, ale może zawsze więcej. Współrzędne ścian mogą być kilka rządów wielkości większe niż te na wejściu. Max abs wartości współrzędnych to 3e8.

```

using Frac = pair<__int128_t, __int128_t>;
D to_d(Frac f) { return D(f.first) / D(f.second); }
Frac create_frac(__int128_t a, __int128_t b) {
    assert(b != 0);
    if(b < 0) a *= -1, b *= -1;
    __int128_t d = __gcd(a, b);
    return {a / d, b / d};
}
using P128 = pair<Frac, Frac>;
LL sq(int x) { return x * LL(x); }
__int128_t dist128(P128 PI) { return sq(PI.first) + sq(PI.second); }
pair<Frac, Frac> calc_mid(P128 PI, P128 PI b, P128 PI c) {
    __int128_t ux = dist128(a) * (b.second - c.second)
        + dist128(b) * (c.second - a.second)
        + dist128(c) * (a.second - b.second),
    uy = dist128(a) * (c.first - b.first)
        + dist128(b) * (a.first - c.first)
        + dist128(c) * (b.first - a.first),
    d = 2 * (a.first * LL(b.second - c.second)
        + b.first * LL(c.second - a.second)
        + c.first * LL(a.second - b.second));
    return {create_frac(ux, d), create_frac(uy, d)};
}
vector<vector<P>> voronoi_faces(vector<P128> in, const
    int max_xy = int(3e8));
    int n = ssize(in);
    map<P128, int> id_of_in;
    REP(i, n)

```

```

        id_of_in[in[i]] = i;
        for(int sx : {-1, 1})
            for(int sy : {-1, 1}) {
                int mx = 3 * max_xy + 100;
                in.emplace_back(mx * sx, mx * sy);
            }
        vector<P128> triangles = triangulate(in);
        debug(triangles);
        assert(not triangles.empty());
        int tn = ssize(triangles) / 3;
        vector<P128> mids(tn);
        map<P128, P128>, vector<P128> on_sides;
        REP(i, tn) {
            array<P128, 3> ps = {triangles[3 * i], triangles[3 * i + 1], triangles[3 * i + 2]};
            mids[i] = calc_mid(ps[0], ps[1], ps[2]);
            REP(j, 3) {
                P128 a = ps[j], b = ps[(j + 1) % 3];
                on_sides[pair(min(a, b), max(a, b))].emplace_back(mids[i]);
            }
        }
        vector<vector<P128>> faces128(n);
        for(auto [edge, sides] : on_sides)
            if(ssize(sides) == 2)
                for(P128 e : {edge.first, edge.second})
                    if(id_of_in.find(e) != id_of_in.end())
                        for(auto m : sides)
                            faces128[id_of_in[e]].emplace_back(m);
        vector<vector<P>> faces(n);
        REP(i, ssize(faces128)) {
            auto &f = faces128[i];
            sort(f.begin(), f.end());
            f.erase(unique(f.begin(), f.end()), f.end());
            for(auto [x, y] : f)
                faces[i].emplace_back(to_d(x), to_d(y));
            faces[i] = hull(faces[i]);
        }
        return faces;
    }

```

Tekstówki (8)

Aho-corasick $\mathcal{O}(|s|\alpha)$, Konstruktor tworzy sam korzeń w node[0], add(s) dodaje słowo, convert() zamienia nieodwracalne trie w automat Aho-Corasick, link(x) zwraca sufflink, go(x, c) zwraca następnią x przez literę c, najpierw dodajemy słowa, potem robimy convert(), a na koniec używamy go/link.

```

constexpr int alpha = 26;
struct AhoCorasick {
    struct Node {
        array<int, alpha> next, go;
        int p, pch, link = -1;
        bool is_word_end = false;
        Node(int _p = -1, int ch = -1) : p(_p), pch(ch) {
            fill(next.begin(), next.end(), -1);
            fill(go.begin(), go.end(), -1);
        }
        vector<Node> node;
        bool converted = false;
        AhoCorasick() : node(1) {}
        void add(const vector<int> &s) {
            assert(!converted);
            int v = 0;
            for(int c : s) {
                if(node[v].next[c] == -1) {
                    node[v].next[c] = ssiz(node);
                    node.emplace_back(v, c);
                }
                v = node[v].next[c];
            }
            node[v].is_word_end = true;
        }
        int link(int v) {
            assert(converted);
        }
    }
}

```

```

    return node[v].link;
}
int go(int v, int c) {
    assert(converted);
    return node[v].go[c];
}
void convert() {
    assert(!converted);
    converted = true;
    deque<int> que = {0};
    while (!que.empty()) {
        int v = que.front();
        que.pop_front();
        if (v == 0 || node[v].p == 0)
            node[v].link = 0;
        else
            node[v].link = go(link(node[v].p), node[v].pch);
    REP(c, alpha) {
        if (node[v].next[c] != -1) {
            node[v].go[c] = node[v].next[c];
            que.emplace_back(node[v].next[c]);
        } else
            node[v].go[c] = v == 0 ? 0 : go(link(v), c);
    }
}
}

```

eertree $\mathcal{O}(n\alpha)$ konstrukcja, $\mathcal{O}(n)$ DP oraz odzyskanie. Eertree ma korzeń „pusty” w 0 oraz „ujemny” w 1. Z wierzchołka wychodzą krawędź z literą, gdy jego słowo można otoczyć z obu stron tą literą. Funkcja add_letter zwraca wierzchołek odpowiadający za największy palindromiczny suffix aktualnego słowa. Suffix link prowadzi do najbliższego palindromicznego suffixu słowa wierzchołka. Linki tworzą drzewo z 1 jako korzeń (który ma syna 0). Żeby policzyć liczbę wystąpień wierzchołka, po każdym dodaniu litery „wystarczy” dodać +1 każdemu naścieci od last do korzenia po linkach. `palindromic_split_dp` zwraca na każdym prefiksie (min podział palindromiczny, indeks do odzyskania min podziału, liczbę podziałów). Gdy `only_even_lens` to może nie istnieć odpowiedź, wtedy `.mn == n + 1, .cnt == 0`.

