HAW HAMBURG

Die Fourier-Transformation

Mohamed Kemel Koumenji

Departement Informatik HAW Hamburg

Wintersemester 2013

Prof. Dr. Wolfgang Fohl

Übersicht

Problem:

$$X^2 + 1 = 0 \ ?$$

Die Lösung liegt in

$$X_{1,2} \in C\{ z \mid z = x + iy;\ x, y \in R \}$$

i^2 = -1 Imaginäre Einheit

Kartesische Form

z = x + iy

x = Re(z) Realteil

y = Im(z) Imaginär Teil

Polar Form

z = $r * \exp(i\theta)$

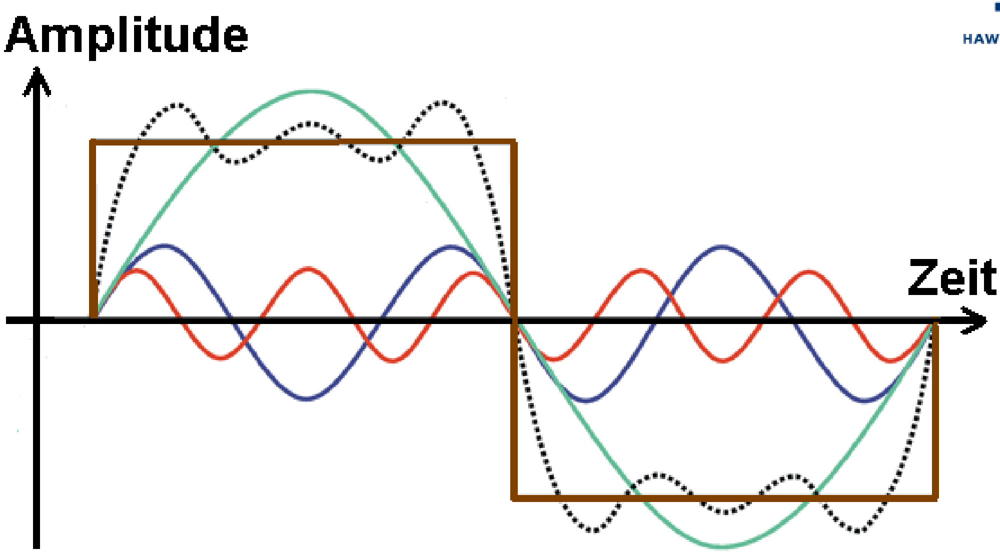
r = |z| = $\sqrt{x^\wedge 2 + y^\wedge 2}$

$$\theta = \arctan(y / x)$$

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

*Jean Baptiste Joseph Fourier (französischer Mathematiker und Physiker, *1768, †1830) [cobalt.chem.ucalgary.ca]*



Annäherung an die Rechteckwelle (Verfahren nach Fourier) [www.analogeklangsynthese.de]

Jede beliebige Wellenform lässt sich als eine Summe von verschiedenen Sinuswellen berechnen.

Fourier 1822

2.2 – Definition - Fourier Integral

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

[Mey10] Kap. 3 F. 2

$F(j\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$ Fourier-Transformation

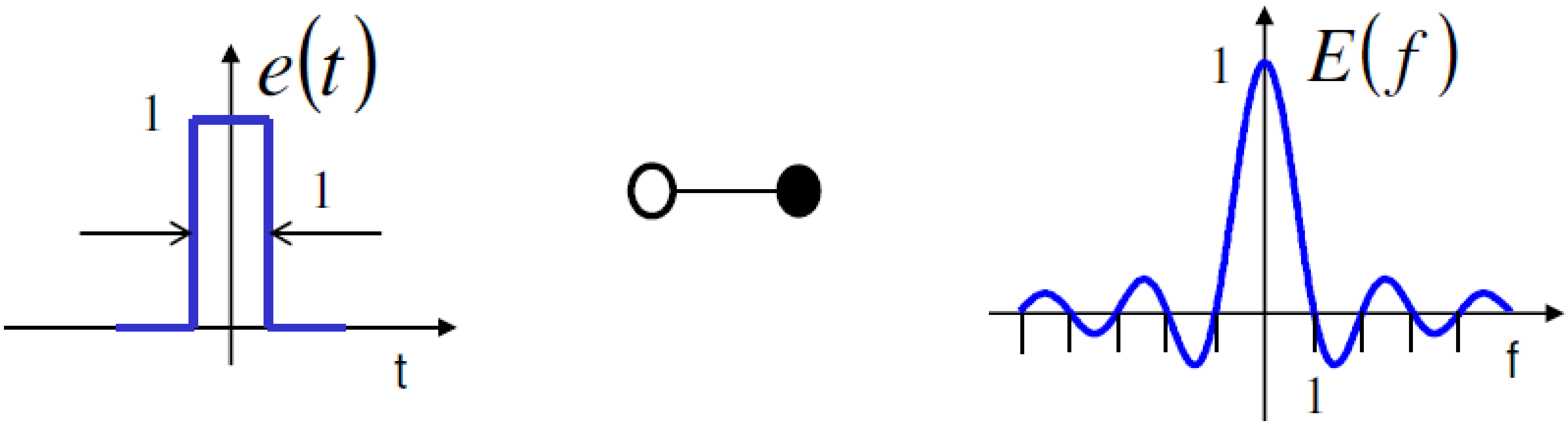
$F(j\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t)$ Fourier-Korrespondenz

