Министерство образования и науки Российской Федерации

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

—

Институт компьютерных наук и технологий

**Кафедра «Программная инженерия»**

**Отчет**

**Лабораторная работа №2**

по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»

Выполнил

Студент группы

3530904/00103 Солодовников С.Ф.

Преподаватель Тутыгин В.С.

Санкт-Петербург

2022 г

**Цель работы**

Исследовать зависимость точности представления функции с помощью ряда Фурье, разложив функцию в действительный и комплексный ряд Фурье с конечным числом элементов.

**Программа работы**

Определить зависимости погрешность восстановления значений от количества членов ряда Фурье следующих функций:

* Гармонической функции с целым количеством периодов
* Гармонической функции с нецелым количеством периодов
* Функции, которая задана вариантом.

Интересующий диапазон допустимых погрешностей (СКО) – не более 1%.

Последовательность шагов:

1. Задать большое количество отсчетов (N = 1024)
2. Увеличивать количество членов ряда Фурье по следующей схеме: KP<K<=N/4.
3. Фиксировать погрешности восстановления при увеличении количества членов ряда Фурье
4. Построить график зависимости погрешности .
5. Выбрать оптимальное количество членов ряда Фурье при допустимой погрешности

Крайние значения восстановленной функции при расчете погрешности исключить.

Вариант 4; . Интервал разложения [-T;T]; T = 5.

# Для

## комплексный ряд Фурье

«пристреливаемся» с шагом 1024

|  |  |
| --- | --- |
| Кол-во членов ряда | СКО |
| 19 | 0.71483 |
| 20 | 0.71394 |
| 21 | 0.71539 |

Попробуем сократить шаг дискретизации. Оказалось, что погрешности удовлетворяет

N = 662

|  |  |
| --- | --- |
| Кол-во членов ряда | СКО |
| 12 | 1.0475 |
| 13 | 1.017 |
| 14 | 0.99911 |
| 15 | 0.9905 |
| 16 | 0.98861 |

Подходящий член ряда K=14, удовлетворяет условию K<n/4

График 1, СКО(кол-во членов разложения)

Graphical user interface, chart

Description automatically generated

## Действительный ряд.

|  |  |
| --- | --- |
| Кол-во членов ряда | СКО |
| 12 | 1.0475 |
| 13 | 1.017 |
| 14 | 0.99911 |
| 15 | 0.9905 |
| 16 | 0.98861 |

Графики действительного и комплексного рядов совпадают.

Рисунок 2. Исходная и восстановленная функции

Chart

Description automatically generated

# Гармоническая функция с нецелым количеством периодов

## Действительный ряд

Для гармонической с кол-вом периодом 2.4 при N=64. K>=3

|  |  |
| --- | --- |
| Кол-во членов ряда | СКО |
| 13 | 1.0491 |
| 14 | 0.96644 |
| 15 | 0.8958 |

Оптимальный K=14, K<N/4

График 3, СКО(кол-во членов ряда) для гармонической функции

A picture containing graphical user interface

Description automatically generated

Аналогичные значения получаем для комплексного ряда

Рисунок 3, исходная и восстановленная гармоническая функция

Chart, line chart

Description automatically generated

# Выводы

1. Для функции установлено, что на промежутке [-T, T] при T=5 для достижения погрешности менее 1% необходимо: 14 членов ряда Фурье. Шаг дискретизации N=662
2. Для гармонической функции с нецелым количеством периодов kp=2.4: N=64, K=14.
3. Для гармонической функции с целым количеством периодов: необходимо разложить по одному члену(kp). Погрешность будет отсутствовать.

# КОД

% Разложение функции t в ряд Фурье

%в дискретизированном виде на интервале [-T,T], например,[-pi,pi]

clc;

N=64; %Количество отсчетов (элементов массива y(t))

%max\_k=64 ;%Количество членов ряда Фурье

%T=pi;

T=5;

%T=0.9\*pi; %диапазон изменения функции f(i) равен +/-T

kp=2.4; %количество периодов гармонической функции

y=zeros(1,N+1);

p=4;% показатель степени функции t^p

f=zeros(1,N+1);

Sa0=0;

for i=1:N+1

x(i)=(2\*T\*(((i-1-N/2))/N));

f(i)=sin(2\*pi\*kp\*(i-1)/N); % гармоническая функция

% f(i)=x(i)\*cos(x(i));

%f(i)=(-tan(x(i)/2))/2;

% f(i)=log(2+cos(x(i)/2));%вариант 10

% f(i)=log(1+x(i)^p);

% f(i)= (2\*T\*(((i-1-N/2))/N))^p; %функция t^p

% f(i)=x(i)^3-1;

%f(i)=x(i)^p;

% f(i)=abs(x(i));

% f(i)=sinh(x(i));

% f(i)=sin(x(i));

%f(i)=cosh(x(i)); %Вариант 14 - f(x)=ch(x)

% f(i)=x(i)\*exp(x(i));

%f(i)=exp(x(i));

Sa0=Sa0+f(i);

end

Sa0=Sa0/N; %вычисленный коэф. a0/2

%Saa0=pi^2/3 %%теоретически определенные коэф. а0/2 для функции t^2

% figure

i=1:N;

% plot(i,f(i));

% title('f(i)');

% axis tight;

max\_freq = N/4

for K=1:max\_freq

Sa = zeros(1,K);

Sb = zeros(1,K);

for i=1:N+1

for j=1:K

Sa(j) = (Sa(j)+f(i)\*cos((j)\*2\*pi\*(i-1-N/2)/N));