`construct_min_palindromic_split` zwraca palindromiczne przedziały pokrywające słowo.

```

constexpr int alpha = 26;
struct Eertree {
    vector<array<int, alpha>> edge;
    array<int, alpha> empty;
    vector<int> str = {-1}, link = {1, 0}, len = {0, -1};
    int last = 0;
    Eertree() {
        empty.fill(0);
        edge.resize(2, empty);
    }
    int find(int v) {
        while(str.end()[-1] != str.end()[-len[v] - 2])
            v = link[v];
        return v;
    }
    int add_letter(int c) {
        str.emplace_back(c);
        last = find(last);
        if(edge[last][c] == 0) {
            edge.emplace_back(empty);
            link.emplace_back(len[last] + 2);
            link.emplace_back(edge[find(link[last])][c]);
            edge[last][c] = str.size(edge) - 1;
        }
        return last = edge[last][c];
    }
    int add(int a, int b) { return a + b; } // TODO
    modulo zjeeli trzeba.
    struct Dp { int mn, mn_i, cnt; };
    Dp operator+(Dp l, Dp r) {

```

eertree hashing kmp lyndon-min-cyclic-rot manacher pref squares suffix-array-interval

```

    return {min(l.mn, r.mn), l.mn < r.mn ? l.mn_i : r.mn_i, add(l.cnt, r.cnt)};
}
vector<Dp> palindromic_split_dp(vector<int> str, bool only_even_lens = false) {
    int n = str.size();
    Eertree t;
    vector<int> big_link(2), diff(2);
    vector<Dp> series_ans(2), ans(n, {n + 1, -1, 0});
    REP(i, n) {
        int last = t.add_letter(str[i]);
        if(last >= str.size(big_link)) {
            diff.emplace_back(t.len.back() - t.len[t.link.back()]);
            big_link.emplace_back(diff.back() == diff[t.link.back()] ? big_link[t.link.back()] : t.link.back());
            series_ans.emplace_back();
        }
        for(int v = last; t.len[v] > 0; v = big_link[v]) {
            int j = i - t.len[big_link[v]] - diff[v];
            series_ans[v] = j == -1 ? Dp{0, j, 1} : Dp{ans[j].mn, j, ans[j].cnt};
            if(diff[v] == diff[t.link[v]])
                series_ans[v] = series_ans[v] + series_ans[t.link[v]];
            if(i % 2 == 1 || !only_even_lens)
                ans[i] = ans[i] + Dp{series_ans[v].mn + 1, series_ans[v].mn_i, series_ans[v].cnt};
        }
    }
    return ans;
}
vector<pair<int, int>> construct_min_palindromic_split(vector<Dp> ans) {
    if(ans.back().mn == str.size(ans) + 1)
        return {};
    vector<pair<int, int>> split = {{0, str.size(ans) - 1}};
    while(ans[split.back().second].mn_i != -1)
        split.emplace_back(0, ans[split.back().second].mn_i);
    reverse(split.begin(), split.end());
    REP(i, str.size(split) - 1)
        split[i + 1].first = split[i].second + 1;
    return split;
}

```

hashing Hashowanie z małą stałą. Można zmienić bazę (jeśli serio trzeba). openssl prime-generate -bits 60 generuje losową liczbę pierwszą o 60 bitach ($\leq 1.15 \cdot 10^{18}$).

```

struct Hashing {
    vector<LL> ha, pw;
    static constexpr LL mod = (1ll << 61) - 1;
    LL reduce(LL x) { return x >= mod ? x - mod : x; }
    LL mul(LL a, LL b) {
        const auto c = __int128(a) * b;
        return reduce(LL(c & mod) + LL(c >> 61));
    }
    Hashing(const vector<int> &str, const int base = 37) {
        int len = str.size();
        ha.resize(len + 1);
        pw.resize(len + 1, 1);
        REP(i, len) {
            ha[i + 1] = reduce(mul(ha[i], base) + str[i] + 1);
            pw[i + 1] = mul(pw[i], base);
        }
    }
    LL operator()(int l, int r) {
        return reduce(ha[r + 1] - mul(ha[l], pw[r - l + 1]) + mod);
    }
};

```

kmp $\mathcal{O}(n)$, zachodzi $0, pi[i] = (i - pi[i], i)$.
 $\text{get_kmp}(\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1\}) == \{0, 0, 1, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 5\}$,
 $\text{get_borders}(\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1\}) == \{2, 5, 10\}$.

```

vector<int> get_kmp(vector<int> str) {
    int len = str.size();
    vector<int> ret(len);
    for(int i = 1; i < len; i++) {
        int pos = ret[i - 1];
        while(pos >= 0 && str[i] != str[pos])
            pos = ret[pos - 1];
        ret[i] = pos + (str[i] == str[pos]);
    }
    return ret;
}
vector<int> get_borders(vector<int> str) {
    vector<int> kmp = get_kmp(str), ret;
    int len = str.size();
    while(len) {
        ret.emplace_back(len);
        len = kmp[len - 1];
    }
    return vector<int>(ret.rbegin(), ret.rend());
}

```

lyndon-min-cyclic-rot $\mathcal{O}(n)$, wyznaczanie faktoryzacji Lyndona oraz (przy jej pomocy) minimalnego suffiku oraz minimalnego przesunięcia cyklicznego. Ta faktoryzacja to unikalny podział słowa s na $w_1 w_2 \dots w_k$, że $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_k$ oraz w_i jestściśle mniejsze od każdego jego suffixu. `duval("abacaba") == {{0, 3}, {4, 5}, {6, 6}}`, `min_suffix("abacaba") == "ab"`, `min_cyclic_shift("abacaba") == "aabacab"`.

```

vector<pair<int, int>> duval(vector<int> s) {
    int n = str.size(), i = 0;
    vector<pair<int, int>> ret;
    while(i < n) {
        int j = i + 1, k = i;
        while(j < n && s[k] <= s[j]) {
            k = (s[k] < s[j] ? i : k + 1);
            ++j;
        }
        while(i <= k) {
            ret.emplace_back(i, i + j - k - 1);
            i += j - k;
        }
    }
    return ret;
}
vector<int> min_suffix(vector<int> s) {
    return {s.begin() + duval(s).back().first, s.end()};
}
vector<int> min_cyclic_shift(vector<int> s) {
    int n = str.size();
    REP(i, n)
        s.emplace_back(s[i]);
    for(auto [l, r] : duval(s))
        if(n <= r)
            return {s.begin() + l, s.begin() + l + n};
    assert(false);
}