$$F(j\omega) = \mathrm{Re}\{F(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{F(j\omega)\}$$ komplex

$$= |F(j\omega)| \cdot e^{|j\varphi(j\omega)|}$$

Existenzbedingung = absolut integrierbar:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt \le M < \infty$$



Korrespondenz $rect(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \, \mathrm{si}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

[Roh10] Einleitung. 2 F.25

HAW HAMBURG

Dirac-Impuls $\delta(t)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(t)\,dt := x(0)$

für $x(t)=1$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$ Normierungsbedingung

Darstellung beliebiger Funktionen durch den Dirac-Impuls:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\lambda)\,\delta(\lambda)\,d\lambda = x(t) \quad : \text{ Abtastung bei } \lambda = 0$$

Mit der Substitution $\lambda \to t-\tau$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

[Mey10] Kap. 4 F.5

2.4.2 – Integration der Komplexen e-Funktion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{+j\omega t} d\omega = 2\pi \ \delta(t)$$ Fourier-Umkehrintegral

[Fli91] Kap. A1.13.2

$$F(j\omega) = 1 \bullet\!\!-\!\!\circ\, f(t) = 2\pi \ \delta(t)$$ Fourier-Korrespondenz

[Mey10] Kap. 3 F.12

2.5 – Definition: Fourier-Umkehrintegral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$ [Fli91] Gl. 2.2.2 und 2.6.1

Beweis für die Richtigkeit der Definition durch Einsetzen in das Fourier-Integral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{F(j\omega)} \, e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega}_{2\pi\delta(t-\tau)} \, d\tau$$

mit $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$ [Fli91] Gl. A1.13.2

Damit ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) 2\pi\delta(t-\tau) d\tau$$ mit Substitution $t-\tau \to \lambda$

$$\equiv f(t)$$ laut Abtasteigenschaft des Dirac-Impulses

[Mey10] Kap. 4 F.7

3.1 – Definition: Diskrete Fourier-Transformation

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jkn\pi/N}$$

X[k] = k DFT Ausgangskomponente mit k= 0,1,2…N-1
k = Index der DFT Ausgang in Frequenzbereich

x(n) = n abgetastete Eingangskomponente mit n=0,1,2,..N-1
n = Index der Abgetastete Signal in Zeitbereich

N = Anzahl von Samples

Mohamed Kemel Koumenji

3.2 – Wie funktioniert die DFT?

$e^{\pm j\theta} = cos(\theta) \pm jsin(\theta))$ *Eulersche Formel*

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[cos(2\pi kn/N) - jsin(2\pi kn/N)]$$

$$\begin{aligned} X[k] = {} & x(0)[cos(2\pi k0/N) - jsin(2\pi k0/N)] \\ & +x(1)[cos(2\pi k1/N) - jsin(2\pi k1/N)] \\ & +x(2)[cos(2\pi k2/N) - jsin(2\pi k2/N)] \\ & . \\ & . \\ & . \\ & +x(n)[cos(2\pi kn/N) - jsin(2\pi kn/N)] \end{aligned}$$

$$\text{Frequenz} = \text{k}*\frac{Fs}{N}$$

Annahme Fs = 8Khz, N = 8

Wenn k = 0 → f = 0 Hz
Wenn k = 1 → f = 1 KHz

.
.
.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[cos(2\pi kn/N) - jsin(2\pi kn/N)]$$

X[0] = 0.176
X[1] = 0.70711
X[2] = 0.82322
X[3] = 0.95711
X[4] = -0.17678
X[5] = -0.70711
X[6] = -0.82322
X[7] = -0.95711