Sb(j) = (Sb(j)+f(i)\*sin((j)\*2\*pi\*(i-1-N/2)/N));

end

end

for j=1:K

Sa(j)=Sa(j)\*(1/(N/2));

Sb(j)=Sb(j)\*(1/(N/2));

% Saa(j)= 4\*(-1)^j/(j^2);%теоретически определенный коэф. аk для функции t^2

end

SSa=Sa; %коэффициенты ak

SSb=Sb; %коэффициенты bk

%SSaa=Saa %теоретически определенные коэф. аk для функции t^2

% i=1:K;

% figure

% plot(i,Sa);

% title('Коэффициенты Sa');

%Вычисление и отображение спектра амплитуд (начало)

for j=1:K

Sab(j)=sqrt(Sa(j)^2+Sb(j)^2);

end

K1=K;

i=1:K1;

% figure

% plot(i,Sab(i));

% stem(Sab(1:K1)); %вывод графика дискретной последовательности данных

% axis([1 8 -0.2 1.2]);%задание осей: [xmin xmax ymin ymax]

% title('Амплитуды частотных составляющих спектра');

% xlabel('Количество периодов')

% axis tight;

%Вычисление и отображение спектра амплитуд (конец)

y=zeros(1,N+1);

for i=1:N+1

for j=1:K

y(i)= y(i)+Sa(j)\*cos(j\*2\*pi\*(i-1-N/2)/N)+Sb(j)\*sin(j\*2\*pi\*(i-1-N/2)/N); %%%%%%%%

end

y(i)=(Sa0+y(i));

end

i=1:N+1;

% figure

% plot(i,f);

% axis tight;

% hold on;

% plot(i,y,'r-')

% hold off;

for i=2:N

dy(i)=y(i)-f(i);%абсолютная погрешность восстановления

end

dy\_proc=dy/(max(f)-min(f))\*100;

CKO=std(dy);

CKO\_proc=std(dy\_proc)%СКО в процентах

dispers(K) = CKO\_proc

end

t = 1:max\_freq

t = t(3:end)

dispers = dispers(3:end)

figure

plot(t, dispers)

axis tight;

xlabel('Количество членов разложения')

ylabel("СКО, %")

T = table(t(:), dispers(:));

disp(T)

pause;

close all;

clear;

## КОМПЛЕКСНОЕ

%Разложение функции t^p в комплексный ряд Фурье

%в дискретизированном виде на интервале [0,T]

clc;

%T=0.9\*pi;

T=5;

N=64; %количество значений функции на интервале [0,T]

% M=64; %количество членов ряда Фурье

p=4; %показатель степени функции x^p

kp=2.4;%количество периодов гармонического сигнала

C0=0;

for i=1:N+1 %генерация модельной функции

x(i)=(2\*T\*(((i-1-N/2))/N)); % -T до T

%x(i)= T\*(i-1)/N;%для интервала от 0 до Т

f(i)=sin(2\*pi\*kp\*(i-1)/N); % гармоническая функция

%f(i)=sin(x(i));

% f(i)=(x(i)\*cos(x(i)));

% f(i)=abs(x(i));

% x(i)=T\*(((i-1))/N); %для интервала от 0 до Т

%f(i)= (x(i))^p; %функция t^p

% f(i)=x(i)\*exp(x(i));

% f(i)=sinh(x(i));

C0=C0+f(i);

end

C0=C0\*(2/N);

max\_freq = N/4;%N/4;

for M=1:max\_freq

for k=1:M

C(k)=0;

end

for i=1:N+1

for k=1:M

C(k)=C(k)+f(i)\*exp(-j\*2\*pi\*k\*(i-1)/N);

end

end

for k=1:M

C(k)=C(k)\*(2/N);

end

%Вычисление и отображение спектра амплитуд (начало)

for k=1:M

Cab(k)=abs(C(k));%коэффициенты Cab(k)- комплексные числа вида a+jb,

%функция abs вычисляет sqrt(a^2+b^2 )

end

k=1:M;

%figure

%plot(k,Cab);

%stem(Cab(1:M)); %вывод графика дискретной последовательности данных

%axis([1 8 -0.2 1.2]);%задание осей: [xmin xmax ymin ymax]

%title('Амплитуды частотных составляющих спектра');

%xlabel('Количество периодов')

%axis tight;

%Вычисление и отображение спектра амплитуд (конец)

for i=1:N+1

y(i)=0;

for k=1:M

y(i)=y(i)+C(k)\*exp(j\*2\*pi\*k\*(i-1)/N);

end

y(i)=C0/2+y(i);

end

i=1:N+1;

% figure

%plot(i,f);

%axis tight;

%title('Исходная и восстановленная функция')

%xlabel('Номер элемента массива')

%hold on;

%plot(i,real(y),'r-');

%axis tight;

%hold off;

for i=2:N

dy(i)=real(y(i))-f(i);%абсолютная погрешность восстановления

end

dy\_proc=dy/(max(f)-min(f))\*100;

CKO=std(dy);

CKO\_proc=std(dy\_proc)%СКО в процентах

dispers(M) = CKO\_proc

% disp("for freq")

% disp(M)

end

t = 1:max\_freq

% figure

plot(t, dispers)

axis tight;

xlabel('Количество членов разложения')

ylabel("СКО, %")

T = table(t(:), dispers(:));

disp(T)

pause

close all;

clear;