```

manacher $\mathcal{O}(n)$, $\text{radius}[p][i] = rad = \text{największy promień palindromu parzystości } p \text{ o środku } i. L = i - rad + 1, R = i + rad$ to palindrom. Dla [abaabaaab] daje [003000020], [0100141000].

```

array<vector<int>, 2> manacher(vector<int> &in) {
    int n = str.size();
    array<vector<int>, 2> radius = {{vector<int>(n - 1), vector<int>(n)}};
    REP(parity, 2) {
        int z = parity ^ 1, L = 0, R = 0;
        REP(i, n - z) {
            int &rad = radius[parity][i];
            if(i <= R - z)
                rad = min(R - i, radius[parity][L + (R - i - z)]);
        }
    }
}

```

```

        }]);
        int l = i - rad + z, r = i + rad;
        while(l <= -1 && r + 1 < n && in[l - 1] == in[r + 1])
            ++rad, ++r, --l;
        if(r > R)
            L = l, R = r;
    }
    return radius;
}

```

pref $\mathcal{O}(n)$, zwraca tablicę prefiksu prefixową $[0, pref[i]] = [i, i + pref[i]]$.

```

vector<int> pref(vector<int> str) {
    int n = str.size();
    vector<int> ret(n);
    ret[0] = n;
    int i = 1, m = 0;
    while(i < n) {
        while(m + i < n && str[m + i] == str[m])
            m++;
        ret[i + m] = m;
        m = max(0, m - 1);
        for(int j = 1; ret[j] < m; m--)
            ret[i + j] = ret[j + m];
    }
    return ret;
}

```

squares includes: `pref` $\mathcal{O}(n \log n)$, zwraca wszystkie skompresowane trójkę (`start_l, start_r, len`) oznaczające, że podstawa zaczynająca się w `[start_l, start_r]` o długości `len` są kwadratami, jest ich $\mathcal{O}(n \log n)$.

```

vector<tuple<int, int, int>> squares(const vector<int> &s) {
    vector<tuple<int, int, int>> ans;
    vector<int> pos(ssize(s) + 2, -1);
    FOR(mid, 1, ssize(s) - 1) {
        int part = mid & ~((mid - 1), off = mid - part;
        int end = min(mid + part, ssize(s));
        vector<int> a(s.begin() + off, s.begin() + off + part),
        b(s.begin() + mid, s.begin() + end),
        ra(a.rbegin(), a rend());
        REP(j, 2) {
            auto z1 = pref(ra), bha = b;
            bha.emplace_back(-1);
            for(int x : a) bha.emplace_back(x);
            auto z2 = pref(bha);
            for(auto *v : &z1, &z2) {
                v[0][0] = ssize(v[0]);
                v->emplace_back(0);
            }
        }
        REP(c, ssize(a)) {
            int l = ssize(a) - c, x = c - min(l - 1, z1[l]),
            y = c - max(l - z2[ssize(b) + c + 1], j),
            sb = (j ? end - y - l * 2 : off + y),
            se = (j ? end - x - l * 2 + 1 : off + y + 1)
            , &p = pos[l];
            if(x > y) continue;
            if(p != -1 && get<1>(ans[p]) + 1 == sb)
                get<1>(ans[p]) = se - 1;
            else
                p = ssize(ans), ans.emplace_back(sb, se - 1,
                l);
        }
        a = vector(b.rbegin(), b rend());
        b.swap(ra);
    }
    return ans;
}

```

suffix-array-interval includes: suffix-array-short $\mathcal{O}(t \log n)$, wyznaczanie przedziałów podstawa w tablicy suffixowej. Zwraca przedział $[l, r]$, gdzie dla każdego $i \in [l, r]$, t jest podstowem $sa.sa[i] \text{ lub } [-1, -1]$ jeżeli nie ma takiego i .

```

pair<int, int> get_substring_sa_range(const vector<int> &s, const vector<int> &sa, const vector<int> &t) {
    auto get_lcp = [&](int i) -> int {
        REP(k, ssize(t)) {
            if(i + k >= ssize(s) or s[i + k] != t[k])
                return k;
        }
        return ssize(t);
    };
    auto get_side = [&](bool search_left) {
        int l = 0, r = ssize(sa) - 1;
        while(l < r) {
            int m = (l + r + not search_left) / 2, lcp =
                get_lcp(sa[m]);
            if(lcp == ssize(t))
                (search_left ? r : l) = m;
            else if(sa[m] + lcp >= ssize(s) or s[sa[m] + lcp] < t[lcp])
                l = m + 1;
            else
                r = m - 1;
        }
        return l;
    };
    int l = get_side(true);
    if(get_lcp(sa[l]) != ssize(t))
        return {-1, -1};
    return {l, get_side(false)};
}

```

suffix-array-long $\mathcal{O}(n + \alpha)$, sa zawiąra posortowane suffixy, zawiera pusty suffix, $lcp[i]$ to lcp suffixu $sa[i]$ i $sa[i+1]$. Dla $s = aabaaa$, $sa = [7, 3, 4, 0, 5, 1, 6, 2]$, $lcp = [0, 2, 3, 1, 2, 0, 1]$

```

void induced_sort(const vector<int> &vec, int alpha,
    vector<int> &sa,
    const vector<bool> &sl, const vector<int> &lms_idx
) {
    vector<int> l(alpha), r(alpha);
    for(int c : vec) {
        if(c + 1 < alpha)
            ++l[c + 1];
        ++r[c];
    }
    partial_sum(l.begin(), l.end(), l.begin());
    partial_sum(r.begin(), r.end(), r.begin());
    fill(sa.begin(), sa.end(), -1);
    for(int i = ssize(lms_idx) - 1; i >= 0; --i)
        sa[-r[vec[lms_idx[i]]]] = lms_idx[i];
    for(int i : sa)
        if(i >= 1 and sl[i - 1])
            sa[l[vec[i - 1]]++ = i - 1];
    fill(r.begin(), r.end(), 0);
    for(int c : vec)
        ++r[c];
    partial_sum(r.begin(), r.end(), r.begin());
    for(int i = ssize(sa) - 1, i = sa[k]; k >= 1; --k,
        i = sa[k])
        if(i >= 1 and not sl[i - 1])
            sa[--r[vec[i - 1]]] = i - 1;
    }
    vector<int> sa_is(const vector<int> &vec, int alpha) {
        const int n = ssize(vec);
        vector<int> sa(n), lms_idx;
        vector<bool> sl(n);
        for(int i = n - 2; i >= 0; --i) {
            sl[i] = vec[i] > vec[i + 1] or (vec[i] == vec[i + 1] and sl[i + 1]);
            if(sl[i] and not sl[i + 1])
                lms_idx.emplace_back(i + 1);
        }
        reverse(lms_idx.begin(), lms_idx.end());
        induced_sort(vec, alpha, sa, sl, lms_idx);
    }
}