Abgetastete Werte

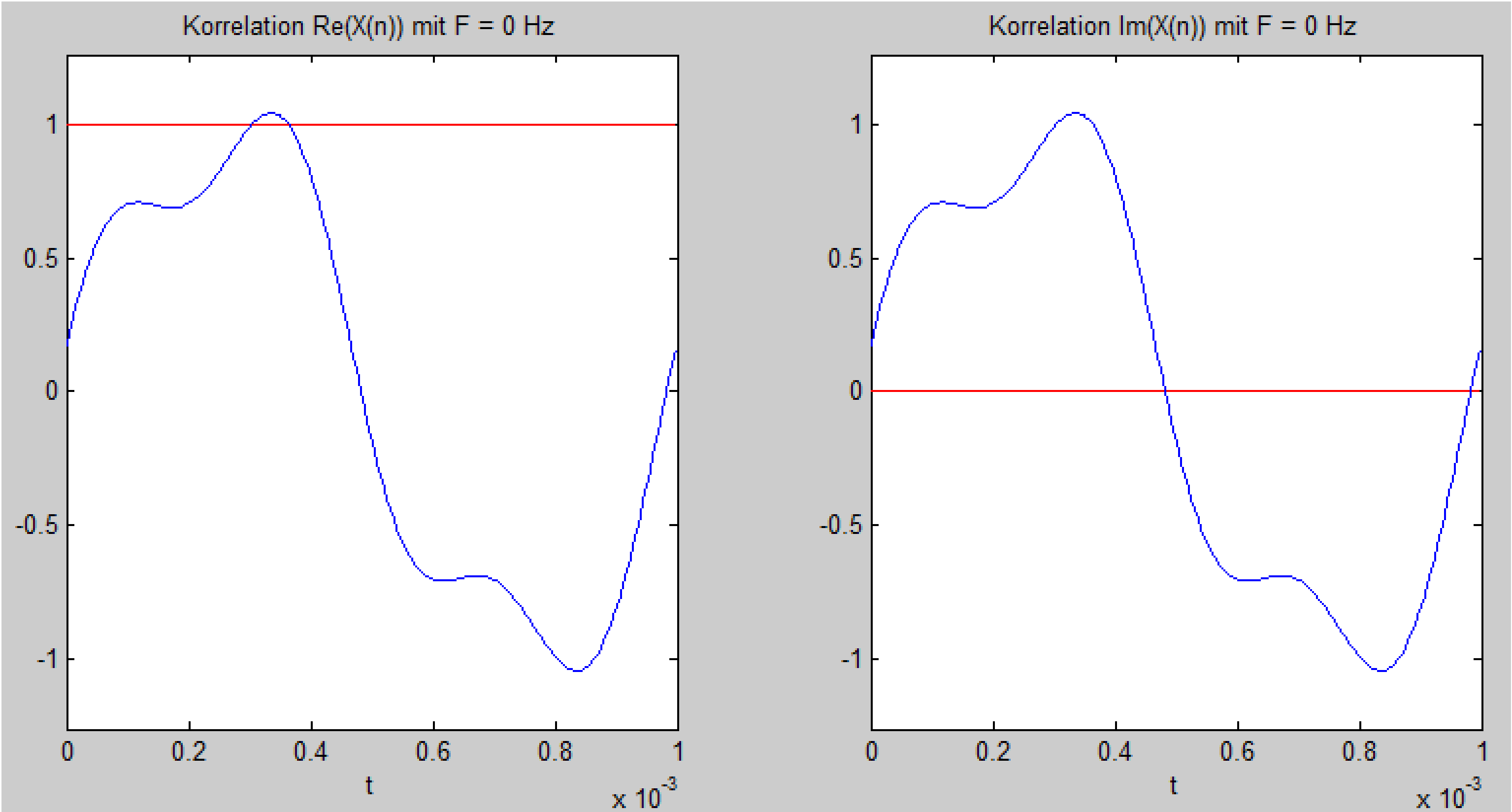
$$\text{Frequenz} = \text{k}*\frac{Fs}{N}$$

Annahme Fs = 8KHz, N = 8

K= 0 => f = 0 Hz
K= 1 => f = 1 KHz
K= 2 => f = 2 KHz
K= 3 => f = 3 KHz
K= 4 => f = 4 KHz
K= 5 => f = 5 KHz
K= 6 => f = 6 KHz
K= 7 => f = 7 KHz

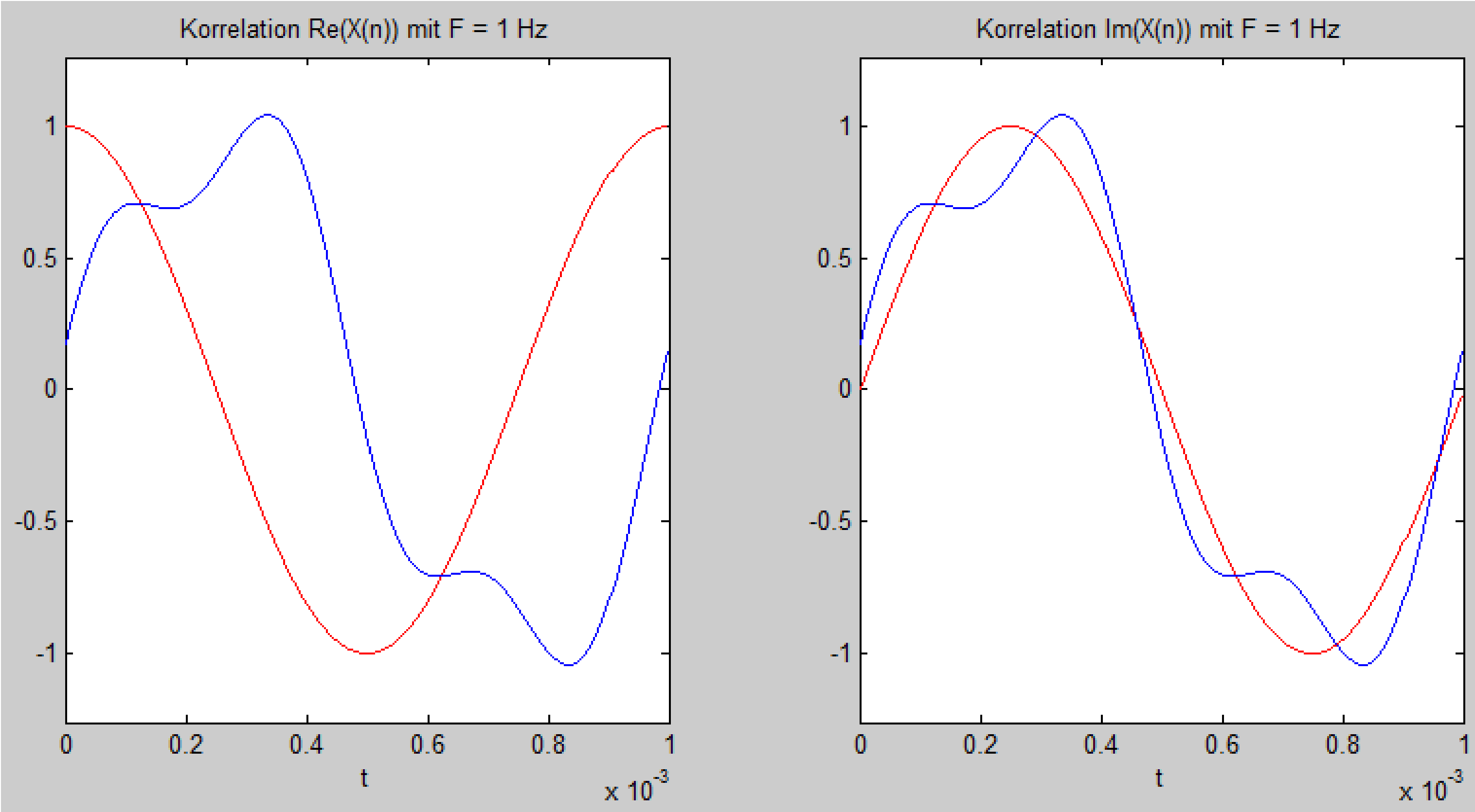
Im Signal gesuchte Frequenzen

3.3.1 – Korrelation Sinus mit f = 0 Hz und Input



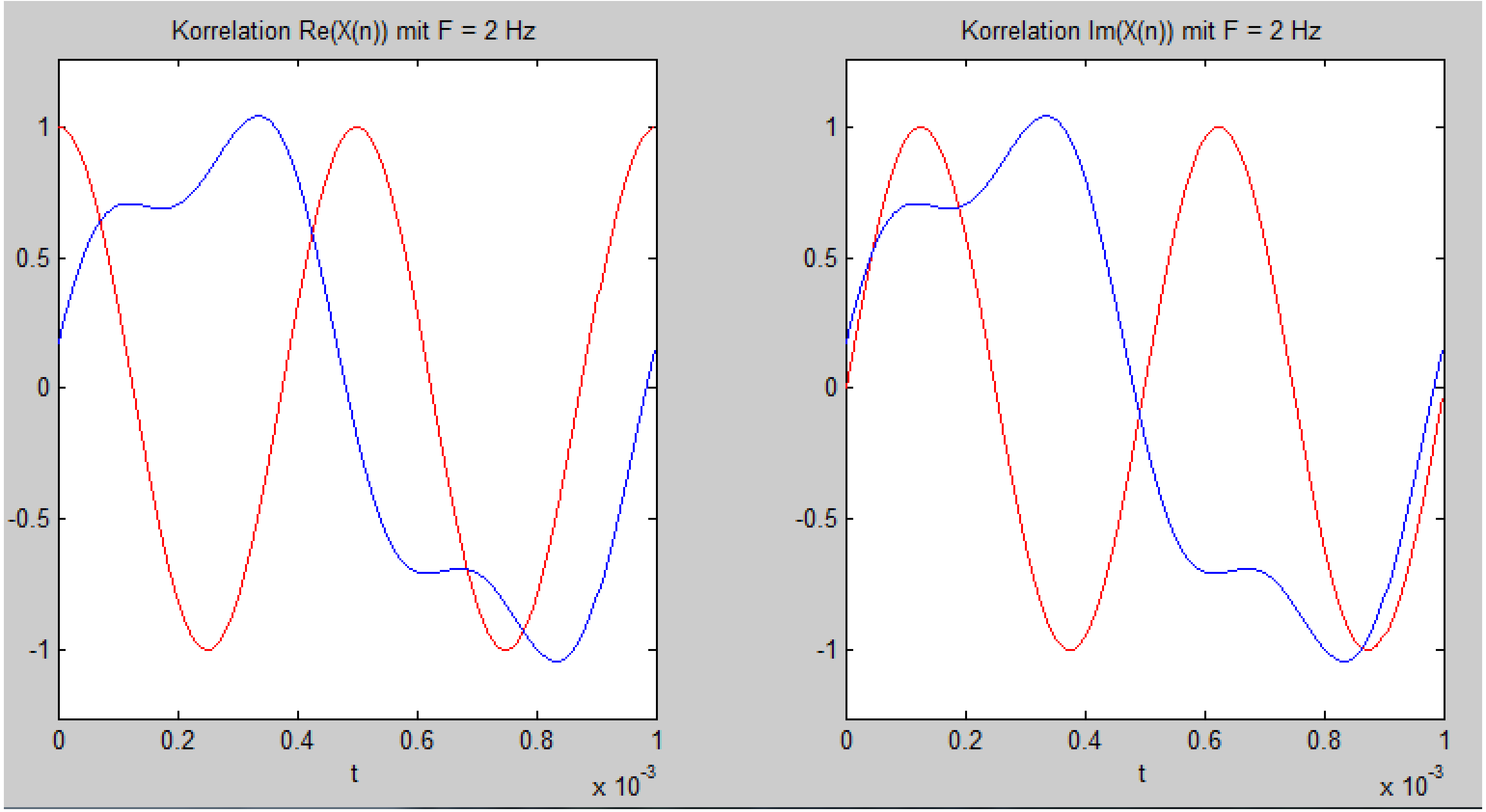
$$X[0] = 0 + j0$$

3.3.2 – Korrelation Sinus mit f = 1 KHz und Input