```

```

vector<int> new_lms_idx(ssize(lms_idx)), lms_vec(
    ssize(lms_idx));
for(int i = 0, k = 0; i < n; ++i)
    if(not sl[sa[i]] and sa[i] >= 1 and sl[sa[i] - 1])
        new_lms_idx[k++] = sa[i];
int cur = sa[n - 1] = 0;
REP(k, ssize(new_lms_idx) - 1) {
    int i = new_lms_idx[k], j = new_lms_idx[k + 1];
    if(vec[i] != vec[j]) {
        sa[j] = ++cur;
        continue;
    }
    bool flag = false;
    for(int a = i + 1, b = j + 1; ++a, ++b) {
        if(vec[a] != vec[b]) {
            flag = true;
            break;
        }
        if((not sl[a] and sl[a - 1]) or (not sl[b] and sl[b - 1])) {
            flag = not (not sl[a] and sl[a - 1] and not sl[b] and sl[b - 1]);
            break;
        }
        sa[j] = (flag ? ++cur : cur);
    }
    REP(i, ssize(lms_idx))
        lms_vec[i] = sa[lms_idx[i]];
    if(cur + 1 < ssize(lms_idx)) {
        vector<int> lms_sa = sa_is(lms_vec, cur + 1);
        REP(i, ssize(lms_idx))
            new_lms_idx[i] = lms_idx[lms_sa[i]];
    }
    induced_sort(vec, alpha, sa, sl, new_lms_idx);
    return sa;
}
vector<int> suffix_array(const vector<int> &s, int alpha) {
    vector<int> vec(ssize(s) + 1);
    REP(i, ssize(s))
        vec[i] = s[i] + 1;
    vector<int> ret = sa_is(vec, alpha + 2);
    return ret;
}
vector<int> get_lcp(const vector<int> &s, const vector<int> &sa) {
    int n = ssize(s), k = 0;
    vector<int> lcp(n), rank(n);
    REP(i, n)
        rank[sa[i + 1]] = i;
    for(int i = 0; i < n; i++, k ? k-- : 0) {
        if(rank[i] == n - 1) {
            k = 0;
            continue;
        }
        int j = sa[rank[i] + 2];
        while(i + k < n and j + k < n and s[i + k] == s[j + k])
            k++;
        lcp[rank[i]] = k;
    }
    lcp.pop_back();
    lcp.insert(lcp.begin(), 0);
    return lcp;
}

```

suffix-array-short $\mathcal{O}(n \log n)$, zawiąra posortowane suffixy, zawiera pusty suffix, $lcp[i]$ to lcp suffixu $sa[i - 1] \text{ i } sa[i]$, Dla $s = aabaaa$, $sa = [7, 3, 4, 0, 5, 1, 6, 2]$, $lcp = [0, 0, 2, 3, 1, 2, 0, 1]$

```

pair<vector<int>, vector<int>> suffix_array(vector<int> &s, int alpha = 26) {
    ++alpha;
    for(int &c : s) ++c;
    s.emplace_back(0);
    last = r;
}
bool is_inside(vector<int> &s) {

```

```

int n = ssize(s), k = 0, a, b;
vector<int> x(s.begin(), s.end());
vector<int> y(n, ws(max(n, alpha)), rank(n));
vector<int> sa = y, lcp = y;
iota(sa.begin(), sa.end(), 0);
for(int j = 0, p = 0; p < n; j = max(1, j * 2),
    alpha = p) {
    p = j;
    iota(y.begin(), y.end(), n - j);
    REP(i, n) if(sa[i] >= j)
        y[p+] = sa[i] - j;
    fill(ws.begin(), ws.end(), 0);
    REP(i, n) ws[x[i]]++;
    FOR(i, 1, alpha - 1) ws[i] += ws[i - 1];
    for(int i = n; i--;) sa[--ws[x[y[i]]]] = y[i];
    swap(x, y);
    p = 1, x[sa[0]] = 0;
    FOR(i, 1, n - 1) a = sa[i - 1], b = sa[i], x[b] =
        (y[a] == y[b] && y[a + j] == y[b + j]) ? p - 1 :
        p++;
}
FOR(i, 1, n - 1) rank[sa[i]] = i;
for(int i = 0, j; i < n - 1; lcp[rank[i++]] = k)
    for(k && k--, j = sa[rank[i] - 1];
        sa[i + k] == s[j + k]; k++);
    lcp.erase(lcp.begin());
return {sa, lcp};
}

suffix-automaton  $\mathcal{O}(n\alpha)$  (szybsze, ale więcej pamięci) albo  $\mathcal{O}(n \log \alpha)$  (mapa), buduje suffix automaton. Wystąpienia wzorca, liczba różnych podstów, sumaryczna długość wszystkich podstów, leksykograficznie  $k$ -te podstwo, najmniejsze przesunięcie cykliczne, liczba wystąpienie podstowa, pierwsze wystąpienie, najkrótsze niewystępujące podstwo, longest common substring wielu słów.

```

```

struct SuffixAutomaton {
    static constexpr int sigma = 26;
    using Node = array<int, sigma>; // map<int, int>
    Node new_node;
    vector<Node> edges;
    vector<int> link = {-1}, length = {0};
    int last = 0;
    SuffixAutomaton() {
        new_node.fill(-1); // -1 - stan nieistniejący
        edges = {new_node}; // dodajemy stan startowy,
        ktory reprezentuje puste slowo
    }
    void add_letter(int c) {
        edges.emplace_back(new_node);
        length.emplace_back(length[last] + 1);
        link.emplace_back(0);
        int r = ssize(edges) - 1, p = last;
        while(p != -1 && edges[p][c] == -1) {
            edges[p][c] = r;
            p = link[p];
        }
        if(p != -1) {
            int q = edges[p][c];
            if(length[p] + 1 == length[q])
                link[r] = q;
            else {
                edges.emplace_back(edges[q]);
                length.emplace_back(length[p] + 1);
                link.emplace_back(link[q]);
                int q_prim = ssize(edges) - 1;
                link[q] = link[r] = q_prim;
                while(p != -1 && edges[p][c] == q) {
                    edges[p][c] = q_prim;
                    p = link[p];
                }
            }
        }
        last = r;
    }
    bool is_inside(vector<int> &s) {

```

```

        int q = 0;
        for(int c : s) {
            if(edges[q][c] == -1)
                return false;
            q = edges[q][c];
        }
        return true;
    }
};

suffix-tree  $\mathcal{O}(n \log n)$  lub  $\mathcal{O}(n\alpha)$ , Dla słowa abaab# (hash) jest aby to zawsze liście były stanami kończącymi stworzyć sons[0]=(#10),(a,4),(b,8)), sons[4]=(a,5),(b,6)), sons[6]=(#,7),(a,2)), sons[8]=(#,9),(a,3)), reszta sonsów pusta, slink[6]=8 i reszta slinków 0 (gdzie slink jest zdefiniowany dla nie-liści jako wierzchołek zawiązujący ten suffix bez ostatniej literki), up_edge_range[2]=up_edge_range[3]=(2,5), up_edge_range[5]=(3,5) i reszta jednoliterowa. Wierzchołek 1 oraz suffix wierzchołków jest roboczy. Zachodzi up_edge_range[0]<-1,-1>, parent[0]=0, slink[0]=1.

suffixTree {
    const int n;
    const vector<int> &in;
    vector<map<int, int>> sons;
    vector<pair<int, int>> up_edge_range;
    vector<int> parent, slink;
    int tv = 0, tp = 0, ts = 2, la = 0;
    void ukkadd(int c) {
        auto &lr = up_edge_range;
        suff:
        if (lr[tv].second < tp) {
            if (sons[tv].find(c) == sons[tv].end()) {
                sons[tv][c] = ts; lr[ts].first = la; parent[ts] ++
                tv = tv;
                tv = slink[tv]; tp = lr[tv].second + 1; goto suff;
            }
            tv = sons[tv][c]; tp = lr[tv].first;
        }
        if (tp == -1 || c == _in[tp])
            tp++;
        else {
            lr[ts + 1].first = la; parent[ts + 1] = ts;
            lr[ts].first = lr[tv].first; lr[ts].second = tp - 1;
            parent[ts] = parent[tv]; sons[ts][c] = ts + 1;
            sons[ts][_in[tp]] = tv;
            lr[tv].first = tp; parent[tv] = ts;
            sons[parent[ts]][_in[lr[ts].first]] = ts; ts += 2;
            tv = slink[parent[ts - 2]]; tp = lr[ts - 2].first;
            while (tp <= lr[ts - 2].second) {
                tv = sons[tv][_in[tp]]; tp += lr[tv].second - lr[tv].first + 1;
            }
            if (tp == lr[ts - 2].second + 1)
                slink[ts - 2] = tv;
            else
                slink[ts - 2] = ts;
            tp = lr[tv].second - (tp - lr[ts - 2].second) + 2;
            goto suff;
        }
    }
    // Remember to append string with a hash.
    suffixTree(const vector<int> &in, int alpha) {
        : n(ssize(in)), _in(in), sons(2 * n + 1),
        up_edge_range(2 * n + 1, pair(0, n - 1)), parent(2 * n + 1),
        slink(2 * n + 1) {
        up_edge_range[0] = up_edge_range[1] = {-1, -1};
        slink[0] = 1;
        // When changing map to vector, fill sons exactly here with -1 and replace if in ukkadd with sons[_in][c] = -1.
        REP(ch, alpha)
            sons[1][ch] = 0;
    }
}

```

```

    for (la < n; ++la)
        ukkadd(in[la]);
}

```

wildcard-matching includes: `math/ntt` $\mathcal{O}(n \log n)$, zwraca tablicę wystąpień wzorca. Alfabet od 0. Znaki zapytania to -1. Mogą być zarówno w tekście jak i we wzroku. Dla alfabetów większych niż 15 lepiej użyć bezpieczniejszej wersji.

```

vector<bool> wildcard_matching(vi text, vi pattern) {
    for (int& e : text) ++e;
    for (int& e : pattern) ++e;
    reverse(pattern.begin(), pattern.end());
    int n = ssize(text), m = ssize(pattern);
    int sz = 1 << __lg(2 * n - 1);
    vi a(sz), b(sz), c(sz);
    auto h = [&](auto f, auto g) {
        fill(a.begin(), a.end(), 0);
        fill(b.begin(), b.end(), 0);
        REP(i, n) a[i] = f(text[i]);
        REP(i, m) b[i] = g(pattern[i]);
        ntt(a, sz), ntt(b, sz);
        REP(i, sz) a[i] = mul(a[i], b[i]);
        ntt(a, sz, true);
        REP(i, sz) c[i] = add(c[i], a[i]);
    };
    h([](int x){return powi(x,3);},identity());
    h([](int x){return sub(0, mul(2, mul(x, x)));}, [](int x){return mul(x, x);});
    h([](int x){return powi(x,3);});
    vector<bbool> ret(n - m + 1);
    FOR(i, m, n) ret[i - m] = !c[i - 1];
    return ret;
}