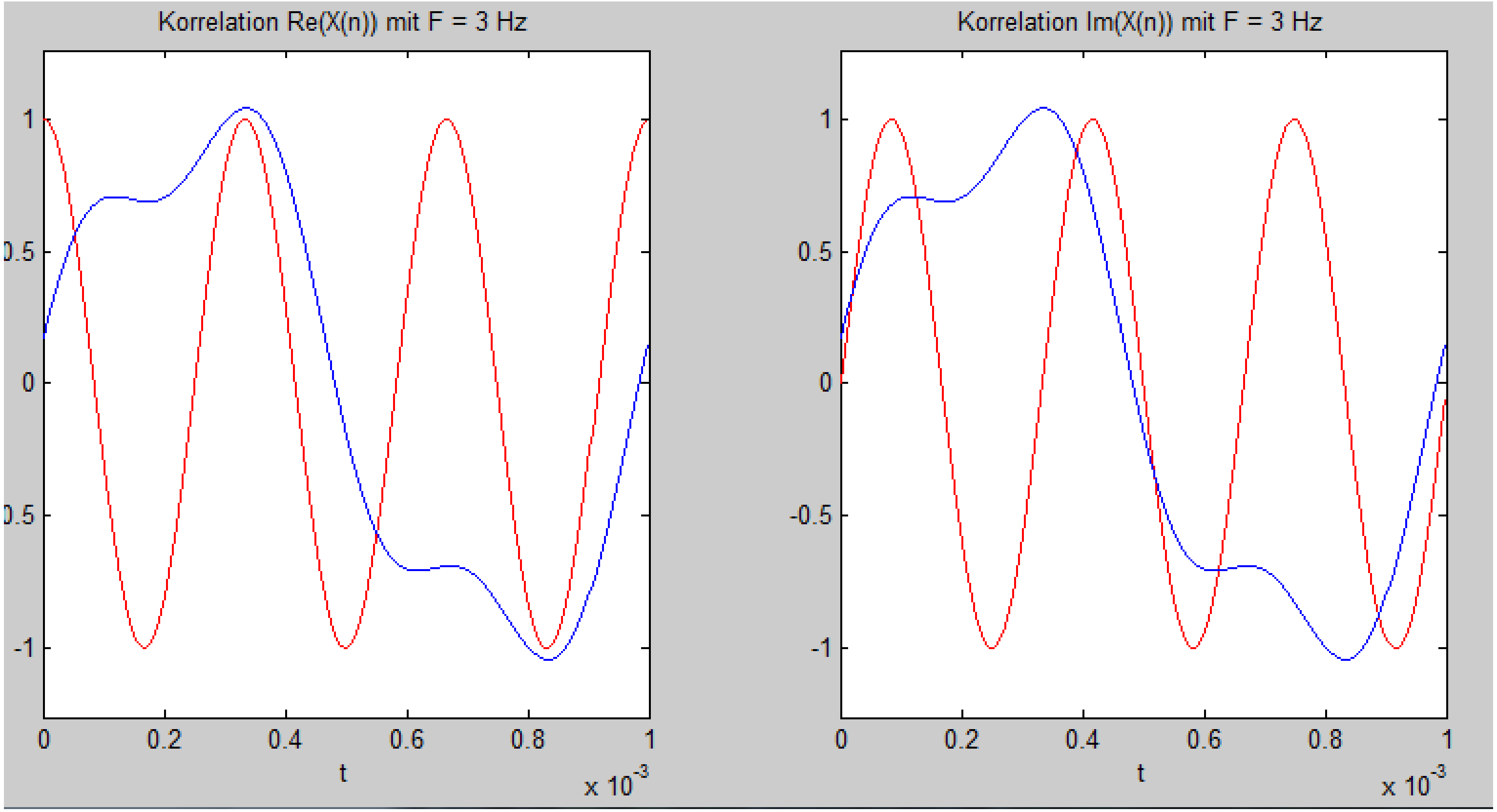
$$X[1] = 0 + j4$$

3.3.3 – Korrelation Sinus mit f = 2 KHz und Input



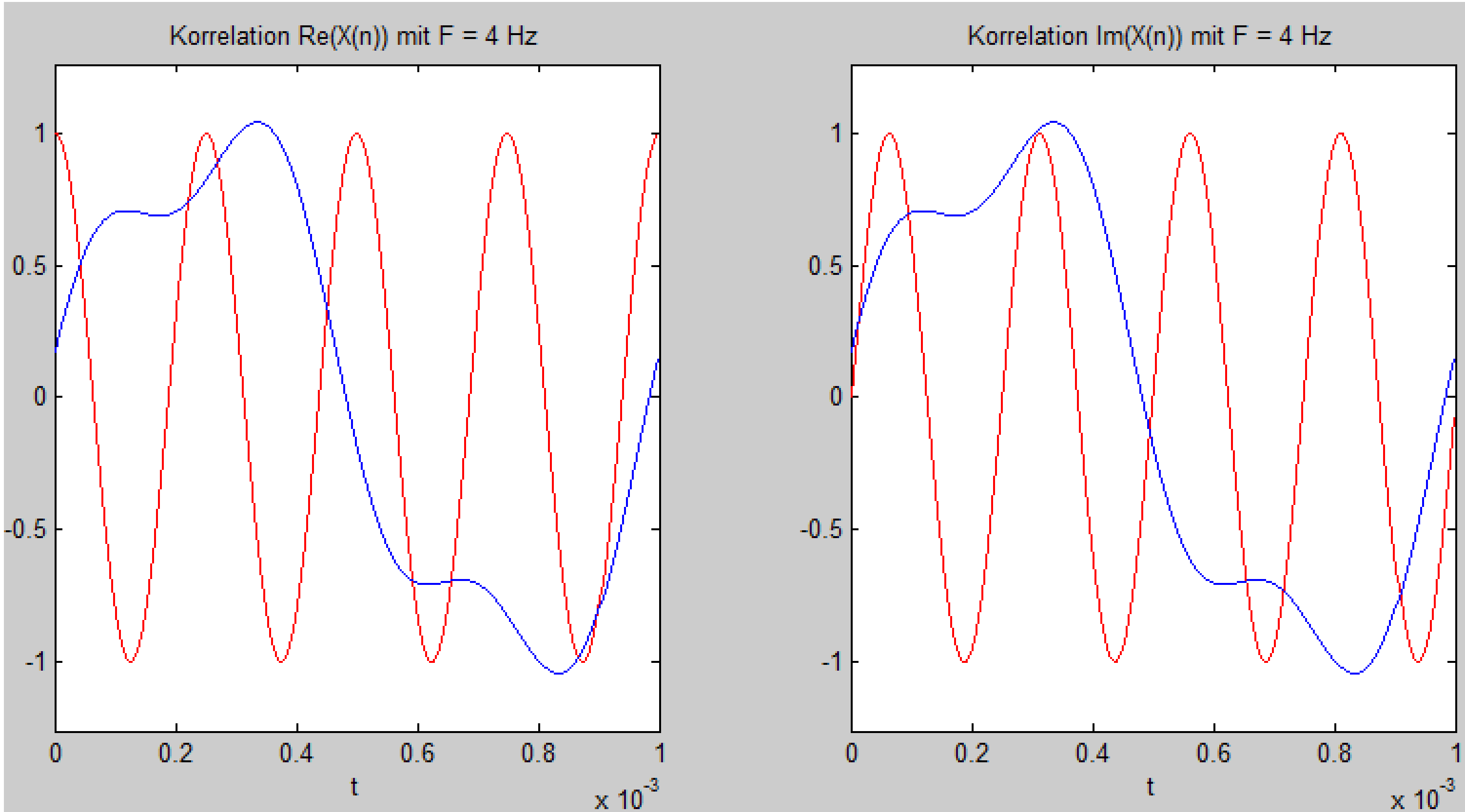
X[2] = 0 + 0j

3.3.4 – Korrelation Sinus mit f = 3 KHz und Input



$$X[3] = 0.7071 + j\,0.7071$$

3.3.5 – Korrelation Sinus mit f = 4 KHz und Input



$X[4] = 0 + 0j$

HAW HAMBURG

$$x(t) = \sin(2\,\pi 1000t) * sin(2\pi 3000t + \pi/4)$$

X[0] = 0.176
X[1] = 0.70711
X[2] = 0.82322
X[3] = 0.95711
X[4] = -0.17678
X[5] = -0.70711
X[6] = -0.82322
X[7] = -0.95711