```

```

vector<bool> safer_wildcard_matching(vi text, vi pattern, int alpha = 26) {
    static mt19937 rng(0); // Can be changed.
    int n = ssize(text), m = ssize(pattern);
    vector<bbool> ret(n - m + 1, true);
    vi v(alpha), a(n, -1), b(m, -1);
    REP(itors, 2) { // The more the better.
        REP(i, alpha) v[i] = int(rng() % (mod - 1));
        REP(i, n) if (text[i] != -1) a[i] = v[text[i]];
        REP(i, m) if (pattern[i] != -1) b[i] = v[pattern[i]];
    }
    auto h = wildcard_matching(a, b);
    REP(i, n - m + 1) ret[i] = min(ret[i], h[i]);
    return ret;
}

```

Optymalizacje (9)

cantor

Szybki hash 2 intów.

```

int cantor(int a, int b) {
    return (a + b + 1) * (a + b) / 2 + b;
}

```

divide-and-conquer-dp $\mathcal{O}(nm \log m)$, dla funkcji $cost(k, j)$ wylicza $dp(i, j) = \min_{0 \leq k \leq j} dp(i-1, k-1) + cost(k, j)$. Działa tylko wtedy, gdy $opt(i, j-1) \leq opt(i, j)$, a jest to zawsze spełnione, gdy $cost(b, c) \leq cost(a, d)$ oraz $cost(a, c) + cost(b, d) \leq cost(a, d) + cost(b, c)$ dla $a \leq b \leq c \leq d$.

```

vector<LL> divide_and_conquer_optimization(int n, int m, function<LL(int,int)> cost) {
    vector<LL> dp_before(m);
    auto dp_cur = dp_before;
    REP(i, m)
        dp_before[i] = cost(0, i);
    function<void(int,int,int,int)> compute = [&](int l,
        int r, int optl, int opr) {
        if (l > r)

```

wildcard-matching cantor divide-and-conquer-dp dp-1d1d fio knuth linear-knapsack matroid-intersection

```

        return;
        int mid = (l + r) / 2, opt;
        pair<LL, int> best = {numeric_limits<LL>::max(),
            -1};
        FOR(k, optl, min(mid, opr))
            best = min(best, {(k ? dp_before[k - 1] : 0) +
                cost(k, mid), k});
        tie(dp_cur[mid], opt) = best;
        compute(l, mid - 1, optl, opt);
        compute(mid + 1, r, opt, opr);
    };
    REP(i, n) {
        compute(0, m - 1, 0, m - 1);
        swap(dp_before, dp_cur);
    }
    return dp_before;
}

```

dp-1d1d $\mathcal{O}(n \log n), n > 0$ długość paska, $cost(i, j)$ koszt odcinka $[i, j]$ dla $a \leq b \leq c \leq d$ $cost$ ma spełniać $cost(a, c) + cost(b, d) \leq cost(a, d) + cost(b, c)$. Dzieli pasek $[0, n]$ na odcinki $[0, cuts[0]], \dots, (cuts[i - 1], cuts[i]]$, gdzie $cuts.back() == n - 1$, aby sumaryczny koszt wszystkich odcinków był minimalny. $cuts$ to prawe końca tych odcinków. Zwraca $(opt_cost, cuts)$. Aby maksymalizować koszt zamień nierówności tam, gdzie wskazane. Aby uzyskać $\mathcal{O}(n)$, należy przepisać overtak w oparciu o dodatkowe założenia, aby chodziło w $\mathcal{O}(1)$.

```

pair<LL, vector<int>> dp_1d1d(int n, function<LL (int,
    int)> cost) {
    vector<pair<LL, int>> dp(n);
    vector<int> lf(n + 2), rg(n + 2), dead(n);
    vector<vector<int>> events(n + 1);
    int beg = n, end = n + 1;
    rg[beg] = end; lf[end] = beg;
    auto score = [&](int i, int j) {
        return dp[j].first + cost(j + 1, i);
    };
    auto overtake = [&](int a, int b, int mn) {
        int bb = mn - 1, bk = n;
        while (bk - bb > 1) {
            int bs = (bb + bk) / 2;
            if (score(bs, a) <= score(bs, b)) // tu >=
                bk = bs;
            else
                bb = bs;
        }
        return bk;
    };
    auto add = [&](int i, int mn) {
        if (lf[i] == beg)
            return;
        events[overtake(i, lf[i], mn)].emplace_back(i);
    };
    REP(i, n) {
        dp[i] = {cost(0, i), -1};
        REP(j, ssize(events[i])) {
            int x = events[i][j];
            if (dead[x])
                continue;
            dead[lf[x]] = 1; lf[x] = lf[lf[x]];
            rg[lf[x]] = x; add(x, i);
        }
        if (rg[beg] != end)
            dp[i] = min(dp[i], {score(i, rg[beg]), rg[beg]});
            // tu max
        lf[i] = lf[end]; rg[i] = end;
        rg[lf[i]] = i; lf[rg[i]] = i;
        add(i, i + 1);
    }
    vector<int> cuts;
    for (int p = n - 1; p != -1; p = dp[p].second)
        cuts.emplace_back(p);
    reverse(cuts.begin(), cuts.end());
    return pair(dp[n - 1].first, cuts);
}

```

fio FIO do wpychania kolanem. Nie należy wtedy używać `cin/cout`

```

#endif
// write this when judge is on Windows
inline int getchar_unlocked() { return _getchar_nolock();
}
inline void putchar_unlocked(char c) { _putchar_nolock(c);
}
#endif
int fastin() {
    int n = 0, c = getchar_unlocked();
    while(isisspace(c))
        c = getchar_unlocked();
    while(isdigit(c)) {
        n = 10 * n + (c - '0');
        c = getchar_unlocked();
    }
    return n;
}
int fastin_negative() {
    int n = 0, negative = false, c = getchar_unlocked();
    while(isisspace(c))
        c = getchar_unlocked();
    if(c == '-') {
        negative = true;
        c = getchar_unlocked();
    }
    while(isdigit(c)) {
        n = 10 * n + (c - '0');
        c = getchar_unlocked();
    }
    return negative ? -n : n;
}
double fastin_double() {
    double x = 0, t = 1;
    int negative = false, c = getchar_unlocked();
    while(isisspace(c))
        c = getchar_unlocked();
    if (c == '-') {
        negative = true;
        c = getchar_unlocked();
    }
    while (isdigit(c)) {
        x = x * 10 + (c - '0');
        c = getchar_unlocked();
    }
    if (c == '.') {
        c = getchar_unlocked();
        while (isdigit(c)) {
            t /= 10;
            x = x + t * (c - '0');
            c = getchar_unlocked();
        }
    }
    return negative ? -x : x;
}
void fastout(int x) {
    if(x == 0) {
        putchar_unlocked('0');
        putchar_unlocked(' ');
        return;
    }
    if(x < 0) {
        putchar_unlocked('-');
        x *= -1;
    }
    static char t[10];
    int i = 0;
    while(x) {
        t[i++] = char('0' + (x % 10));
        x /= 10;
    }
    while(--i >= 0)
        putchar_unlocked(t[i]);
    putchar_unlocked(' ');
}

```

```
void nl() { putchar_unlocked('\n'); }

```

knuth $\mathcal{O}(n^2)$, dla tablicy $cost(i, j)$ wylicza

$dp(i, j) = \min_{1 \leq k \leq j} dp(i, k) + dp(k+1, j) + cost(i, j)$. Działa tylko wtedy, gdy $opt(i, j-1) \leq opt(i, j) \leq opt(i+1, j)$, a jest to zawsze spełnione, gdy $cost(b, c) \leq cost(a, d)$ oraz $cost(a, c) + cost(b, d) \leq cost(a, d) + cost(b, c)$ dla $a \leq b \leq c \leq d$.

```

LL knuth_optimization(vector<vector<LL>> cost) {
    int n = ssize(cost);
    vector<dp>(n, vector<LL>(n, numeric_limits<LL>::max()));
    vector<opt>(n, vector<int>(n));
    REP(i, n) {
        opt[i][i] = i;
        dp[i][i] = cost[i][i];
    }
    for(int i = n - 2; i >= 0; --i)
        FOR(j, i + 1, n - 1)
            FOR(k, opt[i][j - 1], min(j - 1, opt[i + 1][j]))
                if(dp[i][j] >= dp[i][k] + dp[k + 1][j] + cost[i][j])
                    opt[i][j] = k;
                    dp[i][j] = dp[i][k] + dp[k + 1][j] + cost[i][j];
    }
    return dp[0][n - 1];
}

```

linear-knapsack $\mathcal{O}(n \cdot \max(w_i))$ zamiast typowego $\mathcal{O}(n \cdot \sum(w_i))$, pamięć $\mathcal{O}(n + \max(w_i))$, plecak zwracający największą otrzymywalną sumę ciężarów $\leq bound$.

```

LL knapsack(vector<int> w, LL bound) {
    erase_if(w, [=](int x){ return x > bound; });
    {
        LL sum = accumulate(w.begin(), w.end(), 0LL);
        if(sum <= bound)
            return sum;
    }
    LL w_init = 0;
    int b;
    for(b = 0; w_init + w[b] <= bound; ++b)
        w_init += w[b];
    int W = *max_element(w.begin(), w.end());
    vector<int> prev_s(2 * W, -1);
    auto get = [&](vector<int> &v, LL i) -> int& {
        return v[i - (bound - W + 1)];
    };
    for(LL mu = bound + 1; mu <= bound + W; ++mu)
        get(prev_s, mu) = 0;
    get(prev_s, w_init) = b;
    FOR(t, b, ssize(w) - 1) {
        vector curr_s = prev_s;
        for(LL mu = bound - W + 1; mu <= bound; ++mu)
            get(curr_s, mu + w[t]) = max(get(curr_s, mu + w[t]),
                get(prev_s, mu));
        for(LL mu = bound + w[t]; mu >= bound + 1; --mu)
            for(int j = get(curr_s, mu) - 1; j >= get(prev_s,
                mu); --j)
                get(curr_s, mu - w[j]) = max(get(curr_s, mu - w[j]),
                    swap(prev_s, curr_s));
    }
    for(LL mu = bound; mu >= 0; --mu)
        if(get(prev_s, mu) != -1)
            return mu;
    assert(false);
}

```

matroid-intersection $\mathcal{O}(r^2 \cdot (init + n \cdot add))$, where r is max independent set. Find largest subset S of $[n]$ such that S is independent in both matroid A and B, given by their oracles, see example implementations below. Returns vector V such that $V[i] = 1$ iff i -th element is included in found set; Zabranie z <https://github.com/KacperTopolski/kactl/tree/main/Zmienne/w>

matroidach ustawiamy ręcznie aby "zainicjalizować" tylko jeśli mają komentarz co znaczą. W przeciwnym wypadku intersectMatroids zrobi robotę wolaając init.

```
template<class T, class U>
vector<bool> intersectMatroids(T& A, U& B, int n) {
    vector<bool> ans(n);
    bool ok = 1;
// NOTE: for weighted matroid intersection find
// shortest augmenting paths first by weight change,
// then by length using Bellman-Ford,
// Speedup trick (only for unweighted):
    A.init(ans); B.init(ans);
    REP(i, n)
        if (A.canAdd(i) && B.canAdd(i))
            ans[i] = 1, A.init(ans), B.init(ans);
//End of speedup
    while (ok) {
        vector<vector<int>> G(n);
        vector<bool> good(n);
        queue<int> que;
        vector<int> prev(n, -1);
        A.init(ans); B.init(ans); ok = 0;
        REP(i, n) if (!ans[i]) {
            if (A.canAdd(i)) que.emplace(i), prev[i]=-2;
            good[i] = B.canAdd(i);
        }
        REP(i, n) if (ans[i]) {
            ans[i] = 0;
            A.init(ans); B.init(ans);
            REP(j, n) if (i != j && !ans[j]) {
                if (A.canAdd(j)) G[i].emplace_back(j); //cost
                [j]
                if (B.canAdd(j)) G[j].emplace_back(i); // cost
                [i]
            }
            ans[i] = 1;
        }
        while (!que.empty()) {
            int i = que.front();
            que.pop();
            if (good[i]) { // best found (unweighted =
                shortest path)
                ans[i] = 1;
                while (prev[i] >= 0) { // alternate matching
                    ans[i] = prev[i] = 0;
                    ans[i] = prev[i] = 1;
                }
                ok = 1; break;
            }
            for(auto j: G[i]) if (prev[j] == -1)
                que.emplace(j), prev[j] = i;
        }
    }
    return ans;
}
// Matroid where each element has color
// and set is independent iff for each color c
// #elements of color c <= maxAllowed[c].
struct LimOracle {
    vector<int> color; // color[i] = color of i-th
    element
    vector<int> maxAllowed; // Limits for colors
    vector<int> tmp;
// Init oracle for independent set S; O(n)
    void init(vector<bool>& S) {
        tmp = maxAllowed;
        REP(i, ssize(S)) tmp[color[i]] -= S[i];
    }
// Check if S+k is independent; time: O(1)
    bool canAdd(int k) { return tmp[color[k]] > 0; }
};
// Graphic matroid - each element is edge,
// set is independent iff subgraph is acyclic.
struct GraphOracle {
    vector<pair<int, int>> elems; // Ground set: graph
    edges
}
```