$$\text{Frequenz} = k * \frac{Fs}{N}$$

mit Fs = 8KHz, N = 8

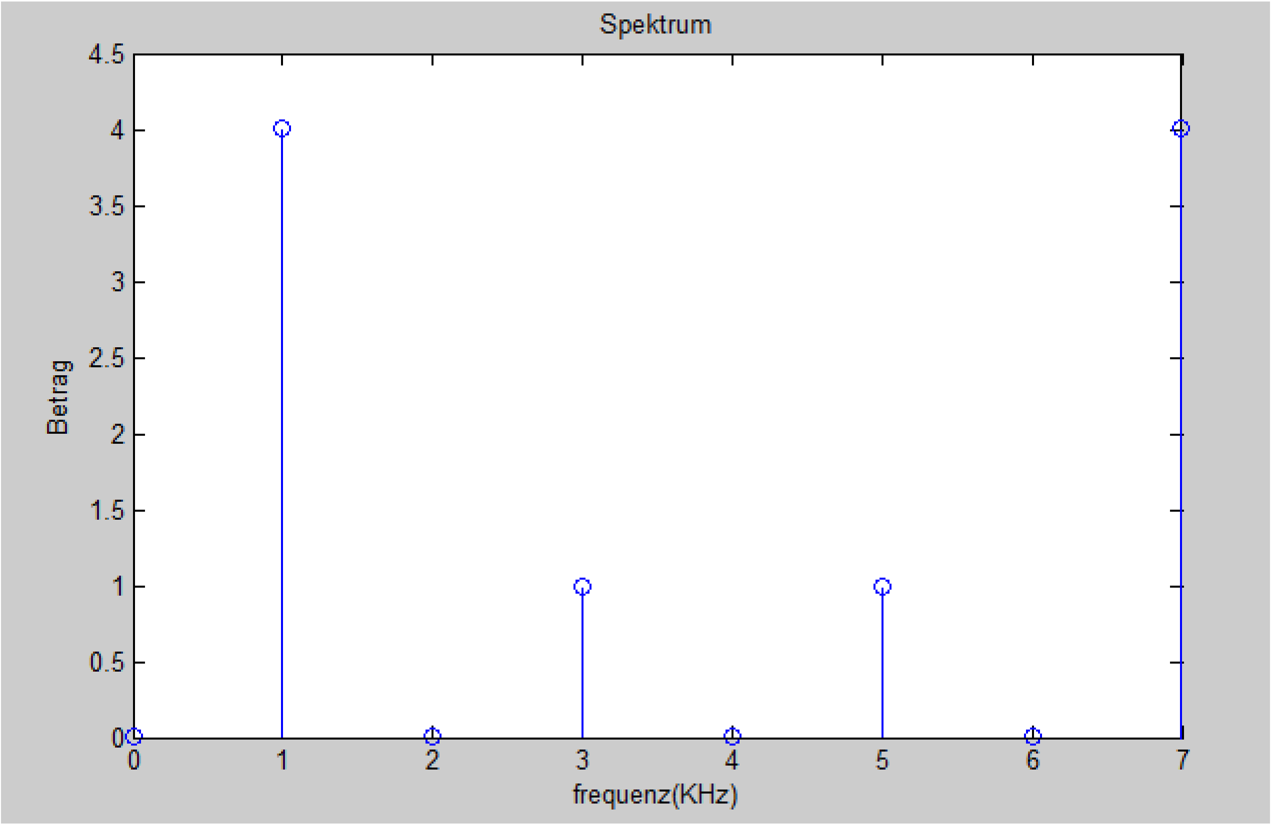
DFT

$$X[0] = 0 + j\,0 = 0$$
$$X[1] = 0 \text{ - } j\,4 = (r = 4,\ \theta = -90)$$
$$X[2] = 0 \text{ - } j\,0 = 0$$
$$X[3] = 0.7071 \text{ - } j\,0.7071 = (r = 1.\ \ \theta = -45)$$
$$X[4] = 0 + j\,0 = 0$$

Negative Frequenzen ab $f_{\text{nyquist}} = \frac{1}{2} f_{\text{abtast}}$

$$X[5] = 0.7071 + j\,0.7071 = (r = 1.\ \ \theta = 45)$$
$$X[6] = 0 + j\,0 = 0$$
$$X[7] = 0 + j\,4 = (r = 4,\ \theta = -90)$$

3.3.7 – Spektrum



0 *N/2* *N-1*

*Amplitudenverstärkung = (N/2)*A wenn Sin Real*
*Amplitudenverstärkung = N*A wenn Sin Komplex*

4-Implementierung

```
%Demo DFT
function [X] = dft(x)
Xsize = length(x);
for m=0:Xsize-1
    summ =0;
    for n=0:Xsize-1
        summ = summ+x(n+1)*(cos(2*pi*n*m/Xsize)- 1i*sin(2*pi*n*m/Xsize));
    end
    X(m+1)=summ;
end
```

```
%demo Spektrum Ausgabe
t = 0:length(X)-1;
stem(fs,abs(X),'b')
ylabel('Betrag');
xlabel('frequenz(KHz)');
title ('Spektrum')
```

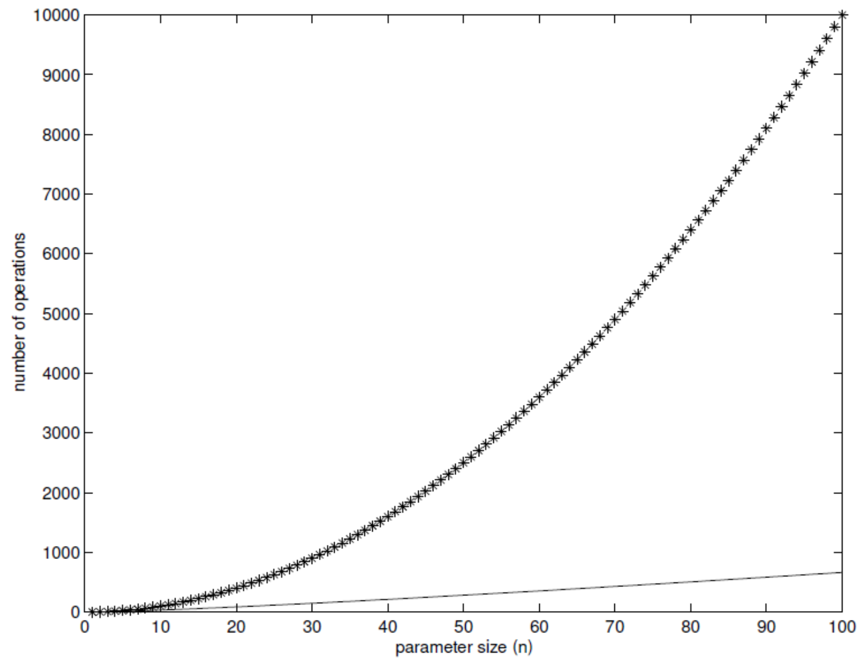


Figure 6.4: Comparing $N log_2(N)$ (line) versus N^2 (asterisks).

[Wee07]

HAW HAMBURG

Vielen Dank
für
Ihre Aufmerksamkeit

Literatur

[Mac,Voß93] Wolfgang Mackens, Heinrich Voß, Mathematik 1 für Studierende der Ingenieurwissenschaften, Aachen 1993

[Mey10] Prof. Wolfgang Meyer, System Theorie, Vorlesungsfolie, 2010 TUHH

[Roh10] Prof. Hermann Rohling, System Theorie, Vorlesungsfolie, 2010 TUHH

[Fli91] Fliege, N.: Systemtheorie. Teubner 1991

[Wee07] Michael Weeks, Digital Signal Processing using Matlab and Wavelets , 2007 Massachusetts