mos pragmy random sos-dp

```
int n; // Number of vertices, indexed [0;n-1]
vector<int> par;
int find(int i) {
    return par[i] == -1 ? i : par[i] = find(par[i]);
}
// Init oracle for independent set S; ~O(n)
void init(vector<bool>& S) {
    par.assign(n, -1);
    REP(i, ssize(S)) if (!S[i])
        par[find(elems[i].first)] = find(elems[i].second);
}
// Check if S+k is independent; time: ~O(1)
bool canAdd(int k) {
    return find(elems[k].first) != find(elems[k].second);
}
// Co-graphic matroid - each element is edge,
// set is independent iff after removing edges
// from graph number of connected components
// doesn't change.
struct CographOracle {
    vector<pair<int, int>> elems; // Ground set: graph
    edges
    int n; // Number of vertices, indexed [0;n-1]
    vector<vector<int>> G;
    vector<int> pre, low;
    int cnt;
    int dfs(int v, int p) {
        pre[v] = low[v] = ++cnt;
        for(auto e: G[v]) if (e != p)
            low[v] = min(low[v], pre[e] ?: dfs(e, v));
        return low[v];
    }
    // Init oracle for independent set S; O(n)
    void init(vector<bool>& S) {
        G.assign(n, {});
        pre.assign(n, 0);
        low.resize(n);
        cnt = 0;
        REP(i, ssize(S)) if (!S[i]) {
            pair<int, int> e = elems[i];
            G[e.first].emplace_back(e.second);
            G[e.second].emplace_back(e.first);
        }
        REP(v, n) if (!pre[v]) dfs(v, -1);
    }
    // Check if S+k is independent; time: O(1)
    bool canAdd(int k) {
        pair<int, int> e = elems[k];
        return max(pre[e.first], pre[e.second]) != max(low
            [e.first], low[e.second]);
    }
}
// Matroid equivalent to linear space with XOR
struct XorOracle {
    vector<LL> elems; // Ground set: numbers
    vector<LL> base;
// Init for independent set S; O(n+r^2)
    void init(vector<bool>& S) {
        base.assign(63, 0);
        REP(i, ssize(S)) if (!S[i]) {
            LL e = elems[i];
            REP(j, ssize(base)) if ((e >> j) & 1) {
                if (!base[j]) {
                    base[j] = e;
                    break;
                }
                e ^= base[j];
            }
        }
    }
    // Check if S+k is independent; time: O(r)
    bool canAdd(int k) {
        LL e = elems[k];
        REP(i, ssize(base)) if ((e >> i) & 1) {
```

```
if (!base[i]) return 1;
e ^= base[i];
}
return 0;
}
};
```

MOS Wydajne odpowiadanie na nietączną operację na przedziale.

```
struct Query {
    int L, R, i;
};
vector<int> Mo(vector<int>& a, vector<Query>& Q) {
    vector<int> odp(Q.size());
    int b = ceil(sqrt(a.size()));
    sort(Q.begin(), Q.end(), [&](const Query x, const
        Query y) {
        if (x.L / b != y.L / b) return x.L < y.L;
        return (x.L / b) % 2 ? x.R > y.R : x.R < y.R;
    });
    int l = 0, r = 0;
    int acc = 0;
    for(auto q:Q) {
        int L = q.L, R = q.R, i=q.i;
        while(l < L) mo_add(a[-l], acc);
        while(r <= R) mo_add(a[r++], acc);
        while(l < L) mo_remove(a[l++], acc);
        while(r > R + 1) mo_remove(a[--r], acc);
        odp[i] = acc;
    }
    return odp;
}
```

pragmy Pragmy do wypychania kolanem

```
#pragma GCC optimize("Ofast")
#pragma GCC target("avx,avx2")
```

random Szybsze rand.

```
uint32_t xorshf96() {
    static uint32_t x = 123456789, y = 362436069, z =
    521288629;
    uint32_t t;
    x ^= x << 16;
    x ^= x >> 5;
    x ^= x << 1;
    t = x;
    x = y;
    y = z;
    z = t ^ x ^ y;
    return z;
}
```

sos-dp $\mathcal{O}(n^2)$, dla tablicy $A[i]$ oblicza tablicę

$F[mask] = \sum_{i \subseteq mask} A[i]$, czyli sumę po podmaskach. Może też liczyć sumę po nadmaskach. $sos_dp(2, \{4, 3, 7, 2\})$ zwraca $\{4, 7, 11, 16\}$, $sos_dp(2, \{4, 3, 7, 2\}, true)$ zwraca $\{16, 5, 9, 2\}$.

```
vector<LL> sos_dp(int n, vector<LL> A, bool nad =
    false) {
    int N = (1 << n);
    if (nad) REP(i, N / 2) swap(A[i], A[(N - 1) ^ i]);
    auto F = A;
    REP(i, n)
        REP(mask, N)
            if ((mask >> i) & 1)
                F[mask] += F[mask ^ (1 << i)];
    if (nad) REP(i, N / 2) swap(F[i], F[(N - 1) ^ i]);
    return F;
}
```